

ГЕОФИЗИКА, ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОИСКОВ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

УДК 550.831

Обратные линейные задачи гравиметрии и магнитометрии с итерационными формулами аналогов фильтров Винера-Калмана

В.П. Миненко

Криворожский национальный университет, Украина, 50086, Кривой Рог, пр. Гагарина, 54. E-mail: maestozo.1_pavel@mail.ru

(Статья поступила в редакцию 25 ноября 2013 г.)

Усовершенствованы итерационные методы решения обратных линейных задач гравиметрии и магнитометрии на основе аналогов фильтров Винера–Калмана для двух интерпретационных моделей, использующих разделение карты поля на два массива четных и нечетных профилей. Приведены новые итерационные формулы, обеспечивающие, в отличие от известных методов, устойчивое и геологически содержательное решение с любых начальных условий без предварительного решения другими методами. Это дает два близких решения, независимых от решений обратной задачи другими методами. Приведены примеры практической реализации метода для магнитометрии в рудном районе на Украинском щите.

Ключевые слова: *гравиметрия, магнитометрия, обратная линейная задача, фильтры Винера-Калмана, итерационные формулы и коэффициенты.*

Известны итерационные методы решения обратных линейных задач (ОЛЗ) гравиметрии и магнитометрии на основе критериев оптимизации (КО) по минимуму суммы квадратов (МСК) невязок поля (НП) или по минимуму суммы квадратов итерационных поправок к физическому параметру (ИПФП) – аномальной плотности (АП) или интенсивности намагничивания (ИН) горных пород [1, 2, 5, 8–10, 15]. Недостатком этих методов является получение в отдельных случаях псевдорешений, лишенных физического смысла, хотя при других начальных условиях достигаются реальные решения ОЛЗ. Это связано с явлением эквивалентности решения, зависящего как от погрешностей измерения поля, так и от размеров ячеек

(блоков) интерпретационной модели, которые значительно больше размеров отдельных высокоаномальных тел. Избавиться от этого невозможно, так как уменьшение размеров блоков модели приводит к непомерному возрастанию размерности задач, которые в настоящее время еще не могут быть реализованы как по времени решения, так и по точности вычислений из-за матриц больших размерностей. С другой стороны, указанные методы дают устойчивые решения ОЛЗ даже при отсутствии геологической содержательности самих решений. Но из-за того, что методы по НП и ИПФП имеют в своей основе одну и ту же итерационную поправку в итерационной формуле, то даже при разных критериях оптимизации

они дают близкие между собой решения ОЛЗ, особенно в качественном плане, но при этом в отдельных точках карты поля получают очень большие невязки (остатки) поля, т.е. поле далеко не полностью восстанавливается решением ОЛЗ. Но и в этих, казалось бы, благоприятных случаях нет уверенности в том, что оба решения ОЛЗ близки к реальному, если нет геологических или сейсмических данных. Известны также методы решения ОЛЗ на основе аналогов фильтров Винера-Калмана [3, 4, 7], использующие разделение карты измеренного поля на 2 массива, отбором его в точках, взятых через один профиль, для одной и той же интерпретационной модели. Физическим основанием для такого подхода являются различное распределение погрешностей поля в каждом из двух массивов и различия в значениях всех элементов матриц решения прямых задач (МРПЗ) гравиметрии и магнитометрии. Однако эти методы требуют предварительного решения ОЛЗ другим методом, например одним из изложенных в работах [1, 2, 6, 11–14], и используются для продолжения решения, если другой метод выходит на постоянное решение при всех последующих итерациях. Со старта с произвольными начальными условиями эти итерационные методы самостоятельно продвижения к улучшению решения ОЛЗ не дают. Но так как используемые для старта методы имеют недостатки, то они приводят к тем же результатам. Скорее всего, в этих методах была неудачно выбрана итерационная формула [2]. Теми же недостатками обладают и методы условной оптимизации, которые, кроме всего, еще и требуют разработки методов определения коэффициентов Лагранжа [3], для чего в гравиметрии и магнитометрии имеются существенные трудности.

Целью настоящей работы является создание итерационных методов решения ОЛЗ на основе подходов Винера-Калмана с другими итерационными формулами, которые более точно учитывают геофизи-

ческие особенности решения некорректных задач.

Поставленная цель достигается тем, что в алгоритмах оптимизации используются не только сами значения физических параметров, но и итерационные поправки $B_{k,n,i}$ (k – номер интерпретационной модели; n – номер текущей итерации; $i=1, M$; M – количество блоков модели) к ним для каждой модели с перекрытием влияния поправок одной модели на параметры другой модели на каждой $n+1$ -й итерации. Для этого вместо двух итерационных формул (ИФ) для интенсивности намагничивания горных пород в блоках $J_{1,n,i}$ и $J_{2,n,i}$ каждой из двух моделей, использующих аналоги фильтров Винера-Калмана [3, 4], содержащие по три итерационных коэффициента (ИК) W_{11}, W_{12}, W_{13} и W_{21}, W_{22}, W_{23} :

$$J_{1,n+1,i} = J_{1,n,i} W_{11} + J_{2,n,i} W_{12} + W_{13}, \quad (1)$$

$$J_{2,n+1,i} = J_{1,n,i} W_{21} + J_{2,n,i} W_{22} + W_{23}, \quad (2)$$

используют ИФ с двумя ИК:

$$J_{1,n+1,i} = J_{1,n,i} + W_{11} J_{2,n,i} + W_{12} B_{1,n,i}, \quad (3)$$

$$J_{2,n+1,i} = J_{2,n,i} + W_{21} J_{1,n,i} + W_{22} B_{2,n,i} \quad (4)$$

или используют ИФ в виде

$$J_{1,n+1,i} = J_{1,n,i} + W_{11} B_{2,n,i} + W_{12} B_{1,n,i}, \quad (5)$$

$$J_{2,n+1,i} = J_{2,n,i} + W_{21} B_{1,n,i} + W_{22} B_{2,n,i}; \quad (6)$$

где $B_{k,i,n} = (b_{ij,k} / \lambda_i / \lambda_j, r_{k,j,n})$; (7)

$$r_{k,j,n} = (b_{ij}, J_{k,i,n}) - Z_{k,j}; \quad (8)$$

$$\lambda_i = \sum_j b_{ij}; \quad \lambda_j = \sum_i b_{ij}; \quad (9)$$

b_{ij} – элементы матрицы прямых задач магнитометрии ($j=1, N$; N – количество точек поля);

$Z_{k,j}$ – наборы значений измеренного поля для каждой k -й модели, взятых из общей карты через один профиль;

$r_{k,j,n}$ – невязки поля в каждой точке поля, по каждой модели, на каждой итерации, используемые для вычисления поправок (7), КО по МСК НП, по которым строятся карты остатков поля, недовостановленные решением ОЛЗ.

Критерии оптимизации для каждой модели имеют вид

$$F_{k,r} = \sum_j (r_{k,j,n+1})^2 = \min_{(W_{k,l,n+1})}; \quad (10)$$

$$F_{k,B} = \sum_i (B_{k,i,n+1})^2 = \min_{(W_{k,l,n+1})}. \quad (11)$$

Оптимизация по критерию (10) в методах с ИФ (1)–(4) геологически содержательного решения ОЛЗ не дает, а потому КО (10) используется только с ИФ в виде

$$J_{k,n+1,i} = J_{k,n,i} - W_{k,n} B_{k,n,i} \quad (12)$$

для сравнения с другими решениями.

В этом случае мы имеем метод простой итерации, оптимизирующий решение ОЛЗ отдельно для каждой модели с ИК:

$$W_{k,n} = \frac{(r_{k,j,n}, Z_{k,j,n})}{(Z_{k,j,n}, Z_{k,j,n})}; \quad (13)$$

$$\text{где } Z_{k,j,n} = (b_{ij}, B_{k,n,i}). \quad (14)$$

Оптимизация по критерию (10) в методах с ИФ (5)–(6) дает геологически содержательное решение ОЛЗ, но в какой-то мере отличающееся как от решения (12)–(14), так и от других решений по критерию (11) с любой ИФ из (1)–(6).

Приведем вывод метода оптимизации решения ОЛЗ по КО (11) для двух моделей с ИФ (5)–(6). Умножим уравнение (5) на $b_{ij,1}$ для нечетных профилей, а уравнение (6) – на $b_{ij,2}$ для четных профи-

лей, а затем вычтем из левой и правой частей каждого уравнения поле $Z_{k,j}$, после чего получим невязки поля в каждой точке по каждой модели:

$$\begin{aligned} (b_{ij,1}, J_{1,n+1,i}) - Z_{1,j} &= (b_{ij,1}, J_{1,n,i}) - Z_{1,j} + \\ &+ W_{11}(b_{ij,1}, B_{2,n,i}) + W_{12}(b_{ij,1}, B_{1,n,i}); \\ (b_{ij,2}, J_{2,n+1,i}) - Z_{2,j} &= (b_{ij,2}, J_{2,n,i}) - Z_{2,j} + \\ &+ W_{21}(b_{ij,2}, B_{1,n,i}) + W_{22}(b_{ij,2}, B_{2,n,i}). \end{aligned}$$

Используя обозначения (8) и (14), перепишем эти формулы в виде

$$\begin{aligned} r_{1,j,n+1} &= r_{1,j,n} + W_{11}Z_{12,j,n} + \\ &+ W_{12}Z_{11,j,n}; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} r_{2,j,n+1} &= r_{2,j,n} + W_{21}Z_{21,j,n} + \\ &+ W_{22}Z_{22,j,n}; \end{aligned} \quad (16)$$

Возведем (15) и (16) во вторую степень, просуммируем их соответственно по нечетным и четным индексам j , продифференцируем по всем ИК и приравняем все производные к нулю. В результате получим 2 системы по 2 уравнения, из которых найдем все четыре ИК для метода оптимизации решений ОЛЗ по КО МСК невязок поля каждой интерпретационной модели. Опуская для упрощения записи индексы j, n , запишем эти системы уравнений:

$$\begin{aligned} (r_1, Z_{12}) + W_{11}(Z_{12}, Z_{12}) + \\ + W_{12}(Z_{11}, Z_{12}) = 0; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} (r_1, Z_{11}) + W_{11}(Z_{12}, Z_{11}) + \\ + W_{12}(Z_{11}, Z_{11}) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Из системы уравнений (17)–(18) находим ИК и для итерационной формулы (5).

Аналогично из (16) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (r_2, Z_{21}) + W_{21}(Z_{21}, Z_{21}) + \\ + W_{22}(Z_{21}, Z_{22}) = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

$$(r_2, Z_{22}) + W_{21}(Z_{22}, Z_{21}) + \\ + W_{22}(Z_{22}, Z_{22}) = 0. \quad (20)$$

Из системы уравнений (19)–(20) находим ИК и для итерационной формулы (6).

Таким образом, по ИФ (5)–(6) получаем два решения, которые можно сравнивать не только между собой, но и с двумя решениями по методу (12)–(14), увеличивая при этом представительность и надежность результатов решения общей обратной задачи и ее геологической интерпретации.

Теперь перейдем к поиску решения ОЛЗ по КО (11) при ИФ (5)–(6). Умножим скалярно (15) на $b_{ij,1}/(\lambda_i \lambda_j)$, а (16) – на $b_{ij,2}/(\lambda_i \lambda_j)$ и просуммируем по индексу j .

В результате получим уравнения, которые после возведения во вторую степень и дифференцирования по ИК дают пары систем уравнений для определения по 2 ИК для каждой интерпретационной модели:

$$\text{а) для первой модели} \\ (B_1, C_{12}) + W_{11}(C_{12}, C_{12}) + \\ + W_{12}(C_{11}, C_{12}) = 0; \quad (21)$$

$$(B_1, C_{11}) + W_{11}(C_{12}, C_{11}) + \\ + W_{12}(C_{11}, C_{11}) = 0; \quad (22)$$

где $C_{12} = (b_{ij,1}/(\lambda_i \lambda_j), Z_{12})$;

$$C_{11} = (b_{ij,1}/(\lambda_i \lambda_j), Z_{11});$$

$$\text{б) для второй модели} \\ (B_2, C_{21}) + W_{21}(C_{21}, C_{21}) + \\ + W_{22}(C_{21}, C_{22}) = 0; \quad (21)$$

$$(B_2, C_{22}) + W_{21}(C_{22}, C_{21}) + \\ + W_{22}(C_{22}, C_{22}) = 0; \quad (22)$$

где $C_{21} = (b_{ij,2}/(\lambda_i \lambda_j), Z_{21})$;

$$C_{22} = (b_{ij,2}/(\lambda_i \lambda_j), Z_{22}).$$

Некоторые из вышеприведенных методов решения обратной задачи опробованы при интерпретации карты магнитного поля масштаба 1:25000 (рис.1) с использованием 8-слойной модели по 400 блоков размерами 475x475 м² в каждом горизонтальном слое (рис. 2), с глубинами до границ раздела слоев: 70; 200; 600; 1200; 3000; 4000; 5500; 7200 м (рис. 3–6). Измерение магнитного поля выполнено по сети 200x200 м.

Из рис. 2 делаем вывод, что магнитных тел, создающих западную часть юго-восточной подковообразной аномалии, ниже 600 м нет, как нет и почти всех тел, создающих большую группу аномалий в центре западной части карты поля. Об остальном можно утверждать, что горные породы разделяются в магнитном поле до глубины 2 000 м, а ниже они просто сливаются в более крупные объекты (рис. 3–6). Даже по количественным оценкам интенсивности намагничивания одних и тех же блоков моделей, полученные различными итерационными методами, отличаются не более, чем на 5-10 мА/м. По картам остатков поля (рис. 7–8) можно судить, что на 90% площади участка магнитное поле полностью восстановлено. В остатках поля после решения ОЛЗ остались только узколокальные аномалии, размеры которых намного меньше размеров блоков модели, но они контролируют геологические структуры более высокого порядка, поскольку представляют собой зоны серпентинизации. Более того, в контактирующих с серпентинитами немагнитных породах выявлены зоны актинолитизации и тремолитизации. Таким образом, есть необходимость отдельно решить обратные задачи магнитометрии и гравиметрии для интерпретационных моделей с блоками намного меньших размеров, чем это выполнено и представлено на рис. 1–8.

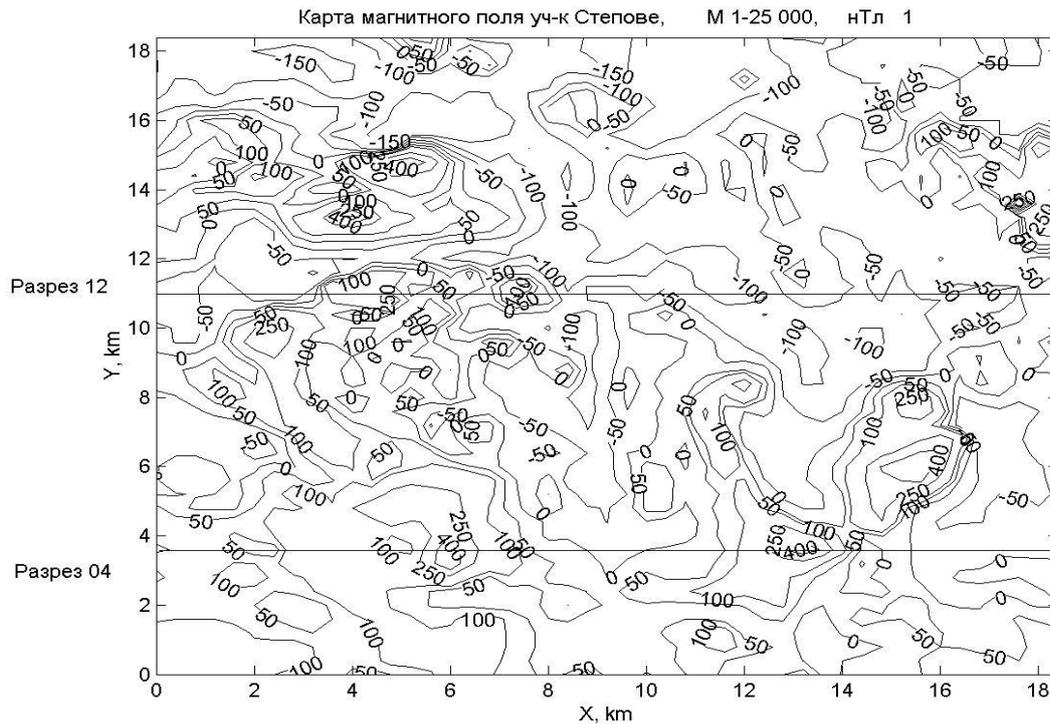


Рис. 1. Карта магнитного поля Александровского участка (село Степовое, Широковский р-н, Днепропетровская обл., Украина, УКЩ, изодинамы приведены в нанотеслах – нТ, здесь и далее все горизонтальные расстояния: в 1 ед. – 500 м)

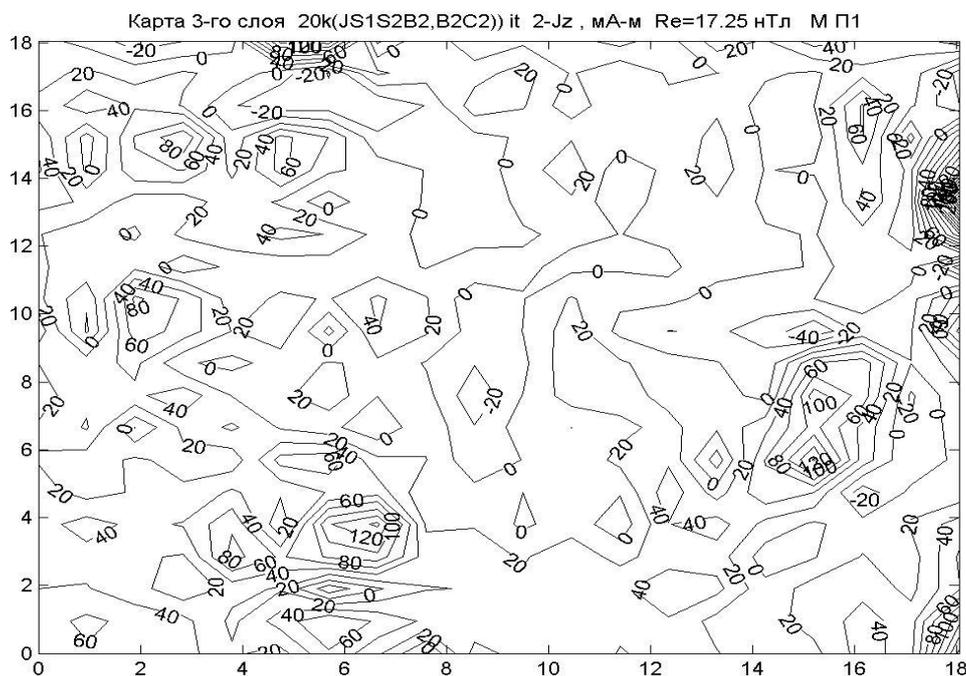


Рис. 2. Карта аномальной интенсивности намагничивания горных пород третьего слоя второй модели (глубины от 600 до 1200 м, здесь и далее изолинии приведены в миллиамперах/метр – мА/м), полученная решением обратной линейной задачи с критерием оптимальности (11) для ИФ (6)

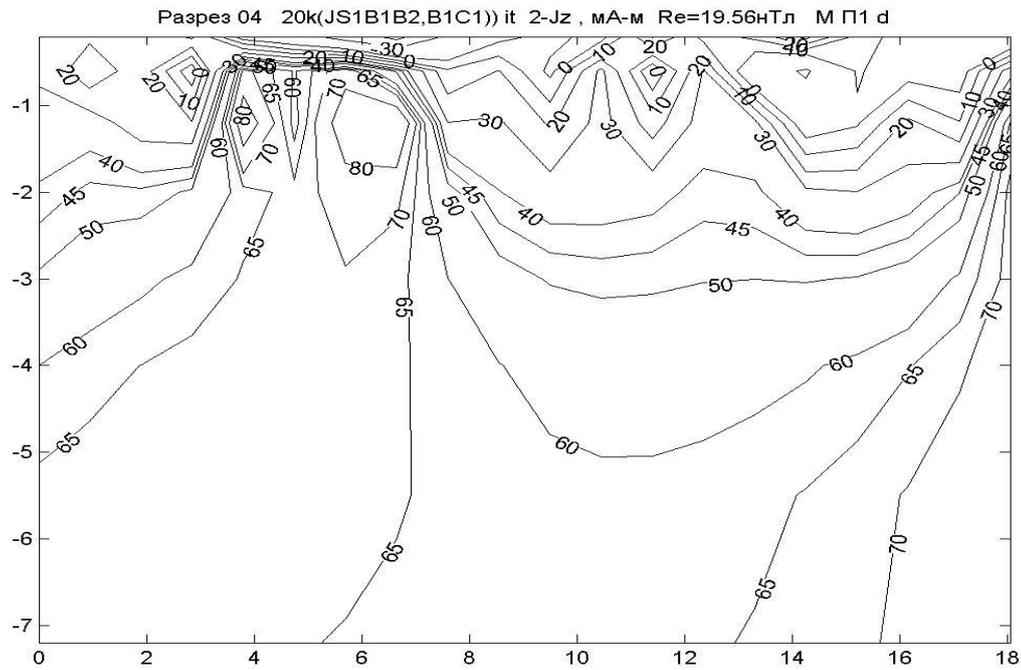


Рис.3. Вертикальный разрез аномальной интенсивности намагничивания горных пород от первого до восьмого слоев первой модели (глубины от 70 до 7200 м, здесь и далее вертикальные размеры – в км) по линии 04 (рис.1), полученный решением обратной линейной задачи с критерием оптимальности (11) для итерационной формулы (5)

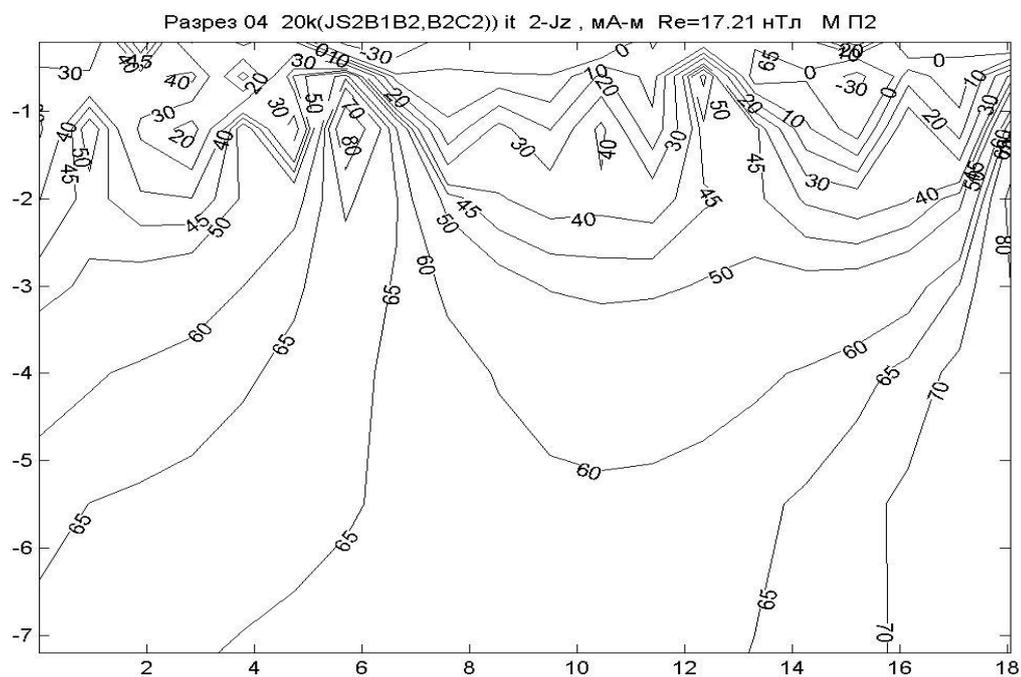


Рис. 4. Вертикальный разрез аномальной интенсивности намагничивания горных пород от первого до восьмого слоев второй модели (глубины от 70 до 7200м) по линии 04 (рис.1), полученный решением обратной линейной задачи с критерием оптимальности (11) для итерационной формулы (6)

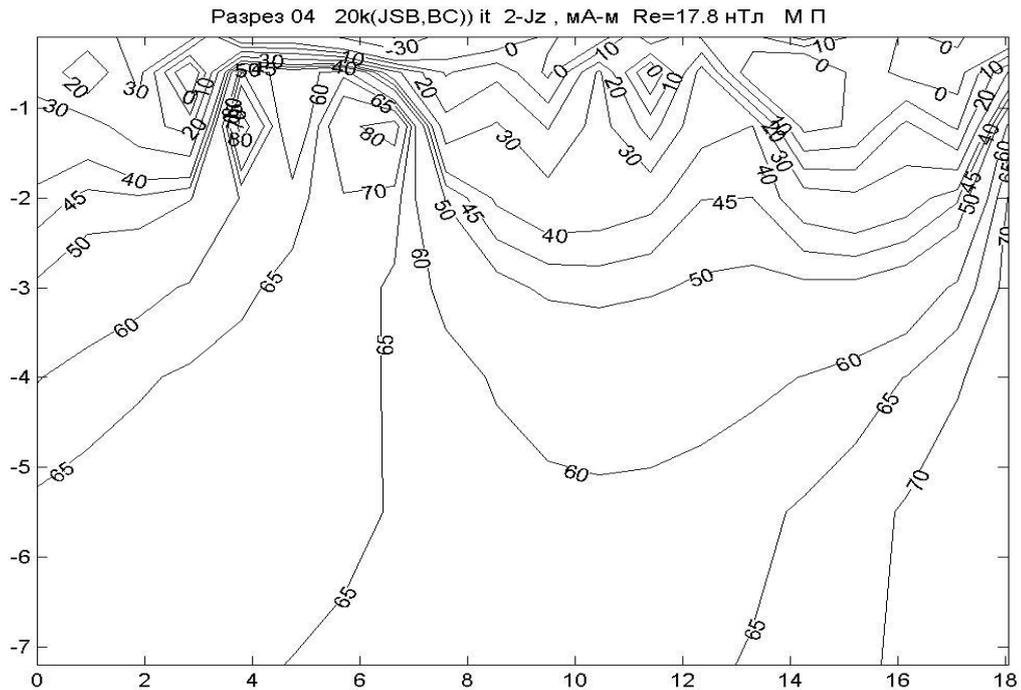


Рис. 5. Вертикальный разрез аномальной ИН горных пород от первого до восьмого слоев объединенной модели (глубины от 70 до 7200 м) по линии 04 (рис.1), полученный решением обратной линейной задачи с критерием оптимальности (11) по МСК итерационных поправок к ИН горных пород для ИФ (12)

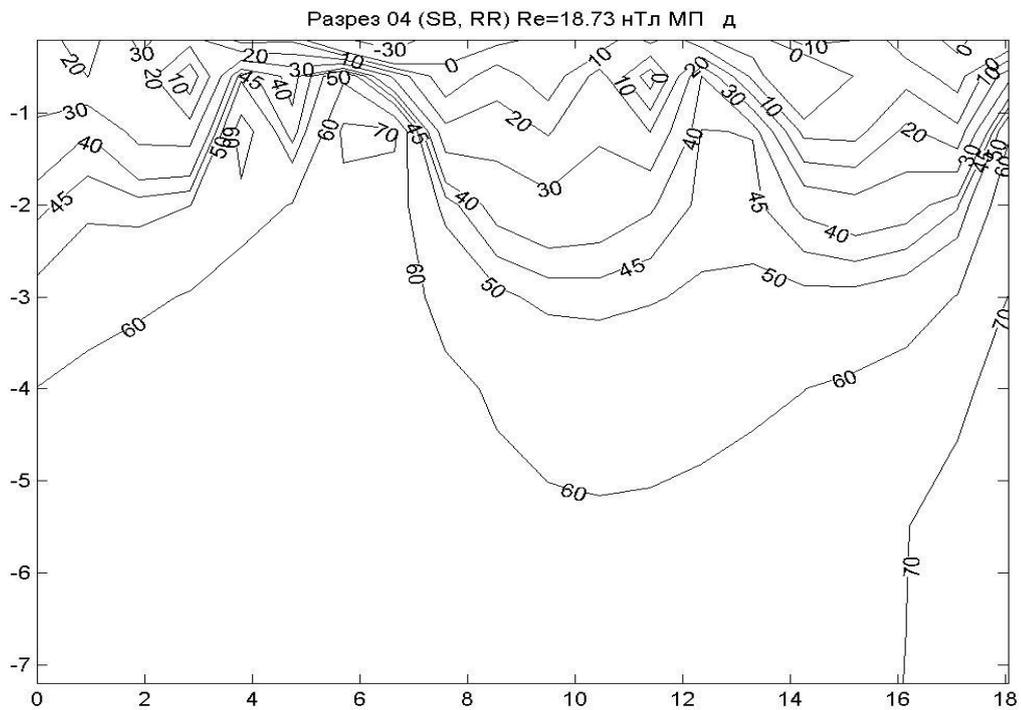


Рис. 6. Вертикальный разрез аномальной ИН горных пород от первого до восьмого слоев объединенной модели (глубины от 70 до 7200 м) по линии 04 (рис.1), полученный решением обратной линейной задачи с критерием оптимальности (10) по МСК невязок магнитного поля для ИФ (12)

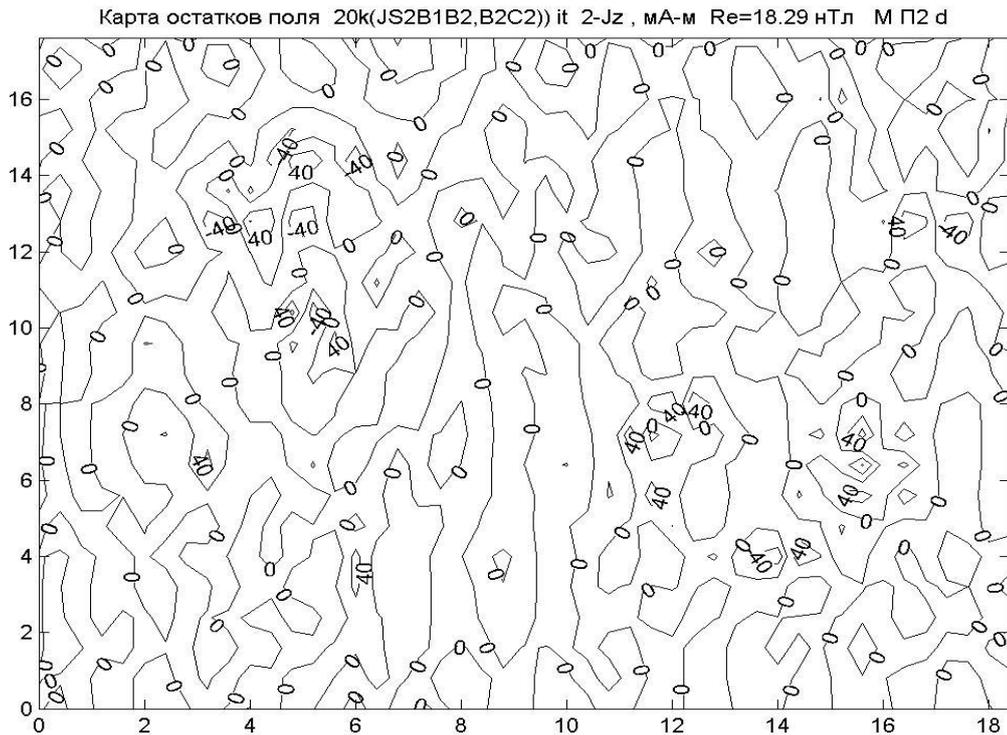


Рис. 7. Карта распределения остатков поля для второй модели (здесь и далее изодинамы приведены в нанотеслах – нТ), полученная решением ОЛЗ с КО (11) для ИФ (6)

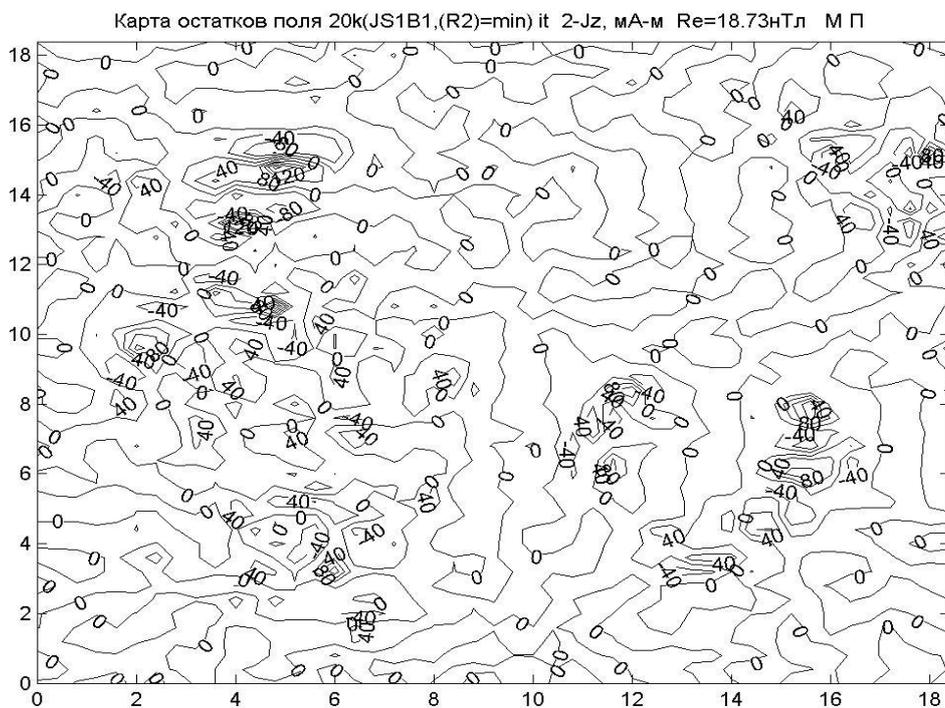


Рис. 8. Карта распределения остатков поля для первой модели полученная решением ОЛЗ на 20 итерациях с КО (11) для ИФ (3) с продолжением решения еще на 20 итерациях с КО (10) для ИФ (12)

Выводы. Новые методы решения ОЛЗ на основе аналогов фильтров Винера–Калмана дают существенные количественные оценки для различных геологических объектов с различной детальностью и на различных этапах исследований, а поэтому рекомендованы для применения на стадии детальных геофизических съемок.

Библиографический список

1. *Литвиненко К.В.* Решение задачи оптимизации на основе метода обобщенного градиента и принципа симметрии// Scientific bulletin of National Mining University. Scientific and technical journal. Днепропетровск. 2012. №6(132). С. 136–140.
2. *Миненко П.А.* Проблемы и перспективы применения линейных методов интерпретации гравиметрических измерений в рудных районах // Теоретические и прикладные аспекты геоинформатики: сб. науч. тр. Киев, 2006. С. 244–256.
3. *Миненко П.А.* Применение методов решения обратной линейной задачи гравиметрии с фильтрацией высокоинтенсивных погрешностей поля аналогами фильтров Винера–Калмана// Вестник Киевского национального университета имени Тараса Шевченко. Геология. 2007. №42. С. 97–100.
4. *Миненко П.А.* Фильтры Винера–Калмана в обратной линейной задаче гравиметрии// Теоретические и прикладные аспекты геоинформатики: сб. науч. тр. Киев, 2007. С. 326–331.
5. *Миненко П.А.* Прямые и обратные задачи гравиметрии с учетом поглощения собственного поля планетами// Scientific bulletin of National Mining University. Scientific and technical journal. Днепропетровск. 2012. №5(131). С. 5–11.
6. *Миненко П.А., Миненко В.П., Миненко Р.В.* О возможности применения дробного дифференцирования в гравиметрии и магнитометрии // Там же. 2012. №6 (132). С. 5–9.
7. *Миненко П.А., Миненко Р.В.* Фильтрационные методы устойчивого решения обратных задач для конечных разностей поля// Докл. НАН Украины. 2013. №4. С. 86–92.
8. *Миненко П.А., Миненко Р.В.* Методы устойчивого решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии на основе статистических критериев оптимизации// Там же. №6. С.137–141.
9. *Elieff Stefan, Ferguson Stephen.* Establishin the “air truth” from 10 years of airborne gravimeter data/ EAGE// First Break. 2008. Vol. 26, №11. P. 73–77.
10. *Fedi M. and Rapolla A.* 3-D inversion of gravity and magnetic data with depth resolution // Geophysics.1999. Vol., 64.P. 452–460.
11. *Prostolupov G., Tarantin M.* Polar 3D transformation of the full gradient of attractive potential // International Journal of Geosciences. 2012. Vol. 3. № 2. P. 329–332. DOI: 10.4236 /ijg. 2012.32035, <http://www.scirp.org/journal/ijg/>
12. *Urdabayev A.T., Atuov R.K.* State-of-the-art capabilities in mining the polymetallic deposits using complex of geophysical methods // Materials of the 34th International Geological Congress. Brisbane, Australia, 2012.
13. *Wiegmann P.B., Zabrodin A.* Conformal maps and integrable hierarchies // Com. Math. Phys. 2000. Vol. 213. P. 523–538.
14. *Zhdanov M.S.* New Advances in Regularized Inversion and Imagin of Gravity, Magnetic and Electromagnetic Data//EGM 2007 International Workshop Innovation in EM, Graw and Mag Methods: a new Perspective for Exploration. Capri, Italy, 2007. April 15–18. P. 1–4.

The Linear Inverse Problem of Gravimetry and Magnetometry with Iterative Formulas of Analogs of Wiener-Kalman Filters

V. P. Minenko

Krivorozhskiy National University, Ukraine, 50086, Krivoy Rog, Gagarin Ave., 54. E-mail: maestozo.1_pavel@mail.ru

The article presents the improved iterative methods of solution of the inversion linear problems of gravimetry and magnetometry based on analogs of Wiener-Kalman filters applied to two interpretation models obtained in result of subdivision of the field grid on two sub grids containing even and odd profiles respectively. The new iterative formulas provide stable and geologically true interpretation with arbitrary initial conditions and without usage of decisions preliminarily obtained with other methods. It gives two close decisions, independent of solutions of the inverse problem achieved with other methods. Examples of practical implementation of method for processing and interpretation of magnetic data obtained at the area of iron ore deposit, Ukraine, are given.

Key words: *Gravimetry, magnetometry, return linear task, Wiener-Kalman filters, iterative formulas and coefficients.*

References

1. *Litvinenko K.V.*, 2012. Reshenie zadachi optimizatsii na osnove metoda obobshchennogo gradient b ghybitsipa simmetrii [Solution of the optimization problem based on the method of generalized gradient and symmetry principle]. Scientific bulletin of National Mining University. Scientific and technical Journal. Dnepropetrovsk, 6(132): 136-140.
2. *Minenko P.A.*, 2006. Problemy I perspektivy primeneniya lineynykh metodov interpretatsii gravimetricheskikh izmereniy v rudnykh rayonakh [Problems and perspectives of application of linear methods of gravity data interpretation at the ore areas]. Sbornik nauchnykh trudov «Teoreticheskie I prikladnye aspekty geoinformatiki». Kiev, pp. 244-256.
3. *Minenko P.A.*, 2007. Primenenie metodov resheniya obratnoy lineynoy zadachi gravimetrii s filtratsiyey vysokointensivnykh pogreshnostey polya analogami filtrov Vienera-Kalmana [Linear methods of noisy gravity data inversion with usage of analogs of Wiener-Kalman filters]. Vestnik Kievskogo natsionalnogo universiteta imeni Tarasa Shevchenka. Geologiyaya, 42:97-100.
4. *Minenko P.A.*, 2007. Filtry Vienera-Kalmana v obratnoy lineynoy zadache gravimetrii [Wiener-Kalman filters for the gravity data inversion]. Sbornik nauchnykh trudov «Teoreticheskie I prikladnye aspekty geoinformatiki». Kiev, pp. 326-331.
5. *Minenko P.A.*, 2012. Pryamye I obratnye zadachi gravimetrii s uchetom pogloshcheniya sobstvennogo polya planetami [Forward and inversion problems of gravity with correction on the attenuation of the planets field]. Scientific bulletin of National Mining University. Scientific and technical journal. Dnepropetrovsk, 5(131): 5-11.
6. *Minenko P.A., Minenko V.P., and Minenko R.V.*, 2012. O vozmozhnostyakh primeneniya drobnogo differentsirovaniya v gravimetrii i magnetometrii [About feasibility of usage of fractional differentiation in gravimetry and magnetometry]. Scientific bulletin of National Mining University. Scientific and technical journal. Dnepropetrovsk, 6(132):5-9.
7. *Minenko P.A., Minenko R.V.*, 2013. Filtratsionnye metody ustoychivogo resheniya obratnykh zadach dlya konechnykh

- raznostey polya []. Doklady NAN Ukrainy. 4:86-92.
8. *Minenko P.A., Minenko R.V.*, 2013. Metody ustoychivogo resheniya obratnykh zadach gravimetrii i magnitometrii na osnove statisticheskikh kriteriev optimizatsii [Methods of stable solution of inversion problem in gravity and magnetometry based on the statistical criteria of optimization]. Doklady NAN Ukrainy, 6:137-141.
 9. *Elieff Stefan, Ferguson Stephen.* 2008. Establishing the “air truth” from 10 years of airborne gravimeter data. *First Break*. 26(11): 73-77.
 10. *Fedi, M., and Rapolla A.*, 1999, 3-D inversion of gravity and magnetic data with depth resolution. *Geophysics*, 64:452–460.
 11. *Prostolupov G., Tarantin M.* 2012. Polar 3D transformation of the full gradient of attractive potential. *International Journal of Geosciences*. 3(2):329-332. DOI: 10.4236 /ijg.2012.32035, <http://www.scirp.org/journal/ijg/>
 12. *Urdabayev A.T., Atuov R.K.* 2012. State-of-the-art capabilities in mining the polymetallic deposits using complex of geophysical methods. Materials of the 34th International Geological Congress, Brisbane, Australia.
 13. *Wiegmann P.B., Zabrodin A.*, 2000. Conformal maps and integrable hierarchies. *Comm. Math. Phys.* 213:523-538.
 14. *Zhdanov M.S.* 2007. New Advances in Regularized Inversion and Imagin of Gravity, Magnetic and Electromagnetic Data//EGM 2007 International Workshop Innovation in EM, Grav. and Mag Methods: a new Perspective for Exploration/ Capri, Italy, April 15-18, pp. 1-4.

Рецензент – доктор физико-математических наук А.С. Долгаль