研究ノート

不確実性下での再生可能資源の管理：モデル

山　下　純　一

目　次

1．非凸な環境における収穫

1.1. 原始林伐採問題と不確実性

このノートは，再生可能資源の管理についての理論的な考察である．主要な目的は，資源管理に影響する種々のパラメータに不確性を許すモデルを構築することである．加えて，それらのモデルにおける最適な収穫の決定を，最適制御問題として定式化する．ただし，制御問題の数理分析は本稿の対象とするところではない．

議論を具体的に進めるために，一つの動学的計画問題を考える．それは処女林の最適伐採ルールに関する論文Conrad and Rudwig[4] である．時刻 t における原始林の面積を $X = X(t)$ とおく．そして，この森林ストックのもたらす便益

（市場評価が可能な便益と必ずしも市場評価可能ではないアメニティ価値の二つを含む）を $B(t, X)$ と記す．また，処女林の伐採面積を $u=u(t)$ とし，伐採した後の土地1単位の価値を $\pi=\pi(t)$ とする．

原始林を再生不能資源とみるならば，そのストックの時間的な経路は初期状態 $X(0)=x$ から始まって一方的に減少するのみである：

$$dX(t) = -u(t)dt, \quad X(0) = x. \tag{1}$$

ここでは森林の再生を考慮していないので，伐採を続けてゆけば，やがて原始林のストックはゼロになるときがくる．その前のどこかで伐採をやめるべきであるのはいうまでもない．伐採時刻を τ とおくと，収穫決定問題は

$$\max_{0 \leq u \leq \bar{u}} \int_0^{\tau} e^{-\delta t}[B(t, X) + \pi(t)u(t)]\,dt + B(\tau, X(\tau))/\delta \tag{2}$$

$$\text{subject to: } \dot{X}(t) = -u(t),\ X(0) = x \tag{3}$$

とかくことができる．ここで $0 \leq u \leq \bar{u}$ とあるのは，伐採量がある物理的な制約 $u \in [0, \bar{u}]$ に服する（$\bar{u}$ はある定数）ことをしめす．また，目的関数の最後の項 $B(\tau, X(\tau))/\delta$ は，伐採後の便益のフローが同じ水準 $B(\tau, X(\tau))$ で永久に続くとみなし，そのフローの現在価値評価である．ここでは，伐採時刻 τ があらかじめ定まっているとしたが，いつ伐採するのが最善か，という τ そのものの決定問題も残されている．この種の問題を扱うモデルは後に統一的に論じる．

1.2. アメニティ価値の不確実性

上記のモデルでは，便益関数は時間と森林面積の関数であり，その森林面積の変動に不確実性はなかった．したがって，このモデルに不確実な要素は存在しない．しかし，原始林のもたらす便益が，その面積とともに確定すると定めるのは明らかに単純すぎる仮定である．特に，その便益関数が森林のアメニティ価値を含むとみるなら，便益が面積の変動のみによって確定するとはいえないことは明

らかである．この点を修正して，便益が決定論的に定まる部分と，世界の状態に依存して変化する部分の二つからなるように，モデルを拡張しよう．

論文[4] にしたがって，便益関数を

$$B(t,\ X) = A(t)B(X) \tag{4}$$

と積の形に分けよう．ここで，$A(t)$ は森林の不確実なアメニティ価値である．一方，$B(X)$ は森林面積のみに依存して決定論的に定まる便益である．

このとき，最大化問題(2)の被積分関数を，伐採後の裸の土地１単位を基準として評価した値 $B(t,\ X)/\pi(t)$ は

$$\left(\frac{A(t)}{\pi(t)}B(t)+u(t)\right)e^{-\delta t} \equiv (a(t)B(t)+u(t))\,e^{-\delta t}$$

となる．ここで $a(t)=A(t)/\pi(t)$ である．この基準化されたアメニティ価値の不確実な時間的経路が

$$\frac{da}{a} = m\,dt + \sigma\,dw,\ \ a(0)=y. \tag{5}$$

で定まるとしよう．ここで，$w=w(t)$ は標準ブラウン運動であり，m と σ は，それぞれアメニティ価値変動をあらわす確率微分方程式のドリフトと分散（いずれも定数とする）である．さらに，伐採計画の時間的な視野を無限大にとることにしよう．すると，このときの伐採問題は，

$$\max_{0\le u\le \bar{u}}\ E_{x,y}\int_0^{\infty}(a(t)B(t)+u(t))\,e^{-\delta t} \tag{6}$$

$$\text{subject to:}\ \begin{cases} dX(t) = -u(t)dt, \\ da(t) = a(t)\,m\,dt + a(t)\,\sigma\,dw(t). \end{cases} \tag{7}$$

と記述される．

1.3. 再生可能な資源の状態方程式

システムの状態方程式(7)のうち，最初の条件は原始林を再生不能な資源とみ

なすことによる．かりに再生可能な資源を対象に状態方程式を考えるのなら，この式はたとえば

$$dX(t) = (F(X(t)) - u(t))dt. \tag{8}$$

とあらわされる．ここで関数 $F(\cdot)$ は資源の再生をあらわす関数であり，具体的には，たとえば以下のような関数が典型例となる：

$$F(X) = rX\left(1 - \frac{X}{K}\right), \quad K > 0, \tag{9}$$

$$F(X) = X\left(e^{r(1-X/K)} - 1\right), \quad K > 0, \tag{10}$$

$$F(X) = rX\left(\frac{X}{K_0} - 1\right)\left(1 - \frac{X}{K}\right), \quad 0 < K_0 < K. \tag{11}$$

ここで $r = 0$ は成長率をあらわし，K_0 および K はいずれも再生の動学を規定するパラメータである．特に，K は環境による資源の許容量（carrying capacity）をあらわす．K_0 は当該資源の存続可能な最小個体数（minimum viable population）である[1)].

式(9) で定義される再生産関数 $F(\cdot)$ はロジスティック（成長）関数とよばれる．式(11) は近年特に注目されている非凸のエコシステムモデルに対応する[2)].
非凸なエコシステムについての本格的な議論は本稿の課題ではないが，再生産関数が(11)であるとき，(8)のダイナミクスの様態にどんな特徴があらわれるかを簡単に考察しよう．

収穫を最適に制御するという議論から離れて，つねに個体数の一定割合が収穫され続ける（$u/X =$ 定数）ときに，資源ストックの時間的な変動がどうなるかを吟味しよう．議論をわかりやすくするために，(11) においてパラメータが

---

1) Conrad[2], p.33 参照

2) ここでは，再生産関数が $F(\cdot)$ が X の値が小さい領域については凸関数であり，大きな領域については凹関数である convex-concave な形状をしているとき，非凸なエコシステムモデルとよぶことにする．この点については，Dasgupta and Mäler[5] を参照.

$r = K = 1$，$K_0 = 0.25$ であるケースを考えよう．すなわち，資源成長率が1であり，環境による資源ストック許容量の25パーセントが維持できれば，その資源は存続できるという生物学的な状況を想定する．このような環境において，収穫についての3つのシナリオを検討する：

1. ストックの20%の収穫を継続する：$u(t)/X(t) = 0.2\ (\forall t \geq 0)$，
2. ストックの56.25%の収穫を継続する：$u(t)/X(t) = 0.5625\ (\forall t \geq 0)$，
3. ストックの56.6%の収穫を継続する：$u(t)/X(t) = 0.566\ (\forall t \geq 0)$．

この最初の二つの状態が図1に描かれている．まず，$u/X = 0.2$ であるときには，平衡点が（原点をのぞけば）AおよびBの2点存在する．点Aの場合，その右近傍に資源の初期値 $X(0) = x$ があるときには，資源量は点Bに向かって増加する．一方，左の近傍にあるときには，その資源は枯渇（絶滅）にむかう．これに対して，点Bの近傍では局所的な安定性が保たれていることがわかる．一

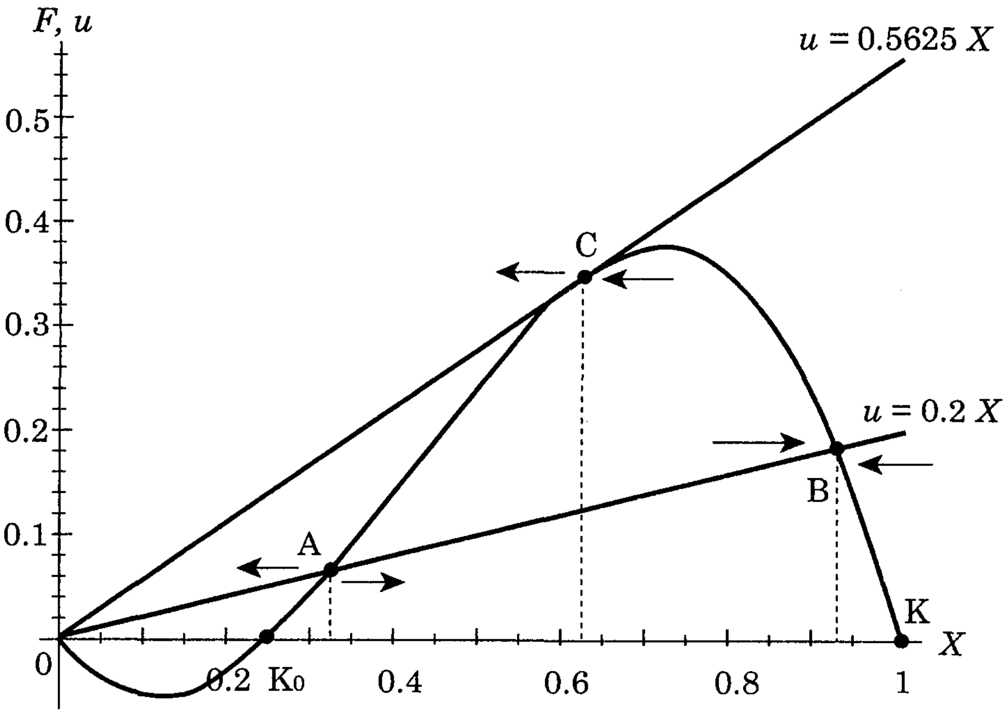

図1：非凸なエコシステムモデル：$r = K = 1$，$K_0 = 0.25$

方，$u=0.5625X$ の収穫政策を継続すれば，原点以外の平衡点は点Cのみで，それに対応する資源量は $X=0.625$ であることが計算される．点Cはその右近傍では安定であるが，左の近傍では安定でない．最後の収穫率が56.25％を超えるようなケースはこの図には描かれていないが，原点以外に平衡点は存在しないので，どのような初期値からはじまっても，やがて資源は枯渇してしまう．

1.4. 非凸な再生産関数と資源管理の不可逆性

図2の上下二つの曲線群は，上の最初と最後のシナリオにおける資源ストックの時間的な変動経路を描いたものである[3]．まず，上の図に注目する．ここでは，平衡点A, Bに対応する初期値 x が破線と実線で示されている．それぞれ，$x_A=0.32396$ と $x_B=0.92604$ である．上で吟味したように，x_A より小さな値が初期値であれば，20％収穫ルールではやがて資源は枯渇する．それより大きな初期値については，資源ストックは x_B にむかって増加し続ける．また，x_B の近傍からでる経路も比較的短時間で x_B に収束することがわかる．一方，下の図に描かれた $u/X=0.566$ のケースでは様相が異なる．このケースでは，いずれの初期値からでる解も枯渇に向かうが，たとえば，$x=0.65$ あるいは $x=0.7$ のような初期値に対しては，56％以上の収穫を継続しても資源はすぐには枯渇しない．きわめて緩やかな減少期間が継続してから，垂直的に急減する経過をたどる．収束に必要な時間も，上図のシナリオの数倍になっている．

ストックの一定割合を収穫するという単純な資源管理政策が，環境に不可逆的な影響を与えかねない可能性は，図3に示されている．この図は図2における二つの収穫ルール $u/X=0.2$ および $u/X=0.566$ を切り替えてもちいる政策が，資源ストックにどのような変化をもたらし得るかの例である．まず，初期ストッ

3) この $X(t)$ の経路の作図は古典的な Runge-Kutta 法（4段4位）によった．

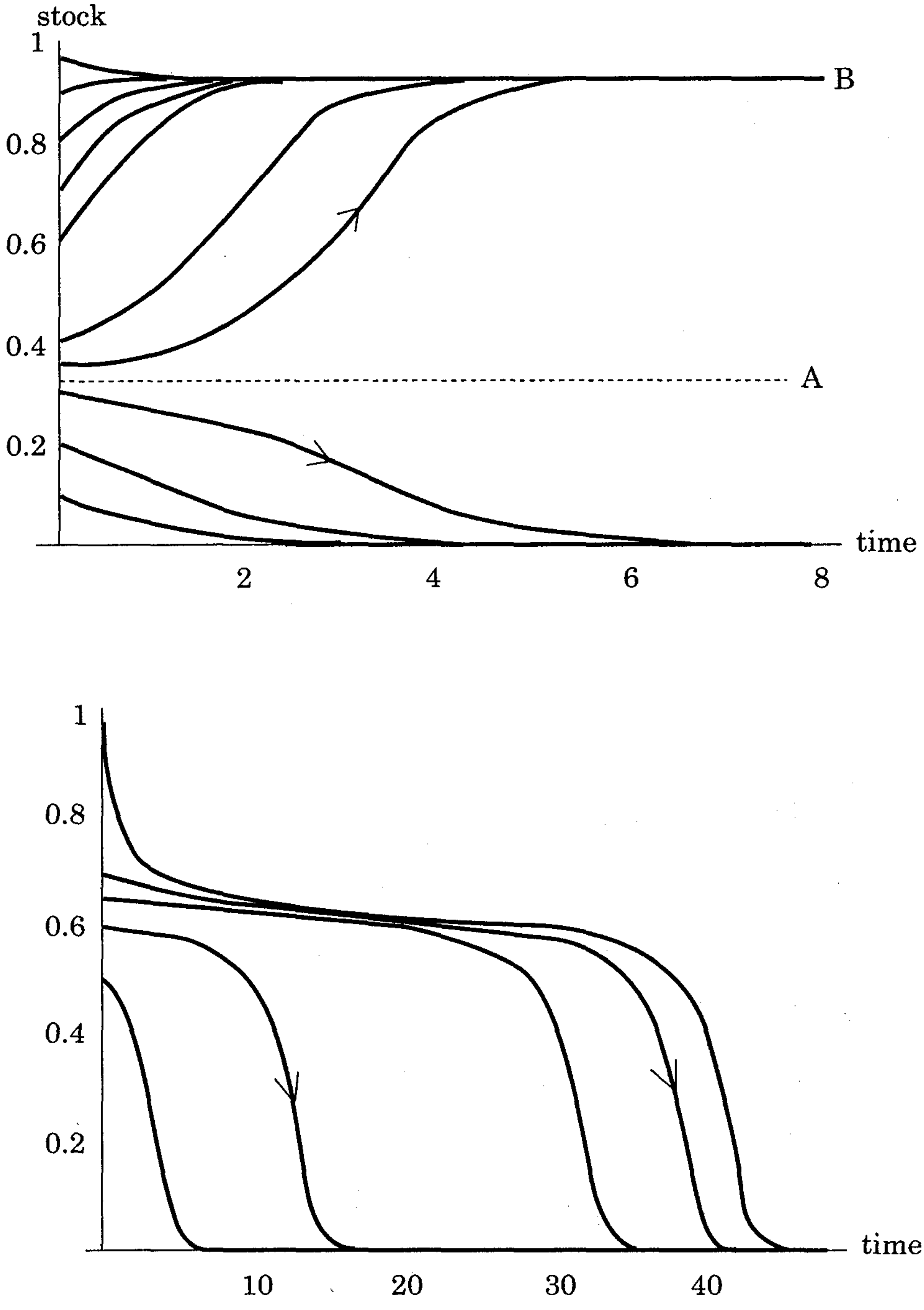

図 2：ストックの変動経路：$u/X = 0.2$ および $u/X = 0.566$ のケース

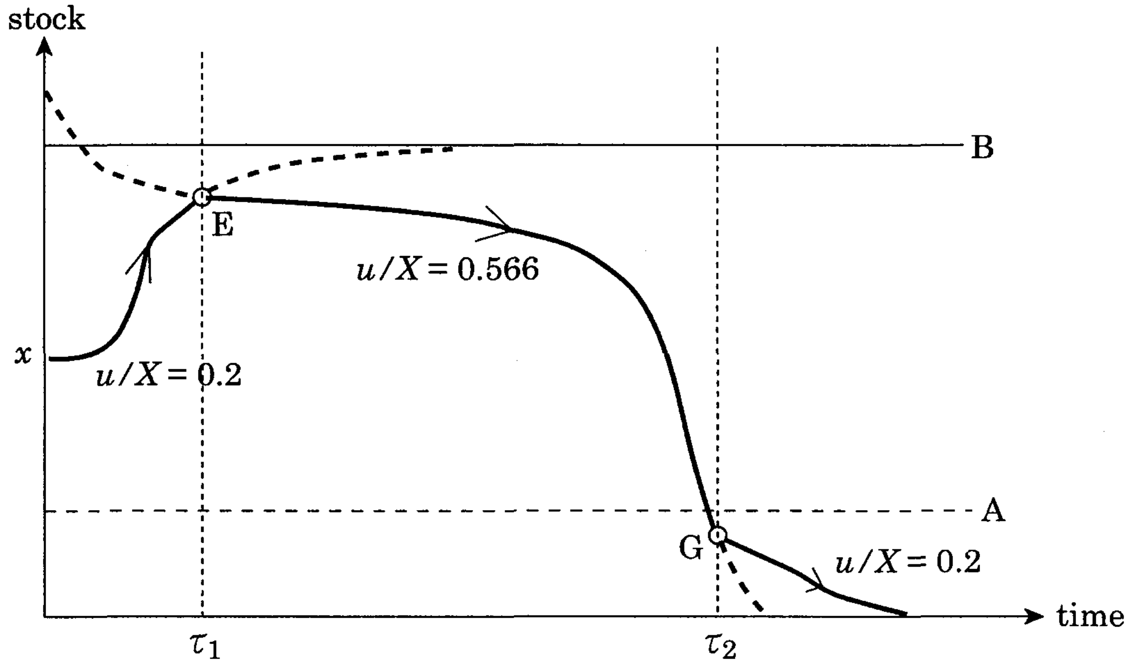

図 3：収穫一定ルールと資源枯渇の例

ク $x > x_A$ より始まった資源管理政策 $u/X = 0.2$ が時刻 τ_1 まで継続されるとしよう．このときの動学経路は図 2 の上の図のどれかになる．つぎに，τ_1 で収穫ルールが $u/X = 0.566$ にスイッチされると仮定する．このとき，点 E で，ストック減少（下向きの）経路への乗り換えが起きる．上でみたように，このケースではストックの漸減状態がしばらく続くと予想される．その後，ストックは急減に転ずるが，かりに時刻 τ_2 で再び収穫量を 2 割に削減する政策が復活するとしよう．この切り替えがなされる点 G での資源量が x_A の水準より低ければ，いったん落ちたストックレベルは回復できず，資源量は時間とともにゼロに収束するのみである．仮に時刻 τ_2 以降，収穫を 2 割ではなく，ゼロとするとするルール $u = 0$ を採用したとしても，点 G の水準が図 1 の点 K_0 に対応するストックレベル以下であるなら，同じことが生じる．このような資源水準回復の不可逆性の例は非凸なエコシステムの特徴であり，すべてのストックレベルについて凹関数であるロジスティック関数では起こらない現象である．

2．オープンアクセスモデル

2.1. 社会的便益および私的便益とその最大化

前節の処女林伐採モデルでは，便益関数(4)の関数型が特定されていなかった．これはひとつには，誰にとっての便益かがはっきり述べられていなかったためである．言い換えれば，森林とそのアメニティサービスを所有する社会的な仕組みが曖昧であった．この節では，自然資産の所有権をより明確に考慮して，便益関数に市場価格機構との関わりを導入しよう．

それが収穫されてはじめて私有権が発生する自然の資産を共有資産（common property resource）とよぶ．共有資産は基本的にオープンアクセスであり，そのために，資源管理に難しい問題が生じる．この代表的な例は漁業である．以下では，漁業におけるシェーファー＝ゴードン型の動学モデルを概観する．次に，そのモデルに不確実性を導入することを考える．

一般的にいって，便益は，資産ストック $X(t)$ と収穫 $u(t)$ に依存すると考えることができる．ストックの量的状態は前節でみたような生物学的なプロセス(8)あるいは(23)にしたがって変動する．一方，収穫量は，前項の森林伐採モデルでは独立的に扱われていた．これに対して，シェーファー＝ゴードン型の漁業モデルでは，社会全体での収穫の大きさは，その獲得に費やされた努力 $E(t)$ とストックの大きさに依存するとみなされる：$u(t) = H(E(t),\ X(t))$．ここで，収穫努力（effort）は，たとえば漁船の出漁日数で計測される．これは（集計的な）生産関数における労働投入に対応する．この対比は，H の関数型にまで広げることができて，H は一般に $H(E(t),\ X(t)) = qE(t)^{\alpha} X(t)^{\beta}$ とあらわされる．ここで，q，α および β はいずれも正の定数である．もっとも単純な収穫関数は，努力1単位ごとの収穫の大きさ H/E がつねにストックサイズの一定倍となるケース

$$H = qEX \tag{12}$$

である．今後，特に明確に述べない限り，この形の社会的に集計された収穫関数を前提する．

収穫と同時に所有権が発生すると，その資産は市場機構を介して評価される．すなわち，市場での価格評価を受ける．したがって，資産の所有者の観点に立てば，投入したコストを控除した後，市場での収入を最大にするような努力水準を決定することが問題となる．一方，自然資源全体の管理の観点に立てば，収穫のもたらす全体的な利益を最大にするように収穫努力を制御することが課題となろう．

まず最初に，後者の立場に立って，便益を定義しよう．そのために，収穫 u が (逆)需要関数 $p = D(u)$ にしたがって市場評価されるとき，それがもたらす経済厚生を便益と定める．具体的には，時刻 t における収穫 $u = u(t)$ がもたらす社会的な (粗) 便益 $B_s(u(t))$ を

$$B_s(u(t)) = \int_0^{u(t)} D(z)dz \tag{13}$$

とおく．経済厚生をネットで評価するためには，費やされた努力のコストを $B_s(u(t))$ からのぞく必要がある．総コストは努力1単位に対して，固定費用 $c>0$ をかけることによって定まるとしよう (限界コスト一定)．したがって，u の収穫に E の努力が必要ならば，$B_s(u(t)) - cE(t)$ が時刻 t における社会的な純便益となる．ここで，収穫関数(12)より，u と E の間には，$u/qX = E$ の関係があるので，純便益関数は $B_s(u(t)) - cu(t)/qX(t)$ とあらわされる．このとき，社会的に最適な収穫水準は最大化問題

$$\max_{0 \leq u(t) \leq \bar{u}} \int_0^{\infty} \left(B_s(u(t)) - \frac{cu(t)}{qX(t)} \right) e^{-\delta t}\, dt \tag{14}$$

$$\text{subject to: } dX(t) = (F(X(t)) - u(t))\, dt \tag{15}$$

を解くことによって得られる．ここで$u(t) \in [0, \bar{u}]$は収穫の物理的な限界をあらわす制約であり，$\bar{u} \leq X(t)$であるとする．

一方，私的な便益関数$B_p(u(t))$は，収穫$u(t)$のもたらす利潤であると定義する：

$$B_p(u(t)) = u(t)p(t) = u(t)D(u(t)).$$

したがって，cを努力に対する限界コスト（一定）とすれば，社会的便益の場合と全く同様に考えて，私的便益の最大化問題は

$$\max_{0 \leq u(t) \leq \bar{u}} \int_0^\infty \left(B_p(u(t)) - \frac{cu(t)}{qX(t)} \right) e^{-\delta t} dt \tag{16}$$

$$\text{subject to: } dX(t) = (F(X(t)) - u(t))\, dt \tag{17}$$

となる．

2.2. 需要と資源ストックの不確実性

前項でみた動学的決定問題(14)～(17)は不確実性を考慮したモデルに拡張できる．よく考慮されるのは，需要の不確実性である[4]．需要関数を，確率的な変動のパラメータ$\Theta = \Theta(t)$を組み込んだ形で

$$p(t) = D(u(t); \Theta(t)) \tag{18}$$

とかこう．この需要関数の単純な例を示せば，定数$\gamma > 0$に対して，

$$D(u(t); \Theta(t)) = \Theta(\mathrm{t}) - \gamma u(t) \tag{19}$$

なる線型需要関数がある．ここで$\Theta(t)$はある確率過程にしたがう．たとえば，Ornstein-Uhlenbeck プロセス

$$d\Theta(t) = -\alpha\Theta(t)dt + \sigma_0 dw_0(t), \quad \alpha > 0 \tag{20}$$

や，前節のアメニティ$a(t)$と同種のプロセス

4）たとえば，Dixit and Pindyck[6] の9章参照．

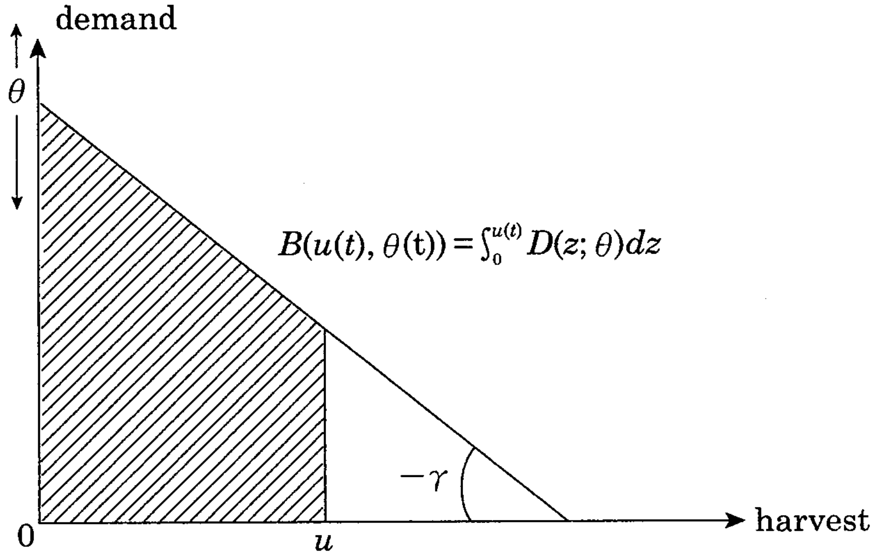

図 4：不確実性をもつ需要関数

$$d\Theta(t) = b_0\,\Theta(\mathrm{t})\mathrm{dt} + \sigma_0\,\Theta(t)\,dw_0(t) \tag{21}$$

を考えることができる．ここで，α，b_0，σ_0 はいずれも定数であり，$w_0(t)$ は標準ブラウン運動である．これらはいずれも連続確率過程である．一方，需要の突然の変化は不連続な確率過程であらわされることもある．たとえば，需要関数(19)の Θ が不連続的に上下にシフトするようなケースは，$\Theta(t)$ がジャンプマルコフ過程にしたがうとみればよい．

需要関数に不確実性 $\Theta(t)$ を導入したときの社会的および私的便益関数をそれぞれ $B_s(u(t),\ \Theta(t))$ および $B_p(u(t),\ \Theta(t))$ とかく．たとえば，$B_s(u(t),\ \Theta(t))$ は(13)より

$$B_s(u(t),\ \Theta(t)) = \int_0^{u(t)} D(z;\ \Theta(t))dz \tag{22}$$

と定義される．同様に，$B_p(u(t),\ \Theta(t)) = u(t)D(u(t);\ \Theta(t))$ である．

不確実性は需要だけでなく，資源ストックサイズの成長過程でも考慮することができる．もっともシンプルな例は，(8)を拡張した

$$dX(t) = (F(X(t)) - u(t))\,dt + \sigma_1 X(t)\,dw_1(t) \tag{23}$$

なるダイナミクスである（Andersen and Sutinen[1] 参照）．ここで $w_1(t)$ は標準ブラウン運動であり，$\sigma_1 > 0$ は定数である．これはストックの成長率 $dX(t)/X(t)$ が，収穫後のストックの増減率 $(F(X) - u)/X$ プラス不確実な部分 $w_1(t)$ で定義されることを示す．ストックの不確実な変動をあらわすモデルとしては，他にもたとえば，ジャンプ拡散のようなプロセスを考えることができる．

2.3. 不確実性下での最大化問題

社会的便益と私的便益が需要の不確実性を反映するように拡張されたので，それに応じて，社会的便益と私的便益の最大化問題も修正されなければならない．この項では，修正された最大化問題を記述しよう．

いま，需要の不確実性を表現するパラメータ $\Theta(t)$ の確率過程を，一般的に

$$d\Theta(t) = b(\Theta(t))dt + \sigma(\Theta(t))\,dw_0(t) \tag{24}$$

とおく．ここで $b(\Theta(t))$ および $\sigma(\Theta(t))$ はパラメータの確率過程 $\Theta(t)$ に依存するある関数をあらわす．関数 $b(\cdot)$ と $\sigma(\cdot)$ は(24)が強い解をもつような条件を満たすと仮定する．ここでは，$b(\Theta(t)) = -\alpha\Theta(t)$ および $\sigma(\Theta(t)) = \sigma_0$（定数）とおけば，(20)がえられ，定数 b_0 および σ_0 をもちいて $b(\Theta(t)) = b_0\,\Theta(t)$ および $\sigma(\Theta(t)) = \sigma_0(\Theta(t)$ とおけば，(21)がえられることに注意しよう．これらはいずれも関数 b，σ が時間に依存しないケースをあらわす例である．

ストックと需要の不確実性が(23)および(24)のように記述されるとすれば，社会的な便益の最大化問題(14)および(15)は以下のように修正される：

$$\max_{0 \le u(t) \le \bar{u}} \int_0^\infty \left(\int_0^{u(t)} D(z;\,\Theta)\,dz - \frac{cu(t)}{qX(t)} \right) e^{-\delta t}\,dt \tag{25}$$

$$\text{subject to:} \begin{cases} dX(t) = (F(X(t)) - u(t))\,dt + \sigma_1 X(t)\,dw_1(t) \\ d\Theta(t) = b(\Theta(t))dt + \sigma(\Theta(t))\,dw_0(t) \end{cases} \tag{26}$$

同様にして，私的便益の最大化問題(16)および(17)は以下のようになる：

$$\max_{0 \leq u(t) \leq \bar{u}} \int_0^\infty \left(u(t) D(u(t);\, \Theta(t)) - \frac{cu(t)}{qX(t)} \right) e^{-\delta t}\, dt \tag{27}$$

$$\text{subject to:} \quad \begin{cases} dX(t) = (F(X(t)) - u(t))\, dt + \sigma_1 X(t)\, dw_1(t) \\ d\Theta(t) = b(\Theta(t))dt + \sigma(\Theta(t))\, dw_0(t) \end{cases} \tag{28}$$

〔参考文献〕

[1] Andersen, P. and J. G. Sutinen(1984): “Stochastic Bioeconomics: A Review of Basic Methods and Results,” *Marine Resource Economics,* vol. 1, pp.117-136.

[2] Conrad, J. M. (1999): *Resource Economics,* Cambridge University Press.

[3] Conrad, J. M. and C. W. Clark (1987): *Natural Resource Economics: Notes and Problems,* Cambridge University Press.

[4] Conrad, J. M. and D. Ludwig (1994): “Forest Land Policy: The Optimal Stock of Old-growth Forest,” *Natural Resource Modeling,* vol. 8, pp.27-45.

[5] Dasgupta, P. and K.-G. Mäler (2003): “The Economics of Non-Convex Ecosystems: Introduction,” *Environment and Resource Economics,* vol. 26, pp.499-525.

[6] Dixit, K. D. and R. S. Pindyck (1994): *Investment under Uncertainty,* Princeton University Press.