Jurnal Fisika Unand Vol. 8, No. 2, April 2019 ISSN 2302-8491

Analisis Solusi Persamaan Burger Sebagai Solusi Soliton Menggunakan Transformasi Hopf-Cole

Ahmad Ripai[1,*], Zulfi Abdullah[1], Mahdhivan Syafwan[2]
[1]Jurusan Fisika Universitas Andalas
[2]Jurusan Matematika Universitas Andalas
**ahmadripai2042@gmail.com*

ABSTRAK

Telah dilakukan penelitian untuk menganalisis solusi persamaan Burger dengan menggunakan transformasi Hopf-Cole. Penelitian ini dilatarbelakangi oleh perbedaan solusi yang diperoleh pada persamaan Burger saat mekanisme penyelesaian persamaan ini menggunakan transformasi Hopf-Cole dilandaskan pada transformasi Fourier dan separasi variabel (deret Fourier). Penelitian ini dilakukan dengan mencari solusi persamaan Burger menggunakan transformasi Hopf-Cole melalui mekanisme penyelesaian yang berlandaskan pada transformasi Fourier dan separasi variabel (deret Fourier). Berdasarkan analisis solusi soliton pada persamaan Burger, hanya mekanisme penyelesaian yang berlandaskan transformasi Fourier yang berhasil menemukan solusi soliton walaupun hanya stabil dalam selang waktu 0.1 s. Mekanisme penyelesaian yang berlandaskan separasi variabel (deret Fourier) menghasilkan solusi periodik berupa gelombang meluruh terhadap waktu.

Kata kunci: deret Fourier, persamaan Burger, soliton, transformasi Hopf-Cole, transformasi Fourier

ABSTRACT

Research has been carried out to analyze the Burger equation solution using the Hopf-Cole transformation. This reasearch is motivated by the difference of solutions obtained in the Burger equation between the mechanism using the Hopf-Cole transformation based on Fourier transformation and variable separation (Fourier series). This research was conducted by finding a solution to the Burger equation using Hopf-Cole transformation through a mechanism based on Fourier transformation and variable separation (Fourier series). Based on the analysis soliton solutions in the Burger equation, only the mechanism based on Fourier transformation that works in finding soliton solution, even though it is the stable only for 0.1 seconds. The mechanism based on the variable separation (Fourier series) results a periodic solution in the form of decaying waves against time.

Keywords: Fourier series, Burger equation, soliton, Hopf-Cole transformation, Fourier transformation

I. PENDAHULUAN

Soliton adalah gelombang tidak linier yang mempertahankan bentuknya ketika merambat dengan kecepatan konstan, terlokalisasi dan bersifat stabil (Drazin, 1983; Wadati, 2001). Gelombang sejenis ini sering dipelajari dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan sebagai kajian terhadap gejala alam yang bersifat tidak linier, mulai dari gejala pada skala mikro sampai pada tingkat struktur besar alam semesta. Struktur besar alam semesta yang dijelaskan melalui fenomena Black Holes merupakan kategori dari kajian soliton (Villari dkk, 2018). Kajian soliton yang lain misalnya pada gelombang air dangkal, gelombang tsunami (Hiraishi dkk, 2016) dan gelombang akustik (Zhang dkk, 2017). Untuk skala yang lebih kecil, dinamika partikel seperti proton, elektron dan neutron serta kuark termasuk kategori dari kajian soliton (Silva dkk, 2018).

Kajian tentang soliton akhir-akhir ini sangat berkembang pesat, ditandai oleh banyaknya pemanfaatan soliton dalam bidang sains dan teknologi. Dalam bidang teknologi, soliton dimanfaatkan untuk meningkatkan performa telekomunikasi optik (Zen dkk, 2002; Liu dkk, 2016), sedangkan dalam bidang sains, soliton muncul dalam kajian hidrodinamika (Wadati, 2001), zat padat dan kristal (Maugin, 2011). Namun, untuk dapat mendeskripsikan suatu soliton diperlukan analisis matematika dan fisika yang rumit (Lin, 2016; Liu dkk, 2017). Oleh karena itu, penelitian ini dilakukan untuk memberikan kajian yang lebih sederhana dalam mendeskripsikan soliton pada suatu permasalahan fisika.

Permasalahan fisika mengenai soliton pada umumnya dideskripsikan melalui persamaan matematika dalam bentuk diferensial parsial tidak linier. Terdapat banyak persamaan diferensial parsial tidak linier yang mendeskripsikan fenomena soliton seperti persamaan Korteweg de-Vries (Wadati, 2001), persamaan Burger (Chen dkk, 2016; Aksan, 2018), persamaan

Schrödinger tidak linier (Triki dan Wazwaz, 2016), persamaan medan Affine Toda (Zuevsky, 2018) dan Sine-Gordon (Zhou dkk, 2017) serta persamaan Skyrme (Giacomini dkk, 2018). Namun, pada penelitian kali ini difokuskan untuk melakukan kajian soliton pada persamaan Burger.

Persamaan Burger adalah persamaan diferensial parsial dalam model difusi-adveksi-tidak linier yang biasanya memiliki satu variabel dalam ruang satu dimensi (Pannekoucke dkk, 2018). Persamaan ini penting dipelajari karena memiliki banyak penerapan seperti pada kajian adveksi dan turbulensi satu dimensi (Pannekoucke dkk, 2018). Selain itu, persamaan ini juga diterapkan dalam mempelajari kosmologi, dinamika gas dan pada kajian mekanika fluida (Bonkile dkk, 2018).

Penelitian tentang persamaan Burger pada umumnya berkaitan dengan cara memperoleh solusi dari persamaan Burger itu sendiri. Persamaan Burger merupakan bentuk khusus persamaan yang dapat diperoleh dari sistem persamaan Navier-Stokes, sedangkan solusi dari persamaan bentuk umumnya sangat sulit untuk diperoleh, sehingga dikembangkan beberapa metode pendekatan dalam menyelesaikan persamaan tersebut. Secara analitik, metode pendekatan yang umum dilakukan berupa pendekatan linier, yaitu dengan melakukan transformasi persamaan Burger menjadi suatu persamaan linier sehingga lebih mudah dicari solusinya. Salah satu transformasi yang digunakan adalah transformasi Hopf-Cole (Chen dkk, 2016; Aksan, 2018).

Transformasi Hopf-Cole untuk mencari solusi persamaan Burger sebelumnya telah diterapkan oleh Chen dkk pada tahun 2016 dan Aksan pada tahun 2018. Chen dkk (2016) menyelesaikan persamaan Burger dengan mengubahnya ke bentuk persamaan difusi linier menggunakan transformasi Hopf-Cole melalui beberapa tahapan pengerjaan yang dilandaskan pada transformasi Fourier. Chen dkk (2016) dapat menemukan solusi soliton dari persamaan Burger. Aksan (2018), selanjutnya menggunakan urutan pengerjaan yang hampir serupa dengan Chen dkk (2016). Alih-alih menggunakan transformasi Fourier, Aksan (2018) menggunakan metode separasi variabel (deret Fourier). Berdasarkan mekanisme penyelesaian ini, Aksan (2018) tidak dapat memperlihatkan solusi soliton pada persamaan Burger tersebut.

Pada penelitian kali ini, dilakukan kembali analisis penyelesaian persamaan Burger menggunakan transformasi Hopf-Cole berdasarkan mekanisme yang dilandaskan pada transformasi Fourier oleh Chen dkk (2016) dan separasi variabel (deret Fourier) oleh Aksan (2018). Hal ini dilakukan untuk melihat bagaimana mekanisme penyelesaian yang berlandaskan transformasi Fourier oleh Chen dkk (2016) mampu menghasilkan solusi soliton pada persamaan Burger, sedangkan mekanisme dengan berlandaskan separasi variabel (deret Fourier) oleh Aksan (2018) tidak mampu memperlihatkan solusi soliton pada persamaan Burger tersebut.

II. METODE

Analisis solusi persamaan Burger menggunakan transformasi Hopf-Cole dilakukan secara teoritis, yaitu dengan mempertimbangkan bentuk persamaan Burger sebagai berikut:

$$u_t + uu_x = \varepsilon\, u_{xx}\,, \tag{1}$$

dimana $\varepsilon > 0$ *equivalen* dengan konstanta viskositas, t adalah variabel waktu, x adalah variabel bebas dan u adalah variabel terikat yang tergantung pada x dan t. Persamaan (1) merupakan bentuk persamaan Burger yang dapat diperoleh dari proses penyederhanaan sistem persamaan Navier-Stokes dibawah ini

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{2.a}$$

$$\left(\rho \mathbf{v}\right)_t + \rho\left(\nabla \mathbf{v}\mathbf{v}\right) + \nabla p - \mu \nabla^2 \mathbf{v} = 0, \tag{2.b}$$

dengan ρ adalah fungsi skalar massa jenis fluida, μ adalah fungsi skalar kekentalan (*viscosity*) fluida, p adalah fungsi skalar tekanan yang bergantung pada variabel x, y, z dan $\boldsymbol{v}$ adalah vektor kecepatan dalam arah sumbu x, y dan z. Persamaan (2) merupakan sistem persamaan Navier-Stokes tanpa melibatkan faktor gravitasi dan gaya *Coriolis*. Melalui proses beberapa operasi matematika, yaitu dengan mengasumsikan gardien tekanan bernilai nol dan menyatakan hubungan $\varepsilon = \dfrac{\mu}{\rho}$ dan $u = \mathbf{v}_x$, sistem Persamaan (2) disederhanakan menjadi Persamaan Burger.

Adapun solusi persamaan Burger menggunakan transfromasi Hopf-Cole diperoleh melalui dua mekanisme, yaitu:

Solusi persamaan Burger melalui mekanisme separasi variabel (deret Fourier)

Solusi persamaan Burger melalui mekanisme transformasi Fourier

2.1 Solusi Persamaan Burger Melalui Mekanisme Separasi Variabel (Deret Fourier)

Solusi persamaan Burger (1) melalui mekanisme penyelesaian yang dilandaskan pada metode separasi variabel (deret Fourier) , diperoleh dengan mentransformasikan persamaan Burger (1) ke bentuk persamaan difusi linier berikut:

$$\theta_t = \varepsilon\, \theta_{xx}. \tag{3}$$

Persamaan (3) merupakan bentuk transformasi Persamaan Burger (1) menggunakan transformasi Hopf-Cole. Adapun bentuk dari transformasi Hopf-Cole adalah

$$u(x,t) = -2\varepsilon \frac{\theta_x}{\theta}. \tag{4}$$

Setelah Persamaan Burger (1) ditransformasikan menjadi Persamaan (3), Persamaan (3) kemudian diselesaikan menggunakan metode separasi variabel (deret Fourier) hingga diperoleh solusi Persamaan (3) tersebut. Solusi Persamaan (3) yang diperoleh disubtitusikan kembali ke bentuk hubungan Persamaan Burger (1) dengan Persamaan (3) melalui Transformasi Hopf-Cole (4), hal ini bertujuan untuk menyatakan bentuk solusi Persamaan Burger (1) melalui mekanisme penyelesaian yang dilandaskan pada separasi variabel (deret Fourier).

2.2 Solusi Persamaan Burger Melalui Mekanisme Transformasi Fourier

Secara garis besar, solusi persamaan Burger (1) melalui mekanisme penyelesaian ini diperoleh menggunakan proses yang sama pada point 2.1, yaitu mentransformasikan persamaan Burger (1) kebentuk Persamaan (3). Akan tetapi, pada mekanisme ini solusi Persamaan (3) diselesaikan dengan metode transformasi Fourier. Solusi Persamaan (3) yang diperoleh disubtitusikan kembali kebentuk hubungan Persamaan Burger (1) dengan Persamaan (3) melalui Transformasi Hopf-Cole (4), hal ini juga bertujuan untuk menyatakan bentuk solusi Persamaan Burger (1) melalui mekanisme penyelesaian yang dilandaskan pada transformasi Fourier.

Setelah diperoleh bentuk-bentuk solusi dari persamaan Burger (1) berdasarkan langkah-langkah diatas, solusi-solusi ini kemudian divisualisasikan untuk melihat bagaimana profil gelombang yang dihasilkan dari solusi-solusi tersebut.

III. HASIL DAN DISKUSI

Setelah dilakukan perhitungan secara matematis, diperoleh bentuk solusi persamaan Burger (1) menggunakan Transformasi Hopf-Cole (4) melalui mekanisme penyelesaian yang dilandaskan pada metode separasi variabel (deret Fourier) adalah

$$u(x,t) = 2\pi\varepsilon \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2\pi^2\varepsilon t)\; n\, \sin(n\pi x)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2\pi^2\varepsilon t)\, \cos(n\pi x)}, \tag{5}$$

dengan

$$a_0 = \int_0^1 \exp\left\{-(2\pi\varepsilon)^{-1}\left[1-\cos(nx)\right]\right\} dx, \tag{6}$$

dan

$$a_n = 2\int_0^1 \exp\left\{-(2\pi\varepsilon)^{-1}\left[1-\cos(nx)\right]\right\}\cos(n\pi x)\, dx,\;\; n=1,\,2,\cdots, \tag{7}$$

sedangkan menggunakan mekanisme penyelesaian yang dilandaskan pada transformasi Fourier diperoleh bentuk solusi persamaan Burger (1) sebagai berikut:

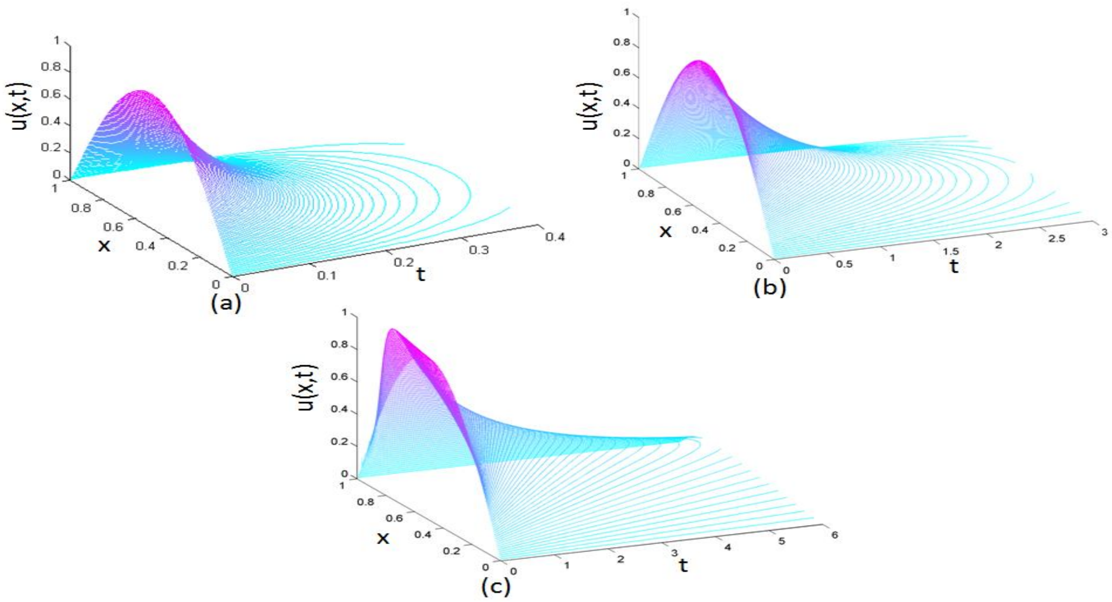
$$u(x,t) = -\frac{x}{2\pi t}\left[1+\tanh\left(\xi/2\right)\right], \tag{8}$$

dengan $\xi = -\dfrac{x^2}{4\pi\varepsilon t} - \ln(4\pi t)$.

Perbedaan yang signifikan diperlihatkan oleh kedua solusi diatas, saat mekanisme penyelesaian Persamaan Burger (1) dilandaskan pada metode separasi variabel (deret Fourier) solusi yang diperoleh berupa solusi untuk gelombang berdiri yang bersifat periodik (bersifat non-lokal). Untuk mekanisme penyelesaian yang dilandaskan pada transformasi Fourier diperoleh solusi untuk gelombang yang tidak periodik (bersifat lokal). Selain itu, kedua solusi ini dipengurahi oleh faktor disipatif berupa ε, dimana nilai ε merupakan penggambaran dari nilai viskositas berdasarkan penyederhaan sistem Persamaan Navier-Stokes (2) memenuhi hubungan $\varepsilon = \dfrac{\mu}{\rho}$. Adapun bentuk visualisasi dari kedua solusi ini adalah sebagai berikut:

3.1 Visualisasi Solusi Persamaan Burger dengan Mekanisme Separasi Variabel (deret Fourier)

Pada pembahasan sebelumnya telah diperoleh solusi untuk persamaan Burger (1) dengan mekanisme yang dilandaskan pada separasi variabel (deret Fourier) seperti ditunjukkan pada Persamaan (5). Adapun bentuk visualisasi dari solusi persamaan ini diperlihatkan sebagai berikut:

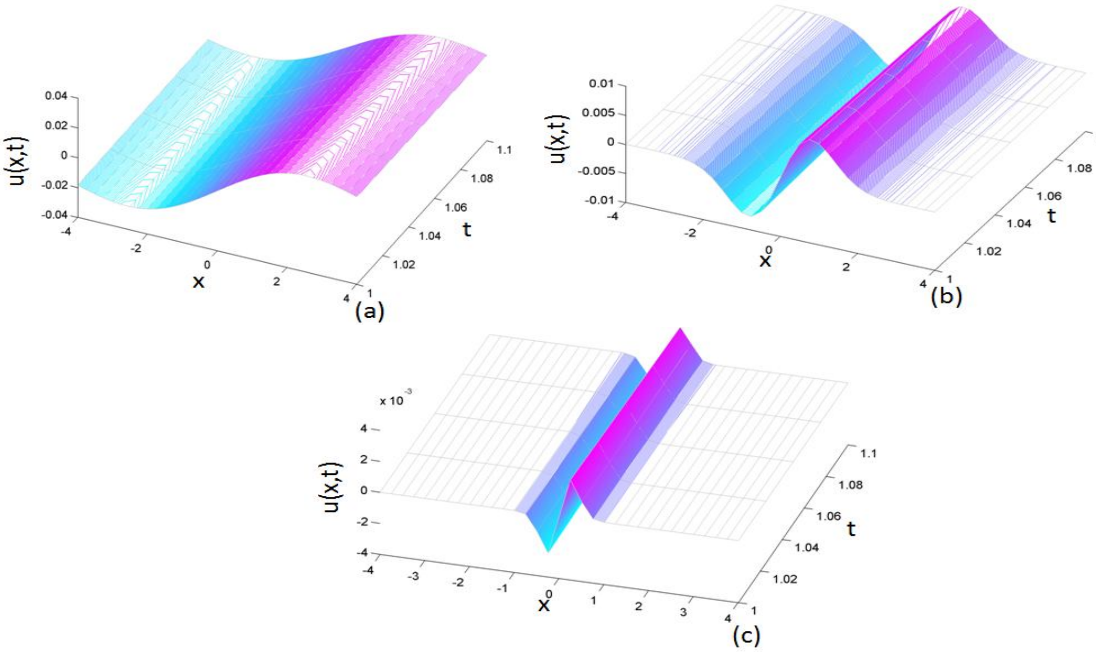


Gambar 2 Visualisasi solusi persamaan Burger (5) dengan nilai masukan $N=100$ dan Δt=0,01s (a) ε = 1, (b) ε = 0,1 dan (c) ε = 0,01

Pada Gambar 1, ditunjukkan bahwa solusi Persamaan Burger (5) berdasarkan nilai masukan yang diberikan adalah pulsa gelombang berdiri yang tidak konsisten dalam menjaga ketetapan bentuknya. Dikatakan demikian, karena bentuk pulsa gelombang yang dihasilkan dari solusi persamaan Burger ini meluruh terhadap waktu, hingga pada akhirnya menghilang pada rentang waktu tertentu. Secara matematis, hal ini disebabkan karena solusi Persamaan Burger (5) mengandung fungsi eksponensial, dimana fungsi eksponensial dalam menggambarkan suatu solusi persamaan selalu menyebabkan peluruhan pada solusi persamaan tersebut, sehingga sering didengar istilah peluruhan secara eksponensial terjadi pada suatu solusi persamaan. Namun bila ditinjau secara fisis, sifat meluruh ini disebabkan karena berdasarkan penyederhanaan sistem Persamaan Navier-Stokes (2) diasumsikan nilai gradien tekanan sama dengan nol, sehingga memungkinkan bentuk solusi yang diperoleh dari persamaan Burger ini berupa gelombang yang meluruh terhadap waktu. Selain itu pada Gambar 1, terlihat bahwa dengan memberikan nilai viskositas (ε) yang berbeda menyebabkan pergeseran pada puncak pulsa gelombang yang diperoleh, sehingga menyebabkan pulsa gelombang yang diperoleh terlihat melengkung berdasarkan variasi nilai viskositas (ε) yang diberikan. Hal ini disebabkan karena, adanya pengaruh gaya adhesi dan kohesi terhadap profil gelombang yang dihasilkan akibat nilai viskositas (ε).

3.2 Visualisasi Solusi Persamaan Burger dengan Mekanisme Transformasi Fourier

Solusi persamaan Burger dengan mekanisme yang dilandaskan pada transformasi Fourier sebelumnya ditunjukkan pada Persamaan (8). Adapun bentuk visualisasi dari solusi persamaan Burger ini adalah sebagai berikut:

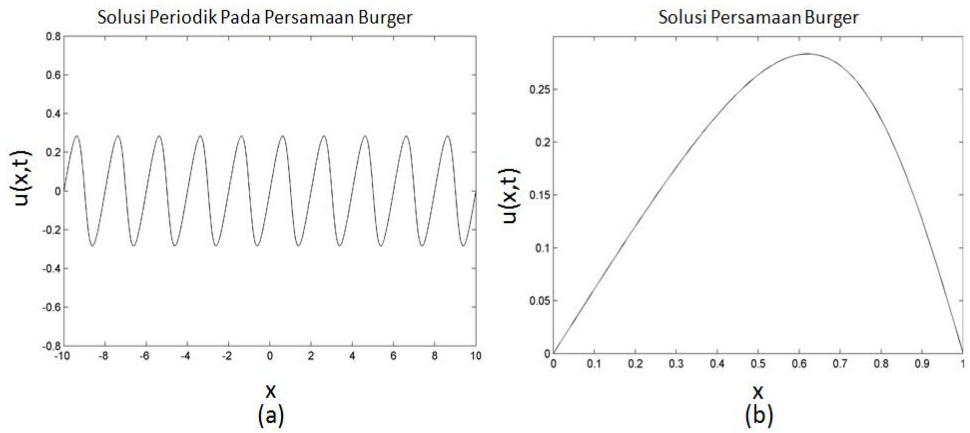


Gambar 2 Visualisasi solusi persamaan Burger (8) dengan nilai masukan *N=100* dan Δt=0,01 s (a) ε = 1, (b) ε = 0,1dan (c) ε = 0,01

Pada Gambar 2, ditunjukkan bahwa solusi Persamaan Burger (8) berdasarkan nilai masukan yang diberikan berupa (a) kink soliton, yaitu bentuk gelombang yang mampu mempertahankan ketetapan bentuknya dalam selang waktu tertentu dan mengalami kenaikan dalam periode 2π. (b) soliton *twisted*, yaitu bentuk gelombang soliton yang memiliki dua puncak gelombang (maksimum dan minimum). Sementara (c) gelombang soliton dengan jenis konfigurasi soliton *twisted* yang lebih diskrit. Selain itu pada Gambar 2, terlihatkan bahwa soliton yang dihasilkan hanya stabil dalam selang watu 0.1 sekon. Untuk melihat bagaimana kedua solusi menghasilkan bentuk gelombang yang berbeda berikut dipaparkan grafik sederhana tentang analisis lebih jauh dari kedua solusi ini.

Grafik solusi periodik dari persamaan Burger

Grafik ini dibuat berdasarkan solusi persamaan Burger (5). Adapun bentuk grafik yang dihasilkan dari solusi persamaan ini diperlihatkan sebagai berikut:

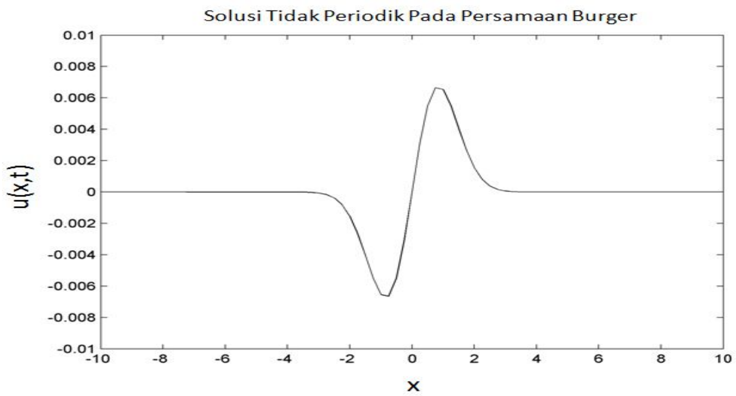


Gambar 3 (a) Grafik solusi periodik pada Persamaan Burger (5) dan (b) Grafik solusi Persamaan Burger (5)

Pada Gambar 3, terlihat bahwa solusi Persamaan Burger (5) sebenarnya merupakan solusi gelombang periodik (bersifat non-lokal) yang dibatasi pada interval $0 < x < 1$. Dari uraian ini, diambil pernyataan bahwa dengan mekanisme penyelesaian yang dilandaskan pada separasi variabel (deret Fourier) solusi yang dihasilkan merupakan solusi gelombang yang bersifat periodik (non-lokal) namun saat dibatasi untuk interval $0 < x < 1$, terlihat sebagai bentuk pulsa gelombang meluruh seperti yang telah dijelaskan sebelumnya.

Grafik solusi tidak periodik dari persamaan Burger

Grafik ini dibuat berdasarkan solusi persamaan Burger (8). Adapun bentuk grafik yang



dihasilkan dari solusi persamaan ini diperlihatkan sebagi berikut:

Gambar 4 Grafik solusi tidak periodik pada Persamaan Burger (8)

Pada Gambar 4, terlihat bahwa solusi Persamaan Burger (8) merupakan solusi gelombang tidak periodik (bersifat lokal) untuk setiap interval *x*. Dari uraian ini, diambil pernyataan bahwa dengan mekanisme penyelesaian yang dilandaskan pada transformasi Fourier solusi yang dihasilkan adalah solusi gelombang tidak periodik (bersifat lokal). Sebelumnya, solusi ini memiliki bentuk tetap dengan selang waktu (*t*) tertentu, dimana saat solusi ini memperlihatkan bentuk yang tetap untuk selang waktu (*t*) tertentu, saat itu pula solusi ini memperlihatkan karakteristik soliton pada persamaan Burger.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan analisis yang dilakukan hanya mekanisme yang berlandaskan transformasi Fourier yang berhasil menemukan solusi soliton dari persamaan Burger walaupun hanya stabil dalam selang waktu *0.1s*. Mekanisme yang dilandaskan pada separasi variabel (deret Fourier) sama sekali tidak berhasil mendapatkan solusi soliton dari persamaan Burger tersebut hanya berupa gelombang meluruh terhadap waktu. Hal ini diperoleh karena, soliton merupakan fungsi tidak periodik (bersifat lokal) sehingga peluang menemukannya lebih cocok menggunakan transformasi Fourier. Untuk mekanisme dengan separasi variabel (deret Fourier) hanya cocok untuk suatu fungsi yang periodik (bersifat non-lokal) atau bukan soliton.

DAFTAR PUSTAKA

Aksan, E. N., Thermal Science, **22**, 195-202 (2018).
Bonkile, M. P., Journal of Physics, **69**, 1-21 (2018).
Chen, Y., Fan, E. dan Yuen, M., Physics Letter A, 9-14 (2016).
Drazin, P. G., Solitons: An Introduction, (Cambridge University Press, New York, 1983).
Giacomini, A., Lagos, M. dan Vera, A., Physics Letter B, 193-199 (2018).
Hiraishi, T., Azuma, R., Mori, N., Yasuda, T. dan Mase, H., Journal of Energy and Engineering, **10**, 166-172 (2016).
Lin, B., App.Math. and Phy., **4**, 1600-1609 (2016).
Liu, W., Zhang, Y., Pang, L., Hao, Y., Ma, G. dan Lei, M., Nonlinear Dyn, **178**, 1-5 (2016).
Liu, W., Yang, C., Liu, M., Yu, W., Zhang, Y. dan Lei, M., Physical Review E, 1-5 (2017).
Maugin, G. A., Mechanics Research Communications, **38**, 341-349 (2011).
Pannekoucke, O., Bocquet M. dan Ménard, R., Nonlinear and Processes Geophysics, **25**, 481-495 (2018).
Silva, A., Urbano, D. dan Kim, H. C., Progress of Theoretical and Experimental Physics, **2018**,1-21 (2018).
Triki, H. dan Wazwaz, A.M., Romanian Journal of Physics, **61**, 360-366 (2016).
Villari, L. D. M., Marcucci, G., Braidotti, M. C. dan Conti, C., Journal of Physics Communications, **2**, 1-10 (2018).
Wadati, M., Journal of Physics, Pramana, **57**, 841-847 (2001).
Zen, F. D., Hidayat, W. dan Shiddiq, R., Kontribusi Fisika Indonesia, **13**, 114-120 (2002).
Zhang, J., Garcia, V. R., Theocharis, G., Richoux, O., Achilleos, V. dan Frantzeskakis, D. J., Physical Review E,1-11 (2017).
Zhou, Q., Ekici, M., Mirzazadeh, M. dan Sonmezoglu, A., Journal of Modren Optics, **64**, 1677-1682 (2017).
Zuevsky, A., Linear Algebra and its Applications, **542**, 149-161 (2018).