



TESIS - SS142501

**MODEL SMOOTHING SPLINE DENGAN ERROR
BERKORELASI**

**(Studi Kasus: Jumlah Wisatawan Mancanegara di
Bandara Juanda)**

**RAHMA DWI KHOIRUNNISA
NRP. 1314 201 013**

**Dosen Pembimbing:
Dr. Wahyu Wibowo, M.Si
Dr. Agus Suharsono, M.S**

**PROGRAM MAGISTER
PROGRAM PASCA SARJANA STATISTIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016**



TESIS - SS142501

***SMOOTHING SPLINE* MODEL WITH CORRELATED
ERROR**

(Case Study: Number of Foreign Tourists in Juanda)

**RAHMA DWI KHOIRUNNISA
NRP. 1314 201 013**

**Supervisor:
Dr. Wahyu Wibowo, M.Si
Dr. Agus Suharsono, M.S**

**MASTER PROGRAM
DEPARTMENT OF STATISTICS
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2016**

MODEL SMOOTHING SPLINE DENGAN ERROR BERKORELASI
(Studi Kasus: Jumlah Wisatawan Mancanegara di Bandara Juanda)

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh :

RAHMA DWI KHOIRUNNISA
NRP. 1314 201 013

Tanggal Ujian : 21 Juli 2016
Periode Wisuda : September 2016

Disetujui oleh:



1. **Dr. Wahyu Wibowo, M.Si.**
NIP. 19740328 199802 1 001

(Pembimbing I)



2. **Dr. Agus Suharsono, MS.**
NIP. 19580823 198403 1 003

(Pembimbing II)



3. **Dr. Ismaini Zain, M.Si.**
NIP. 19600525 198803 2 001

(Penguji)



4. **Dr. Brojol Sutijo Ulama, M.Si.**
NIP. 19660125 199002 1 001

(Penguji)



Direktur Program Pascasarjana,



Prof. Ir. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19601202 198701 1 001

MODEL *SMOOTHING SPLINE* DENGAN *ERROR BERKORELASI* (Studi Kasus: Jumlah Wisatawan Mancanegara di Bandara Juanda)

Nama mahasiswa : Rahma Dwi Khoirunnisa
NRP : 1314201013
Pembimbing : Dr. Wahyu Wibowo. M.Si
Co.Pembimbing : Dr. Agus Suharsono, M.S

ABSTRAK

Model *smoothing spline* merupakan teknik spline yang dibantu dengan parameter pemulus. *Smoothing spline* sangat bergantung pada estimator parameter *smoothing*, sehingga pemilihan parameter *smoothing* penting dalam menemukan estimator yang tepat pada *smoothing spline*. Penelitian ini menggunakan model *smoothing spline* yang diestimasi dengan menggunakan *Generalized Maximum Likelihood* (GML) untuk memperoleh model regresi jumlah wisatawan mancanegara (wisman). Model *Smoothing spline* dengan error berkorelasi adalah model yang didalamnya terdapat error yang berkorelasi yang ditunjukkan dengan matriks kovarian sebagai pembobotnya. Model *Smoothing spline* dengan error berkorelasi diterapkan pada data jumlah wisatawan mancanegara di bandara Juanda pada tahun 2000 hingga 2015. Tujuan dari penelitian ini adalah mengestimasi parameter penghalus GML serta memprediksi jumlah wisman di bandara Juanda. Hasil estimasi parameter model *Smoothing spline* dengan error berkorelasi diperoleh model $\hat{f}(t) = \mathbf{Td} + \sum \mathbf{c}$. Selanjutnya untuk model *Smoothing spline* dengan error berkorelasi pada jumlah wisatawan mancanegara di bandara Juanda diperoleh nilai GML sebesar 0,2134811 dan estimasi sigma sebesar 4052,581 dengan derajat bebas 2.

Kata kunci : *Smoothing spline*, error berkorelasi, jumlah wisatawan mancanegara

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

SMOOTHING SPLINE MODEL WITH CORRELATED ERROR (Case Study: Number of Foreign Tourists in Juanda)

Name : Rahma Dwi Khoirunnisa
Student ID : 1314201013
Supervisor : Dr. Wahyu Wibowo. M.Si
Co. Supervisor : Dr. Agus Suharsono, M.S

ABSTRACT

Model smoothing spline is a spline assisted technique smoothing parameter. Smoothing spline is highly dependent on the smoothing parameter estimator, thus smoothing parameter selection is important in finding the right estimator at smoothing spline. This study uses a model smoothing spline estimated using Generalized Maximum Likelihood (GML) to obtain the regression model number of foreign tourists. Smoothing spline models with correlated error in which there is a model that correlates the error covariance matrix as indicated by weight. Smoothing spline models with correlated error applied to the data on the number of foreign tourists at Juanda airport in 2000 to 2015. The purpose of this study is to estimate the smoothing parameter GML and to predict the number of tourists at Juanda airport. The results of the model parameter estimation smoothing spline with correlated error model is $\hat{f}(t) = \mathbf{Td} + \sum \mathbf{c}$. Furthermore, for smoothing spline models with correlated errors in the number of foreign tourists at Juanda airport GML values obtained by 0,2134811 and sigma estimate of 4052,581 with 2 degrees of freedom.

Keyword : *Smoothing spline*, correlated error, number of foreign tourists

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
LEMBAR PENGESAHAN	iii
ABSTRAK	v
ABSTRACT.....	vii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL.....	xv
DAFTAR LAMPIRAN.....	xvii
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	6
1.5 Batasan Masalah.....	6
BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA	7
2.1 Autoregresif (AR)	7
2.2 Regresi Nonparametrik.....	7
2.3 Definisi Ruang dan Karakteristiknya	8
2.4 Ruang Hilbert Reproducing Kernel	13
2.5 Smoothing Spline dalam Regresi Nonparametrik.....	14
2.6 Wisatawan Mancanegara	15
BAB 3 METODE PENELITIAN.....	17
3.1 Sumber Data dan Variabel Penelitian	17
3.2 Langkah-langkah Penelitian.....	17
3.3 Struktur Data	19
3.4 Diagram Alir Penelitian	20

BAB 4 PEMBAHASAN DAN HASIL.....	23
4.1 Estimator Parameter Penghaslus GML pada Model Smoothing Spline dengan Error Berkorelasi.....	23
4.1.1 Estimator Model Smoothing Spline dengan Error Berkorelasi.....	23
4.1.2 Pemilihan Parameter Penghaslus GML	35
4.2 Pemodelan <i>Smoothing Spline</i> dengan Error Berkorelasi	40
4.2.1 Analisis Deskriptif	40
4.2.2 Pemodelan <i>Smoothing Spline</i> dengan Error Berkorelasi	43
BAB 5 KESIMPULAN DAN SARAN.....	49
5.1 Kesimpulan	49
5.2 Saran.....	50
DAFTAR PUSTAKA	51
LAMPIRAN	53
BIOGRAFI PENULIS	59

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1 Alur Pemilihan Parameter Pemulus GML <i>Smoothing Spline</i> Pada Pemodelan Jumlah Wisman	20
Gambar 3.2 Alur Pemodelan Pada Pemodelan Jumlah Wisman Menggunakan <i>Smoothing Spline</i> Error Berkorelasi	21
Gambar 4.1 Time Series Plot Jumlah Wisatawan Mancanegara	41
Gambar 4.2 Boxplot Jumlah Wisatawan Mancanegara.....	42
Gambar 4.3 Prediksi Jumlah Wisatawan Mancanegara.....	48

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Struktur Data Penelitian Jumlah Wisman di Bandara Juanda	19
Tabel 4.1	Statistik Deskriptif Jumlah Wisatawan Mancanegara di bandara Juanda.....	23
Tabel 4.2	Mean Jumlah Wisman Perbulan Selama Tahun 2000-2015	40
Tabel 4.3	Nilai Koefisien d Untuk Data Jumlah Wisman di Bandara Juanda	41
Tabel 4.4	Nilai GML Untuk Data Jumlah Wisman di Bandara Juanda	48
Tabel 4.5	Prediksi Jumlah Wisman di Bandara Juanda	48

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Data jumlah wisatawan mancanegara di bandara Juanda	53
Lampiran 2	Plot time series jumlah wisatawan mancanegara di bandara Juanda	55
Lampiran 3	Boxplot jumlah wisatawan mancanegara di bandara Juanda	56
Lampiran 4	Sintaks untuk menentukan model smoothing spline dengan error berkorelasi	57

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Peramalan adalah suatu proses memperkirakan secara sistematis tentang apa yang paling mungkin terjadi di masa depan berdasar informasi masa lalu dan masa sekarang yang dimiliki agar kesalahannya, selisih antara apa yang terjadi dengan hasil perkiraan, dapat diperkecil. *Time series* adalah metode yang menggunakan beberapa pengamatan yang tersedia pada waktu ke- t untuk meramalkan suatu nilai pada beberapa periode kedepan. Metode *time series* yang digunakan dalam penelitian ini adalah *autoregressive* (AR) dimana *future value* adalah fungsi linear dari beberapa pengamatan masa lalu dan *random error*. Model AR cukup baik digunakan untuk data linear, namun akan mengalami penurunan keakuratan apabila terdapat komponen non linear pada data pengamatan. Dalam perkembangan analisis *time series*, telah banyak pengamatan yang merupakan pengamatan non linear, yaitu hubungan antara kejadian di masa lalu dan saat ini adalah non linear.

Sebelum dilakukan peramalan, data *time series* yang akan dilakukan peramalan sebaiknya diuji kenonlinearitasannya. Karena pemilihan model peramalan *time series* yang tepat untuk suatu data dapat menghasilkan nilai ramalan valid dan akurat adalah problem utama dalam peramalan model peramalan. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data jumlah wisatawan mancanegara (wisman) yang merupakan data *time series* karena datanya berupa data bulanan yang berurutan. Hal ini sesuai dengan pendapat Hanke dan Winchern (2005) bahwa *time series* adalah himpunan observasi data terurut dalam waktu. Untuk mengetahui data tersebut linear atau nonlinear, akan dilakukan uji nonlinearitas menggunakan uji Ramsey's RESET. Data yang diuji pada penelitian ini adalah data jumlah wisman di bandara Juanda dengan model AR dengan orde 1 (AR(1)) karena pada model AR(1) terjadi korelasi pada data waktu sekarang (t) dengan data waktu sebelumnya ($t-1$). Khoirunnisa, Wibowo

dan Suharsono (2016) telah melakukan uji Ramsey's RESET pada data jumlah wisatawan mancanegara di bandara Juanda sehingga diperoleh p value sebesar 0,01 dan berarti bahwa p value kurang dari nilai α yaitu 0,05. Sehingga dapat dibuktikan bahwa model AR(1) merupakan data yang berbentuk nonlinear.

Berdasarkan uji Ramsey's RESET dapat diketahui bahwa data jumlah wisatawan mancanegara di bandara Juanda berbentuk nonlinear sehingga dapat diregresikan dengan semiparametrik ataupun nonparametrik. Dalam penelitian ini data tersebut akan diregresikan dengan regresi nonparametrik. Regresi nonparametrik hanya diasumsikan mulus (*smooth*) dalam arti termuat di dalam suatu ruang fungsi tertentu. Data diharapkan mencari sendiri bentuk estimasinya, tanpa dipengaruhi oleh faktor subyektifitas dari perancang penelitian. Dengan demikian, pendekatan regresi nonparametrik mempunyai fleksibilitas yang tinggi untuk mengestimasi kurva regresi (Eubank,1988).

Ada beberapa teknik untuk mengestimasi kurva regresi dalam bentuk nonparametrik, antara lain dengan menggunakan regresi kernel dan *smoothing spline* (Eubank,1999). *Smoothing spline* merupakan teknik spline yang dibantu dengan parameter pemulus. Spline adalah salah satu jenis potongan-potongan polinomial, yaitu polinomial yang memiliki sifat tersegmen. Sifat tersegmen ini memberikan fleksibilitas lebih dari polinomial biasa, sehingga memungkinkan untuk menyesuaikan diri secara lebih efektif terhadap karakteristik lokal suatu fungsi atau data (Budiantara, 2006).

Untuk menentukan estimator *smoothing spline*, secara umum ada tiga metode untuk memilih parameter estimasi yaitu Generalized Maximum Likelihood (GML), Generalized Cross Validation (GCV) dan Unbiased Risk (UBR). Menurut Wahba (1985), metode-metode tersebut cenderung kurang mampu mengestimasi dengan baik terhadap parameter penghalus jika data yang digunakan mempunyai korelasi positif dan korelasinya diabaikan. Oleh karena itu, Metode GML lebih sesuai digunakan pada data yang berkorelasi seperti data *time series* untuk mengestimasi parameter pemulus *smoothing spline* karena metode ini lebih stabil dalam penyelesaiannya (Wang,1998). Menurut Aydin (2007) Model *smoothing*

spline mempunyai hasil yang lebih baik daripada regresi kernel karena *smoothing spline* merupakan fungsi yang mampu memetakan data dengan baik serta mempunyai variasi error yang kecil.

Beberapa penelitian tentang *smoothing spline* antara lain *smoothing spline ANOVA models: R Package gss* (Chong,2014) yang menunjukkan bahwa fungsi dekomposisi ANOVA membentuk daerah asal multivariat yang berkelanjutan, terpisah dan marginal multi dimensional. Model semiparametrik dan model *mixed effect* dapat juga digunakan. Parameter *smoothing* dipilih dengan validasi silang dan uji model dapat selesai menggunakan proyeksi Kullback-Leibler.

Kelebihan *smoothing spline* dibandingkan dengan kernel menurut Aydin (2007) adalah perhitungan menggunakan *smoothing spline* lebih cepat daripada menggunakan kernel. Perhitungan yang digunakan dalam *smoothing spline* lebih sederhana dibandingkan menggunakan kernel. *Smoothing spline* juga menunjukkan hasil grafis yang lebih baik daripada kernel.

Diana, Budiantara, Purnadi dan Darmesto (2012) menyatakan model regresi nonparametrik multivariabel dengan teknik estimasi *smoothing spline* lebih fleksibel dan efektif dalam menangani sifat lokal dari fungsi pada domain yang berbeda secara terpadu. Dengan menggunakan metode *Penalized Least Square* (PLS) diperoleh estimator *smoothing spline* dalam model regresi nonparametrik multivariabel. Model regresi nonparametrik multivariabel dapat menghasilkan wawasan ke dalam struktur ekonometrik yang sulit untuk dideteksi dengan estimasi parametrik.

Observasi berkorelasi sangat berpengaruh terhadap pemilihan parameter penghalus, yang merupakan hal penting pada pendekatan *smoothing spline*. Suatu data dikatakan berkorelasi ketika terjadi korelasi antara suatu periode t dengan periode sebelumnya ($t-1$). Error berkorelasi artinya adanya korelasi atau hubungan pada error antar pengamatan (observasi). Error berkorelasi bisa terjadi pada data autoregresif (1) karena data pada waktu sekarang berkorelasi dengan periode sebelumnya. Sehingga diperlukan cara untuk menyelesaikan error berkorelasinya

dengan menggunakan model *smoothing spline* dengan error berkorelasi yang menggunakan parameter penghalus GML.

Pemilihan data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data jumlah wisman di bandara Juanda, bandara Juanda dipilih karena jumlah penumpang wisman yang masuk melalui bandara Juanda dari tahun ke tahun terus meningkat. Berdasarkan data BPS, jumlah wisman di bandara Juanda pada tahun 2010 sebesar 168.888 pengunjung, pada tahun 2011 meningkat menjadi 185.815 pengunjung, pada tahun 2012 meningkat menjadi 197.776 pengunjung. Jumlah wisman Pada tahun 2013 meningkat pesat sebesar 225.041 pengunjung. Sehingga jumlah wisman yang meningkat terus menerus setiap tahunnya merupakan landasan dilakukan peramalan jumlah wisman di tahun-tahun yang akan datang.

Seperti pada bulan Januari 2011 jumlah wisman yang 13.580 pengunjung, dan meningkat di bulan Januari 2012 sebanyak 14.200 pengunjung. Banyaknya wisman yang masuk melalui bandara Juanda ini yang melandasi pemilihan data yang digunakan pada penelitian ini. Hal ini sejalan dengan rencana angkasa puara I untuk membangun terminal baru. Berdasarkan perhitungan Angkasa Pura I, setiap tahun perkembangan penumpang di bandara Juanda adalah 18% sampai 20%. Oleh karena itu, Angkasa Pura I berencana akan menambah jumlah terminal (www.angkasapura1.co.id). Hal ini dikarenakan bandara Juanda tersebut merupakan bandara yang sering dikunjungi wisman sehingga dimungkinkan adanya peningkatan jumlah wisman dari bandara Juanda. Bandara Juanda merupakan bandara dengan jumlah kedatangan wisman yang tinggi. Model yang dihasilkan tersebut diharapkan dapat digunakan untuk memprediksi jumlah wisman di bandara Juanda.

Beberapa model yang telah digunakan berdasarkan penelitian sebelumnya untuk meramalkan jumlah wisman menggunakan model regresi linier antara lain ARIMA Box-Jenkins, VARIMA dan GSTAR. Penelitian Rahmi dan Wulandari (2011) yang meramalkan jumlah wisatawan mancanegara yang masuk melalui pintu kedatangan Bandara Soekarno Hatta Dan Bandara Juanda sehingga diperoleh hasil bahwa model ARIMA Box-Jenkins sudah sesuai untuk memodelkan jumlah wisman yang masuk melalui pintu kedatangan Bandara Soekarno Hatta dan Bandara Juanda.

Penelitian Prastuti dan Suhartono (2014) model GSTAR-SUR musiman untuk peramalan jumlah wisatawan mancanegara di empat lokasi wisata di Indonesia sehingga diperoleh hasil perbandingan akurasi peramalan dari model multivariat deret waktu, yaitu VARIMA, GSTAR-OLS dan GSTAR-SUR menunjukkan bahwa secara keseluruhan modelnya sudah sesuai untuk memodelkan jumlah wisman di empat lokasi di Indonesia. Untuk regresi nonlinier yang menggunakan data jumlah wisman adalah *Neural Networks-Multiscale Autoregressive* (NN-MAR) seperti yang dikembangkan dalam penelitian Sutijo, Suhartono dan Endharta (2011) mengenai peramalan data pariwisata menggunakan *Neural Networks-Multiscale Autoregressive* (NN-MAR) sehingga diperoleh hasil bahwa model NN-MAR sesuai untuk data peramalan deret waktu seasonal.

Berdasarkan uraian diatas, pada penelitian ini akan meramalkan jumlah wisman di bandara Juanda menggunakan model *smoothing spline* dengan error berkorelasi.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan estimasi parameter penghalus pada model jumlah wisman di bandara Juanda menggunakan model *smoothing spline* dengan error berkorelasi?
2. Bagaimana prediksi jumlah wisman di bandara Juanda menggunakan model *smoothing spline* dengan error berkorelasi?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dipaparkan, maka penelitian ini memiliki tujuan sebagai berikut:

1. Menentukan estimasi parameter penghalus model jumlah wisman di bandara Juanda menggunakan model *smoothing spline* dengan error berkorelasi.
2. Menentukan prediksi jumlah wisman di bandara Juanda menggunakan model *smoothing spline* dengan error berkorelasi.

1.4 Manfaat Penelitian

Jika ditinjau dari segi keilmuan, manfaat penelitian ini adalah untuk meningkatkan wawasan pengetahuan dan keilmuan mengenai metode pemodelan untuk data kualitatif, khususnya model model *smoothing spline* dengan error berkorelasi. Selain itu, diharapkan penelitian ini dapat memberikan manfaat bagi pemerintah khususnya bandara Juanda yaitu dengan mengetahui jumlah kedatangan wisman pada tahun-tahun mendatang untuk dijadikan acuan dalam mengambil keputusan kebijakan dalam jumlah wisman di bandara Juanda.

1.5 Batasan Penelitian

Pada penelitian ini, permasalahan hanya dibatasi pada penggunaan model *Autoregressive* (AR) orde pertama (AR(1)).

BAB 2

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 *Autoregressive (AR)*

Model *Autoregressive* adalah model yang menggambarkan bahwa variabel dependen dipengaruhi oleh variabel dependen itu sendiri pada periode-periode dan waktu-waktu sebelumnya (Hanke dan Winchern, 2005). Secara umum model *autoregressive (AR)* mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$Y_t = \theta_0 + \theta_1 Y_{t-1} + \theta_2 Y_{t-2} + \dots + \theta_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.1)$$

dimana,

Y_t : Nilai masa sekarang

θ_0 : Konstanta

Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p} : Nilai masa lalu yang berhubungan

$\theta_1, \dots, \theta_p$: Koefisien atau parameter dari model *autoregressive*

ε_t : residual pada waktu t

Orde dari model AR (yang diberi notasi p) ditentukan oleh jumlah periode variabel dependen yang masuk dalam model. Sebagai contoh :

$Y_t = \theta_0 + \theta_1 Y_{t-1}$ adalah model AR orde 1 (AR(1)).

2.2 **Regresi Nonparametrik**

Statistik nonparametrik disebut juga statistik bebas sebaran. Statistik nonparametrik tidak mensyaratkan bentuk sebaran parameter populasi. Statistik nonparametrik dapat digunakan pada data yang memiliki sebaran normal atau tidak. Statistik nonparametrik biasanya digunakan untuk melakukan analisis pada data nominal atau ordinal. Metode statistik nonparametrik merupakan metode statistik yang dapat digunakan dengan mengabaikan asumsi-asumsi yang melandasi penggunaan metode statistik parametrik, terutama yang berkaitan dengan distribusi normal.

Regresi nonparametrik merupakan suatu metode Statistika yang digunakan untuk mengetahui hubungan antara variabel respon dan prediktor yang tidak diketahui bentuk fungsinya, hanya diasumsikan fungsi *smooth* (mulus) dalam arti termuat dalam suatu ruang fungsi tertentu, sehingga regresi nonparametrik memiliki fleksibilitas yang tinggi. Model regresi nonparametrik secara umum dapat disajikan sebagai berikut (Eubank, 1988):

$$y_t = f(x_t) + \varepsilon_t \quad \text{dengan } t = 1, 2, \dots, n \quad (2.2)$$

2.3 Definisi Ruang dan karakteristiknya

Estimasi fungsi regresi nonparametrik, digunakan pendekatan ruang Hilbert reproducing kernel. Salah satu konsep yang mendasari ruang Hilbert adalah ruang metrik dan ruang vektor yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.3.1 (Ruang Metrik)

Ruang metrik adalah sebuah pasangan (X, d) , dimana X adalah suatu himpunan dan d adalah suatu metrik (fungsi jarak) pada X yang didefinisikan pada $X \times X$ sedemikian hingga untuk setiap X, y, z di X berlaku:

- 1) d bernilai real, finit dan nonnegatif
- 2) $d(X, y) = 0$ jika dan hanya jika $X = y$
- 3) $d(X, y) = d(y, X)$ (simetri)
- 4) $d(X, y) \leq d(X, z) + d(z, y)$ (ketaksamaan segitiga).

Dengan simbol \times menyatakan hasil kali kartesius dari suatu himpunan: adalah himpunan semua pasangan terurut (a, b) , dengan $a \in A$ dan $b \in B$. Sehingga $X \times X$ adalah himpunan semua pasangan terurut dari anggota-anggota X .

Definisi 2.3.2 (Ruang Vektor)

Suatu ruang vektor adalah suatu himpunan tak kosong X yang isinya adalah vektor-vektor dengan dua operasi aljabar, yaitu penjumlahan vektor dan perkalian vektor dengan skalar (Kreyzig, 1978).

Berikut diberikan definisi ruang vektor berdimensi finit dan infinit yang akan digunakan sebagai dasar untuk pembuktian teorema 4.1.1.

Definisi 2.3.3 (Ruang vektor berdimensi finit dan infinit)

Suatu ruang vektor X dikatakan berdimensi finit jika ada suatu bilangan bulat positif n sedemikian hingga X memuat suatu himpunan n vektor yang bebas linier, sedangkan sebarang himpunan $n + 1$ vektor atau lebih di X , tidak bebas linier, n dinamakan dimensi dari X , ditulis $n = \dim X$. Dari definisi, $X = \{0\}$ adalah berdimensi finit, karena $\dim X = 0$. Jika X berdimensi tidak finit dikatakan infinit (Kreuzig, 1978).

Pada suatu ruang vektor, bisa diperoleh suatu jumlah langsung antara dua subruang. Konsep ini akan mendasari jumlah langsung yang terdapat pada ruang Hilbert.

Definisi 2.3.4 (Direct Sum)

Ruang vektor X dikatakan *direct sum* atas dua subruang Y dan Z pada X yang ditulis $X = Y \oplus Z$, jika untuk setiap $x \in X$ dapat ditulis secara tunggal sebagai $x = y + z$, dengan $y \in Y$ dan $z \in Z$ (Kreuzig, 1978).

Jika pada suatu ruang vektor, didefinisikan suatu norm, maka ruang tersebut disebut ruang norm. Konsep ruang norm ini mendasari konsep norm pada ruang Hilbert.

Definisi 2.3.5 (Ruang Norm)

Ruang norm X adalah suatu ruang vektor yang memiliki norm yang didefinisikan padanya. Norm pada suatu ruang vektor X adalah sebuah fungsi bernilai real di X dimana nilai pada suatu $x \in X$ dinyatakan dengan $\|x\|$ (dibaca “norm X ”) dan mempunyai sifat-sifat:

$$1) \|x\| \geq 0$$

$$2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- 3) $\|ax\| = |a|\|x\|$
 4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (ketaksamaan segitiga);

Dimana X dan y adalah sebarang vektor di X dan α adalah sebarang skalar. Norm pada X mendefinisikan suatu metrik di X yaitu

$$d(x, y) = \|x - y\| \text{ dengan } x, y \in X.$$

dan disebut metrik yang diinduksi norm.

Ruang vektor dari semua fungsi kuadrat terintegral pada $[0,1]$ ($L_2[0,1]$), membentuk sebuah ruang norm X dengan norm yang didefinisikan sebagai:

$$\|x\| = \left(\int_0^1 x(t)^2 \right)^{1/2} \tag{2.3}$$

Salah satu konsep penting dalam ruang Hilbert adalah barisan Cauchy dan kelengkapan yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.6 (Barisan Cauchy)

Suatu barisan (x_n) pada suatu ruang metrik (X, d) dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\epsilon > 0$ ada suatu $N = N(\epsilon)$ sedemikian hingga

$$d(x_m, x_n) < \epsilon \text{ untuk setiap } m, n > N.$$

Definisi 2.3.7 (Kelengkapan)

Ruang X dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di X , konvergen ke suatu bilangan di X (mempunyai suatu limit yang merupakan anggota X).

Pada suatu ruang vektor, jika didefinisikan suatu *inner product* maka ruang tersebut membentuk ruang *inner product*.

Definisi 2.3.8 (Ruang Inner Product)

Suatu ruang *inner product* adalah suatu ruang vektor X dengan suatu *inner product* yang didefinisikan pada X .

Inner product pada X adalah suatu pemetaan dari $X \times X$ ke skalar di X , yaitu: untuk setiap pasang vektor x dan y terdapat suatu hubungan dengan sebuah skalar yang ditulis: $\langle x, y \rangle$ dan ini dinamakan *inner product* dari x dan y sedemikian hingga untuk semua vektor x, y, z dan skalar α mempunyai sifat:

$$1) \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$2) \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$3) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

$$4) \langle x, x \rangle \geq 0$$

$$5) \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Suatu *inner product* pada X mendefinisikan suatu norm pada X yang diberikan oleh:

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2 (\geq 0) \tag{2.4}$$

Dan mendefinisikan suatu metrik pada X , yaitu:

$$\langle x - y, x - y \rangle = \|x - y\|^2 = \{d(x, y)\}^2$$

Sifat ortogonal dari dua ruang atau subruang akan mendasari konsep ortogonalitas pada ruang Hilbert.

Definisi 2.3.9 (Ortogonalitas)

Elemen x dari ruang *inner product* X dikatakan ortogonal ke elemen $y \in X$ jika $\langle x, y \rangle = 0$. x dan y dikatakan ortogonal dan ditulis $x \perp y$. Demikian juga untuk subhimpunan $A, B \subset X, x \perp a$ untuk semua $a \in A$ dan $A \perp B$ jika $a \perp b$ untuk semua $a \in A$ dan $b \in B$ (Kreyzig, 1978).

Pada ruang Hilbert reproducing kernel didefinisikan suatu fungsi linier terbatas. Berikut diberikan beberapa konsep yang mendasari fungsional linier terbatas.

Definisi 2.3.10 (Operator Linier)

T disebut operator linier jika domain T (ditulis $D(T)$) adalah ruang vektor dan range T (ditulis $R(T)$), berada didalam ruang vektor atas *field* yang sama dan untuk setiap $x, y \in D(T)$ dan skalar α berlaku:

$$(i) T(x + y) = Tx + Ty$$

$$(ii) T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad (\text{Kreyzig, 1978}).$$

Definisi 2.3.11 (Operator Linier Terbatas)

Misalkan X, Y adalah ruang norm dan $T : D(T) \rightarrow Y$ adalah suatu operator linier, dengan $D(T) \subset X$. Operator T dikatakan terbatas jika terdapat bilangan real c sedemikian hingga untuk setiap $x \in D(T)$, berlaku $\|Tx\| \leq c\|x\|$.

Definisi 2.1.12 (Fungsional Linier)

Suatu fungsional linier f adalah suatu operator linier dengan domain pada suatu ruang vektor X dan range pada *field* skalar K atas X , ditulis $f : D(f) \rightarrow K, D(f) \subset X$, dimana $K = R$, jika X adalah himpunan bilangan real dan $K = C$ jika X adalah himpunan bilangan kompleks.

Definisi 2.3.13 (Fungsional Linier Terbatas)

Fungsional linier terbatas f adalah suatu operator linier terbatas dengan range di *field* skalar K dari suatu ruang norm X , yang memuat $D(f)$. Sehingga terdapat bilangan real c sedemikian hingga untk setiap $x \in D(f)$, berlaku $\|f(x)\| \leq c\|x\|$.

Definisi 2.3.14 (Ruang Hilbert)

Ruang Hilbert adalah ruang *inner product* yang lengkap (Berberian,1961). Dari suatu ruang Hilbert bisa diturunkan suatu teorema yang sangat bermanfaat dalam menentukan estimator fungsi nonparametrik yaitu:

Teorema 2.3.1 (Teorema Representasi Riesz)

Setiap fungsional linier terbatas f dalam ruang Hilbert H dapat direpresentasikan secara tunggal dalam bentuk *inner product*, yaitu $f(x) = \langle x, z \rangle$ untuk $x, z \in H$ dimana z adalah tunggal dan bergantung kepada f serta memiliki norm $\|z\| = \|f\|$ (Kreyzig,1978).

2.4 Ruang Hilbert Reproducing Kernel (Wahba,1990)

Definisi 2.4.1 (Reproducing Kernel)

Reproducing kernel (r.k.) dari H adalah suatu fungsi R yang didefinisikan pada $[0,1] \times [0,1]$ sedemikian hingga untuk setiap titik tertentu $t \in [0,1]$ berlaku $R_t \in H$ dengan $R_t(s) = R(s,t)$ dan $f(t) = \langle R_t, f \rangle, f \in \mathcal{H}$

Definisi 2.4.2 (Ruang Hilbert Reproducing Kernel)

Ruang Hilbert Reproducing Kernel (r.k.h.s) adalah suatu ruang Hilbert dari fungsi-fungsi bernilai real pada $[0,1]$ dengan sifat bahwa untuk setiap $t \in [0,1]$, fungsional L_t yang menghubungkan f dengan $f(t)$, $L_t f \rightarrow f(t)$, merupakan fungsi linier terbatas, yang berarti terdapat bilangan real c sedemikian hingga $|L_t f| = f(t) \leq c \|f\|$, untuk semua f di r.k.h.s. dimana $\|\cdot\|$ adalah norm di ruang Hilbert. Jika \mathcal{H} adalah suatu r.k.h.s. maka menurut teorema representasi Riesz, untuk setiap $t \in [0,1]$ terdapat suatu elemen R_t di \mathcal{H} yang memiliki sifat $L_t f = f(t) = \langle R_t, f \rangle, f \in \mathcal{H}$.

2.5 Smoothing spline Dalam Regresi Nonparametrik

Misalkan observasi sampling (z_j, y_j) dengan y_j adalah variabel respon dengan $j = 1, 2, \dots, n$ menunjukkan banyaknya pengamatan, z_j merupakan variabel prediktor yang tidak diketahui bentuk pola hubungannya dengan variabel respon. Hubungan antara z_j dan y_j dapat dimodelkan dengan regresi nonparametrik,

$$y_t = f(z_t) + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (2.5)$$

dimana ε_t merupakan error random yang saling independen dengan mean 0 dan variansi σ^2 . bentuk kurva regresi f diasumsikan tidak diketahui dan termuat di dalam ruang Sobolev $W_2^m[a, b]$ dengan (Wahba, 1990):

$$W_2^m[a, b] = \left\{ f; \int_a^b (f^{(m)}(z))^2 dz < \infty \right\}$$

Untuk mendapatkan estimator *smoothing spline* pada regresi nonparametrik dapat menggunakan metode PLS dengan meminimumkan (Wahba, 1990) :

$$n^{-1} \sum_{j=1}^n (y_j - f(z_j))^2 + \lambda \int_a^b (f^{(m)}(z_j))^2 dz \quad (2.6)$$

Bentuk fungsi f yang digunakan untuk mengestimasi kurva regresi nonparametrik f adalah bentuk fungsi *spline*, yaitu

$$f(z_j) = \sum_{v=1}^m \alpha_v \phi_v(z_j) + \sum_{j=1, l=1}^n \beta_j \psi(z_j, z_l), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

Misalkan $f = (f_1, \dots, f_n)'$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)'$, $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_n)'$, $T = \{\phi_v(z_j)\}_{j=1, l=1}^{n, m}$

dengan $\phi_v(z) = \frac{z^{v-1}}{(v-1)!}$, $v = 1, 2, \dots, m$ dan $V = \{\psi(z_j, z_l)\}_{j=1, l=1}^{n, m}$ dengan

$\psi(z_j, z_l) = \int_a^b \frac{(z_j - u)_+^{m-1} (z_l - u)_+^{m-1}}{[(m-1)!]^2} du$ sehingga persamaan (2.7) dapat ditulis

dalam bentuk matrik $f = T\alpha + V\beta$. Bentuk (2.6) dapat diselesaikan dengan meminimumkan

$$n^{-1}(y - T\alpha - V\beta)'(y - T\alpha - V\beta) + \lambda\beta'V\beta \quad (2.8)$$

dengan mencari turunan pertama persamaan (2.8) terhadap α dan β kemudian hasilnya disamakan dengan nol sehingga diperoleh

$$\left. \begin{aligned} -V'y + V'T\hat{\alpha} + (V'V + n\lambda V')\hat{\beta} &= 0 \\ -T'y + T'T\hat{\alpha} + TV\hat{\beta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

dan dengan menyelesaikan persamaan (2.9) diperoleh

$$\hat{\alpha}' = \left(T'(V + n\lambda I)^{-1} T \right)^{-1} T'(V + n\lambda I)^{-1} y \quad (2.10)$$

$$\hat{\beta}' = (V + n\lambda I)^{-1} \left(I - T \left(T'(V + n\lambda I)^{-1} T \right)^{-1} T'(V + n\lambda I)^{-1} \right) y \quad (2.11)$$

Berdasarkan persamaan (2.10), (2.11) dan

$$\hat{f}_\lambda = T\hat{\alpha} + V\hat{\beta} \text{ diperoleh } \hat{f}_\lambda = y = n\lambda\hat{\beta} = A(\lambda)y$$

$$\text{dimana } A(\lambda) = I - n\lambda(V + n\lambda I)^{-1} \left\{ I - T \left(T'(V + n\lambda I)^{-1} T \right)^{-1} T'(V + n\lambda I)^{-1} \right\}$$

adalah matriks *hat*.

2.7 Wisatawan Mancanegara

Menurut Undang-undang No. 10 Tahun 2009 tentang kepariwisataan disebutkan bahwa wisata adalah kegiatan perjalanan yang dilakukan oleh seseorang atau sekelompok orang dengan mengunjungi tempat tertentu untuk tujuan rekreasi, pengembangan pribadi, atau mempelajari keunikan daya tarik wisata yang dikunjungi dalam jangka waktu sementara. Sedangkan wisatawan adalah orang yang melakukan kegiatan wisata. *World Tourism Organization* (WTO) dan *International Union of Office Travel Organization* mendefinisikan wisatawan mancanegara (*tourist*) adalah tamu mancanegara yang tinggal paling sedikit dua puluh empat jam namun tidak lebih dari enam bulan di tempat yang dikunjunginya.

Berdasarkan data yang dihimpun oleh BPS (Badan Pusat Statistik) jumlah wisatawan mancanegara yang datang melalui bandara Juanda mulai tahun 2000 sampai tahun 2015 sebanyak 2.300.880 turis. Jumlah wisman pada tahun 2015 sebanyak 200.851 turis dan pada tahun 2014 sebanyak 217.193 turis karena pada tahun 2015 wisman yang masuk melalui bandara Juanda mengalami penurunan dibanding pada tahun 2014. Hal ini dikarenakan adanya bencana alam yang terjadi di wilayah sekitar bandara Juanda pada tahun 2015.

BAB 3

METODE PENELITIAN

3.1 Sumber Data dan Variabel Penelitian

Data yang digunakan merupakan data sekunder jumlah wisatawan mancanegara di Kota Surabaya yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik (BPS). Periode data jumlah wisatawan mancanegara yang akan diteliti mulai dari bulan Januari tahun 2000 sampai dengan Desember tahun 2015. Data dibagi menjadi 2 yaitu, data *in sample* sebagai data training dan data *out sample* sebagai data testing. Data *in sample* dimulai pada bulan Januari tahun 2000 sampai dengan Desember 2014. Sedangkan data *out sample* mulai bulan Januari 2015 sampai dengan Desember 2015.

3.2 Langkah-langkah Penelitian

Langkah analisis yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari tiga tahap, diantaranya tahap identifikasi masalah, tahap pengumpulan dan pengolahan data, serta tahap analisis data dan kesimpulan. Penjelasan yang lebih rinci dari masing-masing tahap diuraikan sebagai berikut.

1. Identifikasi Masalah

Pada tahap awal ini peneliti melakukan identifikasi permasalahan dan menentukan tujuan penelitian, kemudian mengumpulkan serta mempelajari referensi-referensi atau literatur-literatur yang sesuai dengan konsep penelitian. Setelah acuan penelitian yang berupa referensi dan literatur terpenuhi, selanjutnya dilakukan identifikasi metode analisis dan langkah-langkah yang tepat dalam mengolah data untuk menjawab tujuan penelitian.

2. Pengolahan Data

Pada tahap kedua ini dilakukan pengumpulan data sekunder meliputi jumlah wisman di bandara Juanda. Selanjutnya dilakukan pengolahan data menggunakan

analisis statistik inferensia dengan pendekatan regresi nonparametrik *smoothing spline* dengan error berkorelasi. Berikut ini adalah langkah-langkah dalam pengolahan data:

1. Untuk menjawab tujuan yang pertama akan dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

- a. Menentukan parameter penghalus λ dan parameter korelasi ρ yang optimal
- b. Membuat model AR (1) menggunakan data jumlah wisatawan mancanegara di bandara Juanda.

$$y_t = f_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$t = 1, 2, \dots, 12$$

c. Mengestimasi λ dan ρ dengan memaksimumkan log-likelihood berdasarkan z .

$$l(\lambda, \rho, b | z) = -\frac{1}{2} \log |bQ_2' B(\lambda, \rho) Q_2| - \frac{1}{2b} z'(Q_2' B(\lambda, \rho) Q_2)^{-1} z + C$$

Dimana C adalah konstanta dan B adalah suatu matriks.

d. Memaksimumkan l terhadap b :

$$l(\lambda, \rho | b) = -\frac{1}{2} \log |bQ_2' B(\lambda, \rho) Q_2| - \frac{n-m}{2b} \log b + C$$

e. Menentukan λ dan ρ dengan meminimumkan:

$$M(\lambda, \rho) = \frac{z'(Q_2' B Q_2)^{-1} z}{\left[\det(Q_2' B Q_2)^{-1} \right]^{1/(n-r)}}$$

f. Membuat plot kurva regresi *smoothing spline* dengan error berkorelasi.

2. Menjawab tujuan kedua akan digunakan software R dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- a. Membuat plot antara variabel respon (y_t) dengan variabel prediktor f_{t-1} .
- b. Memodelkan data dengan model regresi nonparametrik *smoothing spline* dengan error berkorelasi.
- c. Menghitung nilai GML untuk model regresi *smoothing spline*
- d. menentukan nilai optimal berdasarkan nilai GML minimum.
- e. Menginterpretasikan hasil analisis yang menghasilkan model dan mengambil kesimpulan.

3. Analisis Data dan Kesimpulan

Pada tahap akhir ini dilakukan interpretasi dari *output* dan selanjutnya peneliti memberikan kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

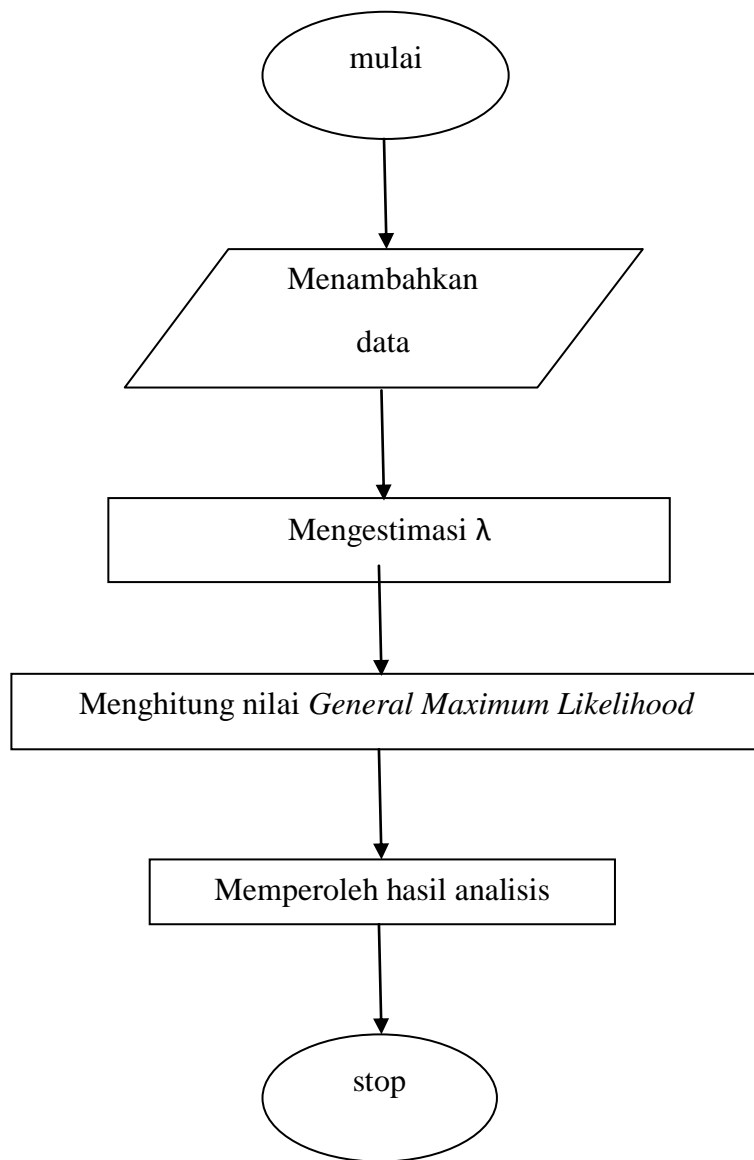
3.3 Struktur Data

Struktur data dalam penelitian ini ditunjukkan pada Tabel 3.1.

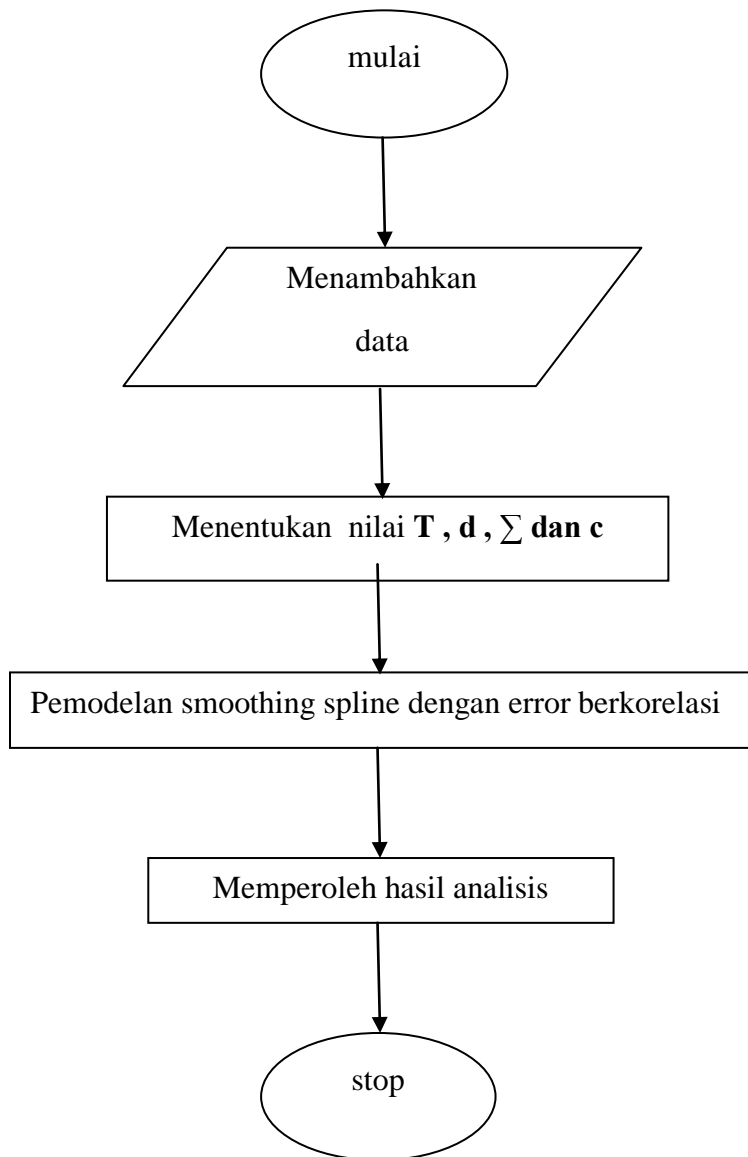
Tabel 3.1 Struktur Data Penelitian Jumlah Wisman di bandara Juanda

m	n	Bulan (t)	$Z_{1,n}$
2	1	1	$Z_{1,1}$
	2	2	$Z_{1,2}$
	3	3	$Z_{1,3}$
	⋮	⋮	⋮
	36	12	$Z_{1,36}$
	⋮	⋮	⋮
	181	1	$Z_{1,181}$
	⋮	⋮	⋮
	192	12	$Z_{1,192}$

3.4 Diagram Alir Penelitian



Gambar 3.1 Alur Estimasi Parameter Pemulus GML *Smoothing Spline* Pada Pemodelan Jumlah Wisman



Gambar 3.2 Alur Pemodelan Pada Pemodelan Jumlah Wisman Menggunakan *Smoothing Spline* Error Berkorelasi

Halaman ini sengaja dikosongkan

BAB 4

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini membahas mengenai peramalan jumlah wisatawan mancanegara di bandara Juanda dengan prosedur untuk pembentukan model *smoothing spline*. Langkah pertama adalah analisis deskriptif, yaitu langkah yang menjelaskan mengenai data yang akan digunakan, baik banyaknya data maupun deskripsi data. Tahapan prosedur untuk pembentukan model *smoothing spline* terdiri dari prosedur pembentukan parameter penghalus dengan menggunakan *Generalized Maximum Likelihood* (GML) setelah diperoleh parameter penghalus GML selanjutnya dapat diperoleh model *smoothing spline* dengan data jumlah wisatawan mancanegara di bandara Juanda.

4.1 Estimator Parameter Penghalus GML pada Model *Smoothing Smoothing spline* Dengan Error Berkorelasi

4.1.1. Estimator Model *Smoothing Smoothing spline* Dengan Error Berkorelasi

Pada regresi nonparametrik, pendekatan yang dilakukan adalah mengestimasi kurva regresi yang sebelumnya tidak ada asumsi tentang bentuk kurva tersebut. Asumsi yang ada hanyalah kurva tersebut termuat dalam ruang fungsi tertentu, dimana pemilihan ruang fungsi ini dimotivasi oleh sifat kemulusan (*smoothness*) yang dimiliki oleh fungsi tersebut. Oleh karena itu dalam pembahasan ini akan dikaji bagaimana menentukan bentuk estimator *smoothing spline* agar dapat memperoleh kurva pendekatannya.

Asumsikan data mengikuti model pada persamaan $y_i = f(t_i) + \varepsilon_i$, $t_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, \dots, n$ dengan $f \in W_m^2$ dan $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2 W^{-1})$. Estimator *smoothing spline* dengan error berkorelasi diperoleh dengan cara meminimumkan *Penalized Weighted Least Square* (PWLS) pada persamaan

$n^{-1} \sum_{i=1}^n W_i (y_i - f(t_i))^2 + \lambda \int_a^b (f^{(m)}(t))^2 dt$. Jika model data dihubungkan dengan permasalahan *smoothing spline* secara umum maka model persamaan $y_i = f(t_i) + \varepsilon_i$, menjadi:

$$y_i = L_i f + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

dengan $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2 W^{-1})$, $f \in \mathcal{H}$, adalah suatu ruang Hilbert dan L_1, \dots, L_n merupakan fungsi linear terbatas di \mathcal{H} . Misalkan \mathcal{H} dapat didekomposisikan menjadi $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, dimana \oplus adalah *direct sum* dengan $\mathcal{H}_0 \perp \mathcal{H}_1$. Estimator f diperoleh dengan mencari $f \in \mathcal{H}$ yang meminimumkan:

$$n^{-1} \sum_{j=1}^n (y_j - f(t_j))^2 + \lambda \int_a^b (f^{(m)}(t))^2 dz \quad (4.2)$$

dengan P adalah proyeksi ortogonal f pada \mathcal{H}_1 di $f \in \mathcal{H}$. Bentuk estimator f diberikan melalui teorema berikut:

Teorema 4.1.1

Misalkan ϕ_1, \dots, ϕ_n basis ruang \mathcal{H}_0 dan ξ_1, \dots, ξ_m basis \mathcal{H}_1 . Jika P adalah proyeksi ortogonal dari f ke \mathcal{H}_1 dalam \mathcal{H} dalam matriks $\mathbf{T}_{n \times m}$ adalah matriks *full rank* yang diberikan oleh

$$\mathbf{T}_{n \times m} = \{L_i \phi_v\}_{i=1}^n \quad m_{v=1} \quad (4.3)$$

Maka \hat{f} , yang meminimumkan (4.1.2) diberikan oleh:

$$\hat{f} = \sum_{v=1}^m d_v \phi_v + \sum_{v=1}^n c_v \xi_v, \quad (4.4)$$

dimana

$$\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)' = (\mathbf{T}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{y},$$

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)' = \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{I} - (\mathbf{T}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}'\mathbf{M}^{-1} \right) \mathbf{y}$$

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\Sigma} + n\lambda\mathbf{W}^{-1}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \{ \langle \xi_i, \xi_j \rangle \}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Bukti:

Untuk membuktikan teorema 4.1.1, persamaan (4.2) diubah menjadi bentuk matriks. Karena L_i adalah fungsi linier terbatas, sehingga menurut teorema representasi Riesz, untuk setiap $f \in \mathcal{H}$, terdapat dengan tunggal $\eta \in \mathcal{H}$ yang disebut representer dari f sedemikian hingga berlaku:

$$\langle \eta, f \rangle = L_i f \tag{4.5}$$

Sehingga persamaan (4.2) dapat ditulis dalam bentuk matriks:

$$n^{-1} (y - \langle \eta, f \rangle)' \mathbf{W} (y - \langle \eta, f \rangle) + \lambda \|\mathbf{P}f\|^2 \tag{4.6}$$

Perhatikan bagian pertama persamaan (4.6):

Karena $f \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$, maka menurut definisi 2.1.4, f dapat ditulis sebagai

$$f = \boldsymbol{\varphi}'\mathbf{d} + \boldsymbol{\xi}'\mathbf{c} \quad \text{dengan} \quad \boldsymbol{\varphi}'\mathbf{d} \in \mathcal{H}_0, \boldsymbol{\xi}'\mathbf{c} \in \mathcal{H}_1 \tag{4.7}$$

dimana

$$\boldsymbol{\varphi}'\mathbf{d} = \phi_1 d_1 + \dots + \phi_m d_m$$

$$\boldsymbol{\xi}'\mathbf{c} = \xi_1 c_1 + \dots + \xi_n c_n$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\langle \eta, f \rangle &= \{ \langle \eta, \boldsymbol{\varphi}'\mathbf{d} + \boldsymbol{\xi}'\mathbf{c} \rangle \} \\
&= \{ \langle \eta, \boldsymbol{\varphi}'\mathbf{d} \rangle + \langle \eta, \boldsymbol{\xi}'\mathbf{c} \rangle \}_{i=1}^n \\
&= \{ \langle \eta, (\phi_1 d_1 + \dots + \phi_m d_m) \rangle + \langle \eta, (\xi_1 c_1 + \dots + \xi_n c_n) \rangle \}_{i=1}^n \\
&= \{ \langle \eta, \phi_1 d_1 \rangle + \dots + \langle \eta, \phi_m d_m \rangle + \langle \eta, \xi_1 c_1 \rangle + \dots + \langle \eta, \xi_n c_n \rangle \}_{i=1}^n \\
&= A + B
\end{aligned}$$

dengan $A = \{ \langle \eta, \phi_1 d_1 \rangle + \dots + \langle \eta, \phi_m d_m \rangle \}_{i=1}^n$,

$$B = \{ \langle \eta, \xi_1 c_1 \rangle + \dots + \langle \eta, \xi_n c_n \rangle \}_{i=1}^n$$

Disisi lain, karena $\eta \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ sehingga menurut definisi 2.1.1:

Ruang vektor X dikatakan *direct sum* atas dua subruang Y dan Z pada X yang ditulis $X = Y \oplus Z$, jika untuk setiap $x \in X$ dapat ditulis secara tunggal sebagai $x = y + z$ dengan $y \in Y, z \in Z$ (Kreyzig, 1978).

maka η_i dapat ditulis menjadi :

$$\eta_i = \eta_{0i} + \eta_{1i}, \text{ dengan } \eta_{0i} \in \mathcal{H}_0 \text{ dan } \eta_{1i} \in \mathcal{H}_1$$

Sehingga A dan B masing-masing dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
A &= \{ \langle \eta_{0i} + \eta_{1i}, \phi_1 d_1 \rangle + \dots + \langle \eta_{0i} + \eta_{1i}, \phi_m d_m \rangle \}_{i=1}^n \\
&= \{ \langle \eta_{0i}, \phi_1 d_1 \rangle + \langle \eta_{1i}, \phi_1 d_1 \rangle + \dots + \langle \eta_{0i}, \phi_m d_m \rangle + \langle \eta_{1i}, \phi_m d_m \rangle \}_{i=1}^n
\end{aligned}$$

Berdasarkan definisi 2.1.2:

Elemen x dari ruang *inner product* x dikatakan ortogonal ke elemen $y \in X$ jika $\langle x, y \rangle = 0$. x dan y dikatakan ortogonal dan ditulis $x \perp y$.

Demikian juga, untuk sub himpunan $A, B \subset X, x \perp A$ jika $x \perp a$ untuk semua $a \in A$ dan $A \perp B$ jika $a \perp b$ untuk semua $a \in A, b \in B$ (Kreyzig, 1978). Karena $\mathcal{H}_0 \perp \mathcal{H}_1$ maka untuk setiap $x \in \mathcal{H}_0, y \in \mathcal{H}_1$ berlaku $\langle x, y$

$$\rangle = 0, \text{ karena } (\eta_{0i})_{i=1}^n \in \mathcal{H}_0 \text{ dan } (\phi_i d_i)_{i=1}^m \in \mathcal{H}_1 \text{ maka } \{ \langle \eta_{0i}, \phi_i d_j \rangle \}_{i=1}^n \}_{j=1}^m = 0$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
A &= \left\{ \langle \eta_{0i}, \phi_1 d_1 \rangle + \dots + \langle \eta_{0i}, \phi_m d_m \rangle \right\}_{i=1}^n \\
&= \left\{ \langle \eta_{0i}, \phi \rangle d_1 + \dots + \langle \eta_{0i}, \phi \rangle d_m \right\}_{i=1}^n
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (4.5) diperoleh

$$\langle \eta_{0i}, \phi \rangle = \{L_i \phi\}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} L_1 \phi_1 & \cdots & L_1 \phi_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n \phi_1 & \cdots & L_n \phi_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{Td}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Kemudian B bisa diuraikan sebagai berikut:

$$B = \left\{ \langle \eta_i, \xi_1 c_1 \rangle + \dots + \langle \eta_i, \xi_n c_n \rangle \right\}_{i=1}^n$$

karena $\left\{ \langle \eta_i, \xi_j \rangle \right\}_{i,j=1}^n = \left\{ \langle \xi_i, \xi_j \rangle \right\}_{i,j=1}^n$, yaitu:

$$\begin{aligned}
\left\{ \langle \eta_i, \xi_j \rangle \right\}_{i,j=1}^n &= \left\{ \langle \eta_i - \xi_i + \xi_i, \xi_j \rangle \right\}_{i,j=1}^n \\
&= \left\{ \langle \eta_i - \xi_i, \xi_j \rangle + \langle \xi_i, \xi_j \rangle \right\}_{i,j=1}^n \\
&= 0 + \left\{ \langle \xi_i, \xi_j \rangle \right\}_{i,j=1}^n, \text{ karena } \eta_i - \xi_i \in \mathcal{H}_0 \text{ dan } \xi_j \in \mathcal{H}_1 \\
&= \left\{ \langle \xi_i, \xi_j \rangle \right\}_{i,j=1}^n
\end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
B &= \left\{ \langle \xi_i, \xi_1 \rangle c_1 + \dots + \langle \xi_i, \xi_n \rangle c_n \right\}_{i=1}^n \\
&= \begin{pmatrix} \langle \xi_1, \xi_1 \rangle & \cdots & \langle \xi_1, \xi_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \xi_n, \xi_1 \rangle & \cdots & \langle \xi_n, \xi_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\
&= \Sigma \mathbf{c}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Dari persamaan (4.8) dan (4.9) diperoleh

$$\langle \eta, f \rangle = \mathbf{Td} + \Sigma \mathbf{c} \tag{4.10}$$

Sekarang perhatikan untuk bagian kedua persamaan (4.6) yaitu:

$$\begin{aligned}\|Pf\|^2 &= \langle Pf, Pf \rangle \\ &= \langle P(\boldsymbol{\varphi}'\mathbf{d} + \boldsymbol{\xi}'\mathbf{c}), P(\boldsymbol{\varphi}'\mathbf{d} + \boldsymbol{\xi}'\mathbf{c}) \rangle\end{aligned}$$

Karena P adalah proyeksi ortogonal dari f pada \mathcal{H}_1 dan $\boldsymbol{\varphi}' \in \mathcal{H}_0$ maka

$$P\boldsymbol{\varphi}'\mathbf{d} = 0$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\|Pf\|^2 &= \langle \boldsymbol{\xi}'\mathbf{c}, \boldsymbol{\xi}'\mathbf{c} \rangle \\ &= (\boldsymbol{\xi}'\mathbf{c})'(\boldsymbol{\xi}'\mathbf{c}) \\ &= \mathbf{c}'\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}'\mathbf{c} \\ &= \mathbf{c}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c} \text{ karena } \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}' = \{ \langle \xi_i, \xi_j \rangle \} = \boldsymbol{\Sigma}\end{aligned}\tag{4.11}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (4.10) dan (4.11) ke persamaan (4.6) diperoleh:

$$n^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{T}\mathbf{d} - \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c})'W(\mathbf{y} - \mathbf{T}\mathbf{d} - \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c}) + \lambda\mathbf{c}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c}\tag{4.12}$$

Jika persamaan (4.12) dimisalkan K , yaitu:

$$\begin{aligned}K &= n^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{T}\mathbf{d} - \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c})'W(\mathbf{y} - \mathbf{T}\mathbf{d} - \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c}) + \lambda\mathbf{c}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c} \\ nK &= (\mathbf{y} - \mathbf{T}\mathbf{d} - \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c})'W(\mathbf{y} - \mathbf{T}\mathbf{d} - \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c}) + n\lambda\mathbf{c}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c}\end{aligned}$$

dengan memisalkan $nK=S$ diperoleh

$$\begin{aligned}S &= (\mathbf{y} - \mathbf{T}\mathbf{d} - \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c})'W(\mathbf{y} - \mathbf{T}\mathbf{d} - \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c}) + n\lambda\mathbf{c}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c} \\ &= \mathbf{y}'W\mathbf{y} - \mathbf{y}'W\mathbf{T}\mathbf{d} - \mathbf{y}'W\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c} - \mathbf{T}'\mathbf{d}'W\mathbf{y} + \mathbf{d}'\mathbf{T}'W\mathbf{d}\mathbf{T} + \mathbf{d}'\mathbf{T}'W\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c} \\ &\quad - \mathbf{c}'\boldsymbol{\Sigma}'W\mathbf{y} + \mathbf{c}'\boldsymbol{\Sigma}'W\mathbf{T}\mathbf{d} + \mathbf{c}'\boldsymbol{\Sigma}'W\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c} + n\lambda\mathbf{c}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c}\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa W adalah matriks kovarian yang simetris, $W = W^{-1}$ sehingga akibatnya

$$\begin{aligned}\mathbf{y}'W\mathbf{T}\mathbf{d} &= \mathbf{d}'\mathbf{T}'W\mathbf{y} \\ \mathbf{y}'W\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c} &= \mathbf{c}'\boldsymbol{\Sigma}'W\mathbf{y} \\ \mathbf{d}'\mathbf{T}'W\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{c} &= \mathbf{c}'\boldsymbol{\Sigma}'W\mathbf{T}\mathbf{d}\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
S &= y'Wy - \mathbf{T}'\mathbf{d}'Wy - \mathbf{T}'\mathbf{d}'Wy + \mathbf{d}'\mathbf{T}'W\mathbf{d}\mathbf{T} + \mathbf{d}'\mathbf{T}'W \Sigma \mathbf{c} - \mathbf{c}'\Sigma'Wy \\
&\quad + \mathbf{c}'\Sigma'W \Sigma \mathbf{c} + n\lambda \mathbf{c}'\Sigma \mathbf{c} \\
&= y'Wy - \mathbf{d}'(\mathbf{T}'Wy + \mathbf{T}'Wy) - \mathbf{c}'(\Sigma'Wy + \Sigma'Wy) \\
&\quad + \mathbf{d}'\mathbf{T}'W\mathbf{d}\mathbf{T} + \mathbf{c}'(\Sigma'W\mathbf{d}\mathbf{T} + \Sigma'W\mathbf{d}\mathbf{T}) + \mathbf{c}'(\Sigma'W \Sigma + n\lambda \Sigma)\mathbf{c} \\
&= y'Wy - 2\mathbf{d}'\mathbf{T}'Wy - 2\mathbf{c}'\Sigma'Wy + \mathbf{d}'\mathbf{T}'W\mathbf{d}\mathbf{T} \\
&\quad + 2\mathbf{c}'\Sigma'W\mathbf{d}\mathbf{T} + \mathbf{c}'(\Sigma'W \Sigma + n\lambda \Sigma)\mathbf{c}
\end{aligned}$$

Kemudian menentukan nilai \mathbf{c} dan \mathbf{d} dengan menurunkan S terhadap \mathbf{c} dan \mathbf{d} secara berturut-turut dengan cara:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \mathbf{c}} &= 0 \\
-2\Sigma'Wy + 2\Sigma'W\mathbf{T}\mathbf{d} + (\Sigma'W \Sigma + n\lambda \Sigma)\mathbf{c} &= 0 \\
-\Sigma'Wy + \Sigma'W\mathbf{T}\mathbf{d} + (\Sigma'W \Sigma + n\lambda \Sigma)\mathbf{c} &= 0 \\
\Sigma'(-Wy + W\mathbf{T}\mathbf{d}) + \Sigma'(W \Sigma + n\lambda)\mathbf{c} &= 0 \\
\Sigma'\{-Wy + W\mathbf{T}\mathbf{d} + (W \Sigma + n\lambda)\mathbf{c}\} &= 0 \\
-Wy + W\mathbf{T}\mathbf{d} + (W \Sigma + n\lambda)\mathbf{c} &= 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Misalkan $\mathbf{M} = \Sigma + n\lambda W^{-1} \Rightarrow \Sigma = \mathbf{M} - n\lambda W^{-1}$, maka persamaan (4.13) menjadi

$$\begin{aligned}
-Wy + W\mathbf{T}\mathbf{d} + (W(\mathbf{M} - n\lambda W^{-1}) + n\lambda)\mathbf{c} &= 0 \\
-Wy + W\mathbf{T}\mathbf{d} + W\mathbf{M}\mathbf{c} - n\lambda W W^{-1}\mathbf{c} + n\lambda \mathbf{c} &= 0 \\
-Wy + W\mathbf{T}\mathbf{d} + W\mathbf{M}\mathbf{c} &= 0 \\
W(-y + \mathbf{T}\mathbf{d} + \mathbf{M}\mathbf{c}) &= 0 \\
-y + \mathbf{T}\mathbf{d} + \mathbf{M}\mathbf{c} &= 0
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\mathbf{c} &= y - \mathbf{T}\mathbf{d} \\
\mathbf{c} &= \mathbf{M}^{-1}(y - \mathbf{T}\mathbf{d})
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Kemudian S diturunkan ke \mathbf{d} dan disamadengankan nol, diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \mathbf{d}} &= 0 \\
-2T'Wy + 2T'W\mathbf{T}\mathbf{d} + 2T'W \Sigma \mathbf{c} &= 0 \\
-T'Wy + T'W\mathbf{T}\mathbf{d} + T'W \Sigma \mathbf{c} &= 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Substitusikan persamaan (4.14) ke persamaan (4.15) diperoleh

$$\begin{aligned}
& -T'Wy + T'W\mathbf{Td} + T'W \Sigma (M^{-1}(y - \mathbf{Td})) = 0 \\
& -T'Wy + T'W\mathbf{Td} + T'W \Sigma M^{-1}y - T'W \Sigma M^{-1}\mathbf{Td} = 0 \\
& -T'Wy + T'W \Sigma M^{-1}y - T'W \Sigma M^{-1}\mathbf{Td} + T'W\mathbf{Td} = 0 \\
& -T'Wy + T'W \Sigma M^{-1}y - (T'W \Sigma M^{-1} + T'W\mathbf{T})\mathbf{d} = 0 \\
& -T'Wy + T'W \Sigma M^{-1}y - T'(W \Sigma M^{-1} + W)\mathbf{Td} = 0
\end{aligned} \tag{4.16}$$

karena $\mathbf{M} = \Sigma + n\lambda W^{-1} \Rightarrow \Sigma = \mathbf{M} - n\lambda W^{-1}$, sehingga

$$\Sigma M^{-1} = (\mathbf{M} - n\lambda W^{-1})M^{-1} = I - n\lambda W^{-1}M^{-1} \tag{4.17}$$

Substitusikan persamaan (4.17) ke persamaan (4.16) diperoleh

$$\begin{aligned}
& -T'Wy + T'W \Sigma M^{-1}y - T'(W \Sigma M^{-1} + W)\mathbf{Td} = 0 \\
& -T'Wy + T'W \Sigma M^{-1}y - T'(W - n\lambda WW^{-1}M^{-1} - W)\mathbf{Td} = 0 \\
& \quad -T'Wy + T'W \Sigma M^{-1}y - T'(-n\lambda M^{-1})\mathbf{Td} = 0 \\
& \quad -T'Wy + T'W \Sigma M^{-1}y + n\lambda T'M^{-1}\mathbf{Td} = 0
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Substitusikan persamaan (4.17) ke persamaan (4.18) diperoleh

$$\begin{aligned}
& -T'Wy + T'W (I - n\lambda W^{-1}M^{-1})y + n\lambda T'M^{-1}\mathbf{Td} = 0 \\
& -T'Wy + T'Wy - n\lambda T'WW^{-1}M^{-1}y + n\lambda T'M^{-1}\mathbf{Td} = 0 \\
& \quad -n\lambda T'M^{-1}y + n\lambda T'M^{-1}\mathbf{Td} = 0
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& n\lambda T'M^{-1}y = n\lambda T'M^{-1}\mathbf{Td} \\
& T'M^{-1}y = T'M^{-1}\mathbf{Td} \\
& \mathbf{d} = (T'M^{-1}T)^{-1} T'M^{-1}y
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Substitusikan persamaan (4.19) ke persamaan (4.14) diperoleh

$$\begin{aligned}
c &= M^{-1} \left(y - \mathbf{T} \left((T' M^{-1} T)^{-1} T' M^{-1} y \right) \right) \\
c &= M^{-1} y - M^{-1} T (T' M^{-1} T)^{-1} T' M^{-1} y \\
c &= M^{-1} \left(I - T (T' M^{-1} T)^{-1} T' M^{-1} \right) y
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Jadi terbukti bahwa estimator *smoothing spline* berbentuk:

$$\hat{f} = \sum_{v=1}^m d_v \phi_v + \sum_{v=1}^n c_i \xi_i \quad ,$$

Dengan c dan d pada persamaan (4.20) dan (4.19).

Apabila persamaan (4.20) dikalikan dari kiri dengan T' diperoleh

$$\begin{aligned}
T'c &= T' \left\{ M^{-1} \left(I - T (T' M^{-1} T)^{-1} T' M^{-1} \right) y \right\} \\
&= T' M^{-1} \left(I - (T' M^{-1} T)^{-1} T' M^{-1} \right) y \\
&= T' M^{-1} y - T' M^{-1} y \text{ karena } T' M^{-1} T (T' M^{-1} T)^{-1} = I \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Jika persamaan (4.19) dikalikan dari kiri dengan T diperoleh

$$\mathbf{Td} = T (T' M^{-1} T)^{-1} T' M^{-1} y \tag{4.22}$$

Jika persamaan (4.20) dikalikan dari kiri dengan M diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathbf{Mc} &= \mathbf{M} \left\{ M^{-1} \left(I - T (T' M^{-1} T)^{-1} T' M^{-1} \right) y \right\} \\
&= y - T (T' M^{-1} T)^{-1} T' M^{-1} y
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Jika persamaan (4.22) dan (4.23) dijumlahkan diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathbf{Mc} + \mathbf{Td} &= y - T (T' M^{-1} T)^{-1} T' M^{-1} y + T (T' M^{-1} T)^{-1} T' M^{-1} y \\
&= y
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Selanjutnya untuk menghitung c dan d , matriks T dibuat dekomposisi dari matriks ortogonal $Q = (Q_1 : Q_2)$ Dan matriks segitiga atas R yaitu:

$$T_{(n \times m)} = QR = \left(Q_{1(n \times m)} : Q_{2(n \times (n-m))} \right) \begin{pmatrix} R_{(n \times m)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dimana Q_1 dan Q_2 berturut-turut matriks berukuran $m \times m$ dan $n \times (n-m)$

Terlihat bahwa $T'Q_2 = 0_{n \times (n-m)}$ karena

$$\begin{aligned} T'Q_2 &= \left[(Q_1 : Q_2) \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \right]' Q_2 \\ &= \left[\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}' (Q_1 : Q_2)' \right] Q_2 \\ &= \left[(R' : 0') \begin{pmatrix} Q_1' \\ Q_2' \end{pmatrix} \right] Q_2 \\ &= [R'Q_1' + 0'Q_2'] Q_2 \\ &= [R'Q_1' + 0'] Q_2 \\ &= R'Q_1'Q_2 + 0'Q_2 \\ &= R'Q_1'Q_2 \\ &= 0_{m \times (n-m)}, \quad Q_1'Q_2 = 0, \text{ karena } Q_1, Q_2 \text{ ortogonal.} \end{aligned}$$

Karena $T'c = 0$ maka c haruslah merupakan ruang kolom dari Q_2 . Misalkan diambil

$$c = Q_2 \gamma \tag{4.25}$$

Untuk suatu γ vektor berukuran $(n-m) \times 1$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.25) ke (4.24) diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{M}c + \mathbf{T}d &= \mathbf{M}(Q_2 \gamma) + \mathbf{T}d = y \\ \mathbf{M}Q_2 \gamma + \mathbf{T}d &= y \end{aligned} \tag{4.26}$$

Kemudian dikalikan dari kiri dengan Q_2' diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_2' y &= \mathbf{Q}_2' (\mathbf{M}\mathbf{Q}_2 \gamma + \mathbf{T}\mathbf{d}) \\
&= \mathbf{Q}_2' \mathbf{M}\mathbf{Q}_2 \gamma + \mathbf{Q}_2' \mathbf{T}\mathbf{d} \\
&= \mathbf{Q}_2' \mathbf{M}\mathbf{Q}_2 \gamma + \mathbf{0}', \text{ karena } \mathbf{T}'\mathbf{Q}_2 = 0 \\
&= \mathbf{Q}_2' \mathbf{M}\mathbf{Q}_2 \gamma \\
\gamma &= (\mathbf{Q}_2' \mathbf{M}\mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}_2' y
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Akibatnya persamaan (4.24) menjadi

$$\mathbf{c} = \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}_2' \mathbf{M}\mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}_2' y \tag{4.28}$$

Dengan mengalikan persamaan (4.24) dari kiri dengan \mathbf{Q}_1' diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_1' (\mathbf{M}\mathbf{c} + \mathbf{T}\mathbf{d}) &= \mathbf{Q}_1' y \\
\mathbf{Q}_1' \mathbf{M}\mathbf{c} + \mathbf{Q}_1' \mathbf{T}\mathbf{d} &= \mathbf{Q}_1' y \\
\mathbf{Q}_1' \mathbf{T}\mathbf{d} &= \mathbf{Q}_1' y - \mathbf{Q}_1' \mathbf{M}\mathbf{c}
\end{aligned}$$

Karena $\mathbf{Q}_1' \mathbf{T} = R$ sehingga

$$\mathbf{R}\mathbf{d} = \mathbf{Q}_1' (y - \mathbf{M}\mathbf{c}) \tag{4.29}$$

Selanjutnya akan dicari matriks “hat” $\mathbf{A}(\lambda)$ yang didefinisikan sebagai

$$f_\lambda = \begin{pmatrix} L_1 f_\lambda \\ \vdots \\ L_n f_\lambda \end{pmatrix} = \mathbf{A}(\lambda) y \tag{4.30}$$

Disisi lain telah diperoleh

$$f_\lambda = \begin{pmatrix} L_1 f_\lambda \\ \vdots \\ L_n f_\lambda \end{pmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{d} + \sum \mathbf{c} \tag{4.31}$$

Sehingga

$$\mathbf{T}\mathbf{d} + \sum \mathbf{c} = \mathbf{A}(\lambda) y \tag{4.32}$$

Selanjutnya akan dicari formula sederhana untuk $I - A(\lambda)$.

Dari persamaan (4.24) diperoleh

$$\mathbf{Td} = y - \mathbf{Mc} \quad (4.33)$$

Kemudian persamaan (4.33) dan (4.28) disubstitusikan ke persamaan (4.32) diperoleh

$$\begin{aligned} A(\lambda)y &= (y - \mathbf{Mc}) + \Sigma \left(\mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}'_2 \mathbf{M} \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}'_2 y \right) \\ A(\lambda)y &= y - \mathbf{Mc} + \Sigma \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}'_2 \mathbf{M} \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}'_2 y \\ y - A(\lambda)y &= \mathbf{Mc} - \Sigma \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}'_2 \mathbf{M} \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}'_2 y \\ [I - A(\lambda)]y &= \mathbf{M} \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}'_2 \mathbf{M} \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}'_2 y - \Sigma \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}'_2 \mathbf{M} \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}'_2 y \\ [I - A(\lambda)]y &= \left[\mathbf{M} \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}'_2 \mathbf{M} \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}'_2 y - \Sigma \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}'_2 \mathbf{M} \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}'_2 \right] y \\ I - A(\lambda) &= \mathbf{M} \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}'_2 \mathbf{M} \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}'_2 - \Sigma \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}'_2 \mathbf{M} \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}'_2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Kemudian, dengan mensubstitusikan $\Sigma = \mathbf{M} - n\lambda \mathbf{W}^{-1}$ ke persamaan (4.34) diperoleh

$$\begin{aligned} I - A(\lambda) &= \mathbf{M} \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}'_2 \mathbf{M} \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}'_2 - (\mathbf{M} - n\lambda \mathbf{W}^{-1}) \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}'_2 \mathbf{M} \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}'_2 \\ &= \mathbf{M} \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}'_2 \mathbf{M} \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}'_2 - \mathbf{M} \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}'_2 \mathbf{M} \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}'_2 \\ &\quad + n\lambda \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}'_2 \mathbf{M} \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}'_2 \\ &= n\lambda \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}'_2 \mathbf{M} \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}'_2 \\ &= n\lambda \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}'_2 (\Sigma + n\lambda \mathbf{W}^{-1}) \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}'_2 \end{aligned} \quad (4.35)$$

Berdasarkan penjabaran teorema 4.2.1 dapat diketahui bahwa bentuk estimator *smoothing spline* untuk memperoleh kurva pendekatannya adalah

$$I - A(\lambda) = n\lambda \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Q}_2 (\mathbf{Q}'_2 (\Sigma + n\lambda \mathbf{W}^{-1}) \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{Q}'_2$$

4.1.2. Pemilihan Parameter Penghalus GML

Parameter penghalus merupakan pengontrol keseimbangan antara kesesuaian kurva terhadap data dan kemulusan kurva. Wahba (1990) dan Eubank (1988) menunjukkan bahwa memasang parameter penghalus yang sangat kecil atau sangat besar akan memberikan bentuk fungsi penyelesaian yang sangat kasar atau mulus. Di lain pihak diinginkan suatu bentuk estimator disamping mempunyai suatu derajat kemulusan, juga sesuai dengan datanya. Karena itu sangatlah penting memilih parameter penghalus yang optimal. Memilih parameter penghalus pada prinsipnya adalah sama dengan memilih titik knot yang optimal yang menghasilkan nilai GML paling minimum (Budiantara,1999). Oleh karena itu dalam kajian ini, akan dibahas mengenai cara memilih parameter penghalus berdasarkan titik knot optimum. Berikut diberikan metode untuk memilih parameter penghalus dan parameter korelasi yang optimal dengan metode GML.

Diberikan dua buah vektor z dan w dengan dekomposisi sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_2' \\ \frac{1}{\sqrt{\eta}} T' \end{pmatrix} y \quad (4.36)$$

yang memenuhi $Q_2' Q_2 = I_{n-m}$, $Q_2' T = 0_{(n-m) \times m}$ dan $\eta = \frac{a}{b}$.

Berdasarkan dekomposisi ini, akan ditentukan distribusi z dan w melalui teorema berikut:

Teorema 4.1.2

misalkan diberikan variabel random $y = (y_1, \dots, y_n)'$, $f = (f(t_1), \dots, f(t_n))'$ dan $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)'$ berdistribusi normal dengan mean nol dan mengikuti model:

$$y = f + \varepsilon$$

dengan $E(f) = 0$, $E(ff') = b \Sigma_f$, $\Sigma_f = \frac{a}{b} TT' + \Sigma$, $E(\varepsilon) = 0$, $E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 W^{-1}$

$E(f\varepsilon') = 0$. Jika $f(t)$, $t \in [0,1]$ mempunyai distribusi prior improper dengan fungsi prior

$$f(t) = \sum_{v=1}^m \theta_v \phi_v(t) + b^{1/2} X(t), \quad t \in [0,1]$$

dimana $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)' \sim N(\theta, aI)$, a dan b adalah konstanta positif. z dan w mempunyai dekomposisi (4.1.1), maka untuk $a \rightarrow \infty$:

$$(i) \quad z \sim N(0, bQ_2'(\Sigma + n\lambda W^{-1})Q_2)$$

$$(ii) \quad w \sim N(0, b(T'T)(T'T))$$

Bukti:

(i) Karena $\text{var}(y) = b\Sigma_f + \sigma^2 W^{-1}$ dan $\Sigma_f = \frac{a}{b} TT' + \Sigma$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \text{var}(y) &= b\left(\frac{a}{b} TT' + \Sigma\right) + \sigma^2 W^{-1} \\ &= aTT' + b\Sigma + \sigma^2 W^{-1} \end{aligned}$$

karena $\lambda = \frac{\sigma^2}{nb}$ dan $\eta = \frac{a}{b}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \text{var}(y) &= b\eta TT' + b\Sigma + bn\lambda W^{-1} \\ &= b(\eta TT' + \Sigma + n\lambda W^{-1}) \end{aligned} \tag{4.37}$$

Sehingga berdasarkan dekomposisi (4.36) diperoleh:

$$\begin{aligned} \text{var}(z) &= Q_2' \text{var}(y) [Q_2']' \\ &= Q_2' b(\eta TT' + \Sigma + n\lambda W^{-1}) Q_2 \\ &= bQ_2'(\eta TT' + \Sigma + n\lambda W^{-1}) Q_2 \\ &= b(\eta Q_2' TT' Q_2 + Q_2' \Sigma Q_2 + Q_2' n\lambda W^{-1} Q_2) \\ &= b(Q_2' \Sigma Q_2 + Q_2' n\lambda W^{-1} Q_2) \end{aligned} \tag{4.38}$$

(ii) Dari dekomposisi (4.36) diperoleh $w = \left(\frac{T'}{\sqrt{\eta}}\right) y$, sehingga

$$\begin{aligned}
\text{var}(w) &= \left(\frac{T'}{\sqrt{\eta}} \right) \text{var}(y) \left(\frac{T'}{\sqrt{\eta}} \right)' \\
&= \frac{1}{\eta} T' \text{var}(y) T \\
&= \frac{1}{\eta} T' \left[b(\eta T T' + \Sigma + n\lambda W^{-1}) \right] T \\
&= \frac{b}{\eta} T' (\eta T T' + \Sigma + n\lambda W^{-1}) T
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Sehingga untuk $\eta \rightarrow \infty$ diperoleh:

$$\begin{aligned}
\lim_{\eta \rightarrow \infty} \text{var}(w) &= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{b}{\eta} T' (\eta T T' + \Sigma + n\lambda W^{-1}) T \\
&= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{b}{\eta} (\eta (T' T) (T' T) + T' \Sigma T + n\lambda T' W^{-1} T) \\
&= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{b}{\eta} \left(\eta (T' T) (T' T) + T' \Sigma T + n \left(\frac{\sigma^2}{nb} \right) T' W^{-1} T \right) \\
&= \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left(b (T' T) (T' T) + \frac{b}{\eta} T' \Sigma T + \left(\frac{\sigma^2}{\eta} \right) T' W^{-1} T \right) \\
&= \lim_{\eta \rightarrow \infty} b (T' T) (T' T) + \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{b}{\eta} T' \Sigma T + \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left(\frac{\sigma^2}{\eta} \right) T' W^{-1} T \\
&= b (T' T) (T' T)
\end{aligned}$$

Teorema diatas memeplihatkan bahwa hanya z yang bergantung pada λ , yaitu

$$z \sim N\left(0, bQ_2 (\Sigma + n\lambda W^{-1}) Q_2\right)$$

Berdasarkan distribusi tersebut, akan dibentuk fungsi likelihood sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
l(\lambda, \tau, \mathbf{b}, \mathbf{z}) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-m}{2}} \left| b \mathcal{Q}_2' (\Sigma + n\lambda W^{-1}) \mathcal{Q}_2 \right|^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad \exp\left(-\frac{1}{2b} \mathbf{z}' (\mathcal{Q}_2' (\Sigma + n\lambda W^{-1}) \mathcal{Q}_2)^{-1} \mathbf{z}\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-m}{2}} b^{\frac{n-m}{2}} \left| \mathcal{Q}_2' (\Sigma + n\lambda W^{-1}) \mathcal{Q}_2 \right|^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad \exp\left(-\frac{1}{2b} \mathbf{z}' (\mathcal{Q}_2' (\Sigma + n\lambda W^{-1}) \mathcal{Q}_2)^{-1} \mathbf{z}\right)
\end{aligned}$$

Misalkan $B(\lambda, \tau) = \Sigma + n\lambda W^{-1}$, dengan λ dan ρ berturut-turut adalah parameter penghalus dan parameter korelasi. Maka fungsi likelihoodnya menjadi:

$$l(\lambda, \rho, \mathbf{b}, \mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-m}{2}} b^{\frac{n-m}{2}} \left| \mathcal{Q}_2' B(\lambda, \rho) \mathcal{Q}_2 \right|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2b} \mathbf{z}' (\mathcal{Q}_2' B(\lambda, \rho) \mathcal{Q}_2)^{-1} \mathbf{z}\right) \quad (4.40)$$

dari (4.40) diperoleh log likelihood:

$$\begin{aligned}
\log l(\lambda, \rho, \mathbf{b}, \mathbf{z}) &= -\frac{n-m}{2} \log 2\pi - \frac{n-m}{2} \log b - \frac{1}{2} \log \left| \mathcal{Q}_2' B(\lambda, \rho) \mathcal{Q}_2 \right|^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - \frac{1}{2b} \mathbf{z}' (\mathcal{Q}_2' B(\lambda, \rho) \mathcal{Q}_2)^{-1} \mathbf{z} \\
&= -\frac{n-m}{2} \log b - \frac{1}{2} \log \left| \mathcal{Q}_2' B(\lambda, \rho) \mathcal{Q}_2 \right|^{\frac{1}{2}} - \\
&\quad \frac{1}{2b} \mathbf{z}' (\mathcal{Q}_2' B(\lambda, \rho) \mathcal{Q}_2)^{-1} \mathbf{z} + C_1
\end{aligned} \quad (4.41)$$

memaksimumkan terhadap b diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log l(\lambda, \rho, \mathbf{b}, \mathbf{z})}{\partial b} &= -\frac{n-m}{b} + \frac{1}{b^2} \mathbf{z}' (\mathcal{Q}_2' B(\lambda, \rho) \mathcal{Q}_2)^{-1} \mathbf{z} - 0 \\
\frac{n-m}{b} &= \frac{1}{b^2} \mathbf{z}' (\mathcal{Q}_2' B(\lambda, \rho) \mathcal{Q}_2)^{-1} \mathbf{z} \\
\hat{b} &= \frac{\mathbf{z}' (\mathcal{Q}_2' B(\lambda, \rho) \mathcal{Q}_2)^{-1} \mathbf{z}}{n-m}
\end{aligned} \quad (4.42)$$

akhirnya estimasi GML terhadap λ dan τ adalah dengan memaksimumkan:

$$\begin{aligned}
l_2(\lambda, \rho | \hat{b}) &= -\frac{n-m}{2} \log \hat{b} - \frac{1}{2} \log |Q_2' B(\lambda, \rho) Q_2|^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\hat{b}} z' (Q_2' B(\lambda, \rho) Q_2)^{-1} z \\
&\quad + C_2 \\
&= -\frac{n-m}{2} \log \frac{z' (Q_2' B(\lambda, \rho) Q_2)^{-1} z}{n-m} - \frac{1}{2} \log |Q_2' B(\lambda, \rho) Q_2|^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - \frac{(n-m) z' (Q_2' B(\lambda, \rho) Q_2)^{-1} z}{2 z' (Q_2' B(\lambda, \rho) Q_2)^{-1} z} + C_2 \\
&= -\frac{n-m}{2} \log \frac{z' (Q_2' B(\lambda, \rho) Q_2)^{-1} z}{n-m} - \frac{1}{2} \log |Q_2' B(\lambda, \rho) Q_2| + C_3 \\
&= -\frac{n-m}{2} \left(\log \frac{z' (Q_2' B(\lambda, \rho) Q_2)^{-1} z}{n-m} - \frac{1}{n-m} \log |Q_2' B(\lambda, \rho) Q_2| \right) \\
&\quad + C_3 \\
&= -\frac{n-m}{2} \log \frac{z' (Q_2' B(\lambda, \rho) Q_2)^{-1} z}{\left[\det(Q_2' B(\lambda, \rho) Q_2)^{-1} \right]^{\frac{1}{n-m}}} + C_3
\end{aligned}$$

dimana C_3 adalah suatu konstanta. Untuk memaksimumkan $l_2(\lambda, \rho | \hat{b})$ ekuivalen dengan meminimumkan:

$$M(\lambda, \rho) = \frac{z' (Q_2' B(\lambda, \rho) Q_2)^{-1} z}{\left[\det(Q_2' B(\lambda, \rho) Q_2)^{-1} \right]^{\frac{1}{n-m}}} \tag{4.43}$$

dengan mensubstitusikan $z = Q_2' y$ ke persamaan (4.43) diperoleh:

$$\begin{aligned}
M(\lambda, \rho) &= \frac{y' Q_2 (Q_2' B(\lambda, \rho) Q_2)^{-1} Q_2' y}{\left[\det(Q_2' B(\lambda, \rho) Q_2)^{-1} \right]^{\frac{1}{n-m}}} \\
&= \frac{y' Q_2 (Q_2' (\Sigma + n\lambda W^{-1}) Q_2)^{-1} Q_2' y}{\left[\det(Q_2' (\Sigma + n\lambda W^{-1}) Q_2)^{-1} \right]^{\frac{1}{n-m}}}
\end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned}
I - A(\lambda) &= n\lambda W^{-1} Q_2 \left(Q_2' (\Sigma + n\lambda W^{-1}) Q_2 \right)^{-1} Q_2' \\
W(I - A(\lambda)) &= W \left(n\lambda W^{-1} Q_2 \left(Q_2' (\Sigma + n\lambda W^{-1}) Q_2 \right)^{-1} Q_2' \right) \\
&= n\lambda Q_2 \left(Q_2' (\Sigma + n\lambda W^{-1}) Q_2 \right)^{-1} Q_2'
\end{aligned}$$

Sehingga

$$M(\lambda, \rho) = \frac{y' W (I - A) y}{\left[\det^+ (W (I - A)) \right]^{1/(n-m)}}$$

dimana \det^+ adalah hasil kali nilai-nilai eigen yang tidak nol. Karena $\lambda = \sigma^2 / nb$ maka estimasi varians σ^2 adalah:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= n\hat{\lambda}\hat{b} \\
&= \frac{n\hat{\lambda} z' \left(Q_2' B(\lambda, \rho) Q_2 \right)^{-1} z}{n-m} \\
&= \frac{y' W (I - A) y}{n-m}
\end{aligned}$$

4.2 Pemodelan *Smoothing spline* dengan Error Berkorelasi

4.2.1. Analisis Deskriptif

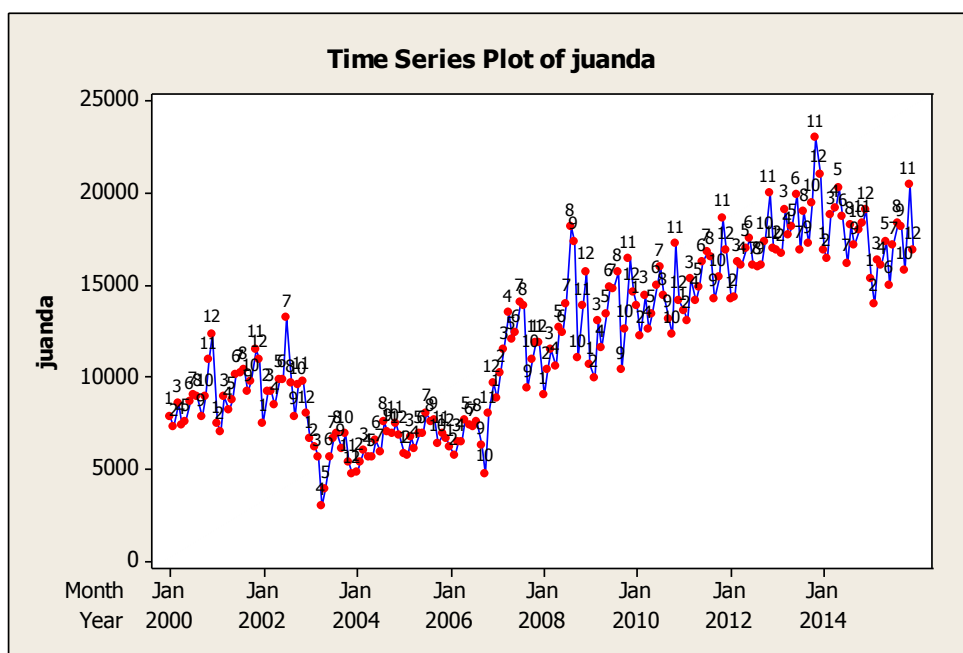
Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data bulanan jumlah wisatawan mancanegara (wisman) di bandara Juanda sejak bulan Januari 2000 sampai bulan Desember 2015. Informasi tentang karakteristik variabel dapat diketahui dan dipahami dengan mudah melalui analisis deskriptif sebagai berikut.

Tabel 4.1 Statistik Deskriptif Jumlah Wisatawan Mancanegara di bandara Juanda

Variabel	Mean	Standar Deviasi	Minimum	Maximum
Wisman	11923	4569	2960	22986

Nilai mean jumlah wisman yang datang melalui bandara Juanda tiap bulan berkisar 11.923 orang dengan jumlah wisman terkecil sebesar 2.960 orang terjadi pada bulan April 2003 dan jumlah wisman terbanyak sebesar 22.986 orang pada bulan November 2013. Keragaman jumlah wisman ditunjukkan dengan nilai

standar deviasi sebesar 4.569. Untuk lebih jelas dapat ditunjukkan melalui time series plot sebagai berikut.



Gambar 4.1 Time Series Plot Jumlah Wisatawan Mancanegara

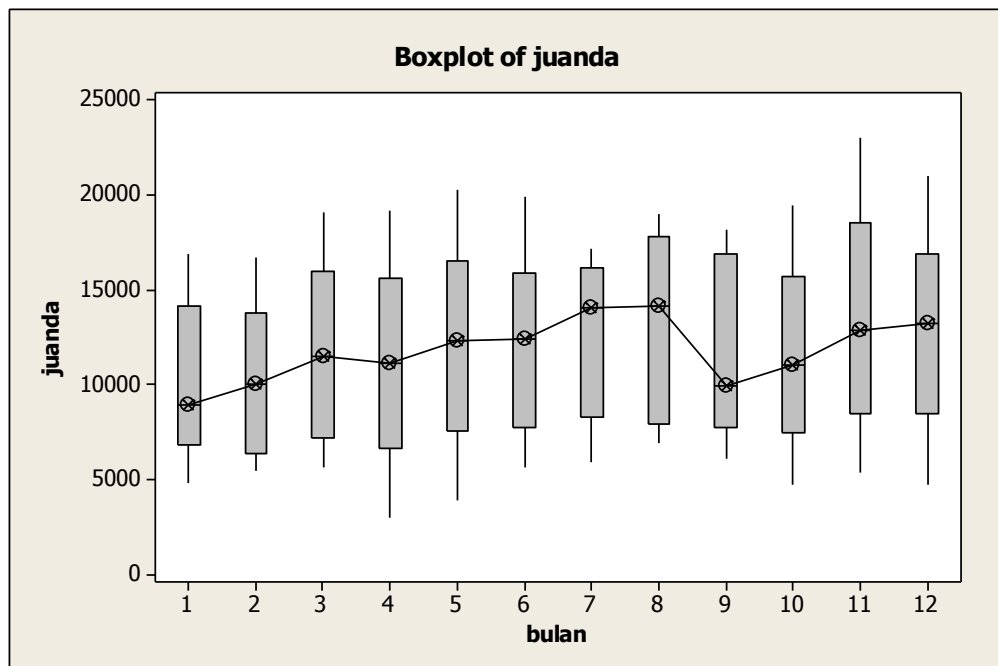
Jumlah wisman yang masuk melalui bandara Juanda mulai bulan Januari 2000 hingga bulan Desember 2015 mengalami peningkatan. Tampak pada Gambar 4.1 yang menunjukkan peningkatan jumlah wisman pada bulan Juli 2002, namun pada bulan April 2003 jumlah wisman yang datang mengalami penurunan drastis hingga bulan Oktober 2007. Penurunan jumlah wisman yang masuk melalui bandara Juanda disebabkan adanya bencana alam yang terjadi selama tahun 2003 hingga 2007. Jumlah wisman mengalami peningkatan yang signifikan setelah bulan November 2007 hingga bulan Desember 2015.

Tabel 4.2 Mean Jumlah Wisman perbulan selama tahun 2000-2015

Bulan	Jumlah (orang)	Bulan	Jumlah (orang)
Januari	150272	Juli	185010
Februari	149939	Agustus	190498
Maret	171335	September	166969

April	160409	Oktober	170550
Mei	172117	Nopember	199316
Juni	182253	Desember	189687

Mean pada bulan november merupakan jumlah wisatawan tertinggi di setiap tahunnya. Penurunan jumlah wisman berdasarkan rata-rata perbulan terjadi pada bulan february, penurunan ini terjadi karena pada bulan february mengalami *low season* di dunia pariwisata. Sehingga kunjungan wisman ke bandara Juanda mengalami penurunan terjadi pada bulan Januari hingga bulan Februari.



Gambar 4.2 Boxplot Jumlah Wisatawan Mancanegara

Boxplot disusun berdasarkan median dari jumlah wisatawan mancanegara di bandara Juanda berdasarkan bulan Januari 2000 hingga bulan Desember 2015. Tampak pada Gambar 4.2, bulan Januari hingga bulan Agustus jumlah wisman mengalami peningkatan. Nilai median tertinggi pada jumlah wisatawan mancanegara terjadi pada bulan Agustus, sedangkan median terendah pada jumlah wisatawan mancanegara di bandara Juanda terdapat pada bulan September.

4.2.2. Pemodelan *Smoothing spline* dengan Error Berkorelasi

Berdasarkan pada estimator *smoothing spline* dengan error berkorelasi selanjutnya akan disusun model *smoothing spline* dengan error berkorelasi berdasarkan persamaan (4.32) sebagai berikut.

$$\mathbf{T}\mathbf{d} + \Sigma \mathbf{c} = A(\lambda)y$$

dimana \mathbf{T} adalah matriks dengan ukuran $n \times m$ dengan n adalah banyaknya data dan m adalah spline yang digunakan, pada penelitian ini menggunakan kubik spline sehingga nilai m adalah 2. Selanjutnya \mathbf{d} adalah nilai koefisien \mathbf{T} dari estimator *smoothing spline* dengan error berkorelasi. $\Sigma = M - n\lambda W^{-1}$ dimana W^{-1} adalah matriks kovarians dari $n \times n$ sehingga Σ berukuran $n \times n$. Selanjutnya \mathbf{c} adalah nilai koefisien Σ dari estimator *smoothing spline* dengan error berkorelasi. Untuk selanjutnya akan ditunjukkan model *smoothing spline* dengan error berkorelasi menggunakan data jumlah wisatawan mancanegara di bandara Juanda mulai bulan Januari 2000 hingga bulan Desember 2015, dengan data *in sample* sebagai data training dan data *out sample* sebagai data testing. Data *in sample* dimulai pada bulan Januari tahun 2000 sampai dengan Desember 2014. Sedangkan data *out sample* mulai bulan Januari 2015 sampai dengan Desember 2015.

Langkah pertama adalah menentukan nilai \mathbf{T} yaitu sebesar $n \times m$ karena banyaknya data yang digunakan adalah 192 data, untuk data training sebanyak 180 data dan data testing sebanyak 12 data. Maka diperoleh nilai \mathbf{T} sebagai berikut.

data training

$$\begin{bmatrix} 1 & 7879 \\ 1 & 7268 \\ 1 & 8532 \\ 1 & 7376 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 16215 \\ 1 & 16788 \\ 1 & 16553 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 17124 \\ 1 & 17997 \\ 1 & 18324 \end{bmatrix}_{180 \times 2}$$

data testing

$$\begin{bmatrix} 1 & 15366 \\ 1 & 14003 \\ 1 & 16338 \\ 1 & 16063 \\ 1 & 17355 \\ 1 & 15004 \\ 1 & 17134 \\ 1 & 18311 \\ 1 & 18167 \\ 1 & 15798 \\ 1 & 20449 \\ 1 & 16863 \end{bmatrix}_{12 \times 2}$$

Langkah kedua adalah menentukan nilai \mathbf{d} yaitu koefisien dari \mathbf{T} , maka diperoleh nilai \mathbf{d} sebagai berikut.

Tabel 4.3 Nilai Koefisien \mathbf{d} Untuk Data Jumlah Wisman di Bandara Juanda

Koefisien	Nilai
\mathbf{d}_0	10108,211
\mathbf{d}_1	2759,471

Langkah ketiga adalah menentukan nilai Σ yaitu matriks dari $n \times n$, untuk data training sebanyak 180 data dan data testing sebanyak 12 data. Maka diperoleh nilai Σ sebagai berikut.

data training

$$\begin{bmatrix} \dots & 8,22e-08 & -7,15e-08 & -1,64e-08 & -9,61e-08 & 8,11e-08 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & -7,16e-08 & -1,64e-07 & -9,61e-08 & 8,12e-08 & 1,82e-07 \end{bmatrix}_{180 \times 180}$$

dengan nilai matriks kovarians sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} \dots & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ \vdots & 0,891 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0,877 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0,865 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0,852 & \vdots \\ \dots & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,839 \end{bmatrix}_{180 \times 180}$$

data testing

$$\begin{bmatrix} 0,0034 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0,0049 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,0049 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0,0083 \end{bmatrix}_{12 \times 12}$$

dengan nilai matriks kovarians sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 0,91 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0,00 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,00 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0,33 \end{bmatrix}_{12 \times 12}$$

Langkah keempat adalah menentukan nilai c yaitu matriks dari $n \times 1$, untuk data training sebanyak 180 data dan data testing sebanyak 12 data. Maka diperoleh nilai Σ sebagai berikut.

data training

$$\begin{bmatrix} 1 & 7879 \\ 1 & 7268 \\ 1 & 8532 \\ 1 & 7376 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 16215 \\ 1 & 16788 \\ 1 & 16553 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 17124 \\ 1 & 17997 \\ 1 & 18324 \end{bmatrix}_{180 \times 2}$$

data testing

$$\begin{bmatrix} 1 & 15366 \\ 1 & 14003 \\ 1 & 16338 \\ 1 & 16063 \\ 1 & 17355 \\ 1 & 15004 \\ 1 & 17134 \\ 1 & 18311 \\ 1 & 18167 \\ 1 & 15798 \\ 1 & 20449 \\ 1 & 16863 \end{bmatrix}_{12 \times 2}$$

Berdasarkan nilai-nilai yang telah diperoleh, selanjutnya akan dilakukan penyusunan model *smoothing spline* dengan error berkorelasi sehingga tersusun model sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 15366 \\ 1 & 14003 \\ 1 & 16338 \\ 1 & 16063 \\ 1 & 17355 \\ 1 & 15004 \\ 1 & 17134 \\ 1 & 18311 \\ 1 & 18167 \\ 1 & 15798 \\ 1 & 20449 \\ 1 & 16863 \end{bmatrix}_{12 \times 2} + [10108,211 + 2759,471t] + \begin{bmatrix} 0,0034 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0,0049 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,0049 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0,0083 \end{bmatrix}_{12 \times 12} \begin{bmatrix} -91843,58 \\ -385119,02 \\ 110309,94 \\ 5717,40 \\ 141687,36 \\ -177356,28 \\ 31245,54 \\ 108161,51 \\ 83030,50 \\ -47746,76 \\ 185106,15 \\ 36807,24 \end{bmatrix}_{12 \times 1}$$

Berdasarkan nilai-nilai yang diperoleh dari nilai estimator *smoothing spline* dengan error berkorelasi, diperoleh nilai GML pada tabel sebagai berikut.

Tabel 4.4 Nilai GML Untuk Data Jumlah Wisman di Bandara Juanda

GML estimate(s) of smoothing parameter(s)	0,2134811
Equivalent Degrees of Freedom (DF)	2
Estimate of sigma	4052,581

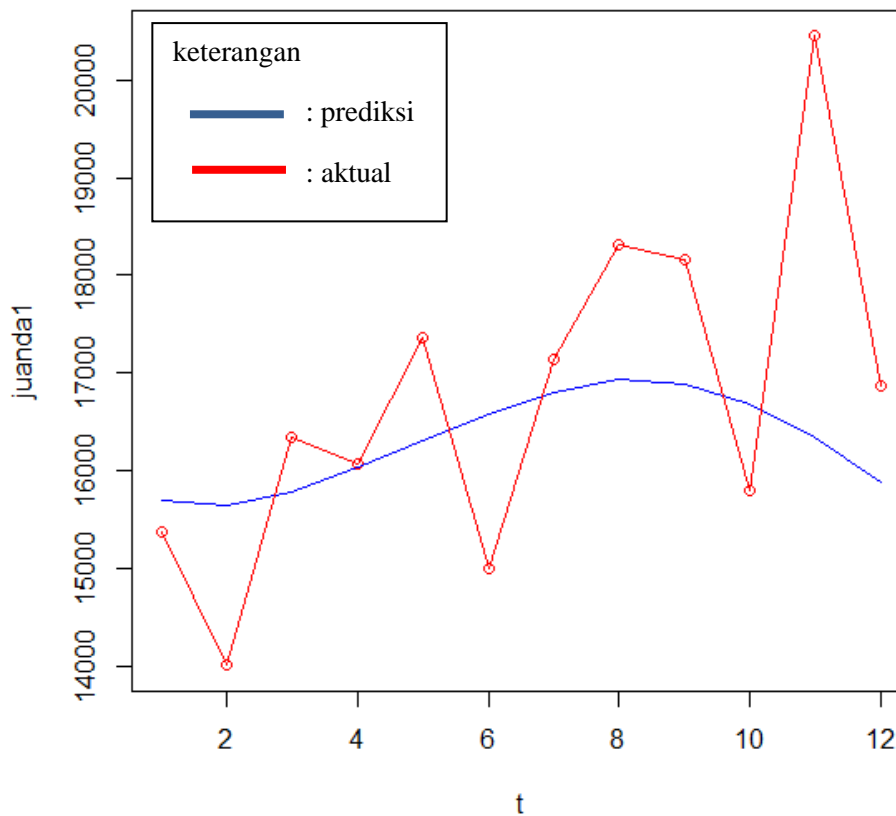
Nilai GML sebesar 0,2134811 adalah nilai parameter penghalus yang digunakan untuk menunjukkan besarnya parameter *smoothing spline* dengan error berkorelasi. Selanjutnya estimasi sigma diperoleh nilai sebesar 4052,581 yang mempunyai kegunaan untuk menunjukkan nilai trace dari GML dengan derajat bebas pada parameter GML sebesar 2.

Berdasarkan model *smoothing spline* dengan error berkorelasi, diperoleh nilai prediksi jumlah wisatawan mancanegara pada tabel sebagai berikut.

Tabel 4.5 Prediksi Jumlah Wisatawan Mancanegara Menggunakan Model *Smoothing spline* Dengan Error Berkorelasi

t	$\hat{f}(t)$	t	$\hat{f}(t)$
1	15689,70	7	16801,40
2	15634,89	8	16926,76
3	15776,02	9	16889,43
4	16027,98	10	16681,28
5	16311,61	11	16332,00
6	16574,26	12	15878,76

Berdasarkan prediksi jumlah wisman pada Tabel 4.5, akan ditunjukkan gambar prediksi jumlah wisman pada Gambar 4.3 sebagai berikut.



Gambar 4.3 Prediksi Jumlah Wisatawan Mancanegara

Prediksi jumlah wisman pada Gambar 4.3 tampak bahwa jumlah wistawan mancanegara bulan Januari 2015 hingga bulan Desember 2015 ditunjukkan dengan garis warna merah dan prediksi jumlah wisman ditunjukkan dengan garis warna biru. Berdasarkan Gambar 4.3 dapat diketahui bahwa prediksi jumlah wisman hanya sesuai pada bulan Mei saja. Hal ini disebabkan karena nilai jumlah wisman pada tahun 2015 mengalami peningkatan dan penurunan yang drastis setiap bulannya.

LAMPIRAN 1

Data jumlah wisatawan mancanegara di bandara Juanda

tahun	bulan	t	juanda
2000	Januari	1	7879
2000	Februari	2	7268
2000	Maret	3	8532
2000	April	4	7376
2000	Mei	5	7582
2000	Juni	6	8696
2000	Juli	7	9005
2000	Agustus	8	8947
2000	September	9	7854
2000	Oktober	10	8949
2000	Nopember	11	10926
2000	Desember	12	12357
2001	Januari	1	7488
2001	Februari	2	7051
2001	Maret	3	8904
2001	April	4	8189
2001	Mei	5	8717
2001	Juni	6	10161
2001	Juli	7	10177
2001	Agustus	8	10380
2001	September	9	9186
2001	Oktober	10	9753
2001	Nopember	11	11521
2001	Desember	12	10986
2002	Januari	1	7495
2002	Februari	2	9221
2002	Maret	3	9168
2002	April	4	8454
2002	Mei	5	9888
2002	Juni	6	9867
2002	Juli	7	13242
2002	Agustus	8	9642
2002	September	9	7869
2002	Oktober	10	9580
2002	Nopember	11	9781
2002	Desember	12	8034
2003	Januari	1	6602
2003	Februari	2	6174
2003	Maret	3	5606
2003	April	4	2960

tahun	bulan	t	juanda
2003	Mei	5	3881
2003	Juni	6	5673
2003	Juli	7	6633
2003	Agustus	8	6911
2003	September	9	6131
2003	Oktober	10	6935
2003	Nopember	11	5372
2003	Desember	12	4749
2004	Januari	1	4809
2004	Februari	2	5409
2004	Maret	3	5995
2004	April	4	5633
2004	Mei	5	5618
2004	Juni	6	6591
2004	Juli	7	5918
2004	Agustus	8	7585
2004	September	9	6978
2004	Oktober	10	6955
2004	Nopember	11	7447
2004	Desember	12	6864
2005	Januari	1	5828
2005	Februari	2	5762
2005	Maret	3	6713
2005	April	4	6063
2005	Mei	5	6873
2005	Juni	6	6900
2005	Juli	7	8045
2005	Agustus	8	7570
2005	September	9	7667
2005	Oktober	10	6405
2005	Nopember	11	6898
2005	Desember	12	6685
2006	Januari	1	6177
2006	Februari	2	5741
2006	Maret	3	6474
2006	April	4	6433
2006	Mei	5	7648
2006	Juni	6	7374
2006	Juli	7	7310
2006	Agustus	8	7569

tahun	bulan	t	juanda
2006	September	9	6259
2006	Oktober	10	4762
2006	Nopember	11	8021
2006	Desember	12	9671
2007	Januari	1	8878
2007	Februari	2	10183
2007	Maret	3	11479
2007	April	4	13502
2007	Mei	5	12019
2007	Juni	6	12387
2007	Juli	7	14028
2007	Agustus	8	13873
2007	September	9	9407
2007	Oktober	10	10989
2007	Nopember	11	11869
2007	Desember	12	11824
2008	Januari	1	9043
2008	Februari	2	10403
2008	Maret	3	11485
2008	April	4	10597
2008	Mei	5	12646
2008	Juni	6	12416
2008	Juli	7	14006
2008	Agustus	8	18171
2008	September	9	17363
2008	Oktober	10	11011
2008	Nopember	11	13858
2008	Desember	12	15727
2009	Januari	1	10665
2009	Februari	2	9916
2009	Maret	3	13061
2009	April	4	11582
2009	Mei	5	13448
2009	Juni	6	14879
2009	Juli	7	14810
2009	Agustus	8	15661
2009	September	9	10381
2009	Oktober	10	12630
2009	Nopember	11	16413
2009	Desember	12	14630
2010	Januari	1	13889
2010	Februari	2	12241
2010	Maret	3	14455

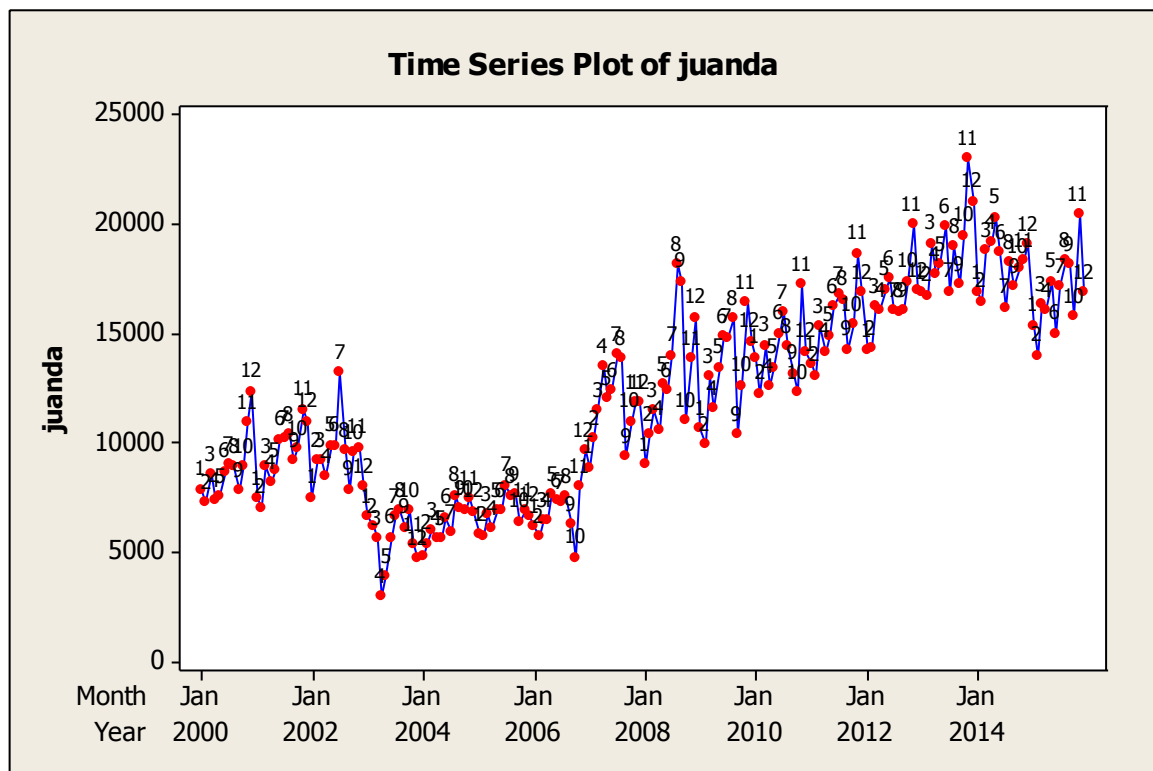
tahun	bulan	t	juanda
2010	April	4	12561
2010	Mei	5	13459
2010	Juni	6	15008
2010	Juli	7	15941
2010	Agustus	8	14420
2010	September	9	13171
2010	Oktober	10	12297
2010	Nopember	11	17255
2010	Desember	12	14191
2011	Januari	1	13580
2011	Februari	2	13086
2011	Maret	3	15317
2011	April	4	14179
2011	Mei	5	14894
2011	Juni	6	16215
2011	Juli	7	16788
2011	Agustus	8	16553
2011	September	9	14264
2011	Oktober	10	15406
2011	Nopember	11	18650
2011	Desember	12	16883
2012	Januari	1	14200
2012	Februari	2	14290
2012	Maret	3	16257
2012	April	4	16061
2012	Mei	5	17017
2012	Juni	6	17503
2012	Juli	7	16036
2012	Agustus	8	16003
2012	September	9	16065
2012	Oktober	10	17394
2012	Nopember	11	19995
2012	Desember	12	16955
2013	Januari	1	16869
2013	Februari	2	16718
2013	Maret	3	19113
2013	April	4	17674
2013	Mei	5	18128
2013	Juni	6	19898
2013	Juli	7	16897
2013	Agustus	8	18974
2013	September	9	17250
2013	Oktober	10	19487

tahun	bulan	t	juanda
2013	Nopember	11	22986
2013	Desember	12	21047
2014	Januari	1	16870
2014	Februari	2	16476
2014	Maret	3	18776
2014	April	4	19145
2014	Mei	5	20299
2014	Juni	6	18685
2014	Juli	7	16174
2014	Agustus	8	18239
2014	September	9	17124
2014	Oktober	10	17997
2014	Nopember	11	18324

tahun	bulan	t	juanda
2014	Desember	12	19084
2015	Januari	1	15366
2015	Februari	2	14003
2015	Maret	3	16338
2015	April	4	16063
2015	Mei	5	17355
2015	Juni	6	15004
2015	Juli	7	17134
2015	Agustus	8	18311
2015	September	9	18167
2015	Oktober	10	15798
2015	Nopember	11	20449
2015	Desember	12	16863

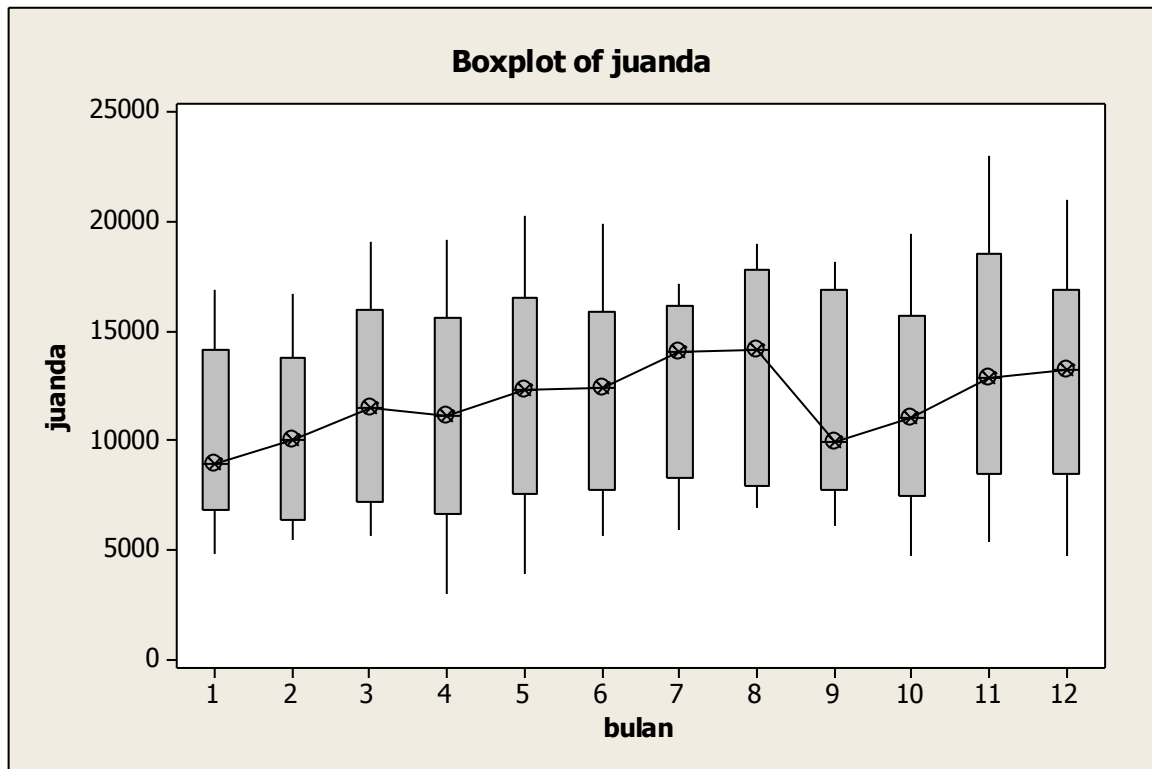
LAMPIRAN 2

Plot time series jumlah wisatawan mancanegara di bandara Juanda



LAMPIRAN 3

Boxplot jumlah wisatawan mancanegara di bandara Juanda



LAMPIRAN 4

Sintaks untuk menentukan model smoothing spline dengan error berkorelasi

```
library (nlme)
library (assist)
library (mass)
data(data)
attach (data)
data$cst <- (data$t)/12
#smoothing spline
juanda.fit1 <- lm(juanda~cst, data=data)
summary(juanda.fit1)
juanda.fit2 <- ssr(juanda~1, rk=cubic(cst), spar="m", data=data)
summary(juanda.fit2)
anova(juanda.fit2)
juanda.fit3 <- update(juanda.fit2, rk=cubic(cst))
summary(juanda.fit3)
anova(juanda.fit3)
juanda.fit4 <- update(juanda.fit3, weights=varExp(form=~cst))
summary(juanda.fit4)
p.juanda.fit4 <- predict(juanda.fit4)
p.juanda.fit4
plot(t,juanda)
points(t,p.juanda.fit4$fit,col="red")
lines(t,p.juanda.fit4$fit,col="blue")
```

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Bab ini menyajikan beberapa hasil penting yang ditarik sebagai kesimpulan yang diperoleh dari hasil dan pembahasan pada bab 4. Adapun kesimpulan dari penelitian ini sebagai berikut:

1. Berdasarkan hasil dan pembahasan telah diperoleh estimator model *smoothing spline* dengan error berkorelasi sebagai berikut.

$$\hat{f}(t) = \mathbf{T}\mathbf{d} + \Sigma \mathbf{c}$$

dengan estimator parameter penghalus GML

$$M(\lambda, \rho) = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{W}(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{y}}{[\det^+(W(\mathbf{I} - \mathbf{A}))]^{1/(n-m)}}$$

2. Berdasarkan hasil dan pembahasan telah diketahui bahwa model *smoothing spline* dengan error berkorelasi diperoleh nilai GML sebesar 0,2134811, estimasi sigma sebesar 4052,581 dan derajat bebas 2 sehingga diperoleh model sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 15366 \\ 1 & 14003 \\ 1 & 16338 \\ 1 & 16063 \\ 1 & 17355 \\ 1 & 15004 \\ 1 & 17134 \\ 1 & 18311 \\ 1 & 18167 \\ 1 & 15798 \\ 1 & 20449 \\ 1 & 16863 \end{bmatrix}_{12 \times 2} \quad [10108,211 + 2759,471t] + \begin{bmatrix} 0,0034 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0,0049 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,0049 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0,0083 \end{bmatrix}_{12 \times 12} \begin{bmatrix} -91843,58 \\ -385119,02 \\ 110309,94 \\ 5717,40 \\ 141687,36 \\ -177356,28 \\ 31245,54 \\ 108161,51 \\ 83030,50 \\ -47746,76 \\ 185106,15 \\ 36807,24 \end{bmatrix}_{12 \times 1}$$

dengan prediksi jumlah wisman sebagai berikut.

t	$\hat{f}(t)$	t	$\hat{f}(t)$
1	15689,70	7	16801,40
2	15634,89	8	16926,76
3	15776,02	9	16889,43
4	16027,98	10	16681,28
5	16311,61	11	16332,00
6	16574,26	12	15878,76

5.2 Saran

Melihat hal-hal yang telah disimpulkan sebelumnya, ada beberapa hal yang dapat disarankan untuk pengembangan lebih lanjut.

1. Pada penelitian ini model *smoothing spline* yang digunakan hanya sebatas pada AR (1), oleh karena itu untuk penelitian selanjutnya diharapkan menggunakan model *smoothing spline* dengan AR (2).
2. Pada penelitian ini belum dilakukan pengujian, oleh karena itu untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan pengujian baik pengujian serentak dan pengujian parsial.
3. Pada penelitian selanjutnya perlu penambahan variabel prediktor yang diduga berpengaruh terhadap jumlah wisatawan mancanegara di bandara Juanda.

DAFTAR PUSTAKA

- Angkasa Pura I, Angkasa Pura Airports Bangun Terminal 3 Juanda, Pemda Jatim, Siap Dukung, 14 Maret 2016, <http://www.angkasapura1.co.id/detail/berita/angkasa-pura-airports-bangun-terminal-3-juanda-pemda-jatim-siap-dukung>.
- Aydin, D., (2007), A Comparison of the Nonparametric Regression Model Using Smoothing Spline and Kernel Regression, World Academy of Science, Engineering and Technology International, Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering Vol. 1 no.12.
- Badan Pusat Statistik, (2015), *Tabel Statistik Jumlah Kedatangan Wisatawan Mancanegara ke Indonesia per Bulan Menurut Pintu Masuk*, BPS, Jakarta.
- Berberian, S.K.1961. *Introduction to Hilbert Spaces*. New York: Oxford University Press.
- Budiantara, I.N. (2006), “Model Spline dengan Knots Optimal”, *Jurnal Ilmu dasar*, FMIPA Universitas Jember, 7, 77-85.
- Diana, Budiantara, Purhadi dan Darmesto (2012), Estimator Smoothing Spline dalam Regresi Nonparametrik Multivariabel, Seminar Nasional Matematika
- Drapper, N.R., dan Smith, H. (1992), *Applied Regression Analysis 2nd Edition*, Marcel Dekker, New York.
- Eubank,R.L, (1988). *Spline Smooting and Nonparametrik Regression*. Marcel Dekker, New York
- Eubank,R.L, (1999). *Nonparametric Regression and Smoothing Spline*. Marcel Dekker, New York
- Gu, C., (1992), Diagnostic for Nonparametric Regression Model with Additive Term, Journal of the American Statistical Association, 87 (420), 1051-1058.
- Gu, Chong., (2014), Smoothing Spline ANOVA Models: R Packages gss, Journal of Statistical Software Vol.158
- Hanke, J., dan Winchern, D.W., (2005), *Business Forecasting*, 8th Edition, New Jersey: Prentice Hall.
- Kimeldorf, G.S., and Wahba, G., (1971), Some Result On Tchebycheffian Spline Function, Journal of Mathematical Analysis and Application,33, 82-94.
- Khoirunnisa, R.D., Wibowo, W., dan Suharsono, A., 2016. *Nonlinierity Test on Time Series Data, Case Study: The Number of Foreign Tourists*.

Yogyakarta: Seminar Internasional Implementasi Penelitian, Pendidikan Matematika dan Sains

- Kreyszig, E.1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley and Sons.
- Nalim, Budiantara dan Fitriasaki K., (2005), Model Spline Dengan Error Berkorelasi, *Jurnal Matematika* vol, 8 no.3 Desember 2005, 107-116.
- Prastuti, M., Suhartono, (2014), Model GSTAR-SUR Musiman Untuk Peramalan Jumlah Wisatawan Mancanegara di Empat Lokasi Wisata di Indonesia, Tugas Akhir Jurusan Statistika, Surabaya: ITS.
- Rahmi dan Wulandari, S., (2011), Peramalan Jumlah Wisatawan Mancanegara yang Masuk Melalui Pintu Kedatangan Bandara Soekarno Hatta dan Bandara Juanda, Tugas Akhir Jurusan Statistika, Surabaya: ITS.
- SAS Institute, (1992), The Mixed Procedure, SAS Technical Report, p-229, Cary, NC:Author.
- Sutijo, B., Suhartono dan Edharta, (2011), Forecasting Tourism Data Using Neural Networks – Multiscale Autoregressive Model, *Jurnal Matematika dan Sains* April 2011, Vol.16 nomor 1.
- Wang, Y., (1998), Smoothing Spline Models With Correlated Random Error, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 93, No. 441 (Mar., 1998), pp. 341-348 Published
- Wahba, G., (1985), A Comparison of GCV and GML for Choosing the Smoothing Parameter in the Generalized Spline Smoothing Problem, *The Annals of Statistics*, 4, 1378-1402.
- Wahba, G. (1990), *Spline Model for Observational Data*, SIAM, XII, Philadelphia.

BIOGRAFI PENULIS

Penulis dilahirkan di Surabaya pada tanggal 25 Mei 1991 dengan nama lengkap Rahma Dwi Khoirunnisa yang merupakan anak kedua dari pasangan Subagio Utomo dan Nur Hanifah. Penulis menempuh jenjang pendidikan formal di SDN Margorejo I Surabaya (1997-2003), SMP Negeri 13 Surabaya (2003-2006), SMA Muhammdiyah 2 Surabaya (2006-2009) dan S1 Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Negeri Surabaya (2009-2013). Penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun bagi kebaikan di masa datang. Bila ingin berdiskusi tentang topik penelitian dalam tesis ini dapat menghubungi penulis melalui email: r4hm4dwi25@gmail.com.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)