

# PELABELAN TOTAL TITIK AJAIB PADA COMPLETE GRAPH $K_n$ DENGAN $n$ GENAP

Novi Irawati, Robertus Heri

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro Semarang

## ABSTRACT

Let  $G$  be a graph with vertex set  $V = V(G)$  and edge set  $E = E(G)$  and let  $e = |E(G)|$  and  $v = |V(G)|$ . A vertex-magic total labeling of a graph  $G(V, E)$  is a bijection map  $\lambda$  from  $V \cup E$  to the integers  $\{1, 2, 3, \dots, v + e\}$  such that there exists a positive integer  $k$  satisfying  $\lambda(x) + \sum \lambda(xy) = k$ , for every  $x \in V$ . Then  $k$  is called a magic constant and  $G$  is called vertex-magic total graph. In [5] have discussed vertex-magic labeling of complete graph  $K_n$  for odd, now in this article, we consider a vertex-magic labeling of complete graph  $K_n$  for even with use an algorithm which is composed of a modified construction magic square algorithm.

**Keywords** : vertex-magic total labeling, Complete graph  $K_n$ , magic square

## 1. PENDAHULUAN

Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Pelabelan merupakan pemetaan injektif yang memetakan unsur himpunan titik dan atau unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi. Pelabelan titik dan sisi dari graf bisa dilakukan dengan banyak cara. Salah satu cara yang bisa digunakan adalah melabelinya dengan bilangan. Ada banyak jenis pelabelan graf yang telah dikembangkan, diantaranya adalah pelabelan graceful, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pengembangan pelabelan ajaib, dikenal pula pelabelan total titik-ajaib, pelabelan total titik ajaib super, pelabelan total sisi-ajaib, dan pelabelan total sisi-ajaib super.

Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, dan juga desain circuit gabungan pada komponen elektronik. Untuk mengantisipasi kedatangan peluru kendali dari pasukan musuh dalam perang dunia modern, peluru kendali ini dapat di deteksi dengan menggunakan pendeteksi sinyal radar, sehingga dapat dilakukan antisipasi secepat mungkin. Desain penting dari kode nonperiodik untuk sinyal radar dan peluru kendali ini ekuivalen dengan pelabelan pada complete graph, dimana setiap titik yang ada dihubungkan dengan satu sisi yang mempunyai label yang selalu berbeda. Label sisi ini menggambarkan jarak antar titik, sedangkan label titiknya merupakan posisi pada saat sinyal dikirimkan.

Pada artikel ini, penulis melakukan kajian pelabelan total titik ajaib (vertex magic total labeling) pada salah satu subkelas graf reguler yaitu complete graph  $K_n$ , dimana salah satu aplikasinya digunakan dalam desain penting dari kode nonperiodik untuk sinyal radar dan peluru kendali.

## 2. MASALAH

Permasalahan yang akan dibahas dalam artikel ini adalah bagaimana memberikan pelabelan total titik ajaib pada complete graph  $K_n$ , untuk  $n$  genap, dengan dasar pelabelan pada complete graph  $K_n$ , dan pelabelan bipartite complete graph  $K_{n,n}$ .

### 3. PEMBAHASAN

Untuk menyusun sebuah pelabelan pelabelan total titik ajaib pada *complete graph*  $K_m$  dimana  $m$  genap digunakan pelabelan total titik ajaib pada *complete graph*  $K_n$  dimana  $n$  ganjil. Untuk menyusun pelabelan total titik ajaib pada *complete graph*  $K_m$  dimana  $m$  genap, dibagi menjadi tiga kasus yaitu dimana  $m \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $m \equiv 4 \pmod{8}$  dan  $m \equiv 0 \pmod{8}$ . Namun dalam artikel ini hanya akan dibahas untuk  $m \equiv 2 \pmod{4}$  dan  $m \equiv 4 \pmod{8}$  saja.

#### 3.1 Pelabelan total titik ajaib pada *complete graph* $K_m$ , $m \equiv 2 \pmod{4}$

##### **Teorema 3.3 :**

Terdapat pelabelan total titik ajaib pada *complete graph*  $K_m$  dengan  $m$  genap untuk semua  $m \equiv 2 \pmod{4}$ , dengan  $m > 2$

##### **Bukti:**

Untuk mempermudah misalkan  $n = m/2$ . Cara pemberian labelnya menggunakan persegi ajaib orde  $n$  dan pelabelan total titik ajaib *complete graph*  $K_n$  yang telah dibahas sebelumnya.

Ide pokok dalam pelabelan total titik ajaib *complete graph*  $K_m$  untuk semua  $m \equiv 2 \pmod{4}$ , untuk  $m > 2$  adalah dengan menggunakan twin faktoriasi, yaitu dengan melihat bahwa *complete graph*  $K_m$  ini merupakan perpaduan dari dua *complete graph*  $n$  dan *bipartite complete graph*  $n$ ,  $K_m = K_n \cup K_n \cup K_{n,n}$ . Dalam pelabelan *complete graph*  $K_m$  digunakan barisan angka mulai dari 1 sampai  $n + \frac{n(n-1)}{2}$ .

Untuk sampai ke pelabelan graf, maka angka-angka tersebut di bagi dalam lima himpunan disjoint sebagai berikut,

$$S_1 = \bigcup_{i=1}^{\frac{(n-1)}{2}} \{(2i+1)n+1, (2i+1)n+2, \dots, (2i+2)n\} \cup \{1, 2, \dots, n\}$$

$$S_2 = \bigcup_{i=2}^{\frac{(n-1)}{2}} \{2in+1, 2in+2, \dots, (2i+1)n\} \cup \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$$

$$S_3 = \{2n+1, 2n+2, \dots, 3n\}$$

$$S_4 = \{n^2+n+1, n^2+n+2, \dots, n^2+2n\}$$

$$S_5 = \{n^2+1, n^2+2, \dots, n^2+n\} \cup \{n^2+2n+1, n^2+2n+2, \dots, 2n^2+n\}$$

Barisan  $S_1$ ,  $S_4$  dan  $S_2$ ,  $S_3$  berturut turut digunakan untuk membentuk label  $L_1$  dan  $L_2$ . Elemen  $S_1$  dan  $S_4$  di gunakan untuk pelabelan  $L_1$ , dimana elemen  $S_1$  untuk pelabelan sisi dan elemen  $S_4$  untuk pelabelan titik. Sedangkan elemen  $S_2$  dan  $S_3$  di gunakan untuk pelabelan  $L_2$  untuk  $K_n$  yang lainnya, dimana elemen  $S_2$  untuk pelabelan sisi dan elemen  $S_3$  untuk pelabelan titik. Barisan  $S_5$  digunakan untuk membentuk label sisi *bipartite complete graph*  $K_{n,n}$ . □

Untuk lebih jelasnya diberikan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Misalkan  $n = m/2$  dengan  $n$  adalah bilangan ganjil, cari pelabelan total titik ajaib *complete graph*  $K_n$  dengan  $n$  ganjil yang selanjutnya dinotasikan dengan  $L$  dan persegi ajaib dengan orde  $n$  yang dinotasikan dengan  $P$ .
2. Ganti elemen sisi dan titik pada  $L$  berturut turut dengan  $S_1$  dan  $S_4$  sehingga menghasilkan  $L_1$  yang merupakan pelabelan untuk  $K_n$ .
3. Ganti elemen sisi dan titik pada  $L$  berturut turut dengan  $S_2$  dan  $S_3$  sehingga menghasilkan  $L_2$  yang merupakan pelabelan untuk  $K_n$  yang lainnya.

4. Ganti elemen elemen pada persegi ajaib ber-orde  $n$  dengan  $S_5$  sehingga menghasilkan  $P_1$  yang merupakan pelabelan untuk sisi *bipartite complete graph*  $K_{n,n}$ .
5. Lakukan transpose terhadap  $P_1$  sehingga menghasilkan  $P_2$ .
6. Susun elemen  $L_1, L_2, P_1$  dan  $P_2$  sebagai berikut  $\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ P_1 & P_2 \end{bmatrix}$  yang merupakan pelabelan pada graf  $K_m$ , dimana  $m \equiv 2 \pmod 4$ .

Dalam kasus ini pelabelan graf disebut sebagai pelabelan total titik ajaib jika nilai konstanta ajaibnya adalah  $\frac{8n^3 + 6n^2 - 2n}{4}$

**Bukti:**

Untuk membuat pelabelan *complete graph*  $K_m$  dengan  $m$  adalah bilangan genap yang mana  $n = m/2$  pada dasarnya adalah menggunakan persegi ajaib orde  $n$  dan pelabelan *complete graph*  $K_n$  dengan  $n$  adalah bilangan ganjil. Dengan demikian maka perhitungan konstanta ajaibnya pun berdasarkan perhitungan konstanta ajaib dari persegi ajaib orde  $n$  dan pelabelan *complete graph*  $K_n$  dengan  $n$  adalah bilangan ganjil.

Dari hasil sebelumnya telah diketahui bahwa konstanta ajaib  $K_n$  adalah  $k = \frac{n^3 + 3n}{4}$ , dan konstanta ajaib dari persegi ajaib adalah

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n^2 - 1)$$

Sedangkan pelabelan total titik ajaib pada kasus ini memiliki susunan  $\begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ P_1 & P_1^T \end{bmatrix}$ , maka konstanta ajaibnya adalah jumlah dari konstanta ajaib  $L_1$  dan  $P_1$  atau  $L_2$  dan  $P_1^T$ . sedemikian sehingga dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} k &= 3 \left( \frac{1}{2}n(n^2 - 1) \right) + (n - 2)n + 2 \left( \frac{n^3 + 3n}{4} \right) + \frac{(n - 3)n}{2} \\ &= \frac{3n^3 + 3n}{2} + (n^2 - 2n) + \frac{2n^3 + 6n}{4} + \frac{n^2 - 3n}{2} \\ &= \frac{6n^3 + 6n + 4n^2 - 8n + 2n^3 + 6n + 2n^2 - 6n}{4} \\ &= \frac{8n^3 + 6n^2 - 2n}{4} \quad \square \end{aligned}$$

**Contoh :**

Sebagai ilustrasi diberikan cara pelabelan total titik ajaib *complete graph*  $K_6$ . Misalkan  $n = m/2$ , maka  $n$  adalah bilangan ganjil 3. Dari contoh sebelumnya diketahui pelabelan total titik ajaib *complete graph*  $K_3$  sebagai berikut

1	4	3	2
2	3	5	1
3	2	1	6
<i>i/j</i>	1	2	3

Gambar 1 Tabel penyusunan pelabelan total titik ajaib  $K_3$

Dengan memindahkan elemen diagonal ke baris pertama, maka diperoleh tabel L sebagai berikut,

Label titik	4	5	6
Label sisi	3	3	2
	2	1	1

Gambar 2 Tabel pelabelan total titik ajaib *complete graph*  $K_3$

Persegi ajaib  $P$  dengan orde 3 dengan menggunakan metode 4 diketahui sebagai berikut,

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Gambar 3 Persegi ajaib orde 3

Dari  $L$ ,  $L_1$  dibentuk dengan menggunakan  $S_1$  dan  $S_4$  pada tabel  $L$ , dengan  $S_1 = \{1,2,3\}$  dan  $S_4 = \{13,14,15\}$ . Di dapatkan tabel  $L_1$  dibawah

Label titik	13	14	15
Label sisi	3	3	2
	2	1	1

Gambar 4 Tabel  $L_1$

Serupa dengan  $L_1$ ,  $L_2$  dibentuk dengan menggunakan  $S_2$  dan  $S_3$  pada tabel  $L$ , dengan  $S_2 = \{4,5,6\}$  dan  $S_3 = \{7,8,9\}$ . Di dapatkan tabel  $L_2$  dibawah

Label titik	7	8	9
Label sisi	6	6	5
	5	4	4

Gambar 5 Tabel  $L_2$

Dengan  $P$  persegi ajaib orde 3 diatas dan diketahui  $S_5 = \{10,11,12,16,17,18,19,20,21\}$  akan dibentuk label  $P_1$  dan  $P_2$ . Label  $P_1$  dibentuk dengan mengganti elemen tabel  $P$  dengan  $S_5$  dengan dasar algoritma pembentukan persegi ajaib ordo 3 dan  $P_2$  merupakan transpose tabel  $P_1$ .

16	21	11
12	17	19
20	10	18

16	12	20
21	17	10
11	19	18

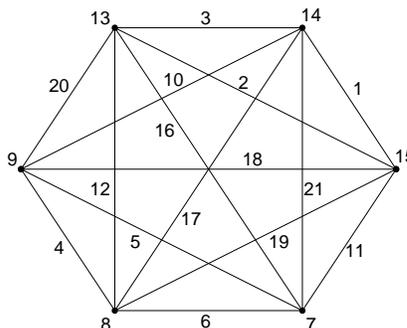
Gambar 6 Tabel  $P_1$  dan  $P_2$

Dari table  $L_1, L_2, P_1$  dan  $P_2$  diperoleh tabel pelabelan total titik ajaib graf complete  $K_6$ .

13	14	15	7	8	9
3	3	2	6	6	5
2	1	1	5	4	4
16	21	11	16	12	20
12	17	19	21	17	10
20	10	18	11	19	18

Gambar 7 Tabel pelabelan total titik ajaib complete graph  $K_6$

Penggambaran pelabelan total titik ajaib complete graph  $K_6$  diberikan pada gambar dibawah ini.



Gambar 8 Pelabelan total titik ajaib complete graph  $K_6$

### 3.2 Pelabelan total titik ajaib pada *complete graph* $K_m, m \equiv 4 \pmod 8$

#### Theorema 3.4 :

Terdapat pelabelan total titik ajaib pada *complete graph*  $K_m$ , untuk semua  $m \equiv 4 \pmod 8$ , dengan  $m > 8$

#### Bukti:

Dalam konstruksi pelabelan total titik ajaib untuk  $K_m$  untuk  $m \equiv 4 \pmod 8$  menggunakan persegi ajaib orde  $m/4$ . Misalkan  $n = m/4$ . Cara pelabelannya menggunakan persegi ajaib orde  $n$  dan pelabelan total titik ajaib *complete graph*  $K_n$  yang telah dibahas sebelumnya.

Ide pokok dalam konstruksi pelabelan total titik ajaib dari  $K_m, m \equiv 4 \pmod 8$  adalah dengan merepresentasikan *complete graph*  $K_m$  sebagai perpaduan dari empat *complete graph*  $n$ , *bipartite complete graph*  $n$  dan *bipartite complete graph*  $2n$ ,  $K_m = K_n \cup K_n \cup K_n \cup K_n \cup K_{n,n} \cup K_{n,n} \cup K_{2n,2n}$ . Hal ini diperlukan untuk memetakan titik dan sisi dalam graf yang lebih kecil kedalam barisan angka 1 sampai  $n + \frac{n(n-1)}{2}$ . Yang selanjutnya dilakukan partisi integer 1 sampai  $n + \frac{n(n-1)}{2}$  kedalam 11 himpunan disjoint  $S_1$  sampai  $S_{11}$  sebagai berikut.

$$S_1 = \bigcup_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \{(2i+1)n+1, (2i+1)n+2, \dots, (2i+2)n\} \cup \{1, 2, \dots, n\}$$

$$S_2 = \bigcup_{i=2}^{\frac{n-1}{2}} \{2in+1, 2in+2, \dots, (2i+1)n\} \cup \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$$

$$S_3 = \{2n+1, 2n+2, \dots, 3n\}$$

$$S_4 = \{n^2+n+1, n^2+n+2, \dots, n^2+2n\}$$

$$S_5 = \{n^2+1, n^2+2, \dots, n^2+n\} \cup \{n^2+2n+1, n^2+2n+2, \dots, 2n^2+n\}$$

Untuk himpunan  $S_6, S_7, S_8, S_9$ , dan  $S_{10}$  didapatkan dengan menambahkan  $2n^2+n$  dalam setiap elemen dalam  $S_1$  sampai  $S_5$ . Selanjutnya,  $S_{11} = \{4n^2+2n+1, 4n^2+2n+2, \dots, 8n^2+2n\}$  yang akan menghasilkan  $4n^2$  elemen.

Elemen  $S_1$  dan  $S_4$  di gunakan untuk pelabelan  $L_1$  untuk  $K_n$ , dimana elemen  $S_1$  untuk pelabelan sisi dan elemen  $S_4$  untuk pelabelan titik. Demikian halnya dengan  $K_n$  yang lain, yaitu elemen  $S_2$  untuk pelabelan sisi dan elemen  $S_3$  untuk pelabelan titik. Untuk  $K_n$  yang ke-tiga, digunakan elemen  $S_6$  untuk pelabelan sisi dan elemen  $S_8$  untuk pelabelan titik. Dengan cara yang sama, untuk  $K_n$  yang ke-empat, di gunakan elemen  $S_7$  untuk pelabelan sisi dan elemen  $S_9$  untuk pelabelan titik.

Untuk pelabelan sisi antara titik dalam  $K_n$  pertama dan ke-dua digunakan elemen dari  $S_5$ . Dengan cara yang sama, elemen dari  $S_{10}$  digunakan untuk pelabelan sisi dalam  $K_n$  ke-tiga dan ke-empat. Sedangkan  $S_{11}$  digunakan untuk melabeli sisi antara dari  $K_n$  yang pertama, ke-dua, ke-tiga dan ke-empat.  $\square$

Untuk lebih jelasnya diberikan langkah langkah sebagai berikut.

1. Misalkan  $n = m/4$  maka  $n$  adalah bilangan ganjil, cari pelabelan total titik ajaib *complete graph*  $K_n$  dengan  $n$  ganjil yang dinotasikan dengan  $L$  dan persegi ajaib dengan orde  $n$  yang dinotasikan dengan  $P$ .
2. Ganti elemen sisi dan titik pada  $L$  berturut turut dengan
  - a.  $S_1$  dan  $S_4$ , dengan elemen  $S_1$  untuk pelabelan sisi dan elemen  $S_4$  untuk pelabelan titik sehingga menghasilkan  $L_1$  untuk  $K_n$  yang pertama.
  - b.  $S_2$  dan  $S_3$ , dengan elemen  $S_2$  untuk pelabelan sisi dan elemen  $S_3$  untuk pelabelan titik sehingga menghasilkan  $L_2$  untuk  $K_n$  yang kedua.

- c.  $S_6$  dan  $S_9$ , dengan elemen  $S_6$  untuk pelabelan sisi dan elemen  $S_9$  untuk pelabelan titik sehingga menghasilkan  $L_3$  untuk  $K_n$  yang ke-tiga.
  - d.  $S_7$  dan  $S_8$ , dengan elemen  $S_7$  untuk pelabelan sisi dan elemen  $S_8$  untuk pelabelan titik sehingga menghasilkan  $L_4$  untuk  $K_n$  yang ke-empat.
3. Ganti elemen elemen pada persegi ajaib ber-orde  $n$  dengan  $S_5$  sehingga menghasilkan  $P_1$  yang merupakan pelabelan untuk sisi graf *bipartite complete*  $K_{n,n}$ . Dengan cara yang sama, ganti elemen elemen pada persegi ajaib ber-orde  $n$  dengan  $S_{10}$  sehingga menghasilkan  $P_2$  yang juga merupakan pelabelan untuk sisi graf *bipartite complete*  $K_{n,n}$ .
  4. Lakukan transpose terhadap  $P_1$  dan  $P_3$  sehingga menghasilkan  $P_2$  dan  $P_4$ .
  5. Dengan membagi  $S_{11}$  menjadi 4 bagian, ganti elemen persegi ajaib orde  $n$  dengan elemen-elemen yang ada dalam  $S_{11}$  dan lakukan transpose terhadap hasil yang diperoleh, yaitu sebagai berikut.
    - a. Bagian pertama  $S_{11}$  mengasilkan  $M_1$  dan  $M_1^T$
    - b. Bagian kedua  $S_{11}$  mengasilkan  $M_2$  dan  $M_2^T$ .
    - c. Bagian ketiga  $S_{11}$  mengasilkan  $M_3$  dan  $M_3^T$ .
    - d. Bagian keempat  $S_{11}$  mengasilkan  $M_4$  dan  $M_4^T$ .
  6. Susun elemen  $L_1, L_2, L_3, L_4, P_1, P_2, P_3, P_4, M_1, M_2, M_3, M_4, M_1^T, M_2^T, M_3^T$  dan  $M_4^T$  sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ P_3 & P_4 & P_1 & P_2 \\ M_1 & M_2 & M_1^T & M_2^T \\ M_4 & M_3 & M_4^T & M_3^T \end{bmatrix}$$

yang merupakan pelabelan pada graf  $K_m$ , dimana  $m \equiv 4 \pmod 8$ .

Dalam kasus ini pelabelan graf disebut sebagai pelabelan total titik ajaib jika nilai konstanta ajaibnya adalah  $\frac{32n^3 + 13n^2 + n}{2}$

**Bukti:**

Pelabelan total titik ajaib pada *complete graph*  $K_m$ , dimana  $m$  adalah bilangan genap dengan dengan

$n = \frac{1}{4}N$  yang memiliki susunan pelabelan  $\begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ P_3 & P_4 & P_1 & P_2 \\ M_1 & M_2 & M_1^T & M_2^T \\ M_4 & M_3 & M_4^T & M_3^T \end{bmatrix}$

Sebagaimana dengan kasus  $m \equiv 2 \pmod 4$ , maka konstanta ajaib pada kasus ini adalah hasil penjumlahan dalam setiap elemen dalam kolom tabel pelabelan. Dengan demikian dapat diperoleh:

$$k = 2 \left( \frac{n^3 + 3n}{4} \right) + \frac{(n-3)n}{2} + 7 \left( \frac{1}{2} n(n^2 - 1) \right) + (2n - 4)n + 9 \left( \frac{1}{2} n(n^2 - 1) \right) + (2n - 4)n + 14 \left( \frac{1}{2} n(n^2 - 1) \right) + \frac{n(n^2 + 4n - 13)}{2}$$

$$= \frac{32n^3 + 13n^2 + n}{2}$$

**Contoh :**

Sebagai ilustrasi diberikan cara pelabelan total titik ajaib *complete graph*  $K_{12}$  dengan  $n = m/4$ , maka  $n$  adalah bilangan ganjil 3. Dari contoh sebelumnya diketahui  $L$  pelabelan total titik ajaib *complete graph*  $K_3$  sebagai berikut

3	4		2
2	3	5	
1		1	6
<i>i/j</i>	1	2	3

3	4	3	2
2	3	5	1
1	2	1	6
<i>i/j</i>	1	2	3

Gambar 9 Hasil tabel pelabelan total titik ajaib  $K_3$

Dengan memindahkan elemen diagonal ke baris pertama ,maka diperoleh

Label titik	4	5	6
Label sisi	3	3	2
	2	1	1

Gambar 10 Tabel pelabelan total titik ajaib *complete graph*  $K_3$

Persegi ajaib  $P$  dengan orde 3 dengan menggunakan metode 4 diketahui sebagai berikut.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Gambar 11 Persegi ajaib orde 3

Dari  $L$ ,  $L_1$  dibentuk dengan menggunakan  $S_1$  dan  $S_4$  pada tabel  $L$ , dengan  $S_1 = \{1,2,3\}$  dan  $S_4 = \{13,14,15\}$ . Di dapatkan tabel  $L_1$  dibawah

Label titik	13	14	15
Label sisi	3	3	2
	2	1	1

Gambar 12 Tabel  $L_1$

$L_2$  dibentuk dengan menggunakan  $S_2$  dan  $S_3$  pada tabel  $L$ , dengan  $S_2 = \{4,5,6\}$  dan  $S_3 = \{7,8,9\}$ . Di dapatkan tabel  $L_2$  dibawah

Label titik	7	8	9
Label sisi	6	6	5
	5	4	4

Gambar 13 Tabel  $L_2$

Sebagaimana dengan  $L_1$  dan  $L_2$ ,  $L_3$  dibentuk dengan menggunakan  $S_6$  dan  $S_9$ , dengan  $S_6 = \{22,23,24\}$  dan  $S_9 = \{34,35,36\}$  sehingga didapatkan tabel  $L_3$  sebagai berikut,

Label titik	34	35	36
Label sisi	24	24	23
	23	22	22

Gambar 14 Tabel  $L_3$

Sedangkan  $L_4$  dibentuk dengan menggunakan  $S_7$  dan  $S_8$ , dengan  $S_7 = \{25,26,27\}$  dan  $S_8 = \{28,29,30\}$  sehingga didapatkan tabel  $L_4$  sebagai berikut,

Label titik	28	29	30
Label sisi	27	27	26
	26	25	25

Gambar 15 Tabel  $L_4$

Dengan  $P$  persegi ajaib orde 3 diatas dan diketahui  $S_5 = \{10,11,12,16,17,18,19,20,21\}$  akan dibentuk label  $P_1$  dan  $P_2$ . Label  $P_1$  dibentuk dengan mengganti elemen tabel  $P$  dengan  $S_5$  dan  $P_2$  merupakan transpose tabel  $P_1$

16	21	11
12	17	19
20	10	18

16	12	20
21	17	10
11	19	18

Gambar 16 Tabel  $P_1$  kiri dan  $P_2$  kanan

Serupa dengan pelabelan pada  $P_1$  dan  $P_2$ , Label  $P_3$  dibentuk dengan mengganti elemen tabel  $P$  dengan  $S_{10}$  dan  $P_4$  merupakan transpose tabel  $P_3$  dimana  $S_{10} = \{31,32,33,37,38,39,40,41,42\}$ .

37	42	32
33	38	40
41	31	39

37	33	41
42	38	31
32	40	39

Gambar 17 Tabel  $P_3$  kiri dan  $P_4$  kanan

Untuk selanjutnya dengan membagi  $S_{11}$  menjadi 4 bagian, ganti elemen persegi ajaib orde  $n$  dengan elemen-elemen yang ada dalam  $S_{11}$  dan lakukan transpose terhadap hasil yang diperoleh, yaitu sebagai berikut:

1. Bagian pertama  $S_{11}$  menghasilkan  $M_1$  dan  $M_1^T$
2. Bagian kedua  $S_{11}$  menghasilkan  $M_2$  dan  $M_2^T$
3. Bagian ketiga  $S_{11}$  menghasilkan  $M_3$  dan  $M_3^T$
4. Bagian keempat  $S_{11}$  menghasilkan  $M_4$  dan  $M_4^T$

Dengan  $S_{11} = \{43, 44, 45, 46, \dots, 78\}$  maka diperoleh  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_1^T, M_2^T, M_3^T$  dan  $M_4^T$  sebagai berikut

46	51	44
45	47	49
50	43	48

46	45	50
51	47	43
44	49	48

Gambar 18 Tabel  $M_1$  dikiri dan  $M_1^T$  di kanan

55	60	53
54	56	58
59	52	57

55	54	59
60	56	52
53	58	57

Gambar 19 Tabel  $M_2$  dikiri dan  $M_2^T$  di kanan

64	69	62
63	65	67
68	61	66

64	63	68
69	65	61
62	67	66

Gambar 20 Tabel  $M_3$  dikiri dan  $M_3^T$  di kanan

73	78	71
72	74	76
77	70	75

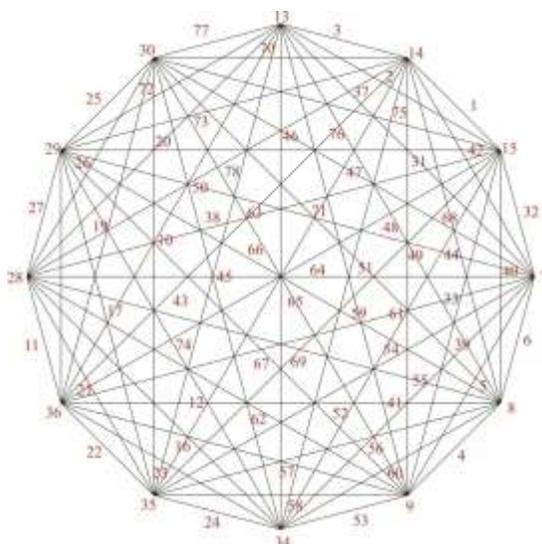
73	72	77
78	74	70
71	76	75

Gambar 21 Tabel  $M_4$  dikiri dan  $M_4^T$  di kanan

Dengan demikian maka akan diperoleh pelabelan pada *complete graph*  $K_{12}$  sebagai berikut.

13	14	15	7	8	9	34	35	36	28	29	30
3	3	2	6	6	5	24	24	23	27	27	26
2	1	1	5	4	4	23	22	22	26	25	25
37	42	32	37	33	41	16	21	11	16	12	20
33	38	40	42	38	31	12	17	19	21	17	10
41	31	39	32	40	39	20	10	18	11	19	18
46	51	44	55	60	53	46	45	50	55	54	59
45	47	49	54	56	58	51	47	43	60	56	52
50	43	48	59	52	57	44	49	48	53	58	57
73	78	71	64	69	62	73	72	77	64	63	68
72	74	76	63	65	67	78	74	70	69	65	61
77	70	75	68	61	66	71	76	75	62	67	66

Gambar 22 Tabel pelabelan total titik ajaib *complete graph*  $K_{12}$

Gambar 23 Pelabelan total titik ajaib *complete graph*  $K_{12}$ 

#### 4. PENUTUP

Algoritma pelabelan total titik ajaib untuk *complete graph*  $K_n$ , untuk  $n$  bilangan genap disusun berdasarkan disusun berdasarkan pelabelan pada *complete graph*  $K_n$ , dan pelabelan *bipartite complete graph*  $K_{n,n}$ .

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Abussakir, 3 November 2008, *Graph Labeling*, Abussakir's Blog. <http://abussakir.wordpress.com/>
- [2]. Gallian, J.A. "A Dynamic Survey of Graph Labeling". *The Electronic Journal of Combinatorics* 15 (2008). Minnesota. United State Of America.
- [3]. Harju, Tero. 2007. *Lecture Notes On Graph Theory*, Finland: Department of mathematics University Of Turki.
- [4]. Hendry Dext, 3 Januari 2010, *Mengenal Magic Square*, Everything About Math Blog. <http://hendrydext.blogspot.com/>
- [5]. Irawati Novi, Heri Robertus, *Pelabelan Total Titik Ajaib pada Complete Graph  $K_n$  dengan  $n$  Ganjil*, Jurnal Matematika.
- [6]. Lipschutz, Seymour and Lipson, Marc lars. 1992. "2000 Solved Problem in Discrete Mathematic". McGraw Hill, Inc. Singapore.
- [7]. McDougall, Miller, Slamin, and Wallis, 2002. *Vertex Magic Total Labeling of Graphs*, Util. Math., 61(2002) 3-21.
- [8]. Robin J. Wilson and John J. Watkins. 1990. *Graph An Introductory Approach*. John Wiley & Sons, Inc. New York .
- [9]. Slamin et al. "Vertex-Magic Total Labelings of Disconnected Graphs": *Journal of Prime Research in Mathematics* , Vol. 2(2006), 147-156.
- [10]. Stinson, Robert. 1992. *Contemporary Design Theory: A Collection of Surveys*. John Wiley & Sons, Inc. New York .