



TESIS - SM 142501

**PENGARUH *MAGNETOHYDRODYNAMIC* (MHD) PADA  
FLUIDA *MICROPOLAR* YANG MELEWATI BOLA BERPORI**

INDIRA ANGGRIANI  
NRP 1214 201 025

Dosen Pembimbing:  
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc  
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

PROGRAM MAGISTER  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2016





THESIS - SM 142501

**THE EFFECT OF MAGNETOHYDRODYNAMIC (MHD) IN  
MICROPOLAR FLUID PAST A POROUS SPHERE**

INDIRA ANGGRIANI  
NRP 1214 201 025

Supervisor:  
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc  
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

MASTER'S DEGREE  
MATHEMATICS DEPARTMENT  
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES  
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
SURABAYA  
2016



**PENGARUH MAGNETOHYDRODYNAMIC (MHD) PADA  
FLUIDA MICROPOLAR YANG MELEWATI BOLA BERPORI**

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar  
Magister Sains (M.Si.)

di  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :


**INDIRA ANGGRIANI**  
NRP. 1214 201 025

Tanggal Ujian : 27 Mei 2016  
Periode Wisuda : September 2016

Disetujui oleh :

  
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.  
NIP. 19650605 198903 1 002

(Pembimbing 1)

  
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.  
NIP. 19611115 198703 1 003


(Pembimbing 2)

  
Dr. Hariyanto, M.Si.  
NIP. 19530414 198203 1 002

(Penguji)

  
Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si., MT.  
NIP. 19690405 199403 2 003

(Penguji)

  
Dr. Imam Mukhlash, S.Si., MT.  
NIP. 19700831 199403 1 003

(Penguji)

Direktur Program Pascasarjana,

  
Prof. Sr. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D.  
NIP. 19601202 198701 1 001

PROGRAM  
PASCASARIANA

# **PENGARUH *MAGNETOHYDRODYNAMIC* (MHD) PADA FLUIDA *MICROPOLAR* YANG MELEWATI BOLA BERPORI**

Nama Mahasiswa : Indira Anggriani  
NRP : 1214 201 025  
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc  
2. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

## **ABSTRAK**

Fluida *micropolar* adalah tipe fluida non-Newtonian dengan struktur mikro. Fluida *micropolar* mendukung *body couples* dan berakibat pada perilaku mikro rotasi. *Magnetohydrodynamic* (MHD) adalah ilmu tentang pergerakan aliran konduksi listrik di bawah medan magnet. Pada tesis ini dibahas mengenai pengaruh MHD pada fluida *micropolar* yang mengalir melewati sebuah bola berpori. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut akan dikembangkan model matematika dari aliran fluida *micropolar* yang dipengaruhi oleh medan magnet sehingga menimbulkan lapisan batas. Persamaan lapisan batas yang terbentuk kemudian diformulasikan untuk mendapatkan persamaan dimensional. Persamaan pembangun dimensional yang terbentuk adalah persamaan kontinuitas, momentum dan momentum anguler. Kemudian persamaan tersebut ditransformasikan ke dalam bentuk non-dimensi. Aliran yang diteliti merupakan aliran *unsteady* sehingga persamaan kendali ditransformasikan ke dalam variabel similiaritas. Persamaan similiaritas yang didapatkan diselesaikan secara numerik dengan metode Keller-Box. Pada tesis ini dipelajari mengenai pengaruh parameter magnetik, parameter *micropolar*, parameter porositas serta parameter permeabilitas terhadap profil kecepatan dan profil mikro rotasi. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa profil kecepatan semakin besar dengan bertambahnya parameter magnetik dan porositas. Sedangkan kecepatan menurun dengan bertambahnya parameter *micropolar* dan permeabilitas. Profil mikro rotasi semakin menurun dengan bertambahnya parameter magnetik dan porositas, sedangkan mengalami kenaikan pada saat penambahan parameter *micropolar* dan permeabilitas.

**Kata-kunci:** *Fluida micropolar, MHD, unsteady, bola berpori, Metode Keller-Box.*



# **THE EFFECT OF MAGNETOHYDRODYNAMIC (MHD) IN MICROPOLAR FLUID PAST A POROUS SPHERE**

Name : Indira Anggriani  
NRP : 1214 201 025  
Supervisors : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc  
2. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

## **ABSTRACT**

Micropolar fluid is non-Newtonian fluid type with microstructure. Micropolar fluid support body couples and exhibit microrotational effects. The MHD is study about the motion of electrically conducting fluids under magnetic fields. These thesis is researched about the effect of MHD in micropolar fluid past a porous sphere. For resolve these issues is developed a mathematical model of micropolar fluid flow is influenced by the magnetic field evoke the boundary layer. From the boundary layer formed a dimensional governing equation, it was continuity equation, momentum equation and angular of momentum equation. Then the equation is transformed into non-dimensional form and similiarity equation. The similiarity equations are solved numerically solution by Keller-Box method. Numerical results obtained, used to observe the influence of some parameters: magnetic parameter, micropolar parameter, porosity parameter and permeability parameter of the velocity profile and the profile of the microrotation. The result of numerical solution that the velocity profile be increased along with magnetic parameter and porosity parameter increased. Moreover the velocity decreased when micropolar parameter and permeability parameter increased. Profile microrotation increased with increased micropolar parameters and permeability parameter. Whereas profile microrotation decreased with increased magnetic parameter and porosity parameter.

**Keywords:** Micropolar fluid, MHD, unsteady, porous sphere, Keller-Box method





## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR SIMBOL	xix
BAB I      PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Perumusan Masalah .....	2
1.3 Batasan Masalah .....	3
1.4 Tujuan Penelitian .....	3
1.5 Manfaat Penelitian .....	3
1.6 Kontribusi Penelitian .....	3
BAB II      KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	5
2.1 Penelitian Terdahulu .....	5
2.2 Fluida .....	8
2.2.1 Fluida Newtonian dan Fluida Non Newtonian .....	9
2.2.2 Fluida <i>Micropolar</i> .....	9
2.3 Magnetohydrodynamics (MHD) .....	10
2.4 Aliran Lapisan Batas ( <i>Boundary Layer</i> ) .....	11
2.5 Porositas dan Permeabilitas .....	12
2.6 Metode Beda Hingga ( <i>Finite Difference Method</i> ) .....	13
2.6.1 Metode Keller Box .....	14

BAB III	METODE PENELITIAN	17
3.1	Tahap Penelitian	17
3.1.1	Tahap Pembentukan Model	18
3.1.2	Tahap Implementasi	18
3.1.3	Tahap Analisis Hasil	19
3.2	Tempat Penelitian	19
BAB IV	PEMBAHASAN MODEL MATEMATIKA	21
4.1	Persamaan Pembangun	21
4.1.1	Persamaan Kontinuitas	21
4.1.2	Persamaan Momentum	23
4.1.3	Persamaan Momentum Anguler	27
4.2	Transformasi Variabel Tak berdimensi	29
4.3	Pendekatan Lapisan Batas	31
4.4	Fungsi Alir atau Fungsi Arus ( <i>Stream Function</i> )	32
4.5	Persamaan Similaritas	33
BAB V	Penyelesaian Model Matematika	37
5.1	Diskritisasi Model	38
5.2	Linierisasi Model	40
5.3	Teknik Eliminasi Blok	42
5.4	Hasil Numerik	49
5.4.1	Pengaruh Parameter Magnetik	49
5.4.2	Pengaruh Parameter <i>Micropolar</i>	52
5.4.3	Pengaruh Parameter Porositas	56
5.4.4	Pengaruh Parameter Permeabilitas	59
5.4.5	Pengaruh Parameter Magnetik dan Parameter <i>Micropolar</i>	63
5.4.6	Pengaruh Parameter Porositas dan Parameter Magnetik	64
5.4.7	Pengaruh Parameter <i>Micropolar</i> dan Parameter Porositas	66
BAB VI	KESIMPULAN DAN SARAN	69
6.1	KESIMPULAN	69
6.2	SARAN	71
	DAFTAR PUSTAKA	72
	LAMPIRAN	75
	BIODATA PENULIS	105

## DAFTAR TABEL

Tabel 5.1	Perbandingan Kecepatan Fluida <i>Micropolar</i> terhadap $n$ pada saat $\eta = 1$ dengan variasi Parameter Magnetik . . . . .	52
Tabel 5.2	Perbandingan Profil Mikro Rotasi terhadap $n$ pada saat $\eta = 1$ dengan variasi Parameter Magnetik . . . . .	52
Tabel 5.3	Perbandingan Kecepatan Fluida terhadap $n$ pada saat $\eta = 1$ dengan variasi Parameter <i>Micropolar</i> . . . . .	55
Tabel 5.4	Perbandingan Profil Mikro Rotasi terhadap $n$ pada saat $\eta = 1$ dengan variasi Parameter <i>Micropolar</i> . . . . .	56
Tabel 5.5	Perbandingan Kecepatan Fluida <i>Micropolar</i> terhadap $n$ pada saat $\eta = 1$ dengan variasi Parameter Porositas . . . . .	59
Tabel 5.6	Perbandingan Profil Mikro Rotasi terhadap $n$ pada saat $\eta = 1$ dengan variasi Parameter Porositas . . . . .	59
Tabel 5.7	Perbandingan Kecepatan Fluida <i>Micropolar</i> terhadap $n$ pada saat $\eta = 1$ dengan variasi Parameter Permeabilitas . . . . .	62
Tabel 5.8	Perbandingan Profil Mikro Rotasi terhadap $n$ pada saat $\eta = 1$ dengan variasi Parameter Permeabilitas . . . . .	63
Tabel 6.1	Nilai Kecepatan dan Profil Mikro Rotasi terhadap $\eta = 1$ dengan variasi $n$ . . . . .	104



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Pengeboran Minyak ( <i>Oil and Gas Management Center, 2014</i> ).....	2
Gambar 2.1	Profil kecepatan dan Mikro rotasi untuk parameter magnetik yang berbeda pada $n = 0.5$ (Abdel-Rahman, 2009).....	6
Gambar 2.2	Profil Mikro rotasi untuk parameter magnetik yang berbeda (Satya Narayana dkk, 2013).....	6
Gambar 2.3	Profil kecepatan untuk parameter porositas yang berbeda (R. N. Jat, Vishal Saxena dan Dinesh Rajotia, 2012).....	7
Gambar 2.4	Profil Mikro rotasi untuk parameter magnetik yang berbeda (Khilap Singh dan Manoj Kumar, 2015).....	7
Gambar 2.5	Model fisik dan sistem koordinat dari aliran yang melalui bola berpori .....	8
Gambar 2.6	Lapisan Batas yang Terbentuk dari Fluida yang Melewati Suatu Permukaan Lengkung.....	13
Gambar 2.7	Stensil Skema Keller-Box.....	14
Gambar 3.1	Model fisik dan sistem koordinat dari aliran yang melewati bola berpori .....	17
Gambar 5.1	Skema beda hingga .....	38
Gambar 5.2	Profil Kecepatan dengan variasi parameter $M$ .....	49
Gambar 5.3	Profil Mikro Rotasi dengan variasi parameter $M$ .....	50
Gambar 5.4	Profil Kecepatan dengan variasi parameter $M$ .....	51
Gambar 5.5	Profil Mikro rotasi dengan variasi parameter $M$ .....	51
Gambar 5.6	Profil Kecepatan dengan variasi parameter $K$ .....	53
Gambar 5.7	Profil Mikro Rotasi dengan variasi parameter $K$ .....	53
Gambar 5.8	Profil Kecepatan dengan variasi parameter $K$ .....	54
Gambar 5.9	Profil Mikro Rotasi dengan variasi parameter $K$ .....	55
Gambar 5.10	Profil Kecepatan dengan variasi parameter Porositas .....	56
Gambar 5.11	Profil Mikro Rotasi dengan variasi parameter Porositas ....	57
Gambar 5.12	Profil Kecepatan dengan variasi parameter Porositas .....	58
Gambar 5.13	Profil Mikro Rotasi dengan variasi parameter Porositas ....	58

Gambar 5.14	Profil Kecepatan dengan variasi parameter permeabilitas . . .	60
Gambar 5.15	Profil Mikro Rotasi dengan variasi parameter permeabilitas	60
Gambar 5.16	Profil Kecepatan dengan variasi parameter permeabilitas . . .	61
Gambar 5.17	Profil Kecepatan dan Profil mikro rotasi dengan variasi $n$ . .	62
Gambar 5.18	Profil kecepatan saat $n = 0$ dan $n = 0.5$ . . . . .	63
Gambar 5.19	Profil mikro rotasi saat $n = 0$ dan $n = 0.5$ . . . . .	64
Gambar 5.20	Profil kecepatan saat $n = 0$ dan $n = 0.5$ . . . . .	65
Gambar 5.21	Profil mikro rotasi saat $n = 0$ dan $n = 0.5$ . . . . .	66
Gambar 5.22	Profil kecepatan saat $n = 0$ dan $n = 0.5$ . . . . .	66
Gambar 5.23	Profil mikro rotasi saat $n = 0$ dan $n = 0.5$ . . . . .	67
Gambar 6.1	Profil Kecepatan dan Profil mikro rotasi dengan variasi $n$ . .	104

## DAFTAR SIMBOL

$a$	jari-jari bola
$B$	Gaya Magnet
$b$	Induksi Medan Magnet
$B_0$	Medan Magnet
$E$	Medan Listrik
$\sigma$	Konduktivitas Listrik
$erf$	<i>error function</i>
$F$	Gaya
$g$	Gravitasi
$J$	Kerapatan arus
$j$	Densitas mikro inersia
$K$	Parameter <i>Micropolar</i>
$M$	Parameter Magnetik
$N$	Daerah Mikro Rotasi
$\bar{N}$	Dimensional Mikro Rotasi
$N$	Non Dimensional Mikro Rotasi
$n$	Rasio Mikro Rotasi
$\bar{p}$	Tekanan
$\bar{r}(\bar{x})$	Dimensional jari-jari
$r(x)$	Jari-jari
$Re$	Reynolds Number
$\bar{t}$	Waktu
$t$	Non Dimensi Waktu
$\mathbf{u}$	Kecepatan Fluida pada vektor
$u$	Kecepatan fluida
$u_e$	Kecepatan <i>free stream</i>
$U_\infty$	Kecepatan aliran bebas
$\rho$	Densitas fluida
$\mu$	Viskositas dinamik
$\phi$	Parameter Porositas



$K^*$	Parameter Permeabilitas
$\kappa$	<i>vortex</i>
$\nu$	viskositas kinematik
$\gamma$	spin gradien
$\psi$	Fungsi Alir
$\eta$	Variabel Similiaritas

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Fluida adalah suatu zat yang memiliki kemampuan berubah bentuk secara *continue* apabila dikenakan tegangan geser (Widodo, 2012). Berdasarkan karakteristiknya, fluida fase cair dibagi menjadi dua, yaitu fluida Newtonian dan non-Newtonian. Fluida yang tegangan gesernya tidak linier terhadap laju regangan geser disebut fluida non-Newtonian. Fluida ini memiliki beberapa tipe yaitu : plastik padat, fluida eksponensial, fluida viskoelastik dan fluida *micropolar*. Contoh dari fluida non-Newtonian yaitu : cat, logam material komposit, adonan, nilon, minyak pelumas, lumpur, darah, *crystal fluid* dan lain sebagainya. Fluida *micropolar* adalah tipe fluida non-Newtonian dengan struktur mikro. Contoh dari fluida ini yaitu : *polymer liquids*, *crystal liquids*, darah, dan lain sebagainya. Saat ini, fluida *micropolar* mendapat perhatian lebih mengenai aplikasi dalam bidang teknik (Lukaszewic, 1990). Fluida *micropolar* mendukung *body couples* dan berakibat pada perilaku mikro rotasi.

*Magnetohydrodynamic* (MHD) adalah ilmu tentang pergerakan aliran konduksi listrik di bawah medan magnet. MHD menjelaskan hubungan timbal balik antara kecepatan aliran fluida serta medan elektromagnet, hubungan timbal balik yang dimaksud dapat dikatakan seperti aliran fluida yang menyebabkan adanya medan magnet dan medan magnet yang menyebabkan pergerakan aliran fluida. Penelitian mengenai MHD banyak dikembangkan dalam bidang teknik dan industri, misalnya power generator dan pendingin reaktor nuklir. Berdasarkan pemanfaatan yang ada dalam bidang teknik dan industri, pada Tesis ini dilakukan penelitian tentang pengaruh MHD pada fluida *micropolar*.

Penelitian yang telah dilaksanakan oleh S. Nadeem dkk(2010), Vishal Saxena dkk(2012), Satya Narayana dkk (2013), dan Uddin dan Kumar (2013), meneliti tentang pengaruh MHD pada fluida *micropolar*. Pengaruh MHD yang terjadi pada fluida *micropolar* diamati sebagai kasus dalam keadaan tunak atau *steady state* dengan aliran lapisan batas. Berdasarkan pemanfaatannya dalam bidang teknik dan industri misalnya pada pengeboran minyak, maka pada penelitian ini akan dibahas mengenai pengaruh MHD pada fluida *micropolar* yang melewati bola berpori.

Deskripsi dari permasalahan yang diteliti yaitu aliran yang melewati bola



Gambar 1.1: Pengeboran Minyak (*Oil and Gas Management Center, 2014*)

berpori yang menimbulkan lapisan batas *boundary layer*. Aliran dari fluida pada permasalahan ini bergerak dari bawah kemudian melewati sebuah bola berpori dengan jari-jari  $a$  yang terbenam di dalam fluida *micropolar* yang *incompressible*. Koordinat  $\bar{x}$  adalah garis di sepanjang permukaan bola berpori, koordinat  $\bar{y}$  adalah garis normal pada permukaan bola berpori,  $\bar{r}(\bar{x}) = a \sin(\frac{\bar{x}}{a})$  adalah jarak radial dari sumbu simetris hingga permukaan bola berpori. Selanjutnya, upaya awal yang dilakukan dalam pemecahan masalah ini adalah menyelesaikan persamaan lapisan batas yang terbentuk kemudian diformulasikan untuk mendapatkan persamaan lapisan batas dimensional. Lapisan batas dimensional tersebut ditransformasikan ke dalam bentuk non-dimensi. Aliran yang diteliti merupakan aliran *unsteady* sehingga persamaan kendali ditransformasikan ke dalam variabel similiaritas. Penyelesaian numerik yang digunakan adalah metode Keller-Box. Hasil numerik yang akan diperoleh, digunakan untuk menganalisa pengaruh parameter magnetik ( $M$ ), *micropolar* ( $K$ ), porositas ( $\phi$ ) dan permeabilitas ( $K^*$ ) terhadap profil kecepatan dan profil mikro rotasi.

## 1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang yang ada, permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah

1. Bagaimana membangun model matematika dari pengaruh MHD pada fluida *micropolar* yang melewati bola berpori.
2. Bagaimana penyelesaian model matematika dari pengaruh MHD pada fluida *micropolar* yang melewati bola berpori dengan menggunakan metode Keller-Box.

3. Bagaimana pengaruh parameter *micropolar*, parameter magnetik, parameter porositas dan parameter permeabilitas terhadap profil kecepatan dan profil mikro rotasi.

### 1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini dibatasi sebagai berikut:

1. Fluida yang digunakan bersifat tak mampu mampat (*incompressible*).
2. Aliran fluida bersifat tak tunak (*unsteady*)
3. Aliran fluida dua dimensi yang melewati bola berpori.
4. Bola berpori yang diamati terletak pada aliran bebas tanpa ada halangan di dekat bola.
5. Tidak ada induksi medan magnet yang terjadi pada aliran fluida dan bola berpori.
6. Tidak ada tegangan listrik pada aliran fluida sehingga pada bola berpori medan listriknya sama dengan nol.
7. Penyelesaian numerik menggunakan skema Metode Beda Hingga Keller Box.

### 1.4 Tujuan Penelitian

Dari perumusan masalah yang ada, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menyusun model matematika dari pengaruh MHD pada fluida *micropolar* yang melewati bola berpori.
2. Mendapatkan solusi numerik dari model pengaruh MHD pada fluida *micropolar* yang melewati bola berpori dengan menggunakan skema Metode Beda Hingga Keller Box.
3. Menganalisis pengaruh parameter *micropolar*, parameter magnetik, parameter porositas dan parameter permeabilitas terhadap profil kecepatan dan profil mikro rotasi.

### 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai suatu bentuk kontribusi dalam pengembangan ilmu Matematika terapan di bidang teknologi dan industri, *geophysical*, dan *astrophysical*, khususnya aplikasi metode beda hingga Keller-Box pada permasalahan aliran fluida *micropolar* dan pengaruh MHD pada permukaan bola berpori.

### 1.6 Kontribusi Penelitian

Kontribusi hasil penelitian ini terhadap pengembangan ilmu di bidang teknologi dan industri misalnya pada pengeboran minyak.



## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

#### 2.1 Penelitian Terdahulu

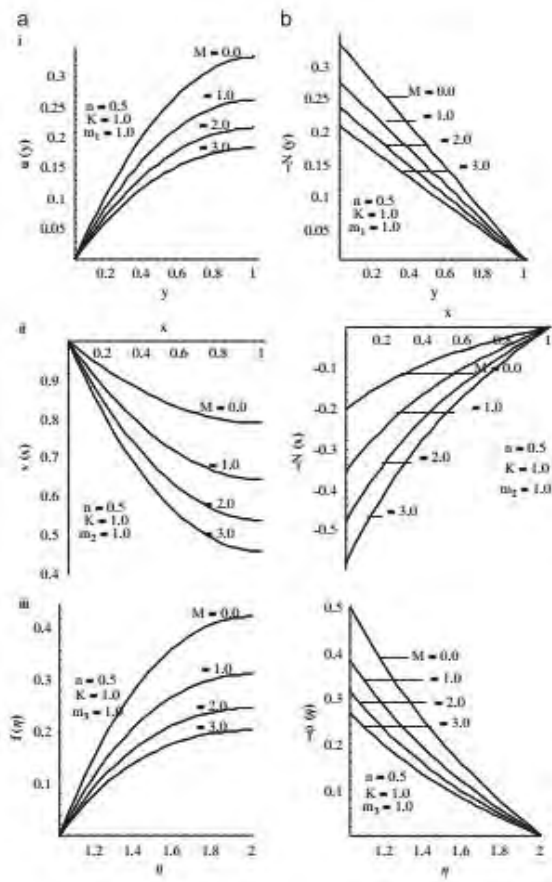
Fluida dalam kehidupan nyata yang dapat diklasifikasikan sebagai fluida *micropolar* adalah cairan koloid, cairan pembuluh darah pada manusia atau hewan, suspensi polimer dan lumpur (Abdel-Rahman, 2009). Hal yang menarik dari fluida *micropolar* adalah model *micropolar* dapat diubah menjadi persamaan Navier-Stokes yang biasanya digunakan pada fluida kental karena fluida *micropolar* bersifat seperti fluida kental klasik yang sebagaimana menjauhi permukaan objeknya.

Pada tahun 2009, Abdel-Rahman telah melakukan studi mengenai kondisi lapisan batas dalam aliran fluida *micropolar* melalui beberapa bentuk geometri objek. Pada penelitian tersebut diamati pengaruh medan magnet terhadap profil kecepatan dan profil mikro rotasi. Pada penelitian tersebut dijelaskan bahwa nilai parameter magnetik jika ditingkatkan atau diperbesar maka dapat meningkatkan ketebalan dari lapisan batas. Dengan meningkatnya parameter magnetik didapatkan bahwa kecepatan yang dihasilkan semakin meningkat dan profil mikro rotasi semakin menurun.

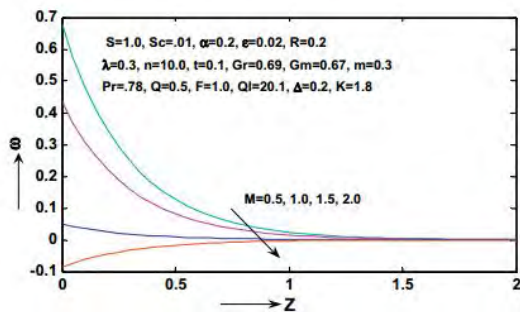
Penelitian mengenai efek MHD pada fluida *micropolar*, bilangan Reynold magnetik diasumsikan sangat kecil sehingga daerah terinduksi magnet dapat diabaikan yang kemudian dibandingkan dengan daerah bermagnet (Abdel-Rahman, 2009; Hayat dkk 2009; Satya Narayana dkk, 2013). Asumsi ini juga banyak digunakan ketika peneliti mempelajari efek MHD pada fluida kental sebagaimana yang telah dibahas sebelumnya.

Pada penelitian Satya Narayana (2013) tentang efek *Hall Current* dan absorpsi radiasi pada MHD fluida *micropolar* sistem rotasi. Pada penelitian tersebut diamati pengaruh medan magnet terhadap profil mikro rotasi. Penelitian tersebut juga dijelaskan bahwa nilai parameter magnetik yang juga dipengaruhi oleh Schmidt number, Grashof number dan parameter rotasi dapat menyebabkan profil mikro rotasi yang dihasilkan semakin menurun.

Penelitian yang telah dilakukan oleh R. N. Jat, Vishal Saxena dan Dinesh Rajotia pada tahun 2012, tentang aliran MHD di titik stagnasi pada fluida *micropolar* melewati media berpori. Pada penelitian tersebut mengamati pengaruh medan magnet dan media berpori terhadap kecepatan. Pada penelitian tersebut dijelaskan

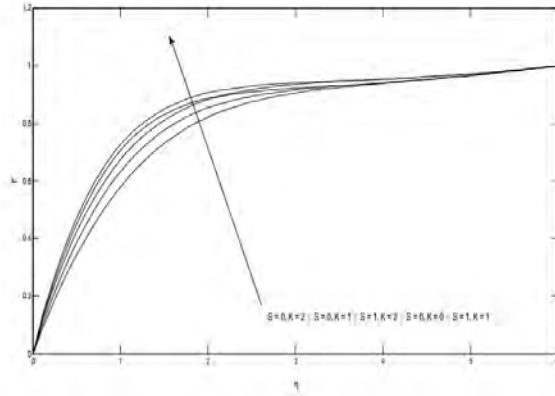


Gambar 2.1: Profil kecepatan dan Mikro rotasi untuk parameter magnetik yang berbeda pada  $n = 0.5$  (Abdel-Rahman, 2009)



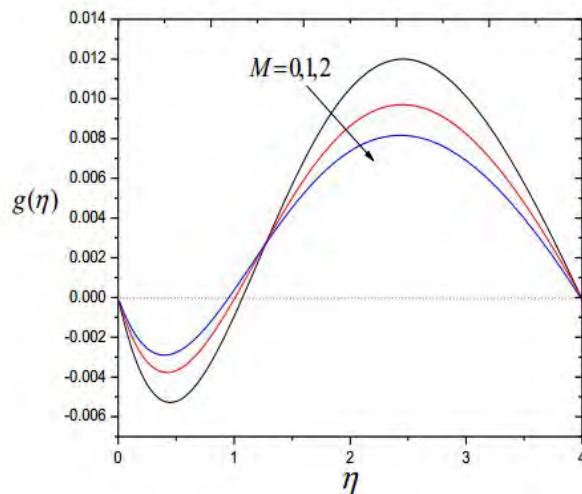
Gambar 2.2: Profil Mikro rotasi untuk parameter magnetik yang berbeda (Satya Narayana dkk, 2013)

bahwa semakin meningkat parameter magnetik dan parameter porositas maka kecepatan fluida yang dihasilkan juga semakin meningkat.



Gambar 2.3: Profil kecepatan untuk parameter porositas yang berbeda (R. N. Jat, Vishal Saxena dan Dinesh Rajotia, 2012)

Penelitian mengenai aliran MHD pada fluida *micropolar* dengan perpindahan panas pernah dilakukan oleh Khilap Singh dan Manoj Kumar (2015). Pada penelitian tersebut dijelaskan bahwa profil mikro rotasi semakin menurun dengan bertambahnya parameter magnetik yang diberikan.

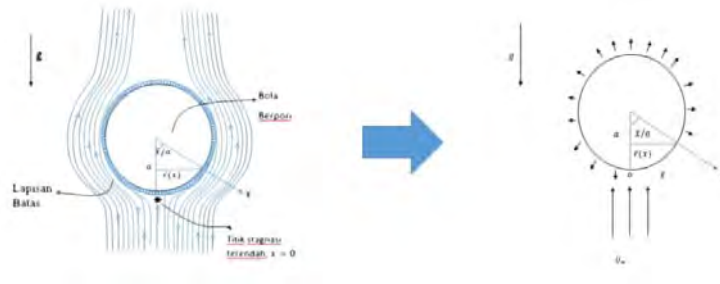


Gambar 2.4: Profil Mikro rotasi untuk parameter magnetik yang berbeda (Khilap Singh dan Manoj Kumar, 2015)

Berdasarkan penelitian-penelitian yang sudah pernah dilakukan, pada penelitian ini akan dilakukan penelitian pengembangan yaitu penelitian tentang fluida *micropolar magnetohydrodynamic* pada aliran tak tunak dan objek geometri yang digunakan adalah bola berpori. Gambar fisik dan sistem koordinat secara umum



dari permasalahan ini dapat dilihat pada gambar 1.1. Selain itu, pada penelitian ini akan digunakan metode Keller-Box untuk menyelesaikan permasalahan secara numerik.



Gambar 2.5: Model fisik dan sistem koordinat dari aliran yang melalui bola berpori

## 2.2 Fluida

Zat yang tersebar di alam terdiri atas tiga fase, yaitu fase padat, cair, dan gas. Zat dengan fase cair dan gas memiliki karakter tidak mempertahankan bentuk yang tetap sehingga kedua zat ini mempunyai kemampuan untuk mengalir dan kedua zat tersebut disebut fluida. Perbedaan zat cair dan gas terletak pada kemampumannampatan kedua zat tersebut. Zat cair merupakan zat yang tak mampu mampat (*incompressible*) sedangkan gas merupakan zat yang mampu mampat (*compressible*). Kemampatan adalah perubahan (pengcilan) volume karena adanya perubahan (penambahan) tekanan (Widodo, 2012). Fluida adalah suatu zat yang mempunyai kemampuan berubah bentuk secara *continue* apabila dikenakan tegangan geser meskipun tegangan geser yang dikenakan sangat kecil. Tegangan geser adalah perbandingan gaya geser dengan luas permukaan sedangkan gaya geser adalah komponen gaya yang menyinggung permukaan (Streeter, 1988). Secara matematis ditulis dalam bentuk:

$$\tau = \frac{F}{A} \tag{2.1}$$

dengan:

- $\tau$  = tegangan geser ( $\frac{N}{m^2}$ )
- $F$  = gaya geser ( $N$ )
- $A$  = luas permukaan ( $m^2$ )

### 2.2.1 Fluida Newtonian dan Fluida Non Newtonian

Fluida Newtonian adalah suatu fluida yang memiliki viskositas bernilai konstan (meskipun terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut). Koefisien viskositas dinamik ( $\mu$ ) dari fluida Newtonian bergantung pada temperatur dan tekanan namun tidak bergantung pada besar gradien kecepatan. Secara matematis persamaan dari fluida Newtonian dapat ditulis sebagai berikut:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

dengan:

$\tau$  = tegangan geser pada fluida ( $\frac{N}{m^2}$ )

$\mu$  = viskositas fluida ( $\frac{N}{m^2} \cdot s$ )

$\frac{du}{dy}$  = gradien kecepatan fluida ( $s^{-1}$ )

Sedangkan fluida non-Newtonian adalah fluida yang akan mengalami perubahan viskositas ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Hal ini yang menyebabkan fluida non-Newtonian tidak memiliki viskositas yang konstan (berkebalikan dengan fluida Newtonian). Berikut ini adalah contoh dari fluida Non-Newtonian dalam kehidupan sehari-hari, yakni fluida plastik padat, fluida eksponensial, fluida *micropolar*, fluida viskoelastik (yang memiliki karakteristik viskos dan elastik), fluida tiksotropik atau fluida yang viskositasnya bergantung pada waktu, dan fluida rheopektik atau fluida yang viskositasnya seolah makin lama makin besar. Secara matematis persamaan dari fluida non-Newtonian dapat ditulis sebagai berikut.

$$\mu = \tau \frac{du}{dy} \quad (2.2)$$

Meskipun riset mengenai penyebaran panas pada fluida yang bersifat viskos (Newtonian) sudah banyak dilakukan, riset untuk non-Newtonian sangat kurang. Dari beberapa contoh fluida non-Newtonian, fluida *micropolar* adalah salah satu contoh fluida yang paling menarik untuk diteliti.

### 2.2.2 Fluida Micropolar

Fluida *micropolar* adalah cairan dengan struktur mikro. Fluida *micropolar* bersifat kaku, partikel acak dan mikro rotasi. Dalam teori fluida *micropolar*, hukum mekanika kontinum klasik ditingkatkan dengan persamaan tambahan yang menjelaskan konservasi saat mikro rotasi dan keseimbangan *stress momen* pertama yang timbul karena pertimbangan struktur mikro dalam suatu material. Dengan demikian variabel kinematika, misalnya *gyration tensor* dan mikro inersia tensor dan konsep

*body momen, stress momen* dan *micro stress* yang dikombinasikan dengan mekanika kontinum klasik. Teori fluida *micropolar* berlaku untuk solusi tertentu polimer, cairan pelumas, ekspansi koloid dan struktur biologis yang kompleks.

### 2.3 Magnetohydrodynamics (MHD)

Magnetohydrodynamics (MHD) (dinamika fluida magneto atau *hydromagnetics*) adalah studi mengenai dinamika fluida konduksi listrik. Contoh fluida yang dapat dikonduksi adalah plasma, logam cair, dan air garam atau elektrolit. MHD diperkenalkan dan dikembangkan oleh Hannes Alfvén seorang fisikawan yang mendapatkan nobel dalam fisika pada tahun 1970. Konsep dasar MHD adalah medan magnet dapat menginduksi arus listrik pada fluida konduktif bergerak yang pada gilirannya menciptakan gaya pada fluida dan juga mengubah medan magnet itu sendiri. Himpunan persamaan yang menggambarkan MHD adalah kombinasi dari persamaan Navier-Stokes pada dinamika fluida dan persamaan Maxwell pada elektromagnetik. Persamaan diferensial MHD harus diselesaikan secara simultan, baik analitik maupun secara numerik.

Bentuk ideal persamaan MHD terdiri dari persamaan fluida, yakni persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan Maxwell. Berikut ini adalah persamaan dasar yang dibutuhkan untuk membuat bentuk ideal persamaan MHD:

Persamaan momentum:

$$\rho \left( \frac{dv}{dt} \right) = -\nabla p + J \times B$$

Persamaan konservasi massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

Persamaan Maxwell:

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.4)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

dengan:

$B$  = medan magnet

$E$  = medan listrik

$V$  = kecepatan massal plasma

$J$  = kerapatan arus

$\rho$  = massa jenis

$p$  = tekanan plasma

$t$  = waktu

$\mu_0$  = permeabilitas ruang hampa ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N/A^2$ )

Pada permasalahan *magnetohydrodynamics* Persamaan (2.4) pada persamaan Maxwell tidak berlaku sehingga dapat dihilangkan dan Persamaan (2.5) hanya digunakan pada kondisi awal (*initial condition*). Selain itu, untuk frekuensi/kecepatan rendah, perpindahan arus bisa diabaikan (Arber, 2013). Sehingga, persamaan umum MHD dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (2.6)$$

$$\rho \left( \frac{dv}{dt} \right) = -\nabla p + J \times B \quad (2.7)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J \quad (2.8)$$

$$(2.9)$$

dan untuk mencari besar medan listrik, digunakan formulasi berikut:

$$E + v \times B = \eta J, \quad (2.10)$$

jika  $\eta = 0$  maka persamaan MHD tersebut dikatakan sebagai persamaan MHD ideal.

#### 2.4 Aliran Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Konsep lapisan batas pertama kali dikemukakan pada tahun 1904 oleh Ludwig Prandtl, seorang ahli aerodinamika Jerman. *Boundary layer* atau lapisan batas adalah suatu lapisan tipis pada permukaan padat dimana fluida mengalir. *Boundary layer* suatu fluida dipengaruhi oleh viskositas maupun gaya inersia benda tersebut.

Aliran fluida pada lapisan batas menurut perbandingan gaya-gaya inersia dengan viskositasnya secara garis besar terdiri dari tiga jenis aliran, yakni aliran laminar, aliran transisi dan aliran turbulen (Widodo, 2012).

Pada aliran laminar, partikel-partikel zat cair bergerak teratur mengikuti lintasan yang saling sejajar. Aliran ini terjadi apabila bilangan Reynolds kurang dari 500

( $Re < 500$ ) atau pada saat fluida bergerak dengan kecepatan kecil dan atau fluida memiliki viskositas (kekentalan) yang besar. Aliran transisi adalah aliran yang terjadi antara aliran laminar dan turbulen. Terjadinya masa transisi antara aliran laminar dan turbulen karena adanya perubahan viskositas dan kecepatan yang menyebabkan daya redam terhadap gangguan akan berkurang hingga batas tertentu. Aliran transisi terjadi apabila bilangan Reynolds antara 500 sampai 12.500 ( $500 < Re < 12.500$ ). Sedangkan aliran turbulen terjadi pada saat partikel-partikel zat cair bergerak secara acak atau tidak teratur. Aliran turbulen terjadi apabila bilangan Reynolds lebih dari 12.500 ( $Re > 12.500$ ).

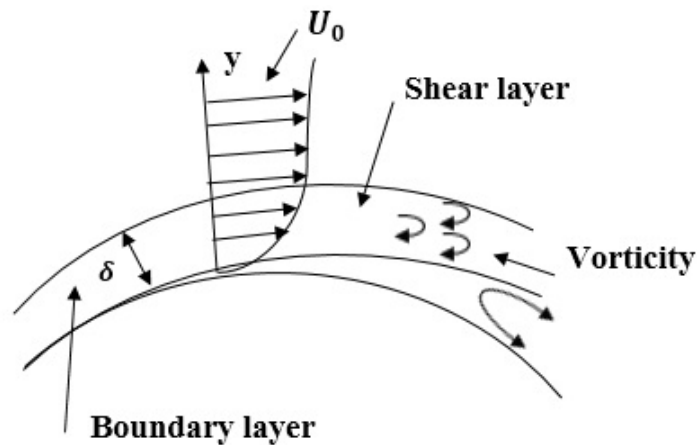
Bilangan Reynolds untuk suatu aliran dapat dihitung menggunakan rumus berikut:

$$Re = \frac{U_{\infty} a}{\nu} \quad (2.11)$$

Proses transfer yang berlangsung pada fluida dan benda padat adalah momentum masa dan perpindahan panas. Pada saat memformulasikan hukum kekekalan massa, momentum, dan energi, hukum termodinamik dan gas dinamik juga harus diperhatikan. Sehingga dapat disimpulkan bahwa bersama dengan aliran boundary layer, ada juga *thermal boundary layer* dan pengaruh timbal balik dari lapisan-lapisan batas lain juga harus diperhitungkan. Teori mengenai lapisan batas digunakan pada berbagai ilmu teknik sains, seperti hidrodinamik, aerodinamik, *automobile* dan teknik kelautan. Lapisan batas sendiri adalah suatu lapisan tipis yang terbentuk pada permukaan padat sebagai akibat adanya aliran dari suatu fluida. Beberapa penelitian dengan menggunakan *boundary layer* pun sudah sering dilakukan contohnya aliran fluida pada pelat datar (Hussanan, dkk (2014)), dan aliran fluida pada bola (Shafie, dkk (2005)). Ilustrasi untuk menjelaskan mengenai aliran fluida aliran fluida yang melewati sebuah bola berpori dan membentuk suatu lapisan batas. Selain itu, pada Gambar 2.6 dapat dilihat lapisan batas dan viskositas yang terbentuk dari fluida yang melewati suatu permukaan lengkung.

## 2.5 Porositas dan Permeabilitas

Porositas adalah kemampuan suatu benda/media berpori (misalnya batuan atau tanah) untuk menyerap dan menahan suatu fluida di dalamnya. Porositas suatu benda erat kaitannya dengan permeabilitas. Permeabilitas pada mekanika fluida (biasanya dilambangkan dengan  $\kappa$  atau  $K^*$ ) adalah suatu parameter yang menunjukkan kemampuan suatu benda/media berpori (misalnya batuan, tanah, atau benda tidak terkonsolidasi) untuk memungkinkan suatu fluida mengalir melewatinya. Dalam mekanika fluida media berpori, persamaan momentum atau keseimbangan kekuatan memenuhi pengamatan eksperimen yang secara matematis sebagai hukum



Gambar 2.6: Lapisan Batas yang Terbentuk dari Fluida yang Melewati Suatu Permukaan Lengkung

Darcy. Observasi ini pertama kali dilakukan oleh Darcy, yang menemukan bahwa daerah rata-rata kecepatan fluida melalui suatu kolom bahan berpori sebanding dengan tekanan gradien dibentuk sepanjang kolom. Percobaan selanjutnya membuktikan bahwa daerah-rata-rata kecepatan berbanding terbalik dengan viskositas  $\mu$  dari cairan yang merembes melalui bahan berpori. Dengan mengacu pada pengamatan Darcy diterapkan (Bejan, 2013):

$$u = \frac{K^*}{\mu} \left( -\frac{dP}{dx} \right)$$

dimana  $K^*$  merupakan permeabilitas.

## 2.6 Metode Beda Hingga (*Finite Difference Method*)

Dalam matematika, metode beda hingga (FDM) adalah metode numerik untuk mendekati solusi dari persamaan diferensial menggunakan persamaan beda hingga untuk mendekati derivatif. Metode beda hingga secara umum memiliki tiga pendekatan yaitu beda maju, beda pusat dan beda mundur. Berikut ini akan disajikan macam-macam metode beda hingga yaitu:

1. Beda Maju

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2. Beda Mundur

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x}$$

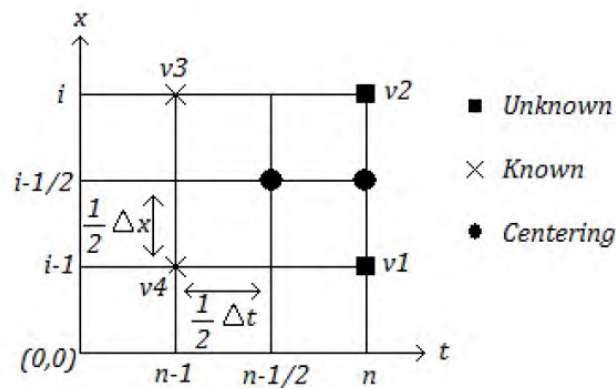
### 3. Beda Pusat

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Dalam metode beda hingga, dikenal metode beda hingga eksplisit dan metode beda hingga implisit. Baik metode hingga eksplisit maupun metode beda hingga implisit memiliki keunggulannya masing masing dalam menentukan penyelesaian numerik persamaan diferensial. Namun, metode beda hingga implisit lebih unggul dalam kestabilan bila dibandingkan dengan metode beda hingga eksplisit.

#### 2.6.1 Metode Keller Box

Metode Keller-Box adalah salah satu teknik untuk menyelesaikan persamaan parabolik, terutama persamaan lapisan batas. Skema ini merupakan bentuk implisit dengan keakurasiannya orde kedua baik terhadap ruang maupun waktu yang mana step size untuk waktu dan ruang tidak harus sama. Hal ini membuat penyelesaian persamaan diferensial parsial parabolik lebih efisien dan tepat. Penerapan metode Keller-Box ini dimulai dengan terlebih dahulu mengubah bentuk persamaan diferensial orde dua atau orde tinggi menjadi persamaan diferensial orde satu (Mohammad, 2014).



Gambar 2.7: Stensil Skema Keller-Box

Berdasarkan bentuk skema Keller-Box pada Gambar 2.7 untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu yaitu sebagai berikut :

$$v_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(v_i + v_{i-1})$$

$$u^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u^n + u^{n-1})$$

Karena menggunakan titik-titik pada step size setengah maka secara umum

dapat ditulis sebagai berikut :

$$(\cdot)_i^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}[(\cdot)_i^n + (\cdot)_i^{n-1}]$$

$$(\cdot)_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}[(\cdot)_i^n + (\cdot)_{i-1}^n]$$

Sedangkan, skema beda hingga untuk turunan secara umum adalah :

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial v} = \frac{(\cdot)_i - (\cdot)_{i-1}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial u} = \frac{(\cdot)^n - (\cdot)^{n-1}}{\Delta t}$$





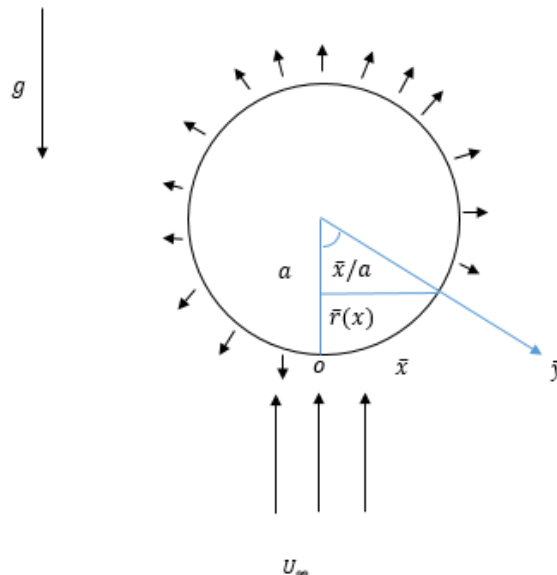
## BAB III

### METODE PENELITIAN

Sesuai dengan rumusan masalah yang telah dijelaskan pada BAB I dengan sistem koordinat bola berpori, pembangunan model matematika dari fluida micropolar yang dipengaruhi oleh MHD didapatkan dari persamaan massa, momentum linier, dan momentum anguler. Selain itu, persamaan pembangun juga dipengaruhi oleh beberapa parameter non-dimensional dan koefisien-koefisien yang berpengaruh terhadap kasus tersebut seperti parameter magnetik ( $M$ ), micropolar ( $K$ ), porositas ( $\phi$ ) dan permeabilitas ( $K^*$ ).

#### 3.1 Tahap Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah yang telah dijelaskan pada BAB I, penelitian ini diselesaikan dengan menggunakan tiga tahap, yaitu tahap pembentukan model, tahap implementasi, dan tahap analisis hasil.



Gambar 3.1: Model fisik dan sistem koordinat dari aliran yang melewati bola berpori

### 3.1.1 Tahap Pembentukan Model

Pada penelitian ini dilakukan pada daerah lapisan batas dengan membangun model aliran dari hukum konservasi massa dan prinsip konservasi momentum linier dengan pendekatan Navier-Stokes. Pada penelitian ini model yang dibangun adalah model matematika di daerah lapisan batas dari bola berpori, yakni disekitar titik stagnasi terendah ( $x \approx 0$ ). Titik stagnasi terendah adalah titik dimana lapisan batas berada paling dekat dengan permukaan benda. Diskripsi dari permasalahan ini yaitu terdapat suatu aliran fluida *micropolar* yang melewati bola berpori dan mengandung MHD, kemudian permasalahan tersebut diubah ke dalam bentuk dua dimensi yaitu seperti pada Gambar 2.5. Aliran tersebut kemudian diamati pada titik stagnasinya dan sepanjang  $y$  yang sesuai dengan gambar.

Berdasarkan penjelasan tersebut, dapat dilakukan langkah-langkah dalam menjawab rumusan masalah pada BAB I, yaitu :

- (1) Studi literatur.
- (2) Penurunan persamaan konservasi massa dan prinsip konservasi momentum linier untuk mendapatkan persamaan pembangun.
- (3) Persamaan pembangun disederhanakan dengan menggunakan pendekatan Boussinesq dan teori lapisan batas sehingga diperoleh persamaan pembangun yang berdimensi dari aliran MHD pada fluida *micropolar* yang melewati bola berpori.
- (4) Menentukan kondisi batas.

### 3.1.2 Tahap Implementasi

Pada tahap ini, dilakukan implementasi metode Keller-Box untuk menyelesaikan permasalahan ini. Persamaan yang didiskritisasi dengan metode beda hingga orde kedua adalah persamaan similaritas. Persamaan similaritas didapatkan dengan melakukan tahapan sebagai berikut:

1. Mengubah persamaan dimensional ke dalam bentuk persamaan non-dimensional dengan mensubstitusikan variabel non-dimensional.
2. Persamaan non-dimensional selanjutnya diubah menjadi persamaan similar dengan mensubstitusi fungsi aliran (*stream function*).

Implementasi metode Keller-Box dilakukan dengan cara mendiskritisasi model matematika yang diperoleh dengan mengubah ke dalam bentuk orde pertama yang kemudian dilakukan diskritisasi dengan menggunakan metode beda tengah.

### 3.1.3 Tahap Analisis Hasil

Pada tahap ini dilakukan beberapa tahapan sebagai berikut :

- (1) Hasil diskritisasi dari persamaan similaritas diselesaikan secara numerik dengan menggunakan Matlab.
- (2) Dilakukan variasi pada parameter magnetik ( $M$ ), parameter *micropolar* ( $K$ ), parameter porositas ( $\phi$ ) dan parameter permeabilitas ( $K^*$ ). Hal ini dilakukan untuk mengetahui parameter-parameter tersebut terhadap karakteristik dari fluida yaitu profil kecepatan dan profil mikro rotasi.
- (3) Visualisasi hasil numerik dilakukan dengan menggunakan Matlab untuk mempermudah dan mendukung hasil-hasil pengukuran.
- (4) Analisa hasil dari simulasi numerik yang dipengaruhi oleh parameter-parameter terhadap karakteristik fluida.

### 3.2 Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di laboratorium Pemodelan Matematika dan Simulasi, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.



## BAB IV

### PEMBAHASAN MODEL MATEMATIKA

Pada bab ini dijelaskan mengenai persamaan pembangun untuk membangun model matematika dari fluida *micropolar* bermedan magnet yang melewati bola berpori. Sesuai dengan gambaran area yang diamati, model fisik dari permasalahan ini menggunakan hukum konservasi massa dan prinsip konservasi momentum linier sehingga dapat dibangun persamaan kontinuitas, persamaan momentum linier dan persamaan momentum anguler.

#### 4.1 Persamaan Pembangun

Persamaan pembangun yang digunakan pada penelitian ini adalah persamaan kontinuitas, persamaan momentum linier, dan persamaan momentum anguler yang diuraikan dari hukum konservasi dan prinsip konservasi momentum linier. Berikut ini diuraikan pembangunan persamaan-persamaan pembangun yang digunakan pada penelitian ini.

##### 4.1.1 Persamaan Kontinuitas

Sesuai permasalahan fluida *micropolar* bermedan magnet yang melewati bola berpori, dari suatu lapisan batas yang terbentuk dapat dikonstruksikan persamaan kontinuitas. Persamaan kontinuitas dapat diperoleh sesuai dengan hukum konservasi massa yaitu laju perubahan massa terhadap waktu dari suatu sistem tertutup adalah konstan atau secara matematis dapat ditulis sebagai berikut :

$$m = \int_{\Omega} \rho(x, t) dx \quad (4.1)$$

dengan pengintegralan meliputi seluruh volume sistem. Persamaan (4.1) menyatakan bahwa massa sistem sama dengan jumlah dari seluruh perkalian kerapatan yang merupakan unsur volume dari isi sistemnya. Untuk sebuah sistem dan sebuah volume *control* tetap dan tidak berdeformasi yang berimpit pada suatu saat yang sama, berlaku teorema pengangkutan Reynolds, yaitu laju perubahan massa terhadap waktu pada suatu sistem yang dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho dx + \int_{\partial\Omega} \rho \bar{n} \cdot \mathbf{u} dS$$

sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \, dx + \int_{\partial\Omega} \rho \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} \, dS = 0$$

atau dapat ditulis:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \, dx = - \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \bar{\mathbf{n}} \, dS \quad (4.2)$$

Persamaan tersebut menunjukkan rata-rata perubahan total massa dalam kontrol volume. Integral permukaan dapat diubah ke bentuk integral volume dengan menggunakan teorema divergensi Gauss sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \nabla(\rho \mathbf{u}) \, dx = \int_{\partial\Omega} (\rho \mathbf{u}) \bar{\mathbf{n}} \, dS$$

Sehingga Persamaan (4.2) dapat disederhanakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \, dx &= - \int_{\Omega} \nabla(\rho \cdot \mathbf{u}) \, dx \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \, dx + \int_{\Omega} \nabla(\rho \cdot \mathbf{u}) \, dx &= 0 \\ \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx + \int_{\Omega} \nabla(\rho \cdot \mathbf{u}) \, dx &= 0 \\ \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \mathbf{u}) \right) \, dx &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \rho + \frac{\partial v}{\partial y} \rho &= 0 \end{aligned}$$

Karena fluida yang digunakan pada penelitian ini adalah fluida yang bersifat *incompressible*, maka  $\rho$  bernilai konstan dan  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . Sehingga didapatkan persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.3)$$

Berdasarkan penelitian ini, aliran fluida *micropolar* melewati sebuah bola berpori, maka persamaan kontinuitas dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}(\bar{r}\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}}(\bar{r}\bar{v}) = 0 \quad (4.4)$$

#### 4.1.2 Persamaan Momentum

Teori fluida *micropolar* dirumuskan oleh Eringen pada tahun 1966 yang merupakan pengembangan model Navier-Stokes dari hidrodinamikal klasik untuk mendiskripsikan fluida molekul kompleks. Fluida *micropolar* didefinisikan sebagai *isotropic*, fluida polar dengan deformasi molekul yang diabaikan. Diasumsikan bahwa gaya yang bekerja pada elemen dari media *continue* terdapat dua macam, yaitu gaya *external* dan *internal*. Gaya *External* seperti halnya gaya gravitasi atau gaya elektromagnetik. Jika  $f$  merupakan gaya per satuan massa, maka :

$$\int_{\Omega} \rho f dx$$

Gaya *internal*, gaya yang dianggap sebagai tindakan atas unsur dari volume  $\Omega$  yang melalui permukaan. Misalkan  $\bar{n}$  bagian terkecil dari suatu permukaan *control*  $\partial\Omega$  dan  $t_n$  gaya per satuan luas yang diberikan oleh volume luar  $\partial\Omega$ . Kemudian gaya permukaan luar diberikan pada volume  $\Omega$  yang dinyatakan sebagai berikut :

$$\int_{\partial\Omega} t_n dS$$

Prinsip Cauchy mengatakan bahwa  $t_n$  bergantung pada waktu tertentu hanya pada posisi dan orientasi dari elemen permukaan  $dS$ , dengan kata lain :

$$t_n = t_n(x, t, \bar{n})$$

Prinsip kekekalan momentum linear mengatakan bahwa tingkat perubahan momentum linear dari volume bahan sama dengan gaya resultan pada volume:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{u} dx = \int_{\Omega(t)} \rho f dx + \int_{\partial\Omega(t)} t_n dS \quad (4.5)$$

dengan menggunakan teorema transport Reynolds maka

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{u} dx = \int_{\Omega(t)} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dx + \int_{\partial\Omega(t)} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \bar{n}) dS \quad (4.6)$$



dengan kata lain, dapat disubstitusikan Persamaan (4.6) ke (4.5) sehingga diperoleh

$$\int_{\Omega(t)} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dx + \int_{\partial\Omega(t)} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{n}}) dS = \int_{\Omega(t)} \rho f dx + \int_{\partial\Omega(t)} t_n dS \quad (4.7)$$

$t_n$  merupakan *normal stress* yang ditunjukkan pada fungsi linier dari  $\bar{\mathbf{n}}$  pada sebagai berikut:

$$t_n(x, t, \bar{\mathbf{n}}) = \bar{\mathbf{n}}(x, t) T(x, t) \quad (4.8)$$

dimana  $T = \{T_{ij}\}$  disebut *stress tensor*.  $t(\bar{\mathbf{n}})$  sebagai fungsi linier dari  $\bar{\mathbf{n}}$  yang dituliskan pada Persamaan (4.8), oleh karena itu Persamaan (4.6) dan Teorema Green dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\int_{\Omega(t)} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dx + \int_{\partial\Omega(t)} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{n}}) dS = \int_{\Omega(t)} (\rho f + \text{div } \mathbf{T}) dx \quad (4.9)$$

dimana domain integrasinya yaitu:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \rho f + \text{div } \mathbf{T} \quad (4.10)$$

dimana  $\text{div } \mathbf{T} = T_{ij}$  sehingga *stress tensor* didefinisikan sebagai berikut:

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + P_{ij}$$

dimana  $P_{ij}$  adalah *stress tensor* dari viskositas. Persamaan konstitusi untuk fluida *micropolar* didefinisikan bahwa *stress tensor*  $T = \{T_{ij}\}$  adalah *skew-symmetric tensor*. Fluida *micropolar* sebagai fluida isotropik dengan *stress tensor* sebagai berikut (Vijay, 1984):

$$\begin{aligned} T_{ij} &= (-p + \lambda u_{k,k}) \delta_{ij} + (\mu - \kappa)(u_{i,j} + u_{j,i}) + 2\kappa(u_{j,i} - \epsilon_{ijk} u_k) \\ T_{ij,i} &= -p_{,j} + \lambda u_{i,ij} + (\mu - \kappa)(u_{i,ij} + u_{j,ii}) + 2\kappa(u_{j,ii} - \epsilon_{kim} u_{m,k}) \\ &= -p_{,i} + (\lambda + \mu - \kappa)(u_{i,i})_{,j} + (\mu + \kappa)u_{j,ii} + 2\kappa\epsilon_{ikm} u_{m,k} \end{aligned} \quad (4.11)$$

dengan menggunakan notasi vektor Gibbsian sehingga Persamaan (4.11) dapat ditulis:

$$\nabla T = -\nabla p + (\lambda + \mu - \kappa) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + (\mu + \kappa) \nabla^2 \mathbf{u} + \kappa (\nabla \times \mathbf{N}) \quad (4.12)$$

Setelah diperoleh persamaan *skew-symmetric tensor*, sehingga dapat dilakukan

substitusi ke dalam Persamaan (4.10) sehingga :

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) &= \rho f - \nabla p + (\lambda + \mu - \kappa) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + (\mu + \kappa) \nabla^2 \mathbf{u} + \kappa (\nabla \times N) \\
&= \rho f - \nabla p + (\lambda + \mu - \kappa) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + (\mu + \kappa) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} \\
&\quad - (\mu + \kappa) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \kappa (\nabla \times N) \\
&= \rho f - \nabla p + (\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} \\
&\quad - (\mu + \kappa) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \kappa (\nabla \times N)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Untuk aliran *micropolar* yang *incompressible* dengan koefisien material konstan maka  $\mu > 0$ , gaya  $f = 0$  dan

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{4.14}$$

sehingga untuk Persamaan (4.11) menjadi:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p - (\mu + \kappa) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \kappa (\nabla \times N) \tag{4.15}$$

Pada tesis ini akan dibahas mengenai aliran fluida *micropolar* yang dipengaruhi oleh medan magnet (MHD), menurut Jat (2012) dan permasalahan aliran fluida yang melewati benda berpori, menurut Hukum Darcy, gaya yang bekerja pada fluida  $F = (F_x, F_y, 0)$  didefinisikan:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p - (\mu + \kappa) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \kappa (\nabla \times N) + F \tag{4.16}$$

dimana,

$$F = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{\mu}{K^*} \mathbf{u} \tag{4.17}$$

Menurut hukum Ohm, kerapatan arus listrik diberikan sebagai berikut:

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \tag{4.18}$$

Pada penelitian ini, baik medan listrik maupun medan magnet yang terinduksi diabaikan karena bilangan Reynold Magnetik sangat kecil, Jat (2012), sehingga  $E = 0$  dan  $b \approx 0$ . Berdasarkan pernyataan tersebut, maka persamaan di atas menjadi:

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \tag{4.19}$$

dilakukan substitusi sehingga menjadi:

$$F = \sigma (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B} - \frac{\mu}{K^*} (u, v, 0) \tag{4.20}$$

dengan

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} \times \mathbf{B}_0 \quad (4.21)$$

Hasil perhitungan Persamaan (4.21), didapatkan:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 = (-uB_0^2, -vB_0^2, 0) \quad (4.22)$$

sehingga Persamaan (4.17) dapat ditulis sebagai berikut:

$$F = \sigma(-uB_0^2, -vB_0^2, 0) - \frac{\mu}{K^*}(u, v, 0) \quad (4.23)$$

Persamaan momentum linier untuk fluida *micropolar* dengan pengaruh MHD yang melalui bola berpori dapat dituliskan dengan melakukan substitusi Persamaan (4.23) ke dalam Persamaan (4.16), sehingga:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) &= -\nabla p - (\mu + \kappa) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \kappa (\nabla \times \mathbf{N}) \\ &\quad - \sigma B_0^2 \mathbf{u} - \frac{\mu}{K^*} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.24)$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u} \hat{i} + \bar{v} \hat{j}) \\ &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \hat{i} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \hat{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \left( (\bar{u} \hat{i} + \bar{v} \hat{j}) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \right) \right) (\bar{u} \hat{i} + \bar{v} \hat{j}) \\ &= \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \hat{i} + \bar{v} \hat{j}) + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u} \hat{i} + \bar{v} \hat{j}) \\ &= \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \hat{i} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \hat{i} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \hat{j} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \hat{j} \end{aligned}$$

$$\nabla p = \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} \right) p = \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j}$$

Dengan mengelompokkan vektor  $\hat{i}$  untuk sumbu  $x$  dan vektor  $\hat{j}$  untuk sumbu  $y$

sehingga didapatkan Persamaan momentum linier pada sumbu -  $x$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu + \kappa) \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \kappa \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} - \sigma B_0^2 \bar{u} - \frac{\mu}{K^*} \bar{u} \quad (4.25)$$

Persamaan momentum linier pada sumbu -  $y$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu + \kappa) \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \kappa \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} - \sigma B_0^2 \bar{v} - \frac{\mu}{K^*} \bar{v} \quad (4.26)$$

#### 4.1.3 Persamaan Momentum Anguler

Pada subbab ini akan dijelaskan mengenai hukum kekekalan momentum angular dalam hidrodinamik klasik untuk fluida polar. Persamaan konservasi momentum linier yaitu :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{u} dx = \int_{\Omega(t)} \rho f dx + \int_{\partial\Omega(t)} t_n dS \quad (4.27)$$

definisi momentum angular dalam mekanika massa atau *rigid particles*, dapat diasumsikan ke dalam persamaan hukum kekekalan momentum anguler :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho (x \times \mathbf{u}) dx = \int_{\Omega(t)} \rho (x \times f) dx + \int_{\partial\Omega(t)} x \times t_n dS \quad (4.28)$$

dengan Theorema Green's yaitu :

$$\int_{\partial\Omega(t)} x \times t_n dS = \int_{\Omega(t)} (x \times (\nabla \cdot T) + T_x) dx \quad (4.29)$$

dimana  $\nabla \cdot T$  adalah notasi lain untuk *div T*, dan  $T_x$  adalah vektor  $e_{ijk} T_{jk}$  ( $\epsilon_{ijk}$  adalah *alternating tensor* Levi-Civita), sehingga :

$$\int_{\Omega(t)} x \times \left( \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho f - \nabla \cdot T \right) dx = \int_{\Omega(t)} T_x dx$$

Pada fluida polar diperkenalkan *body torque* per satuan massa  $g$  yang diberikan pernyataan ke *body forces*  $f$ , dan *couple stress*  $c_n$  juga disertakan ke *normal stress*  $t_n$ . Terdapat dua hal yang dipertimbangkan pada momentum angular, yaitu momentum linier  $\rho x \times \mathbf{u}$  yang juga disebut sebagai momentum angular eksternal, dan  $\rho l$  sebagai momentum angular internal. Kemudian keseimbangan momentum

angular menurut definisi sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(l + x \times \mathbf{u}) dx = \int_{\Omega(t)} \rho(g + x \times f) dx + \int_{\partial\Omega(t)} (c_n + x \times t_n) dS \quad (4.30)$$

$t_n$  dapat ditulis  $\bar{n}.T$  dan  $c_n$  menjadi  $\bar{n}.C$ , dimana  $C$  adalah *couple stress tensor*, sehingga:

$$\rho \frac{D}{Dt} (l + x \times \mathbf{u}) = \rho g + \rho x \times f + \nabla \cdot (x \times T + C) \quad (4.31)$$

diasumsikan bahwa momentum angular internal dituliskan sebagai vektor dengan komponen  $l_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) dimana  $l_i = J_{ik}\omega_k$  sehingga

$$J_{ik} = J\delta_{ik}$$

dimana  $J$  adalah skalar dari koefisien mikro inersia, Persamaan (4.31) direduksi menjadi:

$$\rho J \frac{D\omega}{Dt} = \rho g + \nabla \cdot C + T_x \quad (4.32)$$

dengan menggunakan teorema transport Reynolds maka

$$\rho J \frac{D\omega}{Dt} = \rho J \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \omega) \right) \quad (4.33)$$

sehingga dapat ditulis

$$\rho J \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla \omega) \right) = \rho g + \nabla \cdot C + T_x \quad (4.34)$$

Fluida *micropolar* didefinisikan sebagai fluida *isotropic* dengan *couple stress tensor*  $C$  dan  $T_x$  (Vijay, 1984)

$$C_{ij} = \alpha \omega_{k,k} \delta_{ij} + \beta \omega_{i,j} + \gamma \omega_{j,i} \quad (4.35)$$

$$T_x = e_{ijk} T_{jk} = 2\kappa e_{ikm} u_{m,k} - 2\kappa \omega_i \quad (4.36)$$

Pada notasi vektor Gibbsian, persamaan (4.35) dan (4.36) dapat dituliskan :

$$\begin{aligned} \nabla C &= (\alpha + \beta) \nabla \nabla \cdot \omega + \gamma \nabla^2 \omega \\ &= (\alpha + \beta) \nabla \nabla \cdot \omega + \gamma \nabla \nabla \cdot \omega - \gamma \nabla \times (\nabla \times \omega) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) \nabla \nabla \cdot \omega - \gamma \nabla \times (\nabla \times \omega) \\ &= -\gamma \nabla \times (\nabla \times \omega) \end{aligned}$$

dan

$$T_x = \kappa \nabla \times \mathbf{u} - 2\kappa\omega \quad (4.37)$$

dengan dilakukan substitusi tensor  $C$  dan  $T_x$  dimana  $\omega = N$  sehingga diperoleh persamaan :

$$\rho j \left( \frac{\partial N}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (\nabla N) \right) = -\gamma \nabla \times (\nabla \times N) + \kappa(-2N + \nabla \times \mathbf{u}) \quad (4.38)$$

dimana  $N$  adalah daerah mikro rotasi dengan vektor  $\mathbf{N} = (0, 0, \bar{N})$ ,  $\kappa$  merupakan viskositas vortex,  $j$  sebagai densitas mikro inersia dan  $\gamma$  yaitu gradien viskositas, sehingga dapat dituliskan :

$$\rho j \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) = \gamma \left( \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \kappa \left( 2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \quad (4.39)$$

Pada penelitian ini menggunakan kondisi batas yaitu:

$$\begin{aligned} \bar{t} < 0 : \bar{u} = \bar{v} = \bar{N} = 0 \text{ untuk setiap } \bar{x}, \bar{y} \\ \bar{t} \geq 0 : \bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{N} = -n \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \text{ pada } \bar{y} = 0 \\ \bar{u} = \bar{u}_e(\bar{x}), \bar{N} = 0 \text{ pada } \bar{y} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.40)$$

$n$  merupakan konstanta  $0 \leq n \leq 1$ , pada saat  $n = 0$  dikatakan konstanta kuat yang mengindikasikan  $N = 0$  dekat dengan dinding mewakili arus partikel yang terkonsentrasi di mana mikro elemen dekat dengan permukaan dinding yang tidak berotasi. Pada saat  $n = 0.5$  menunjukkan lenyapnya bagian *skew-symmetric* dari stress tensor dan menunjukkan konsentrasi lemah sedangkan  $n = 1$  digunakan untuk pemodelan dari lapisan batas aliran turbulen (Dulal Pal, 2010).

## 4.2 Transformasi Variabel Tak berdimensi

Persamaan pembangun dimensional yang telah diperoleh diubah ke dalam persamaan tak berdimensi dengan dilakukan transformasi variabel tak berdimensi. Pada permasalahan ini variabel tak berdimensi yang digunakan sebagai berikut (Ali, 2010; Nazar, 2004) :

$$\begin{aligned}
x = \frac{\bar{x}}{a}, y = Re^{1/2} \frac{\bar{y}}{a}, t = \frac{U_\infty \bar{t}}{a}, u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}, v = Re^{1/2} \frac{\bar{v}}{U_\infty} \\
p = \frac{\bar{p}}{\rho U_\infty^2}, r(x) = \frac{\bar{r}(\bar{x})}{a}, N = Re^{\frac{-1}{2}} \frac{a \bar{N}}{U_\infty}
\end{aligned} \tag{4.41}$$

dimana  $Re = \frac{U_\infty a}{\nu}$  adalah bilangan Reynolds,  $\nu$  viskositas kinematik yang dapat dituliskan sebagai  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  dan  $\gamma = (\mu + \frac{\kappa}{2})_J$  dengan  $J = \frac{\nu}{c}$ . Selanjutnya dilakukan substitusi variabel tak berdimensi ke dalam persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan momentum angular, sehingga didapatkan :

Persamaan Kontinuitas :

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \tag{4.42}$$

Persamaan momentum sumbu - x :

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(1+K)}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&+ K \frac{\partial N}{\partial y} - (M + \phi)u
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Persamaan momentum sumbu - y :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -Re \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{(1+K)}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1+K) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
&+ K \frac{\partial N}{\partial x} - (M + \phi)v
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Persamaan momentum angular :

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= \left(1 + \frac{K}{2}\right) \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \\
&- K \left( 2N + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{4.45}$$

dengan  $M, K$  dan  $\phi$  adalah parameter tak berdimensi. Parameter tersebut didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
M &= \frac{a\sigma B_0^2}{\rho U_\infty} \\
K &= \frac{\kappa}{\mu} \\
\phi &= \frac{a\mu}{\rho U_\infty K^*}
\end{aligned}$$

Berdasarkan variabel tak berdimensi pada Persamaan (4.41) maka kondisi batas pada Persamaan (4.40) menjadi:

$$\begin{aligned}
t < 0 : u = v = N = 0 \text{ untuk setiap } x, y \\
t \geq 0 : u = v = 0, N = -n \frac{\partial u}{\partial y} \text{ pada saat } y = 0 \\
u = u_e(x), N = 0 \text{ pada saat } y \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

### 4.3 Pendekatan Lapisan Batas

Pendekatan lapisan batas dimana bilangan Reynold  $Re \rightarrow \infty$  sehingga  $\frac{1}{Re} \rightarrow 0$ , maka diperoleh :

#### 1. Persamaan Kontinuitas

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} = 0 \quad (4.46)$$

#### 2. Persamaan Momentum Persamaan momentum sumbu - $x$ :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - (M + \phi)u \quad (4.47)$$

Persamaan momentum sumbu -  $y$  :

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (4.48)$$

dari persamaan sumbu- $y$ , tekanan dari aliran  $p$  bebas dari  $y$  karena aliran yang diselesaikan adalah aliran dua dimensi, menunjukkan bahwa tekanan dari aliran  $p$  bergantung atau variasinya hanya pada  $x$ . Dengan demikian, hanya ada persamaan satu momentum yang tersisa di sistem yaitu pada sumbu- $x$ . Evaluasi persamaan pada lapisan batas wilayah luar :

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + v \frac{\partial u_e}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + (1 + K) \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - (M + \phi)u_e \quad (4.49)$$



karena *stream velocity*  $u_e = \frac{3}{2} \sin x$  sehingga,

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} = 0, \frac{\partial u_e}{\partial y} = 0, \frac{\partial^2 u_e}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad (4.50)$$

kemudian dilakukan substitusi

$$\begin{aligned} u_e \frac{du_e}{dx} &= -\frac{\partial p}{\partial x} - (M + \phi)u_e \\ -\frac{\partial p}{\partial x} &= u_e \frac{du_e}{dx} + (M + \phi)u_e \end{aligned}$$

sehingga persamaan momentum menjadi :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = u_e \frac{du_e}{dx} + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} + (M + \phi)(u_e - u) \quad (4.51)$$

### 3. Persamaan Momentum Anguler

$$\left( \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) = \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - K \left( 2N + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.52)$$

## 4.4 Fungsi Alir atau Fungsi Arus (*Stream Function*)

Pada penelitian ini menggunakan penampang dua dimensi yaitu  $u$  dan  $v$  yang alirannya berada pada bidang  $x$  dan  $y$ . Agar dua fungsi kecepatan tersebut saling terhubung maka dikenalkan sebuah fungsi arus atau fungsi alir. Dengan adanya fungsi alir akan menyederhanakan banyaknya persamaan dan membuat komputasi dalam bentuk satu variabel. Fungsi alir didefinisikan sebagai berikut :

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{dan} \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.53)$$

Persamaan (4.53) disubstitusikan ke dalam persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan momentum anguler.

### 1. Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial x} \left( r \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( r \left( -\frac{1}{r} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0 \\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

### 2. Persamaan Momentum :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{1}{r^3} \frac{dr}{dx} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= u_e \frac{du_e}{dx} \\
+ \frac{(1+K)}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + K \frac{\partial N}{\partial y} + (M + \phi) \left( u_e - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) &
\end{aligned}$$

### 3. Persamaan Momentum Anguler :

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} = \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - K \left( 2N + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \tag{4.55}$$

## 4.5 Persamaan Similaritas

Hasil dari fungsi alir diperoleh bahwa persamaan kontinuitas pada Persamaan (4.44) dapat dihilangkan dari sehingga hanya terdapat dua persamaan yaitu, persamaan momentum dan persamaan momentum angular, persamaan untuk variabel similaritas untuk *small time* ( $t \leq t^*$ ) dengan  $t^*$  sebarang nilai yaitu :

$$\psi = t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t), \eta = \frac{y}{t^{1/2}}, N = t^{-1/2} u_e(x) h(x, \eta, t) \tag{4.56}$$

### Persamaan Momentum :

$$\begin{aligned}
(1+K) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + K \frac{\partial h}{\partial \eta} + t \frac{du_e}{dx} \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] \\
+ (M + \phi) t \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} \\
+ t u_e \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Persamaan Momentum Anguler :

$$\begin{aligned} (1 + \frac{K}{2}) \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{2} h + t \frac{du_e}{dx} \left( f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) &= t \frac{\partial h}{\partial t} \\ + tu_e \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} f \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + tK \left( 2h + \frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2} \right) & \end{aligned} \quad (4.58)$$

Variabel similiaritas untuk *Large Time* ( $t \geq t^*$ ) yaitu :

$$\psi = u_e(x)r(x)F(x, Y, t), Y = y, N = u_e(x)H(x, Y, t) \quad (4.59)$$

dengan menyubtitusikan variabel similaritas pada persamaan momentum dan momentum anguler, maka akan didapatkan

Persamaan Momentum :

$$\begin{aligned} (1 + K) \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{du_e}{dx} \left[ 1 - \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] + K \frac{\partial H}{\partial Y} + (M + \phi) \left( 1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) &= \\ \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} + u_e \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) & \end{aligned} \quad (4.60)$$

Persamaan Momentum Anguler :

$$\begin{aligned} (1 + \frac{K}{2}) \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} + \frac{du_e}{dx} \left( F \frac{\partial H}{\partial Y} - H \frac{\partial F}{\partial Y} \right) &= \\ \frac{\partial H}{\partial t} + u_e \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial Y} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} F \frac{\partial H}{\partial Y} \right) + K \left( 2H + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) & \end{aligned} \quad (4.61)$$

Pada penelitian ini diteliti pada bagian titik stagnasi yaitu ( $x \approx 0$ ), dengan demikian maka nilai  $u_e(x) = 0$  dan  $\frac{du_e}{dx} = \frac{3}{2}$ , sehingga persamaan momentum linier dan momentum anguler *small time* yaitu :

$$\begin{aligned} (1 + K) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + K \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{3}{2} t \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] \\ + (M + \phi) t \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} (1 + \frac{K}{2}) \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{2} h + \frac{3}{2} t \left( f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) &= \\ t \frac{\partial h}{\partial t} + tK \left( 2h + \frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2} \right) & \end{aligned} \quad (4.63)$$

dengan kondisi batas :

$$\begin{aligned}
 t < 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = h = 0 \text{ untuk setiap } x, \eta \\
 t \geq 0 : f = \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0, h = -n \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \text{ pada } \eta = 0 \\
 \frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, h = 0 \text{ pada } \eta \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

persamaan momentum linier dan persamaan momentum anguler untuk *large time* adalah :

$$\begin{aligned}
 (1 + K) \frac{\partial^3 F}{\partial Y^3} + \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\partial F}{\partial Y} \right)^2 + F \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right] + K \frac{\partial H}{\partial Y} \\
 + (M + \phi) \left( 1 - \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial t} \quad (4.64)
 \end{aligned}$$

$$\left( 1 + \frac{K}{2} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2} + \frac{3}{2} \left( F \frac{\partial H}{\partial Y} - H \frac{\partial F}{\partial Y} \right) = \frac{\partial H}{\partial t} + K \left( 2H + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \right) \quad (4.65)$$

dengan kondisi batas :

$$\begin{aligned}
 F = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0, H = -n \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \text{ pada } Y = 0 \\
 \frac{\partial F}{\partial Y} = 1, H = 0 \text{ pada } Y \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$



## BAB V

### PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA

Pada Bab IV telah didapatkan model matematika dari permasalahan pada penelitian ini, hal yang selanjutnya akan dilakukan adalah penyelesaian secara numerik. Pada penelitian ini, model persamaan yang didapatkan diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Keller-Box. Metode ini sesuai dan efisien untuk menyelesaikan persamaan lapisan batas yang berbentuk diferensial parsial parabolik. Tahapan-tahapan dalam penyelesaian numerik ini yaitu :

1. Persamaan model sistem dibentuk menjadi persamaan orde pertama.
2. Dilakukan diskritisasi dengan menggunakan metode beda hingga tengah.
3. Dilakukan linierisasi persamaan yang didapat dengan menggunakan metode Newton dan dibentuk dalam matriks vektor.
4. Hasil linierisasi diselesaikan dengan teknik eliminasi matriks blok tridiagonal.

Bentuk Persamaan (4.62) - (4.65) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$(1 + K)f'''' + \frac{\eta}{2}f''' + Kh' + (M + \phi)t(1 - f') + \frac{3}{2}t [1 - (f')^2 + ff''] = t \frac{\partial f'}{\partial t} \quad (5.1)$$

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right)h'' + \frac{\eta}{2}h' + \frac{h}{2} + \frac{3}{2}t [fh' - hf'] = t \frac{\partial h}{\partial t} + tK(2h + f'') \quad (5.2)$$

dimana tanda (') menunjukkan turunan terhadap  $\eta$  sedangkan untuk bentuk persamaan *large time* yaitu :

$$(1 + K)F'''' + \frac{3}{2}[1 - (F')^2 + FF''] + KH' + (M + \phi)(1 - F') = \frac{\partial F'}{\partial t} \quad (5.3)$$

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right)H'' + \frac{3}{2}\lambda(FH' - HF') = \frac{\partial H}{\partial t} + K(2H + F'') \quad (5.4)$$

kondisi awal untuk fungsi  $f, f', f''$  dan  $h, h'$  didapatkan dengan mengintegrasikan persamaan dengan kondisi batas diperoleh :

$$f = \eta \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2\sqrt{(1+K[1-n])}} \right) + 2\sqrt{\frac{1+K[1-n]}{\pi}} \left( e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K[1-n])}} - 1 \right)$$

$$f' = \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2\sqrt{(1+K[1-n])}} \right)$$

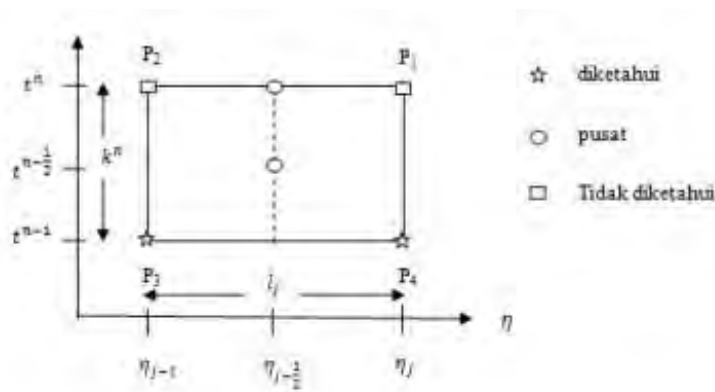
$$f'' = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K[1-n])}} e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K[1-n])}}$$

$$h = -nf'' = \frac{n}{\sqrt{\pi(1+K[1-n])}} e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K[1-n])}}$$

$$h' = \frac{n\eta}{2(1+K[1-n])\sqrt{\pi(1+K[1-n])}} e^{\frac{-\eta^2}{4(1+K[1-n])}}$$

### 5.1 Diskritisasi Model

Persamaan yang diperoleh merupakan persamaan dengan orde tinggi. Penyelesaian dengan metode Keller Box menggunakan persamaan dalam bentuk orde pertama, maka dilakukan pemisalan fungsi sebagai berikut :



Gambar 5.1: Skema beda hingga

$$f' = u \tag{5.5}$$

$$u' = v \tag{5.6}$$

$$h' = p \tag{5.7}$$

$$(1 + K)v' + \frac{\eta}{2}v + \frac{3}{2}t[1 - u^2 + fv] + Kp + (M + \phi)t(1 - u) = t \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.8)$$

$$(1 + \frac{K}{2})p' + \frac{\eta}{2}p + \frac{h}{2} + \frac{3}{2}t[fp - pu] = t \frac{\partial h}{\partial t} + tK(2h + u) \quad (5.9)$$

Setelah dilakukan pemisalan fungsi selanjutnya dilakukan diskritisasi model dengan menggunakan metode beda hingga sesuai dengan Gambar (5.1), untuk Persamaan (5.5) - (5.7) menggunakan titik tengah  $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n)$  pada ruas  $P_1P_2$  dengan menggunakan beda hingga pusat, sedangkan untuk bentuk tak linier pada Persamaan (5.8) - (5.9) digunakan titik tengah  $(\eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n-\frac{1}{2}})$  pada segiempat  $P_1P_2P_3P_4$  sebagai berikut

$$\frac{(f_j^n - f_{j-1}^n)}{\ell_j} = u_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.10)$$

$$\frac{(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\ell_j} = v_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.11)$$

$$\frac{(h_j^n - h_{j-1}^n)}{\ell_j} = p_{j-\frac{1}{2}}^n \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{(1 + K)}{\ell_j} & (v_j^n - v_{j-1}^n) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^n + Kp_{j-\frac{1}{2}}^n + (M + \phi)t^n(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n) \\ & + \frac{3}{2}t^n[1 - (u^2)_{j-\frac{1}{2}}^n + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n] - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^n = - \frac{(1 + K)}{\ell_j} (v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}) \\ & - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - K p_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - (M + \phi) t^{n-1} (1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\ & - \frac{3}{2} t^{n-1} [1 - (u^2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \frac{K}{2})}{\ell_j} & (p_j^n - p_{j-1}^n) + \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} p_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{h_{j-\frac{1}{2}}^n}{2} + \frac{3}{2} t^n (f_{j-\frac{1}{2}}^n p_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n) \\ & - t^n K (2h_{j-\frac{1}{2}}^n + v_{j-\frac{1}{2}}^n) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n = - \frac{(1 + \frac{K}{2})}{\ell_j} (p_j^{n-1} - p_{j-1}^{n-1}) \\ & - \frac{\eta_{j-\frac{1}{2}}}{2} p_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{2} - \frac{3}{2} t^{n-1} (f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} p_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\ & + t^{n-1} K (2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \end{aligned} \quad (5.14)$$



dengan  $l_j$  adalah step size untuk  $\eta$ , sedangkan  $k^n$  step size dari  $t$ , dimana :

$$\begin{aligned} (\cdot)_{j-\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{2} [(\cdot)_j^n + (\cdot)_{j-1}^n] \\ (\cdot)_j^{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} [(\cdot)_j^n + (\cdot)_j^{n-1}] \end{aligned}$$

## 5.2 Linierisasi Model

Model matematika yang telah didiskritisasi kemudian dilakukan linierisasi model pada Persamaan (5.10) - (5.14) dengan menggunakan metode Newton. Sebelumnya dikenalkan bentuk iterasi untuk metode Newton sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f_j^{i+1} &= f_j^i + \delta f_j^i \\ u_j^{i+1} &= u_j^i + \delta u_j^i \\ v_j^{i+1} &= v_j^i + \delta v_j^i \\ h_j^{i+1} &= h_j^i + \delta h_j^i \\ p_j^{i+1} &= p_j^i + \delta p_j^i \end{aligned} \quad (5.15)$$

selanjutnya disubstitusikan bentuk iterasi Persamaan (5.15) pada sistem Persamaan (5.10) - (5.14), secara sederhana dengan menghilangkan orde tinggi pada  $(\delta f_j^i, \delta u_j^i, \delta v_j^i, \delta h_j^i, \delta p_j^i)$  didapatkan:

$$(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta u_j + \delta u_{j-1}) = (r_1)_j \quad (5.16)$$

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta v_j + \delta v_{j-1}) = (r_2)_j \quad (5.17)$$

$$(\delta h_j - \delta h_{j-1}) - \frac{l_j}{2}(\delta p_j + \delta p_{j-1}) = (r_3)_j \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} (a_1)_j \delta v_j + (a_2)_j \delta v_{j-1} + (a_3)_j \delta f_j + (a_4)_j \delta f_{j-1} + (a_5)_j \delta u_j \\ + (a_6)_j \delta u_{j-1} + (a_7)_j \delta p_j + (a_8)_j \delta p_{j-1} = (r_4)_j \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} (b_1)_j \delta p_j + (b_2)_j \delta p_{j-1} + (b_3)_j \delta f_j + (b_4)_j \delta f_{j-1} + (b_5)_j \delta u_j \\ + (b_6)_j \delta u_{j-1} + (b_7)_j \delta h_j + (b_8)_j \delta h_{j-1} \\ + (b_9)_j \delta v_j + (b_{10})_j \delta v_{j-1} = (r_5)_j \end{aligned} \quad (5.20)$$

dengan

$$(r_1)_j = -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n)$$

$$\begin{aligned}
(r_2)_j &= -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(v_j^n + v_{j-1}^n) \\
(r_3)_j &= -(h_j^n - h_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2}(p_j^n + p_{j-1}^n) \\
(r_4)_j &= -\frac{(1+K)}{l_j}(v_j^n - v_{j-1}^n) - \frac{\eta}{4}(v_j^n + v_{j-1}^n) - \frac{K}{2}(p_j^n + p_{j-1}^n) \\
&\quad - (M + \phi)t^n \left(1 - \frac{(u_j^n + u_{j-1}^n)}{2}\right) - \frac{3}{2}t^n \left(1 - \frac{1}{4}(u_j^n + u_{j-1}^n)\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}(f_j^n + f_{j-1}^n)(v_j^n + v_{j-1}^n) \\
&\quad + \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}(u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{(1+K)}{l_j}(v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}) \\
&\quad - \frac{\eta}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - Kp_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - (M + \phi)t^{n-1}(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\
&\quad - \frac{3}{2}t^{n-1} \left(1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_j - \frac{1}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}\right) - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
(r_5)_j &= -\frac{(1+\frac{K}{2})}{l_j}(p_j^n - p_{j-1}^n) - \frac{\eta}{2}(p_j^n + p_{j-1}^n) - \frac{1}{4}(h_j^n + h_{j-1}^n) \\
&\quad - \frac{3}{8}t^n [(f_j^n + f_{j-1}^n)(p_j^n + p_{j-1}^n) - (h_j^n + h_{j-1}^n)(u_j^n + u_{j-1}^n)] \\
&\quad + t^n K [(h_j^n + h_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(v_j^n + v_{j-1}^n)] + \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}(h_j^n + h_{j-1}^n) \\
&\quad - \frac{(1+\frac{K}{2})}{l_j}(p_j^{n-1} + p_{j-1}^{n-1}) - \frac{\eta}{2}p_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{1}{2}h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&\quad - \frac{3}{2}t^{n-1} [f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}p_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - \frac{n-1}{j-\frac{1}{2}}u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] - t^{n-1}K(2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\
&\quad - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
(a_1)_j &= \frac{(1+K)}{l_j} + \frac{3}{8}t^n(f_j^n + f_{j-1}^n) \\
(a_2)_j &= -\frac{(1+K)}{l_j} + \frac{3}{8}t^n(f_j^n + f_{j-1}^n) \\
(a_3)_j &= \frac{3}{8}t^n(v_j^n + v_{j-1}^n) \\
(a_4)_j &= \frac{3}{8}t^n(v_j^n + v_{j-1}^n) \\
(a_5)_j &= -\frac{(M+P)t^n}{2} - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} - \frac{3}{4}t^n(u_j^n + u_{j-1}^n) \\
(a_6)_j &= -\frac{(M+P)t^n}{2} - \frac{t^n}{k^n} - \frac{3}{4}t^n(u_j^n + u_{j-1}^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a_7)_j &= \frac{K}{2} \\
(a_8)_j &= \frac{K}{2} \\
(b_1)_j &= \frac{(1 + \frac{K}{2})}{l_j} + \frac{3}{8}t^n(f_j^n + f_{j-1}^n) \\
(b_2)_j &= -\frac{(1 + \frac{K}{2})}{l_j} + \frac{3}{8}t^n(f_j^n + f_{j-1}^n) \\
(b_3)_j &= \frac{3}{8}t^n(p_j^n + p_{j-1}^n) \\
(b_4)_j &= \frac{3}{8}t^n(p_j^n + p_{j-1}^n) \\
(b_5)_j &= -\frac{3}{8}t^n(h_j^n + h_{j-1}^n) \\
(b_6)_j &= -\frac{3}{8}t^n(h_j^n + h_{j-1}^n) \\
(b_7)_j &= \frac{1}{4} - \frac{3}{8}t^n(u_j^n + u_{j-1}^n) - t^n K - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
(b_8)_j &= \frac{1}{4} - \frac{3}{8}t^n(u_j^n + u_{j-1}^n) - t^n K - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \\
(b_9)_j &= -\frac{1}{2}t^n K \\
(b_{10})_j &= -\frac{1}{2}t^n K
\end{aligned}$$

Berdasarkan kondisi batas yang diperoleh maka dapat dinyatakan bahwa  $\delta f_0 = 0, \delta u_0 = 0, \delta h_0 = 0, \delta u_N = 0, \delta h_N = 0$

### 5.3 Teknik Eliminasi Blok

Sistem linier pada Persamaan (5.16) - (5.20) dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok (Na, 1979). Struktur tridiagonal blok biasanya terdiri dari elemen-elemen yang berupa variabel atau konstanta, sedangkan pada metode Keller Box ini elemen-elemen dari blok tridiagonal berupa matriks blok, oleh karena itu terlebih dahulu dibutuhkan penentuan elemen-elemen dari matriks blok tridiagonal dari sistem linier Persamaan (5.16) - (5.20) dengan cara dibentuk tiga keadaan yaitu saat  $j = 1, j = N - 1$  dan  $j = N$ .

**Keadaan 1** Saat  $j = 1$ , maka Persamaan (5.16) - (5.20) menjadi

$$\begin{aligned}
(\delta f_1 - \delta f_0) - \frac{l_1}{2}(\delta u_1 + \delta u_0) &= (r_1)_1 \\
(\delta u_1 - \delta u_0) - \frac{l_1}{2}(\delta v_1 + \delta v_0) &= (r_2)_1
\end{aligned}$$

$$(\delta h_1 - \delta h_0) - \frac{l_1}{2}(\delta p_1 + \delta p_0) = (r_2)_1$$

$$(a_1)_1 \delta v_1 + (a_2)_1 \delta v_0 + (a_3)_1 \delta f_1 + (a_4)_1 \delta f_0 \\ + (a_5)_1 \delta u_1 + (a_6)_1 \delta v_0 + (a_7)_1 \delta p_1 + (a_8)_1 \delta p_0 = (r_4)_1$$

$$(b_1)_1 \delta p_1 + (b_2)_1 \delta p_0 + (b_3)_1 \delta f_1 + (b_4)_1 \delta f_0 \\ + (b_5)_1 \delta u_1 + (b_6)_1 \delta v_0 + (b_7)_1 \delta h_1 + (b_8)_1 \delta h_0 + (b_9)_1 \delta v_1 + (b_{10})_1 \delta v_0 = (r_5)_1$$

Berdasarkan kondisi batas  $\delta f_0 = 0$ ,  $\delta u_0 = 0$ ,  $\delta h_0 = 0$  maka sistem di atas dapat dibentuk dalam matriks sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & -\frac{l_1}{2} \\ (a_2)_1 & (a_8)_1 & (a_3)_1 & (a_1)_1 & (a_7)_1 \\ (b_{10})_1 & (b_2)_1 & (b_3)_1 & (b_9)_1 & (b_1)_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_0 \\ \delta p_0 \\ \delta f_1 \\ \delta v_1 \\ \delta p_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{l_1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_5)_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (b_5)_1 & (b_7)_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_1 \\ \delta h_1 \\ \delta f_2 \\ \delta v_2 \\ \delta p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1)_1 \\ (r_2)_1 \\ (r_3)_1 \\ (r_4)_1 \\ (r_5)_1 \end{pmatrix}$$

Dapat dituliskan secara sederhana bahwa untuk  $j = 1$  yaitu  $[A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] = [r_1]$ .

**Keadaan 2** Saat  $j = N - 1$ , maka Persamaan (5.16) - (5.20) menjadi

$$(\delta f_{N-1} - \delta f_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta u_{N-1} + \delta u_{N-2}) = (r_1)_{N-1}$$

$$(\delta u_{N-1} - \delta u_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta v_{N-1} + \delta v_{N-2}) = (r_2)_{N-1}$$

$$(\delta h_{N-1} - \delta h_{N-2}) - \frac{l_{N-1}}{2}(\delta p_{N-1} + \delta p_{N-2}) = (r_3)_{N-1}$$

$$(a_1)_{N-1} \delta v_{N-1} + (a_2)_{N-1} \delta v_{N-2} + (a_3)_{N-1} \delta f_{N-1} + (a_4)_{N-1} \delta f_{N-2} \\ + (a_5)_{N-1} \delta u_{N-1} + (a_6)_{N-1} \delta v_{N-2} + (a_7)_{N-1} \delta p_{N-1} \\ + (a_8)_{N-1} \delta p_{N-2} = (r_4)_{N-1}$$

$$(b_1)_{N-1} \delta p_{N-1} + (b_2)_{N-1} \delta p_{N-2} + (b_3)_{N-1} \delta f_{N-1} + (b_4)_{N-1} \delta f_{N-2} \\ + (b_5)_{N-1} \delta u_{N-1} + (b_6)_{N-1} \delta v_{N-2} + (b_7)_{N-1} \delta h_{N-1} \\ + (b_8)_{N-1} \delta h_{N-2} + (b_9)_{N-1} \delta v_{N-1} \\ + (b_{10})_{N-1} \delta v_{N-2} = (r_5)_{N-1}$$

sistem di atas dapat dibentuk dalam matriks sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ 0 & 0 & (a_4)_{N-1} & (a_2)_{N-1} & (a_8)_{N-1} \\ 0 & 0 & (b_4)_{N-1} & (b_{10})_{N-1} & (b_2)_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_{N-3} \\ \delta p_{N-3} \\ \delta f_{N-2} \\ \delta v_{N-2} \\ \delta p_{N-2} \end{pmatrix} \\
+ & \begin{pmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_{N-1}}{2} \\ (a_6)_{N-1} & 0 & (a_3)_{N-1} & (a_1)_{N-1} & (a_7)_{N-1} \\ (b_8)_{N-1} & (b_8)_{N-1} & (b_3)_{N-1} & (b_9)_{N-1} & (b_1)_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{N-2} \\ \delta h_{N-2} \\ \delta f_{N-1} \\ \delta v_{N-1} \\ \delta p_{N-1} \end{pmatrix} \\
+ & \begin{pmatrix} -\frac{l_{N-1}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_5)_{N-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (b_5)_{N-1} & (b_7)_{N-1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{N-1} \\ \delta h_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta p_N \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} (r_1)_{N-1} \\ (r_2)_{N-1} \\ (r_3)_{N-1} \\ (r_4)_{N-1} \\ (r_5)_{N-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dapat dituliskan secara sederhana bahwa untuk  $j = 2, 3, \dots, N_1$ .

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] + [C_j][\delta_{j+1}] = [r_j]$$

**Keadaan 3** Saat  $j = N$ , maka Persamaan (5.16) - (5.20) menjadi

$$\begin{aligned}
 (\delta f_N - \delta f_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta u_N + \delta u_{N-1}) &= (r_1)_N \\
 (\delta u_N - \delta u_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta v_N + \delta v_{N-1}) &= (r_2)_N \\
 (\delta h_N - \delta h_{N-1}) - \frac{l_N}{2}(\delta p_N + \delta p_{N-1}) &= (r_3)_N \\
 (a_1)_N \delta v_N + (a_2)_N \delta v_{N-1} + (a_3)_N \delta f_N + (a_4)_N \delta f_{N-1} \\
 + (a_5)_N \delta u_N + (a_6)_N \delta v_{N-1} + (a_7)_N \delta p_N \\
 + (a_8)_N \delta p_{N-1} &= (r_4)_N
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b_1)_N \delta p_N + (b_2)_N \delta p_{N-1} + (b_3)_N \delta f_N + (b_4)_N \delta f_{N-1} \\
 + (b_5)_N \delta u_N + (b_6)_N \delta v_{N-1} + (b_7)_N \delta h_N \\
 + (b_8)_N \delta h_{N-1} + (b_9)_N \delta v_N \\
 + (b_{10})_N \delta v_{N-1} &= (r_5)_N
 \end{aligned}$$

sistem di atas dapat dibentuk dalam matriks sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ 0 & 0 & (a_4)_N & (a_2)_N & (a_8)_N \\ 0 & 0 & (b_4)_N & (b_{10})_N & (b_2)_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta v_{N-1} \\ \delta p_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta p_N \end{pmatrix} \\
 + &\begin{pmatrix} -\frac{l_N}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{l_N}{2} \\ (a_6)_N & 0 & (a_3)_N & (a_1)_N & (a_7)_N \\ (b_8)_N & (b_8)_N & (b_3)_N & (b_9)_N & (b_1)_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u_{N-1} \\ \delta h_{N-1} \\ \delta f_N \\ \delta v_N \\ \delta p_N \end{pmatrix} \\
 = &\begin{pmatrix} (r_1)_N \\ (r_2)_N \\ (r_3)_N \\ (r_4)_N \\ (r_5)_N \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Dapat dituliskan secara sederhana bahwa untuk  $j = N$ .

$$[B_j][\delta_{j-1}] + [A_j][\delta_j] = [r_j]$$

Dengan demikian secara keseluruhan untuk  $j = 1, 2, 3, \dots, N$  secara sederhana dapat dituliskan

$$\begin{aligned} j = 1 & : & [A_1][\delta_1] + [C_1][\delta_2] &= [r_1] \\ j = 2 & : & [B_2][\delta_1] + [A_2][\delta_2] + [C_2][\delta_3] &= [r_2] \\ j = 3 & : & [B_3][\delta_2] + [A_3][\delta_3] + [C_3][\delta_4] &= [r_3] \\ & \vdots & & \vdots \\ j = N - 1 & : & [B_{N-1}][\delta_{N-2}] + [A_{N-1}][\delta_{N-1}] + [C_{N-1}][\delta_N] &= [r_{N-1}] \\ j = N & : & [B_N][\delta_{N-1}] + [A_N][\delta_N] &= [r_N] \end{aligned}$$

atau dapat dinyatakan sebagai :

$$\mathbf{A}\delta = \mathbf{r} \tag{5.21}$$

dengan

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [A_1] & [C_1] & & & & \\ [B_2] & [A_2] & [C_2] & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & [B_{N-1}] & [A_{N-1}] & [C_{N-1}] \\ & & & & & [B_N] & [A_N] \end{pmatrix}$$

$$\delta = \begin{pmatrix} [\delta_1] \\ [\delta_2] \\ \vdots \\ [\delta_{N-1}] \\ [\delta_N] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} [r_1] \\ [r_2] \\ \vdots \\ [r_{N-1}] \\ [r_N] \end{pmatrix}$$

Berdasarkan Persamaan (5.21), dapat dilihat bahwa matriks  $\mathbf{A}$  adalah matriks tridi-

agonal yang elemen-elemennya bernilai nol kecuali pada tiga diagonalutamanya. Persamaan (5.21) dapat diselesaikan dengan menggunakan teknik eliminasi blok dengan mengasumsikan bahwa matriks  $\mathbf{A}$  adalah matriks *non singular* sehingga dapat dilakukan sebagai

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU} \quad (5.22)$$

dimana

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} [\alpha_1] & & & & & \\ [B_2] & [\alpha_1] & & & & \\ & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & & [\alpha_{N-1}] & \\ & & & & [B_N] & [\alpha_N] \end{pmatrix}$$

dan

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} [I] & [\Gamma_1] & & & & \\ & [I] & [\Gamma_2] & & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & & \vdots & \\ & & & & & [I] & [\Gamma_{N-1}] \\ & & & & & & [I] \end{pmatrix}$$

dengan  $[I]$  adalah matriks identitas yang berukuran  $5 \times 5$  dan  $[\alpha_j], [\Gamma_j]$  merupakan matriks ukuran  $5 \times 5$  dengan elemen-elemennya ditentukan dengan persamaan berikut

$$\begin{aligned} [\alpha_1] &= [A_1] \\ [A_1][\Gamma_1] &= [C_1] \\ [\alpha_j] &= [A_j] - [B_j][\Gamma_{j-1}], \quad j = 2, 3, \dots, N \\ [\alpha_j][\Gamma_j] &= [C_j], \quad j = 2, 3, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

dengan menyubstitusikan Persamaan (5.22) pada Persamaan (5.21) maka didapatkan persamaan



$$\mathbf{LU}\delta = \mathbf{r} \quad (5.23)$$

dengan mendefinisikan bahwa

$$\mathbf{U}\delta = \mathbf{W} \quad (5.24)$$

sehingga Persamaan (5.24) dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{LW} = \mathbf{r} \quad (5.25)$$

dimana

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} [W_1] \\ [W_2] \\ \vdots \\ [W_{N-1}] \\ [W_N] \end{pmatrix}$$

dan  $[W_j]$  adalah matriks berukuran  $5 \times 1$  dengan elemen-elemennya didapatkan dari Persamaan (5.25) yaitu

$$\begin{aligned} [\alpha_1][W_1] &= [r_1] \\ [\alpha_j][W_j] &= [r_j] - [B_j][W_j], \quad 2 \leq j \leq N \end{aligned}$$

setelah didapatkan elemen-elemen dari matriks  $\mathbf{W}$ , maka selanjutnya dapat ditentukan penyelesaian dari  $\delta$  pada Persamaan (5.24) dengan menggunakan persamaan berikut

$$\begin{aligned} [\delta_j] &= [r_1] \\ [\delta_j] &= [W_j] - [\Gamma_j][\delta_{j+1}], \quad 1 \leq j \leq N - 1 \end{aligned}$$

dengan didaptkannya nilai  $\delta$ , maka Persamaan (5.16) - (5.20) dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian Persamaan (5.15) dengan melakukan iterasi sampai memenuhi kriteria konvergen. Menurut Cebeci dan Bradshaw kriteria konvergen menggunakan  $u(0, t)$  dan iterasi berhenti saat didapatkan  $|\delta u(0, t)| < \epsilon$ , dimana nilai dari  $\epsilon$  sangat kecil. Pada penelitian ini digunakan nilai  $\epsilon = 10^{-5}$  (Mohammad, 2014).

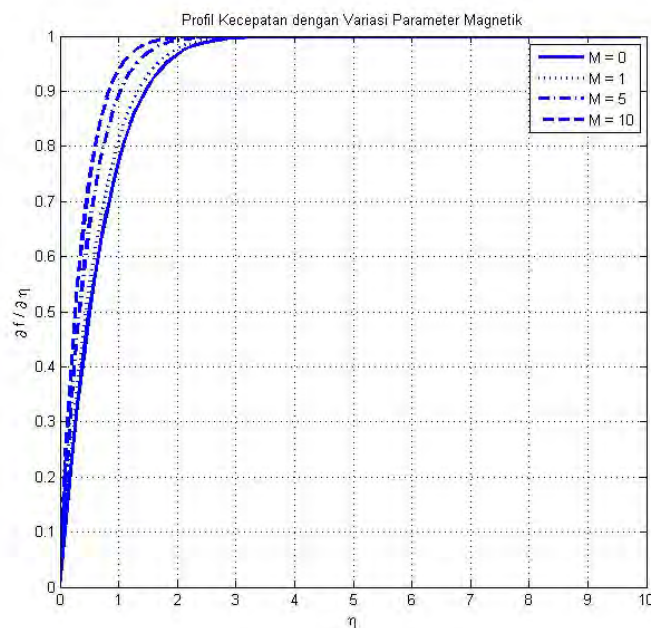
## 5.4 Hasil Numerik

Tahapan yang selanjutnya dilakukan setelah penyelesaian numerik yaitu simulasi dengan menggunakan software Matlab. Pada simulasi ini inputan berupa beberapa parameter dan simulasi ini dilakukan dengan beberapa kali percobaan parameter. Akan tetapi hanya beberapa yang ditampilkan yang dapat mewakili dari percobaan simulasi yang telah dilakukan. Simulasi ini menggunakan  $\eta$  sebanyak 100 dengan  $\Delta\eta = l_j = 0.1$  dan partisi  $t$  sebanyak 20 dengan  $\Delta t = k^n = 0.3$  pada konsentrasi kuat  $n = 0$  dan konsentrasi lemah  $n = 0.5$

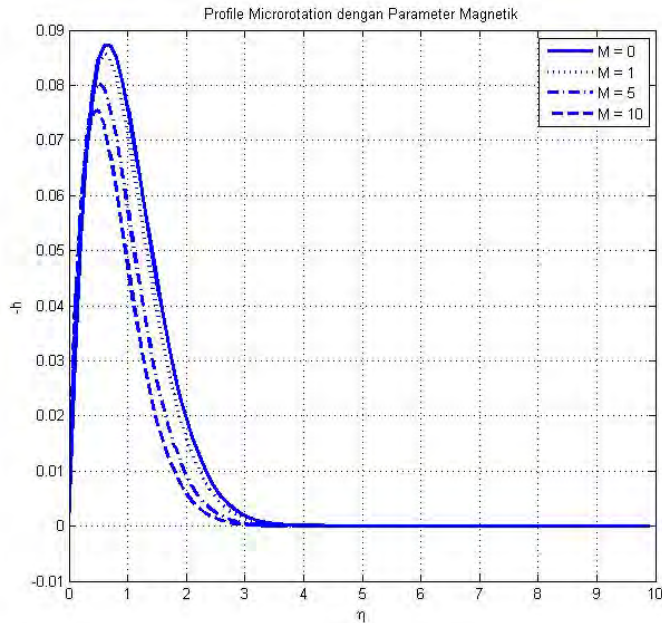
Berdasarkan hasil simulasi yang telah dilakukan, didapatkan hubungan antara parameter magnetik ( $M$ ), parameter *micropolar* ( $K$ ), parameter porositas ( $\phi$ ) dan parameter permeabilitas ( $K^*$ ) dengan profil kecepatan ( $f'$ ) dan profil mikro rotasi ( $h$ ). Uraian dari masing-masing pengaruh parameter tersebut adalah sebagai berikut:

### 5.4.1 Pengaruh Parameter Magnetik

Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh parameter magnetik terhadap kecepatan dan mikro rotasi fluida *micropolar*. Pada simulasi ini digunakan variasi parameter magnetik yaitu  $M = 0, 1, 5, 10$  dengan  $K = 1, \phi = 1$  dan  $t = 6$ , pemilihan variasi  $M$  ini dapat juga dilakukan untuk  $0 \leq M \leq 100$  yang mana maksud dari nilai  $M = 0$  adalah tidak adanya pengaruh medan magnet atau MHD pada aliran.



Gambar 5.2: Profil Kecepatan dengan variasi parameter  $M$

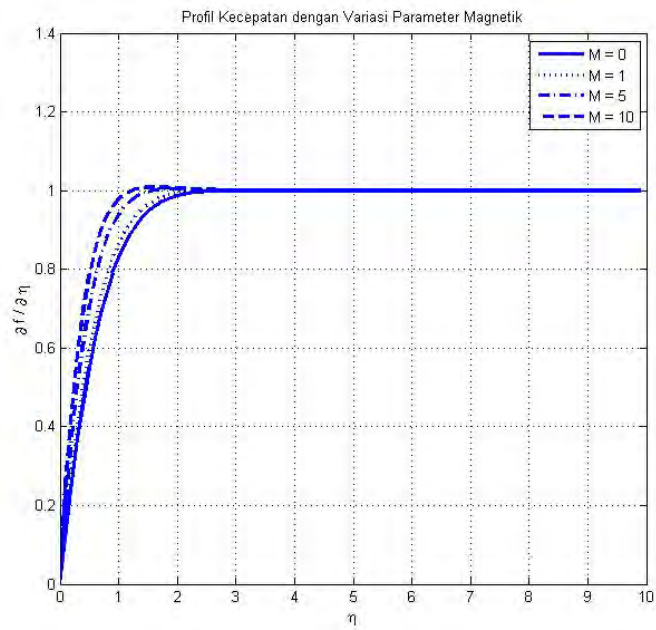


Gambar 5.3: Profil Mikro Rotasi dengan variasi parameter  $M$

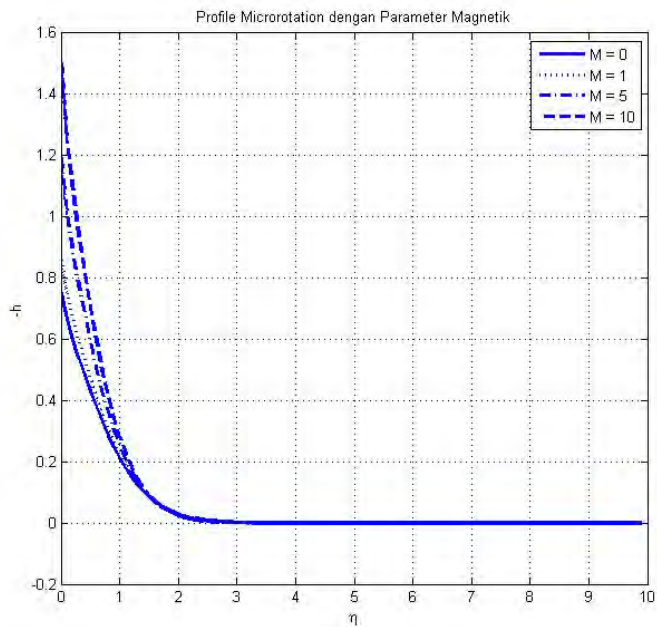
Pada Gambar 5.2 dan 5.3 merupakan grafik pada konsentrasi kuat dengan nilai  $n = 0$ . Pada Gambar 5.2 menunjukkan bahwa nilai kecepatan mengalami peningkatan mulai ( $f' \approx 0$ ) sampai ( $f' \approx 1$ ). Berdasarkan hasil grafik pada Gambar 5.2 didapatkan bahwa semakin besar nilai parameter magnetik maka semakin besar pula aliran fluida. Hal ini terjadi karena besar Gaya Lorentz yang bekerja semakin besar seiring dengan bertambahnya besar medan magnet yang mempengaruhi fluida *micropolar*. Dengan meningkatnya Gaya Lorentz mengakibatkan gerakan muatan-muatan listrik yang ada dalam medan magnet menjadi meningkat sehingga fluida micropolar pun akan bergerak lebih cepat.

Pada gambar 5.3, yaitu profil mikro rotasi mengalami peningkatan mulai dari  $-h \approx 0$  sampai  $-h \approx 0.0875$  kemudian terjadi penurunan mulai  $-h \approx 0.0875$  sampai  $-h \approx 0$ . Pada grafik yang ditunjukkan oleh Gambar 5.3 didapatkan bahwa seiring bertambahnya parameter magnetik menyebabkan profil mikro rotasi semakin menurun. Hal ini terjadi karena besar Gaya Lorentz mempengaruhi kecepatan fluida yang semakin meningkat sehingga berakibat pada profil mikro rotasi yang semakin menurun karena pengaruh MHD.

Pada Gambar 5.4 dan 5.5 merupakan grafik pada konsentrasi lemah dengan nilai  $n = 0.5$ . Pada Gambar 5.4 menunjukkan bahwa semakin meningkatnya parameter magnetik maka semakin besar pula aliran fluida yang dihasilkan. Tidak ada perbedaan yang signifikan antara  $n = 0$  dan  $n = 0.5$  hanya saja kecepatan



Gambar 5.4: Profil Kecepatan dengan variasi parameter  $M$



Gambar 5.5: Profil Mikro rotasi dengan variasi parameter  $M$

fluida yang dihasilkan lebih besar ketika  $n = 0.5$ . Hal ini dapat ditunjukkan pada Tabel 5.1 perbandingan kecepatan antara  $n = 0$  dengan  $n = 0.5$ .

Tabel 5.1: Perbandingan Kecepatan Fluida *Micropolar* terhadap  $n$  pada saat  $\eta = 1$  dengan variasi Parameter Magnetik

$M$	$n = 0$	$n = 0.5$
0	0.731446876302039	0.789611098197481
1	0.771937678354962	0.828100068052870
5	0.863965076614842	0.913343819200726
10	0.916957760214372	0.960216530265798

Pada Tabel 5.1 dapat dilihat bahwa kecepatan fluida ketika  $n = 0.5$  lebih besar dibandingkan dengan  $n = 0$ . Hal ini dikarenakan konsentrasi yang lemah pada fluida *micropolar* dapat menyebabkan kecepatan fluida yang dihasilkan semakin besar. Sehingga, konsentrasi fluida *micropolar* mempengaruhi kecepatan aliran.

Pada Gambar 5.5 nilai awal dari Profil Mikro rotasi berbeda dengan Gambar 5.3, hal ini dikarenakan perbedaan nilai  $n$  yang diberikan atau konsentrasi fluida yang berbeda. Pada Gambar 5.5, profil mikro rotasi mengalami penurunan mulai nilai awal sampai  $-h \approx 0$  yang berarti bahwa ketebalan lapisan batas semakin jauh dari permukaan. Selain itu, semakin besar parameter magnetik maka semakin besar profil mikro rotasi yang dihasilkan. Hal ini berbanding terbalik dengan Gambar 5.3, sehingga dapat dikatakan bahwa semakin meningkat parameter magnetik pada konsentrasi lemah fluida *micropolar* maka semakin besar profil mikro rotasi yang dihasilkan. Hal ini dapat dilihat dari Tabel 5.2.

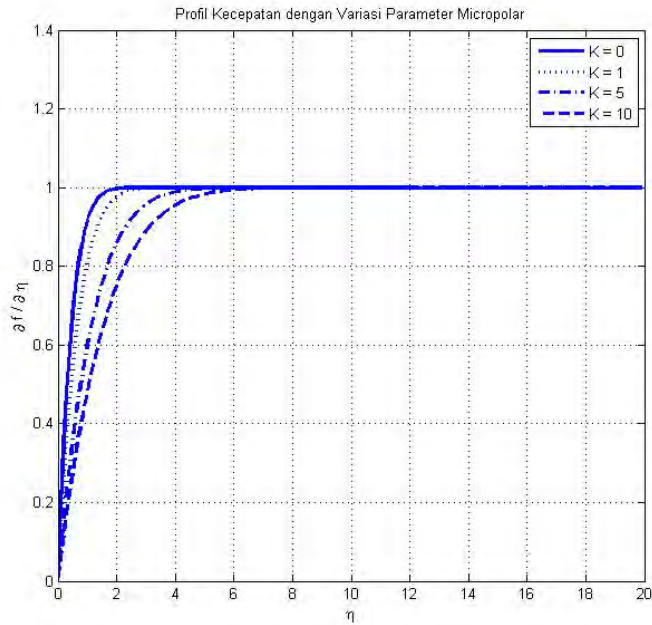
Tabel 5.2: Perbandingan Profil Mikro Rotasi terhadap  $n$  pada saat  $\eta = 1$  dengan variasi Parameter Magnetik

$M$	$n = 0$	$n = 0.5$
0	0.080980159895132	0.246271038741851
1	0.076799635508301	0.260096541152806
5	0.064280577471025	0.301867217103690
10	0.054121233016388	0.341250428914561

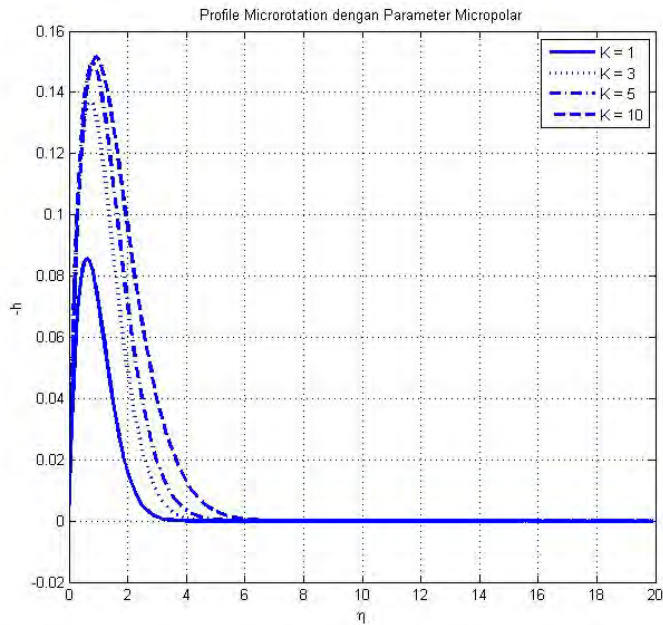
#### 5.4.2 Pengaruh Parameter *Micropolar*

Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh parameter *micropolar* terhadap kecepatan dan mikro rotasi fluida *micropolar*. Pada simulasi ini digunakan variasi parameter *micropolar* yaitu  $K = 0, 1, 5, 10$  dengan  $M = 1, \phi = 0$  dan pada saat  $t = 6$ , pemilihan variasi  $K$  ini dapat juga dilakukan untuk  $0 \leq K \leq 100$  yang

mana maksud dari nilai  $K = 0$  adalah tidak adanya pengaruh *vortex* pada aliran. Simulasi ini juga dilakukan pada saat konsentrasi kuat  $n = 0$  dan konsentrasi lemah  $n = 0.5$ .



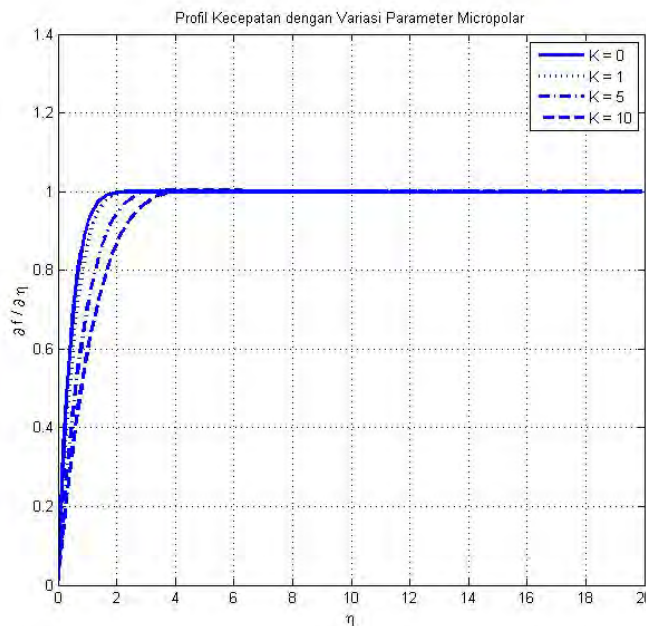
Gambar 5.6: Profil Kecepatan dengan variasi parameter  $K$



Gambar 5.7: Profil Mikro Rotasi dengan variasi parameter  $K$

Pada Gambar 5.6 dan 5.7 merupakan simulasi pada konsentrasi kuat  $n = 0$ . Pada Gambar 5.6 didapatkan bahwa kecepatan fluida mengalami penurunan seiring dengan bertambahnya parameter *micropolar*. Nilai kecepatan mengalami peningkatan mulai ( $f' \approx 0$ ) sampai ( $f' \approx 1$ ). Berdasarkan hasil grafik pada gambar didapatkan bahwa semakin besar nilai parameter *micropolar* maka semakin menurun kecepatan aliran fluida. Hal ini terjadi karena *vortex* semakin besar seiring dengan bertambahnya besar mikro elemen yang mempengaruhi fluida *micropolar*. Dengan meningkatnya *vortex* menyebabkan kecepatan fluida *micropolar* semakin menurun.

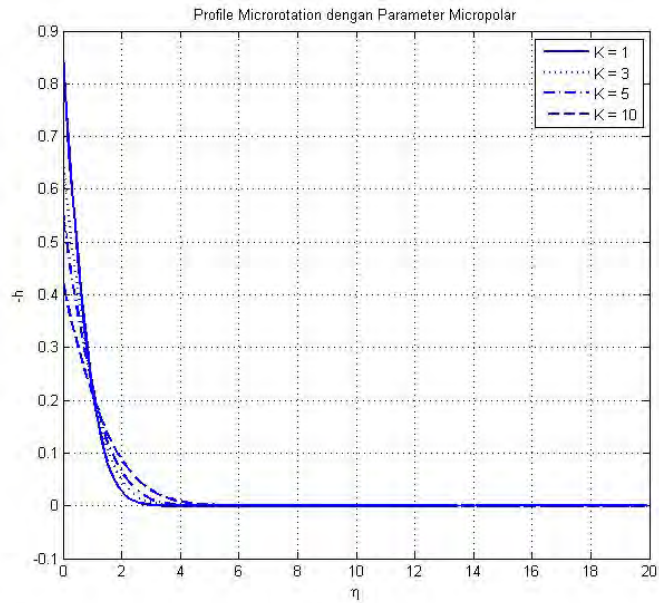
Pada Gambar 5.7 menunjukkan karakter profil mikro rotasi dengan variasi nilai parameter *micropolar*. Profil mikro rotasi mengalami peningkatan mulai dari  $-h \approx 0$  sampai  $-h \approx 0.0875$  kemudian terjadi penurunan nilai  $-h \approx 0.0875$  sampai  $-h \approx 0$ . Pada grafik yang ditunjukkan oleh Gambar 5.7 didapatkan bahwa semakin besar nilai parameter *micropolar* maka semakin besar profil mikro rotasi yang dihasilkan. Hal ini terjadi karena *vortex* mempengaruhi bertambahnya besar profil mikro rotasi.



Gambar 5.8: Profil Kecepatan dengan variasi parameter  $K$

Pada Gambar 5.8 dan 5.9 merupakan simulasi pada konsentrasi lemah  $n = 0.5$ . Pada Gambar 5.8 menunjukkan bahwa semakin besar parameter *micropolar* maka semakin menurun kecepatan fluida. Seperti halnya pada parameter magnetik, tidak ada perbedaan yang signifikan antara konsentrasi kuat dan lemah. Tetapi, nilai





Gambar 5.9: Profil Mikro Rotasi dengan variasi parameter  $K$

kecepatan aliran fluida yang dihasilkan pada konsentrasi lemah lebih besar dibandingkan pada konsentrasi kuat. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 5.3 perbandingan kecepatan antara  $n = 0$  dan  $n = 0.5$ .

Tabel 5.3: Perbandingan Kecepatan Fluida terhadap  $n$  pada saat  $\eta = 1$  dengan variasi Parameter *Micropolar*

$K$	$n = 0$	$n = 0.5$
0	0.888658229962801	0.995988253788435
1	0.771937679539651	0.991392699330671
5	0.555380159137439	0.931359543050628
10	0.443946338029477	0.849216454750920

Pada Tabel 5.3 dapat dilihat bahwa kecepatan aliran fluida pada konsentrasi lemah  $n = 0.5$  lebih besar dibandingkan pada konsentrasi kuat  $n = 0$ . Hal ini dikarenakan konsentrasi lemah pada fluida *micropolar* mengakibatkan aliran fluida *micropolar* yang dihasilkan semakin besar. Sehingga konsentrasi aliran fluida dapat mempengaruhi kecepatan aliran fluida.

Pada Gambar 5.9 nilai awal dari profil mikro rotasi berbeda dengan Gambar 5.7, hal ini dikarenakan perbedaan nilai  $n$  yang diberikan. Pada Gambar 5.9, profil mikro rotasi mengalami penurunan mulai nilai awal sampai  $-h \approx 0$ . Selain itu, semakin besar parameter *micropolar* maka semakin menurun profil mikro rotasi.



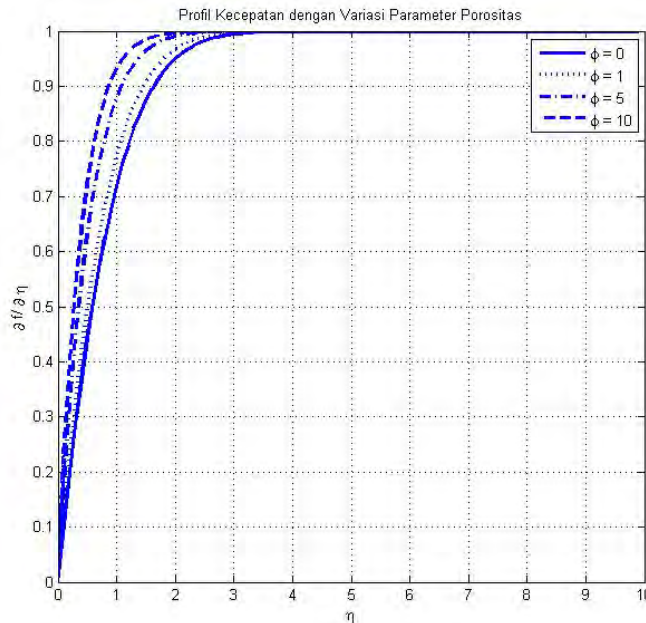
Akan tetapi, penurunan profil mikro rotasi sampai nilai  $\eta \approx 1$  kemudian semakin besar parameter *micropolar* maka semakin besar profil mikro rotasi dari  $\eta \approx 1$  sampai profil mikro rotasi stabil. Pada konsentrasi lemah, profil mikro rotasi lebih besar dibandingkan dengan konsentrasi kuat. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 5.4.

Tabel 5.4: Perbandingan Profil Mikro Rotasi terhadap  $n$  pada saat  $\eta = 1$  dengan variasi Parameter *Micropolar*

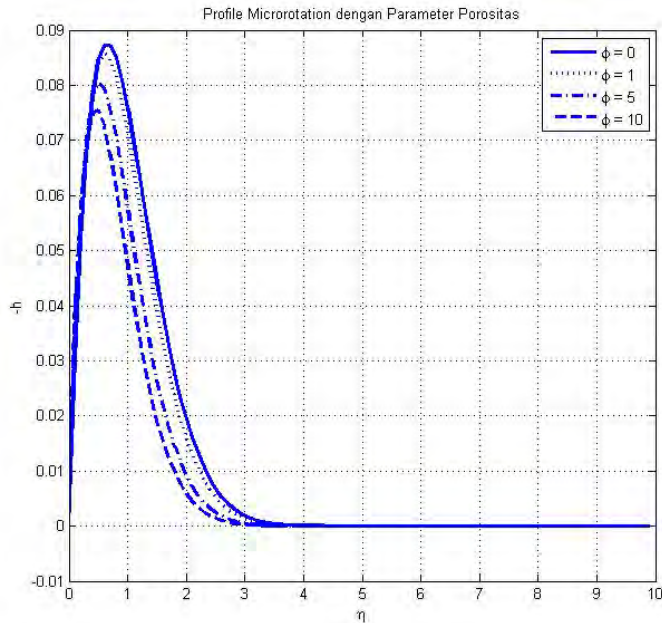
$K$	$n = 0$	$n = 0.5$
1	0.076799637096455	0.260096541090258
3	0.132994694891140	0.257393709585815
5	0.148627195740929	0.250054171529254
10	0.151530428757953	0.229049635999602

### 5.4.3 Pengaruh Parameter Porositas

Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh parameter porositas terhadap kecepatan dan profil mikro rotasi. Pada simulasi ini digunakan variasi parameter porositas yaitu  $\phi = 0, 1, 5, 10$  dengan  $K = 1, \phi = 1$  dengan  $t = 6$ , pemilihan variasi  $\phi$  ini dapat juga dilakukan untuk  $0 \leq \phi \leq 100$  yang mana maksud dari nilai  $\phi = 0$  adalah tidak adanya pengaruh porositas pada aliran. Pada simulasi ini juga dilakukan pada konsentrasi kuat  $n = 0$  dan konsentrasi lemah  $n = 0.5$ .



Gambar 5.10: Profil Kecepatan dengan variasi parameter Porositas

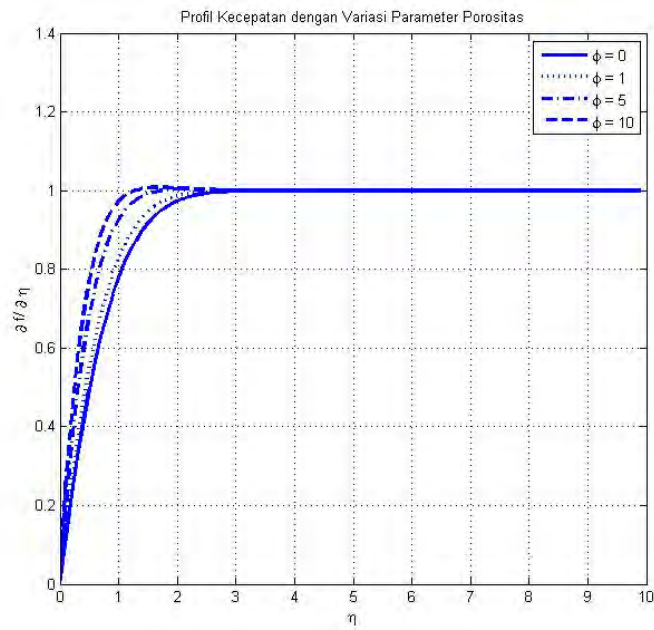


Gambar 5.11: Profil Mikro Rotasi dengan variasi parameter Porositas

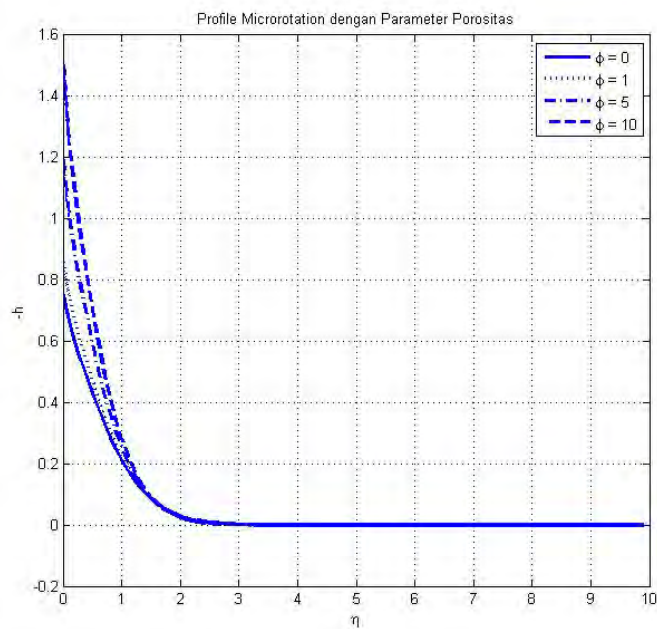
Pada Gambar 5.10 dan 5.11 merupakan simulasi konsentrasi kuat  $n = 0$  aliran fluida. Pada Gambar 5.10 didapatkan bahwa kecepatan fluida mengalami kenaikan seiring dengan bertambahnya parameter porositas. Nilai kecepatan mengalami peningkatan mulai  $f \approx 0$  sampai  $f \approx 1$ . Berdasarkan hasil grafik pada Gambar 5.10 didapatkan bahwa semakin besar nilai parameter porositas semakin besar pula aliran fluida. Hal ini terjadi karena besar porositas yang semakin besar dapat menyebabkan kecepatan fluida semakin bertambah.

Pada Gambar 5.11 yaitu profil mikro rotasi mengalami peningkatan mulai dari  $-h \approx 0$  sampai  $-h \approx 0.087$  kemudian terjadi penurunan mulai  $-h \approx 0.087$  sampai  $-h \approx 0$ . Pada grafik yang ditunjukkan Gambar 5.11 didapatkan bahwa seiring bertambahnya parameter porositas menyebabkan profil mikro rotasi semakin kecil. Hal ini terjadi karena besar porositas yang mempengaruhi kecepatan fluida yang semakin besar sehingga berakibat pada profil mikro rotasi yang semakin menurun karena pengaruh porositas benda.

Pada Gambar 5.12 dan 5.13 merupakan simulasi pada konsentrasi lemah  $n = 0.5$ . Pada Gambar 5.12 menunjukkan bahwa semakin besar parameter porositas maka semakin meningkat kecepatan fluida. Pada parameter porositas tidak ada perbedaan yang signifikan antara konsentrasi kuat dan lemah. Tetapi, nilai kecepatan aliran fluida yang dihasilkan pada konsentrasi lemah lebih besar dibandingkan pada konsentrasi kuat. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 5.5.



Gambar 5.12: Profil Kecepatan dengan variasi parameter Porositas



Gambar 5.13: Profil Mikro Rotasi dengan variasi parameter Porositas

Tabel 5.5: Perbandingan Kecepatan Fluida *Micropolar* terhadap  $n$  pada saat  $\eta = 1$  dengan variasi Parameter Porositas

$\phi$	$n = 0$	$n = 0.5$
1	0.675341315856018	0.735545558638389
3	0.731446876302039	0.789611098197481
5	0.847385174728946	0.898273846187275
10	0.909113647393736	0.953436651948074

Pada Tabel 5.5 dapat dilihat bahwa kecepatan aliran fluida pada konsentrasi lemah  $n = 0.5$  lebih besar dibandingkan pada konsentrasi kuat  $n = 0$ . Hal ini dikarenakan konsentrasi lemah pada fluida *micropolar* mengakibatkan aliran fluida *micropolar* yang dihasilkan semakin besar. Sehingga konsentrasi aliran fluida dapat mempengaruhi kecepatan aliran fluida.

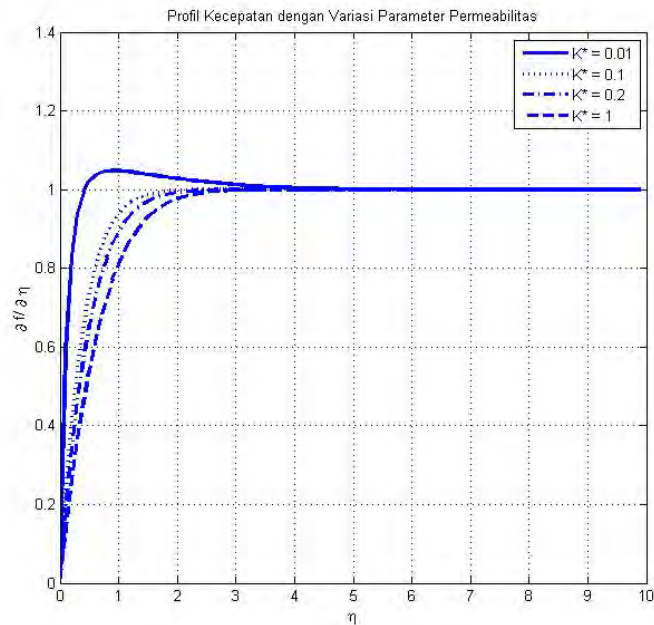
Pada Gambar 5.13 nilai awal dari profil mikro rotasi berbeda dengan Gambar 5.11, hal ini dikarenakan perbedaan nilai  $n$  yang diberikan. Pada Gambar 5.13, profil mikro rotasi mengalami penurunan mulai nilai awal sampai  $-h \approx 0$ . Selain itu, semakin besar parameter porositas maka semakin meningkat profil mikro rotasi. Pada konsentrasi lemah, profil mikro rotasi lebih besar dibandingkan dengan konsentrasi kuat. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 5.6.

Tabel 5.6: Perbandingan Profil Mikro Rotasi terhadap  $n$  pada saat  $\eta = 1$  dengan variasi Parameter Porositas

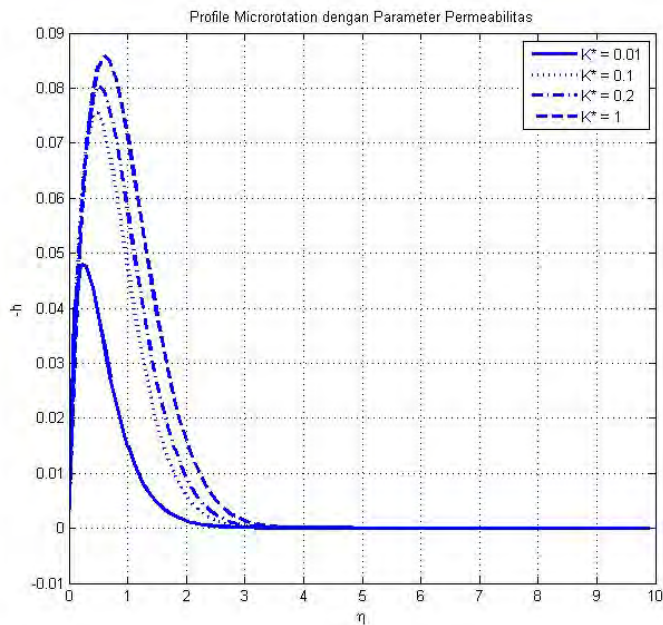
$\phi$	$n = 0$	$n = 0.5$
1	0.080980159895132	0.246271038741851
3	0.076799635508301	0.260096541152806
5	0.064280577471025	0.301867217103690
10	0.054121233016388	0.341250428914561

#### 5.4.4 Pengaruh Parameter Permeabilitas

Pada simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh parameter permeabilitas terhadap kecepatan dan profil mikro rotasi. Pada simulasi ini digunakan variasi parameter permeabilitas yaitu  $K^* = 1, 5, 7, 10$  dengan  $K = 1, \phi = 1$  dengan  $t = 6$ , pemilihan variasi  $K^*$  ini dapat juga dilakukan untuk  $0 < K^* \leq 100$ , nilai parameter permeabilitas  $K^* \neq 0$  karena menyebabkan nilai porositas tidak terdefinisi. Pada simulasi ini juga dilakukan pada konsentrasi kuat  $n = 0$  dan konsentrasi lemah  $n = 0.5$



Gambar 5.14: Profil Kecepatan dengan variasi parameter permeabilitas



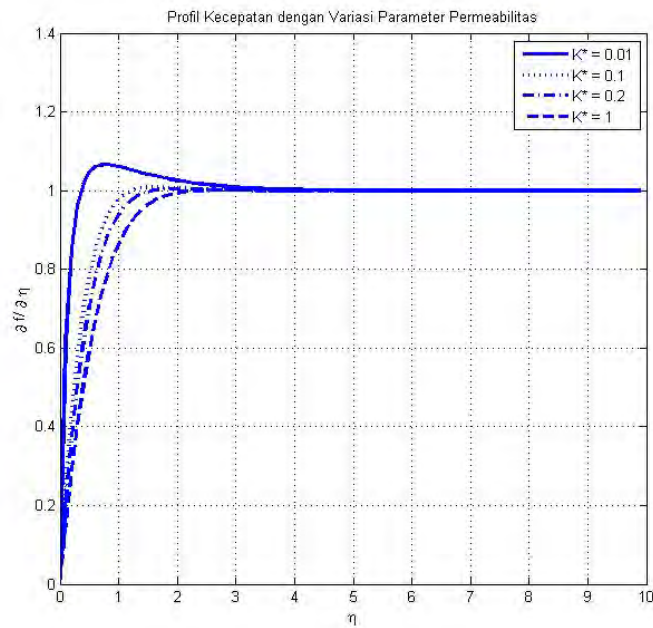
Gambar 5.15: Profil Mikro Rotasi dengan variasi parameter permeabilitas

Pada Gambar 5.14 dan 5.15 merupakan simulasi konsentrasi kuat  $n = 0$ . Pada gambar 5.14 didapatkan bahwa kecepatan fluida mengalami penurunan seiring dengan bertambahnya parameter permeabilitas. Nilai kecepatan mengalami peningkatan mulai  $f' \approx 0$  sampai  $f' \approx 1$ . Berdasarkan hasil grafik pada Gambar

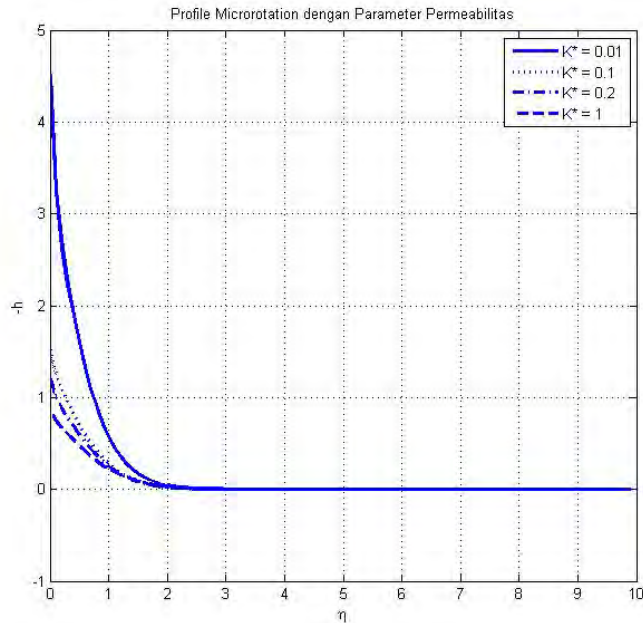
5.14 didapatkan bahwa semakin besar nilai parameter permeabilitas semakin menurun kecepatan aliran fluida. Hal ini terjadi karena media berpori menyebabkan retardasi sehingga dapat mengurangi kecepatan fluida. Dengan meningkatnya permeabilitas pada media berpori sehingga fluida *micropolar* akan bergerak lebih lambat.

Pada Gambar 5.15 yaitu profil mikro rotasi mengalami peningkatan mulai dari  $-h \approx 0$  sampai  $-h \approx 0.087$  kemudian terjadi penurunan mulai  $-h \approx 0.087$  sampai  $-h \approx 0$  yang berarti bahwa aliran fluida *micropolar* semakin menjauhi permukaan bola berpori. Pada grafik yang ditunjukkan Gambar 5.15 didapatkan bahwa seiring bertambahnya parameter permeabilitas menyebabkan profil mikro rotasi semakin besar.

Pada Gambar 5.16 dan 5.17 merupakan simulasi pada konsentrasi lemah  $n = 0.5$ . Pada Gambar 5.16 menunjukkan bahwa semakin besar parameter permeabilitas maka semakin menurun kecepatan fluida. Seperti halnya pada parameter porositas, tidak ada perbedaan yang signifikan antara konsentrasi kuat dan lemah. Tetapi, nilai kecepatan aliran fluida yang dihasilkan pada konsentrasi lemah lebih besar dibandingkan pada konsentrasi kuat. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 5.7.



Gambar 5.16: Profil Kecepatan dengan variasi parameter permeabilitas



Gambar 5.17: Profil Kecepatan dan Profil mikro rotasi dengan variasi  $n$

Tabel 5.7: Perbandingan Kecepatan Fluida *Micropolar* terhadap  $n$  pada saat  $\eta = 1$  dengan variasi Parameter Permeabilitas

$K^*$	$n = 0$	$n = 0.5$
0.01	1.047728249780797	1.064004191009450
0.1	0.916957760214372	0.960216530265798
0.2	0.863965076614842	0.913343819200726
1	0.771937678354962	0.794022294606946

Pada Tabel 5.7 dapat dilihat bahwa kecepatan aliran fluida pada konsentrasi lemah  $n = 0.5$  lebih besar dibandingkan pada konsentrasi kuat  $n = 0$ . Hal ini dikarenakan konsentrasi lemah pada fluida *micropolar* mengakibatkan aliran fluida *micropolar* yang dihasilkan semakin besar. Sehingga konsentrasi aliran fluida dapat mempengaruhi kecepatan aliran fluida.

Pada Gambar 5.17 nilai awal dari profil mikro rotasi berbeda dengan Gambar 5.15, hal ini dikarenakan perbedaan nilai  $n$  yang diberikan. Pada Gambar 5.17, profil mikro rotasi mengalami penurunan mulai nilai awal sampai  $-h \approx 0$ . Selain itu, semakin besar parameter permeabilitas maka semakin menurun profil mikro rotasi. Pada konsentrasi lemah, profil mikro rotasi lebih besar dibandingkan dengan konsentrasi kuat. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 5.8.

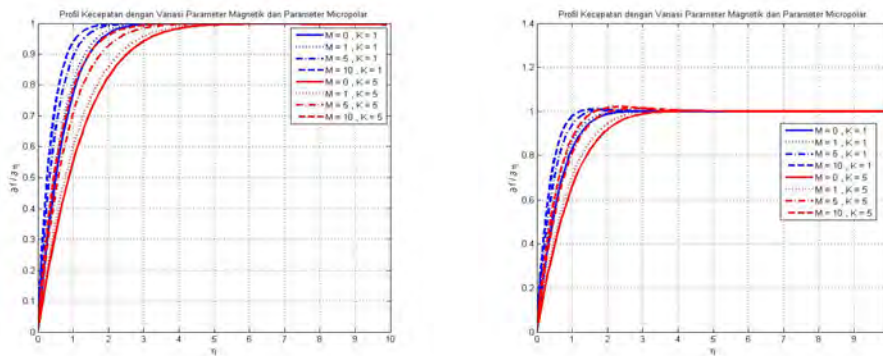


Tabel 5.8: Perbandingan Profil Mikro Rotasi terhadap  $n$  pada saat  $\eta = 1$  dengan variasi Parameter Permeabilitas

$K^*$	$n = 0$	$n = 0.5$
0.01	0.018364559922655	0.709922182894599
0.1	0.054121233016388	0.341250428914561
0.2	0.064280577471025	0.301867217103690
1	0.076799635508301	0.260096541152806

#### 5.4.5 Pengaruh Parameter Magnetik dan Parameter Micropolar

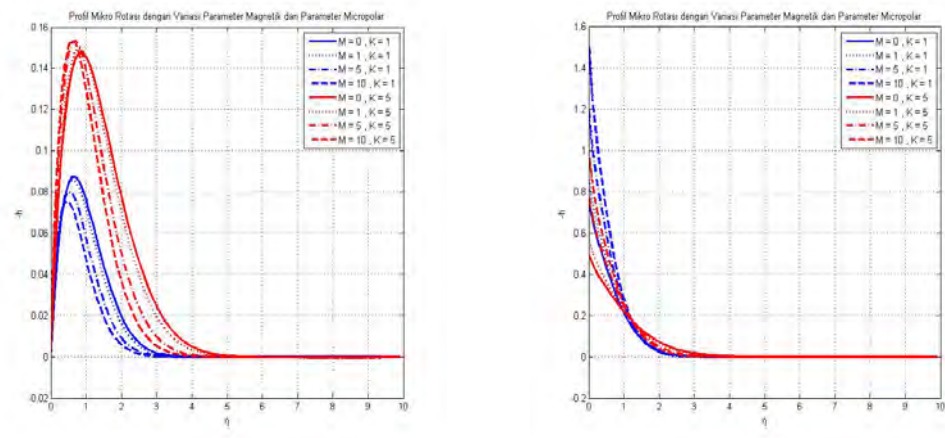
Pada penelitian ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh parameter magnetik dan parameter *micropolar* terhadap kecepatan dan profil mikro rotasi. Pada simulasi ini digunakan variasi parameter magnetik yaitu  $M = 0, 1, 5, 10$  dan variasi parameter *micropolar*,  $K = 1, 5$  dengan  $\phi = 1, t = 6$  pada  $n = 0$  dan  $n = 0.5$ .



Gambar 5.18: Profil kecepatan saat  $n = 0$  dan  $n = 0.5$

Pada Gambar 5.18 merupakan grafik kecepatan pada konsentrasi kuat dan lemah. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa dengan meningkatnya parameter magnetik maka semakin besar nilai kecepatan yang dihasilkan. Akan tetapi, ketika parameter *micropolar* ditingkatkan nilai kecepatan yang dihasilkan semakin menurun. Hal ini tidak mempengaruhi medan magnet karena meskipun pengaruh parameter *micropolar* dapat menyebabkan nilai kecepatan berkurang tetapi nilai kecepatan tetap bertambah ketika nilai parameter magnetik ditingkatkan. Dapat dikatakan bahwa parameter magnetik dan parameter *micropolar* apabila divariasikan secara bersamaan dapat mempengaruhi kecepatan fluida yang dihasilkan. Selain itu, sesuai dengan simulasi yang telah dilakukan bahwa konsentrasi kuat dan lemah juga mempengaruhi kecepatan fluida. Semakin lemah konsentrasi yang diberikan maka semakin besar kecepatan fluida yang dihasilkan.



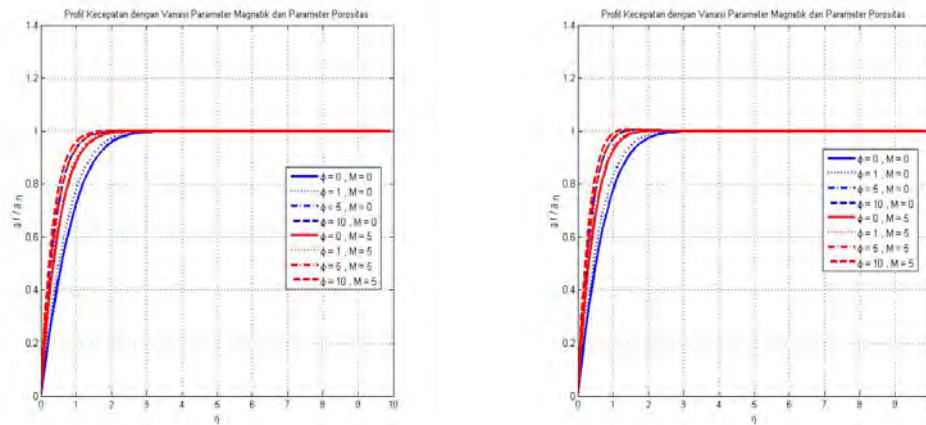


Gambar 5.19: Profil mikro rotasi saat  $n = 0$  dan  $n = 0.5$

Pada Gambar 5.19 merupakan grafik profil mikro rotasi pada konsentrasi kuat dan lemah. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa dengan meningkatnya parameter magnetik maka semakin menurun profil mikro rotasi yang dihasilkan. Akan tetapi, ketika parameter *micropolar* juga ditingkatkan nilai profil mikro rotasi semakin meningkat. Hal ini dapat dilihat bahwa ketika kedua parameter divariasikan akan menghasilkan profil mikro rotasi yang berbeda. Dengan meningkatnya parameter *micropolar* maka profil mikro rotasi semakin besar tetapi karena adanya pengaruh medan magnet maka profil mikro rotasi menurun ketika parameter magnetik meningkat. Profil mikro rotasi pada konsentrasi kuat berbeda dengan pada konsentrasi lemah. Pada konsentrasi lemah, semakin meningkatnya parameter magnetik maka semakin meningkat profil mikro rotasi. Akan tetapi, ketika parameter *micropolar* juga meningkat mengakibatkan profil mikro rotasi menurun. Dengan adanya pengaruh medan magnet, meskipun parameter *micropolar* bertambah ketika parameter magnetik juga bertambah maka profil mikro rotasi juga meningkat. Hal ini dapat dikatakan bahwa variasi parameter magnetik dan parameter *micropolar* mempengaruhi profil mikro rotasi yang dihasilkan. Selain itu, konsentrasi fluida yang diberikan turut berperan pada profil mikro rotasi yang dihasilkan.

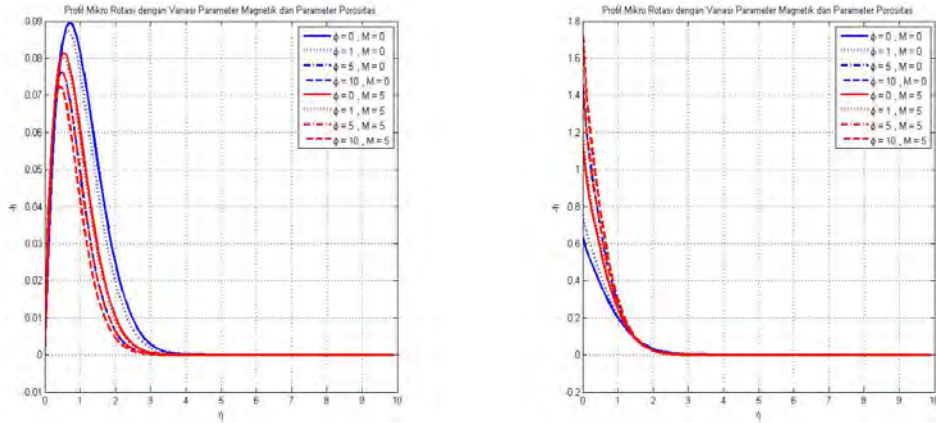
#### 5.4.6 Pengaruh Parameter Porositas dan Parameter Magnetik

Pada penelitian ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh parameter porositas dan parameter magnetik terhadap kecepatan dan profil mikro rotasi. Pada simulasi ini digunakan variasi parameter magnetik yaitu  $M = 0, 5$  dan variasi parameter porositas,  $\phi = 0, 1, 5, 10$  dengan  $K = 1, t = 6$  pada  $n = 0$  dan  $n = 0.5$ .



Gambar 5.20: Profil kecepatan saat  $n = 0$  dan  $n = 0.5$

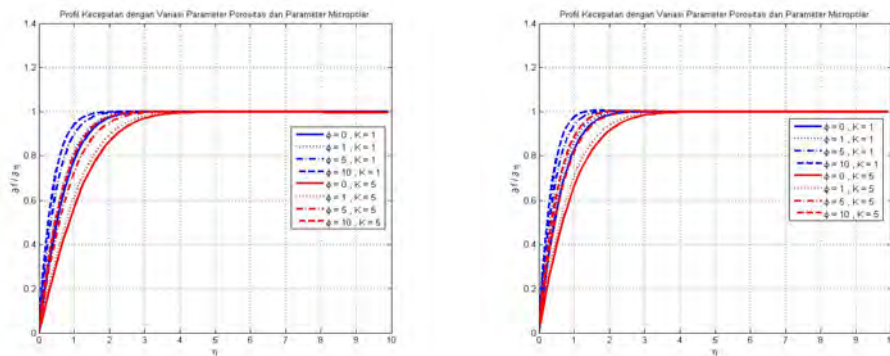
Pada Gambar 5.20 merupakan grafik kecepatan pada konsentrasi kuat dan lemah. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa semakin meningkat parameter porositas maka semakin meningkat kecepatan fluida yang dihasilkan. Ketika diberi pengaruh medan magnet mengakibatkan kecepatan fluida semakin meningkat. Ketika kedua parameter divariasikan secara bersamaan dengan meningkatkan parameter mengakibatkan kecepatan aliran fluida semakin besar. Hal ini dapat dikatakan bahwa pengaruh medan magnet dan porositas dapat meningkatkan kecepatan aliran fluida. Selain itu, ketika konsentrasi lemah kecepatan dari aliran fluida juga semakin meningkat. Sehingga dapat dikatakan bahwa semakin meningkatnya parameter magnetik dan porositas pada konsentrasi lemah maka semakin besar aliran fluida dibandingkan pada konsentrasi kuat. Pada Gambar 5.21 merupakan grafik profil mikro rotasi pada konsentrasi kuat dan lemah. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa semakin besar porositas maka semakin menurun nilai profil mikro rotasi yang dihasilkan. Kemudian ketika diberikan pengaruh medan magnet mengakibatkan semakin menurun profil mikro rotasi yang dihasilkan. Sehingga apabila kedua parameter divariasikan secara bersamaan mengakibatkan profil mikro rotasi semakin menurun. Akan tetapi, ketika pada konsentrasi lemah berlaku sebaliknya. semakin besar medan magnet dan porositas yang diberikan maka semakin bertambah besar profil mikro rotasi yang dihasilkan. Hal ini dapat dikatakan bahwa medan magnet dan porositas saling mempengaruhi sehingga profil mikro rotasi yang dihasilkan semakin besar pada aliran fluida konsentrasi lemah sedangkan akan semakin menurun pada aliran fluida konsentrasi kuat.



Gambar 5.21: Profil mikro rotasi saat  $n = 0$  dan  $n = 0.5$

#### 5.4.7 Pengaruh Parameter Micropolar dan Parameter Porositas

Pada penelitian ini bertujuan untuk mengetahui parameter porositas dan parameter *micropolar* terhadap kecepatan dan profil mikro rotasi. Pada simulasi ini digunakan variasi parameter porositas yaitu  $\phi = 0, 1, 5, 10$  dan variasi parameter *micropolar*,  $K = 1, 5$  dengan  $M = 1, t = 6$  pada  $n = 0$  dan  $n = 0.5$ .

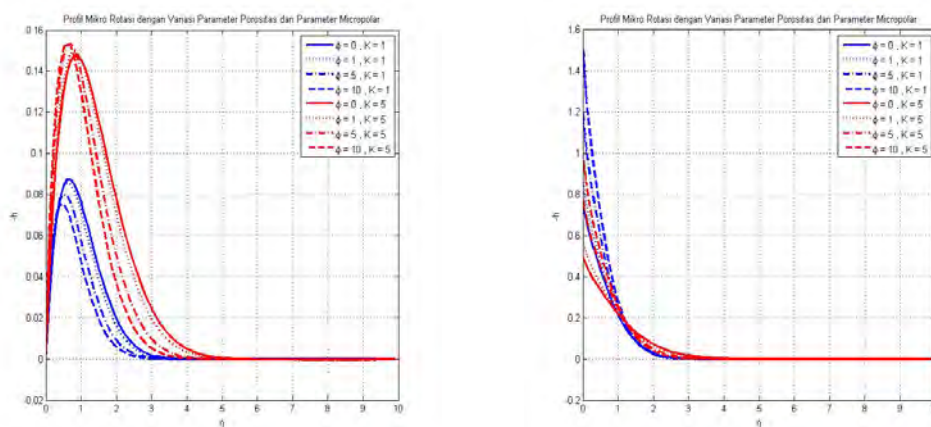


Gambar 5.22: Profil kecepatan saat  $n = 0$  dan  $n = 0.5$

Pada Gambar 5.20 merupakan grafik kecepatan pada konsentrasi kuat dan lemah. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa semakin meningkat parameter porositas maka semakin meningkat kecepatan fluida yang dihasilkan. Akan tetapi, ketika parameter *micropolar* ditingkatkan nilai kecepatan yang dihasilkan semakin menurun. Meskipun pengaruh parameter *micropolar* mengakibatkan nilai kecepatan berkurang tetapi nilai kecepatan tetap bertambah apabila pengaruh porositas semakin ditingkatkan. Dapat dikatakan bahwa parameter porositas dan parameter *micropolar* apabila divariasikan secara bersamaan dapat mempengaruhi kecepatan fluida yang dihasilkan. Selain itu, sesuai dengan simulasi yang telah dilakukan

bahwa konsentrasi dari aliran fluida juga dapat memengaruhi kecepatan fluida. Semakin lemah konsentrasi yang diberikan maka semakin besar pula kecepatan fluida yang dihasilkan.

Pada Gambar 5.23 merupakan grafik profil mikro rotasi pada konsentrasi kuat dan lemah. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa dengan meningkatnya parameter porositas maka semakin menurun profil mikro rotasi yang dihasilkan. Akan tetapi, ketika parameter *micropolar* juga ditingkatkan mengakibatkan nilai profil mikro rotasi semakin meningkat. Hal ini dapat dilihat bahwa ketika kedua parameter divariasikan akan menghasilkan profil mikro rotasi yang berbeda.



Gambar 5.23: Profil mikro rotasi saat  $n = 0$  dan  $n = 0.5$

Dengan meningkatnya parameter *micropolar* maka profil mikro rotasi semakin besar tetapi karena adanya pengaruh porositas maka profil mikro rotasi menurun ketika parameter porositas meningkat. Profil mikro rotasi pada konsentrasi kuat berbeda dengan pada konsentrasi lemah. Pada konsentrasi lemah, semakin meningkatnya parameter porositas maka semakin meningkat profil mikro rotasi. Akan tetapi, ketika parameter *micropolar* juga meningkat mengakibatkan profil mikro rotasi menurun. Dengan adanya pengaruh porositas, meskipun parameter *micropolar* meningkat ketika parameter porositas juga bertambah maka profil mikro rotasi yang dihasilkan semakin besar. Hal ini dapat dikatakan bahwa variasi parameter porositas dan parameter *micropolar* mempengaruhi profil mikro rotasi yang dihasilkan. Selain itu, konsentrasi fluida yang diberikan turut berperan pada profil mikro rotasi yang dihasilkan.



## LAMPIRAN

### Lampiran 1 : Penyelesaian Persamaan Pembangun ke persamaan dimensional

Persamaan Momentum sumbu -  $x$

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu + \kappa) \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \kappa \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} - \sigma B_0^2 \bar{u} - \frac{\mu}{K^*} \bar{u}$$

Ruas kiri :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \left( \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial \left(\frac{at}{U_\infty}\right)} + uU_\infty \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial(xa)} + \frac{vU_\infty}{Re^{1/2}} \frac{\partial(uU_\infty)}{\partial\left(\frac{ay}{Re^{1/2}}\right)} \right) \\ &= \rho \left( \frac{U_\infty^2}{a} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{a} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{a} v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \rho \frac{U_\infty^2}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Ruas kanan :

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + (\mu + \kappa) \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \kappa \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} - \sigma B_0^2 \bar{u} - \frac{\mu}{K^*} \bar{u} \\ &= -\frac{\partial(p\rho U_\infty)}{\partial(xa)} + (\mu + \kappa) \left( \frac{\partial^2(uU_\infty)}{\partial(xa)^2} + \frac{\partial^2(uU_\infty)}{\partial\left(\frac{ay}{Re^{1/2}}\right)^2} \right) + \kappa \frac{\partial\left(\frac{NU_\infty}{Re^{1/2}a}\right)}{\partial\left(\frac{ay}{Re^{1/2}}\right)} \\ &\quad - \sigma B_0^2(u.U_\infty) - \frac{\mu}{K^*}(u.U_\infty) \\ &= -\frac{\rho U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + \kappa) \left( \frac{U_\infty}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{U_\infty}{a^2} Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \kappa \frac{U_\infty Re}{a^2} \frac{\partial N}{\partial y} - U_\infty \sigma B_0^2 u - U_\infty \frac{\mu}{K^*} u \\ &= -\frac{\rho U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + \kappa) \frac{U_\infty}{a^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \kappa \frac{U_\infty Re}{a^2} \frac{\partial N}{\partial y} - U_\infty \sigma B_0^2 u - U_\infty \frac{\mu}{K^*} u \end{aligned}$$

karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka didapatkan

$$\begin{aligned} \rho \frac{U_\infty^2}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\rho U_\infty^2}{a} \frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + \kappa) \frac{U_\infty}{a^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ &\quad + \kappa \frac{U_\infty Re}{a^2} \frac{\partial N}{\partial y} - U_\infty \sigma B_0^2 u - U_\infty \frac{\mu}{K^*} u \end{aligned}$$

kemudian membagi kedua ruas dengan  $\rho \frac{U_\infty^2}{a}$  sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + (\mu + \kappa) \frac{1}{a \rho U_\infty} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{Re}{a \rho U_\infty} \kappa \frac{\partial N}{\partial y} \\ &\quad - \frac{a}{\rho U_\infty} \sigma B_0^2 u - \frac{a}{\rho U_\infty} \frac{\mu}{K^*} u \\ \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(1+K)}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} - (M + \phi) u \end{aligned}$$

Persamaan Momentum sumbu - y :

$$\rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu + \kappa) \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \kappa \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} - \sigma B_0^2 \bar{v} - \frac{\mu}{K^*} \bar{v}$$

Ruas kiri :

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \left( \frac{\partial \left( \frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \right)}{\partial \left( \frac{t a}{U_\infty} \right)} + u U_\infty \frac{\partial \left( \frac{v U_\infty}{\partial Re^{1/2}} \right)}{\partial a x} + \frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \frac{\partial \left( \frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \right)}{\partial \left( \frac{a y}{Re^{1/2}} \right)} \right) \\ &= \rho \left( \frac{U_\infty^2}{a Re^{1/2}} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{U_\infty^2}{a Re^{1/2}} u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{a Re^{1/2}} v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= \rho \frac{U_\infty^2}{a Re^{1/2}} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Ruas kanan :

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + (\mu + \kappa) \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \kappa \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} - \sigma B_0^2 \bar{v} - \frac{\mu}{K^*} \bar{v} \\ &= -\frac{\partial (p \rho U_\infty^2)}{\partial \left( \frac{a y}{Re^{1/2}} \right)} + (\mu + \kappa) \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \right)}{\partial (x a)^2} + \frac{\partial^2 \left( \frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \right)}{\partial \left( \frac{a y}{Re^{1/2}} \right)^2} \right) - \kappa \frac{\partial \left( \frac{Re^{1/2} N U_\infty}{a} \right)}{\partial (x a)} - \sigma B_0^2 \left( \frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \right) \\ &\quad - \frac{\mu}{K^*} \left( \frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \right) \\ &= \frac{\rho U_\infty^2 Re^{1/2}}{a} \frac{\partial p}{\partial t} + (\mu + \kappa) \left( \frac{U_\infty}{a^2 Re^{1/2}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{U_\infty Re^{1/2}}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \kappa \frac{Re^{1/2} U_\infty}{a^2} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{U_\infty}{Re^{1/2}} \sigma B_0^2 v \\ &\quad - \frac{U_\infty}{Re^{1/2}} \frac{\mu}{K^*} v \end{aligned}$$

karena ruas kiri sama dengan ruas kanan maka didapatkan :

$$\rho \frac{U_\infty^2}{a Re^{1/2}} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\rho U_\infty^2 Re^{1/2}}{a} \frac{\partial p}{\partial t} + (\mu + \kappa) \left( \frac{U_\infty}{a^2 Re^{1/2}} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{U_\infty Re^{1/2}}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \kappa \frac{Re^{1/2} U_\infty}{a^2} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{U_\infty}{Re^{1/2}} \sigma B_0^2 v - \frac{U_\infty}{Re^{1/2}} \frac{\mu}{K^*} v$$

kemudian kedua ruas dibagi  $\rho \frac{U_\infty^2}{a Re^{1/2}}$  sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -Re \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{(\mu + \kappa)}{\rho a U_\infty} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\kappa Re}{a \rho U_\infty} \frac{\partial N}{\partial x} \\ &\quad - \frac{a}{\rho U_\infty} \sigma B_0^2 - \frac{a}{\rho U_\infty} \frac{\mu}{K^*} v \\ \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -Re \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{(1 + K)}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1 + K) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - K \frac{\partial N}{\partial x} \\ &\quad - (M + \phi) v \\ \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{(1 + K)}{Re^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{(1 + K)}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{K}{Re} \frac{\partial N}{\partial x} \\ &\quad - \frac{M + \phi}{Re} v \end{aligned}$$

**Persamaan Momentum Anguler**

$$\rho j \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) = \gamma \left( \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \kappa \left( 2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right)$$

Ruas kiri :

$$\begin{aligned} \rho j \left( \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \bar{y}} \right) &= \rho \frac{v}{c} \left( \frac{\partial \left( \frac{Re^{1/2} N U_\infty}{a} \right)}{\partial \left( \frac{at}{U_\infty} \right)} + u U_\infty \frac{\partial \left( \frac{Re^{1/2} N U_\infty}{a} \right)}{\partial (xa)} \right) \\ &\quad + \frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \frac{\partial \left( \frac{Re^{1/2} N U_\infty}{a} \right)}{\partial \left( \frac{ay}{Re^{1/2}} \right)} \\ &= \rho \frac{v}{c} \left( \frac{Re^{1/2} U_\infty^2}{a^2} \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{Re^{1/2} U_\infty^2}{a^2} u \frac{\partial N}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{Re^{1/2} U_\infty^2}{a^2} v \frac{\partial N}{\partial y} \right) \\ &= \rho \frac{v}{c} \frac{Re^{1/2} U_\infty^2}{a^2} \left( \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) \end{aligned}$$



Ruas kanan :

$$\begin{aligned}
\gamma \left( \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \kappa \left( 2\bar{N} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) &= \left( \mu + \frac{\kappa}{2} \right) \frac{v}{c} \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{Re^{1/2} N U_\infty}{a} \right)}{\partial (xa)^2} + \frac{\partial^2 \left( \frac{Re^{1/2} N U_\infty^2}{a} \right)}{\partial \left( \frac{ay}{Re^{1/2}} \right)^2} \right) \\
&- \kappa \left( 2 \left( \frac{Re^{1/2} N U_\infty}{a} \right) + \frac{\partial (u U_\infty)}{\partial \left( \frac{ay}{Re^{1/2}} \right)} - \frac{\partial \left( \frac{v U_\infty}{Re^{1/2}} \right)}{\partial (xa)} \right) \\
&= \left( \mu + \frac{\kappa}{2} \right) \frac{v}{c} \left( \frac{Re^{1/2} U_\infty}{a^3} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{Re^{1/2} U_\infty}{a^3} Re \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \\
&- \kappa \left( \frac{Re^{1/2} U_\infty}{a^3} 2N + \frac{Re^{1/2} U_\infty}{a^3} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{Re^{1/2} U_\infty}{a^3} \frac{\partial v}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

karena ruas kiri sama dengan ruas kanan sehingga :

$$\begin{aligned}
\rho \frac{v Re^{1/2} U_\infty^2}{c a^2} \left( \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= \left( \mu + \frac{\kappa}{2} \right) \frac{v}{c} \left( \frac{Re^{1/2} U_\infty}{a^3} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{Re^{1/2} U_\infty}{a^3} Re \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) \\
&- \kappa \left( \frac{Re^{1/2} U_\infty}{a^3} 2N + \frac{Re^{1/2} U_\infty}{a^3} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{Re^{1/2} U_\infty}{a^3} \frac{\partial v}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

kemudian kedua ruas dibagi  $\rho \frac{v Re^{1/2} U_\infty^2}{c a^2}$  sehingga :

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= \left( \mu + \frac{\kappa}{2} \right) \frac{1}{\rho a U_\infty} \left( \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + Re \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - \kappa \frac{ac}{U_\infty \rho v} \left( 2N + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
\left( \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) &= \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \left( \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) - K \left( 2N + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

## Lampiran 2: *Free stream*

Koordinat spherical dari free stream :

$$U_r = -U_\infty \cos\theta \quad (6.1)$$

$$U_\theta = U_\infty \sin\theta \quad (6.2)$$

$$U_\Phi = 0 \quad (6.3)$$

Streamline dari kecepatan dituliskan (John, 2010)

$$U = \nabla\varphi = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^3} e_r + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^3} e_\theta + 0e_\Phi \quad (6.4)$$

substitusi persamaan (6.1)-(6.3) ke (6.4) sehingga

$$U_r = -U_\infty \cos\theta + \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r^3} = - \left( U_\infty - \frac{\mu}{2\pi r^3} \right) \cos\theta \quad (6.5)$$

$$U_\theta = U_\infty \sin\theta + \frac{\mu}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^3} = \left( U_\infty + \frac{\mu}{4\pi r^3} \right) \sin\theta \quad (6.6)$$

$$U_\Phi = 0 \quad (6.7)$$

untuk menentukan titik stagnasi pada aliran, diberikan  $U_r = U_\theta = 0$  pada Persamaan. Dari Persamaan (6.6)  $U_\theta = 0$  diberikan  $\sin\theta = 0$ , dimana titik stagnasi berada pada  $\theta = 0$  dan  $\pi$ . Dari Persamaan(6.5) dengan  $U_r = 0$  dapat diperoleh

$$U_\infty - \frac{\mu}{2\pi R^3} = 0 \quad (6.8)$$

dimana  $r = R$  adalah koordinat jari-jari dari titik stagnasi. Untuk menyelesaikan Persamaan (6.8) maka dapat diperoleh nilai  $R$

$$R = \left( \frac{\mu}{2\pi U_\infty} \right)^{1/3} \quad (6.9)$$

Substitusi nilai  $R$  ke Persamaan (6.5), sehingga

$$\begin{aligned} U_r &= - \left( U_\infty - \frac{\mu}{2\pi R^3} \right) \cos\theta = - \left[ U_\infty - \frac{\mu}{2\pi} \left( \frac{2\pi U_\infty}{\mu} \right) \right] \cos\theta \\ &= -(U_\infty - U_\infty) \cos\theta = 0 \end{aligned}$$

Dengan kata lain,  $U_r = 0$  ketika  $r = R$  untuk semua nilai dari  $\theta$  dan  $\Phi$ . Daerah kecepatan yang diberikan pada Persamaan (6.5)-(6.7) adalah aliran *incompressible* yang melewati bola dari jari-jari  $R$ . Permukaan bola, dimana  $r = R$ , kecepatan

tangensial didefinisikan pada Persamaan (6.6) sebagai berikut :

$$U_{\theta} = \left( U_{\infty} + \frac{\mu}{4\pi R^3} \right) \sin\theta \quad (6.10)$$

dari Persamaan (6.9) yaitu

$$\mu = 2\pi R^3 U_{\infty} \quad (6.11)$$

Substitusi Persamaan (6.11) ke (6.10) sehingga

$$U_{\theta} = \left( U_{\infty} + \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi R^3 U_{\infty}}{R^3} \right) \sin\theta$$

atau

$$U_{\theta} = \frac{3}{2} U_{\infty} \sin\theta \quad (6.12)$$

### Lampiran 3: Persamaan Similiaritas

Berdasarkan persamaan tak berdimensi yaitu pada Persamaan (4.46). (4.51), dan (4.52) dilakukan transformasi ke dalam bentuk persamaan similiaritas dengan menggunakan fungsi alir sesuai dengan Persamaan (4.53) yaitu:

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ dan } v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

dengan variabel similiaritas yang telah ditunjukkan pada Persamaan (4.56) yaitu:

$$\psi = t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t) N = \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) h(x, \eta, t) \eta = \frac{y}{t^{1/2}}$$

sehingga didapatkan

#### Persamaan Kontinuitas

$$\begin{aligned} \frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( r \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( r \left( -\frac{1}{r} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

#### Persamaan Momentum

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + (1 + K) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K \frac{\partial N}{\partial y} + (M + \phi)(u_e - u)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \\ u_e \frac{du_e}{dx} + (1 + K) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + K \frac{\partial N}{\partial y} + (M + \phi) \left( u_e - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{1}{r^3} \frac{dr}{dx} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= u_e \frac{du_e}{dx} + (1+K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + K \frac{\partial N}{\partial y} \\ &+ (M + \phi) \left( u_e - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{t^{1/2}} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial(t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t))}{\partial \eta} \frac{1}{t^{1/2}} \\ &= u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (t^{1/2} u_e(x) r(x) f(x, \eta, t)) \\ &= t^{1/2} \frac{du_e}{dx} r(x) f(x, \eta, t) + t^{1/2} u_e(x) \frac{dr}{dx} f(x, \eta, t) + t^{1/2} u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= \frac{u_e(x) r(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u_e(x) r(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{u_e(x) r(x)}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &= \frac{u_e(x) r(x)}{t} \frac{\partial^3 f(x, \eta, t)}{\partial \eta^3} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( u_e(x) r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{du_e}{dx} r(x) \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) \frac{dr}{dx} \frac{\partial f(x, \eta, t)}{\partial \eta} + u_e(x) r(x) \frac{\partial^2 f(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left( u_e(x)r(x) \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( u_e(x)r(x) \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( u_e(x)r(x) \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\
&= u_e(x) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \left( -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) + u_e(x)r(x) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \\
&= -\frac{u_e(x)r(x)}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e(x)r(x) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta}
\end{aligned}$$

untuk selanjutnya akan dituliskan  $u_e(x) = u_e, r(x) = r$  dan  $f(x, \eta, t) = f$  sehingga persamaan similiaritas untuk momentum yaitu :

Ruas kiri :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{1}{r^3} \frac{dr}{dx} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \\
&= \frac{1}{r} \left( -\frac{u_e r}{t} \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} \right) + \frac{1}{r^2} \left( u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left( \frac{du_e}{dr} r \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e \frac{dr}{dx} \frac{\partial f}{\partial \eta} + u_e r \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} \right) \\
&\quad - \frac{1}{r^3} \frac{dr}{dx} \left( u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left( t^{1/2} \frac{du_e}{dr} r f + t^{1/2} u_e \frac{dr}{dx} f + t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left( \frac{u_e r}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \\
&= -\frac{u_e \eta}{t} \frac{\partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{du_e}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{u_e^2}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} u_e^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
&\quad - \frac{du_e}{dx} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e - \frac{u_e^2 f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Ruas kanan :

$$\begin{aligned}
&u_e \frac{du_e}{dx} + (1 + K) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + K \frac{\partial N}{\partial y} + (M + \phi) \left( u_e - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \\
&= u_e \frac{du_e}{dx} + (1 + K) \frac{1}{r} \left( \frac{u_e r}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \right) + K \left( \frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + (M + \phi) \left( u_e - \frac{1}{r} u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\
&= u_e \frac{du_e}{dx} + (1 + K) \frac{u_e}{t} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + K \frac{u_e}{t} \frac{\partial h}{\partial \eta} + (M + \phi) u_e \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

karena ruas kiri sama dengan ruas kanan sehingga :

$$\begin{aligned}
& - \frac{u_e \eta \partial^2 f}{t \cdot 2 \partial \eta^2} + u_e \frac{\partial^2}{\partial t \partial \eta} + u_e \frac{du_e}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{u_e^2 dr}{r dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + u_e^2 \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} u_e^2 \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
& - \frac{du_e}{dx} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} u_e - \frac{u_e^2 f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
& = u_e \frac{du_e}{dx} + (1 + K) \frac{u_e \partial^3 f}{t \partial \eta^3} + K \frac{u_e \partial h}{t \partial \eta} + (M + \phi) u_e \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

kemudian kedua ruas dibagi  $\frac{u_e}{t}$  sehingga :

$$\begin{aligned}
& - \frac{\eta \partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + t \frac{du_e}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{u_e t dr}{r dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + t u_e \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{u_e t dr}{r dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - t f \frac{du_e}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \\
& - \frac{u_e t f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - u_e t \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = t \frac{du_e}{dx} + (1 + K) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + K \frac{\partial h}{\partial \eta} + (M + \phi) t \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \\
& (1 + K) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta \partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + K \frac{\partial h}{\partial \eta} + (M + \phi) t \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} + t \frac{du_e}{dx} \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] \right) \\
& = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e t \left[ \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] \\
& (1 + K) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta \partial^2 f}{2 \partial \eta^2} + K \frac{\partial h}{\partial \eta} + (M + \phi) t \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} + t \frac{du_e}{dx} \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] \right) \\
& = t \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \eta} + u_e t \left[ \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{1}{r} \frac{dr}{dx} f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right]
\end{aligned}$$

### Persamaan Momentum Angular

$$\left( \frac{\partial N}{\partial t} + u \frac{\partial N}{\partial x} + v \frac{\partial N}{\partial y} \right) = \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - K \left( 2N + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} = \left( 1 + \frac{K}{2} \right) \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - K \left( 2N + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)$$

dengan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial y} & = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) h(x, \eta, t) \right) \\
& = \frac{1}{t} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) h(x, \eta, t) \right) \\
&= \frac{1}{t^{1/2}} \frac{du_e(x)}{dx} h(x, \eta, t) + \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial x} \\
\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) h(x, \eta, t) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) h(x, \eta, t) \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) h(x, \eta, t) \right) \\
&= \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta} \left( -\frac{1}{2t} \right) + \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial t} - \frac{1}{2t^{3/2}} u_e(x) h(x, \eta, t) \\
&= -\frac{\eta}{2} \frac{1}{t^{3/2}} u_e(x) \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial t} - \frac{1}{2t^{3/2}} u_e(x) h(x, \eta, t) \\
\frac{\partial^2 N}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial N}{\partial y} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{t} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial \eta} \right) \\
&= \frac{u_e(x)}{t^{3/2}} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2}
\end{aligned}$$

Ruas kiri :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} &= -\frac{\eta}{2} \frac{1}{t^{3/2}} u_e(x) \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial t} - \frac{1}{2t^{3/2}} u_e(x) h(x, \eta, t) \\
&\quad + \frac{1}{r} \left( u_e r \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \left( \frac{1}{t^{1/2}} \frac{du_e}{dx} h + \frac{1}{t^{1/2}} u_e \frac{\partial h}{\partial x} \right) \\
&\quad - \frac{1}{r} \left( t^{1/2} \frac{du_e}{dx} r f + t^{1/2} u_e \frac{dr}{dx} f + t^{1/2} u_e r \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left( \frac{1}{t} u_e \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \\
&= -\frac{\eta}{2} \frac{1}{t^{3/2}} u_e(x) \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial t} \\
&\quad - \frac{1}{2t^{3/2}} u_e(x) h(x, \eta, t) + \frac{u_e h}{t^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{du_e}{dx} \\
&\quad + \frac{u_e^2}{t^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} \left( -t^{1/2} \frac{du_e}{dx} f - \frac{t^{1/2} u_e f}{r} \frac{dr}{dx} f - t^{1/2} u_e \frac{\partial f}{\partial x} \right) \\
&\quad \left( \frac{1}{t} u_e \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \\
&= -\frac{\eta}{2} \frac{1}{t^{3/2}} u_e(x) \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial t} \\
&\quad - \frac{1}{2t^{3/2}} u_e(x) h(x, \eta, t) + \frac{u_e h}{t^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{du_e}{dx} + \frac{u_e^2}{t^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} \\
&\quad - \frac{u_e f}{t^{1/2}} \frac{du_e}{dx} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{u_e^2 f}{t^{1/2} r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{u_e^2}{t^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta}
\end{aligned}$$



Ruas kanan :

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} - K \left(2N + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) &= \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{u_e}{t^{3/2}} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} - K \left(2 \frac{u_e h}{t^{1/2}} + \frac{1}{r} \frac{u_e r}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \\
&= \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{u_e}{t^{3/2}} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} - K \left(2 \frac{u_e h}{t^{1/2}} + \frac{u_e}{t^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) \\
&= \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{u_e}{t^{3/2}} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} - K \frac{u_e}{t^{1/2}} \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)
\end{aligned}$$

karena ruas kiri sama dengan ruas kanan sehingga

$$\begin{aligned}
-\frac{\eta}{2} \frac{1}{t^{3/2}} u_e(x) \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{t^{1/2}} u_e(x) \frac{\partial h(x, \eta, t)}{\partial t} - \frac{1}{2t^{3/2}} u_e(x) h(x, \eta, t) + \frac{u_e h}{t^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{du_e}{dx} \\
+ \frac{u_e^2}{t^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{u_e f}{t^{1/2}} \frac{du_e}{dx} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{u_e^2 f}{t^{1/2} r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{u_e^2}{t^{1/2}} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta} \\
= \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{u_e}{t^{3/2}} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} - K \frac{u_e}{t^{1/2}} \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)
\end{aligned}$$

kemudian kedua ruas dibagi  $\frac{u_e}{t^{3/2}}$  maka didapat :

$$\begin{aligned}
t \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{h}{2} + th \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{du_e}{dx} + u_e t \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial h}{\partial x} - t f \frac{du_e}{dx} \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{t f}{r} \frac{dr}{dx} \frac{\partial h}{\partial \eta} - u_e t \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial \eta} \\
= \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} - K \left(2h + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right) + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta}
\end{aligned}$$

#### Lampiran 4: Penurunan Kondisi Awal

Bentuk persamaan untuk menentukan kondisi awal yaitu

$$(1 + K)f''' + \frac{\eta}{2}f'' + (M + \phi)t(1 - u) + \frac{3}{2}t[1 - (f')^2 + ff''] = t\frac{\partial f'}{\partial t}$$
$$(1 + \frac{K}{2})h'' + \frac{\eta}{2}h' + \frac{h}{2} + \frac{3}{2}t[fh' - hf'] = t\frac{\partial h}{\partial t} + tK(2h + f'')$$

dengan mensubstitusikan  $t = 0$  maka didapatkan persamaan

$$(1 + K)f''' + \frac{\eta}{2}f'' + Kh' = 0$$
$$(1 + \frac{K}{2})h'' + \frac{\eta}{2}h' + \frac{h}{2} = 0$$

untuk mendapatkan persamaan  $f$  digunakan persamaan

$$(1 + K)f''' + \frac{\eta}{2}f'' + Kh' = 0$$

diubah dulu ke dalam bentuk persamaan diferensial tingkat satu, dengan memisalkan  $f'' = z$  dan untuk  $h = -nf''$  sehingga persamaan menjadi

$$(1 + K)f''' + \frac{\eta}{2}f'' - Knf''' = 0$$
$$(1 + K)z' + \frac{\eta}{2}z - Knz' = 0$$
$$(1 + K[1 - n])z' + \frac{\eta}{2}z = 0$$

dengan  $z' = dz/d\eta$  maka dapat dituliskan

$$(1 + K[1 - n])dz + \frac{\eta}{2}z d\eta = 0 \quad (6.13)$$

kedua ruas dibagi dengan  $z$  sehingga didapatkan

$$\frac{(1 + K[1 - n])}{z}dz + \frac{\eta}{2}d\eta = 0$$

kedua ruas diintegalkan didapatkan

$$(1 + K[1 - n])\ln z + \frac{\eta^2}{4} = c_1$$
$$(1 + K[1 - n])\ln z = c_1 - \frac{\eta^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \ln z &= \frac{c_1}{(1 + K[1 - n])} - \frac{\eta^2}{4(1 + K[1 - n])} \\ z &= e^{\frac{c_1}{(1 + K[1 - n])} - \frac{\eta^2}{4(1 + K[1 - n])}} \\ z &= e^{\frac{c_1}{(1 + K[1 - n])}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1 + K[1 - n])}} \end{aligned}$$

karena  $z = f''$  maka

$$\begin{aligned} f'' &= e^{\frac{c_1}{(1 + K[1 - n])}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1 + K[1 - n])}} \\ f' &= \int e^{\frac{c_1}{(1 + K[1 - n])}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1 + K[1 - n])}} d\eta \\ f' &= e^{\frac{c_1}{(1 + K[1 - n])}} \int e^{-\frac{\eta^2}{4(1 + K[1 - n])}} d\eta \end{aligned}$$

dengan menggunakan rumus integral eksponensial yang melibatkan fungsi *error* (erf) yaitu:

$$\int e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{4c}} \operatorname{erf}(\sqrt{cx})$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} f' &= e^{\frac{c_1}{(1 + K[1 - n])}} \int e^{-\frac{\eta^2}{4(1 + K[1 - n])}} d\eta \\ &= e^{\frac{c_1}{(1 + K[1 - n])}} \sqrt{\pi(1 + K[1 - n])} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{1 + K[1 - n]}}\right) + c_2 \end{aligned}$$

dengan substitusi kondisi batas pada Persamaan didapatkan: saat  $\eta = 0$  dengan  $f' = 0$

$$\begin{aligned} e^{\frac{c_1}{(1 + K[1 - n])}} \sqrt{\pi(1 + K[1 - n])} \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{1 + K[1 - n]}}\right) + c_2 &= 0 \\ e^{\frac{c_1}{(1 + K[1 - n])}} \sqrt{\pi(1 + K[1 - n])} \operatorname{erf}(0) + c_2 &= 0 \\ c_2 &= 0 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh nilai  $f'$  dengan substitusi nilai  $c_2 = 0$

$$f' = e^{\frac{c_1}{(1+K[1-n])}} \sqrt{\pi(1+K[1-n])} \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2\sqrt{1+K[1-n]}} \right) + c_2$$

$$f' = e^{\frac{c_1}{(1+K[1-n])}} \sqrt{\pi(1+K[1-n])} \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2\sqrt{1+K[1-n]}} \right)$$

kemudian dengan menggunakan kondisi batas  $f' = 1$  saat  $\eta = \infty$

$$e^{\frac{c_1}{(1+K[1-n])}} \sqrt{\pi(1+K[1-n])} \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2\sqrt{1+K[1-n]}} \right) = f'$$

$$e^{\frac{c_1}{(1+K[1-n])}} \sqrt{\pi(1+K[1-n])} \operatorname{erf}(\infty) = 1$$

$$e^{\frac{c_1}{(1+K[1-n])}} \sqrt{\pi(1+K[1-n])} = 1$$

$$e^{\frac{c_1}{(1+K[1-n])}} = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K[1-n])}}$$

sehingga

$$f' = \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2\sqrt{1+K[1-n]}} \right) \quad (6.14)$$

$$f'' = \frac{1}{\sqrt{\pi(1+K[1-n])}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K[1-n])}} \quad (6.15)$$

dan dengan mengintegalkan  $f'$  didapatkan

$$f = \eta \operatorname{erf} \left( \frac{\eta}{2\sqrt{1+K[1-n]}} \right) + 2\sqrt{\frac{1+K[1-n]}{\pi}} \left( e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K[1-n])}} - 1 \right) \quad (6.16)$$

Selanjutnya dilakukan penyelesaian untuk mendapatkan  $h$  yaitu

$$h = -nf'' = -\frac{n}{\sqrt{\pi(1+K[1-n])}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1+K[1-n])}} \quad (6.17)$$

$$h' = -nf''' = \frac{n\eta}{2(1 + K[1 - n])\sqrt{\pi(1 + K[1 - n])}} e^{-\frac{\eta^2}{4(1 + K[1 - n])}} \quad (6.18)$$

## Lampiran 5: Diskritisasi Model

Berdasarkan pemisalan fungsi dalam bentuk orde pertama yaitu:

$$f' = u$$

$$u' = v$$

$$h' = p$$

$$(1 + K)v' + \frac{\eta}{2}v + \frac{3}{2}t[1 - u^2 + fv] + Kp + (M + \phi)t(1 - u) = t\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\left(1 + \frac{K}{2}\right)p' + \frac{\eta}{2}p + \frac{h}{2} + \frac{3}{2}t[fp - pu] = t\frac{\partial h}{\partial t} + tK(2h + u)$$

dapat didiskritisasi menjadi

1

$$\frac{1}{l_j}(f_j^n - f_{j-1}^n) = u_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j}(f_j^n - f_{j-1}^n) = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n)$$

2

$$\frac{1}{l_j}(u_j^n - u_{j-1}^n) = v_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j}(u_j^n - u_{j-1}^n) = \frac{1}{2}(v_j^n + v_{j-1}^n)$$

3

$$\frac{1}{l_j}(h_j^n - h_{j-1}^n) = p_{j-\frac{1}{2}}^n \Rightarrow \frac{1}{l_j}(h_j^n - h_{j-1}^n) = \frac{1}{2}(p_j^n + p_{j-1}^n)$$

4

$$\frac{1}{2}[(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] = t^{n-\frac{1}{2}} \left( \frac{u_{j-\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right)$$

dengan

$$(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^n = [(1 + K)v' + \frac{\eta}{2}v + \frac{3}{2}t[1 - u^2 + fv] + Kp + (M + \phi)t(1 - u)]_{j-\frac{1}{2}}^n$$

$$= (1 + K) \left( \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^n + Kp_{j-\frac{1}{2}}^n + (M + \phi)t^n(1 - u_{j-\frac{1}{2}}^n)$$

$$+ \frac{3}{2}t^n[1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^n v_{j-\frac{1}{2}}^n]$$

$$\begin{aligned}
(L_1)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= [(1+K)v' + \frac{\eta}{2}v + \frac{3}{2}t[1-u^2+fv] + Kp + (M+\phi)t(1-u)]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&= (1+K) \left( \frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + \frac{\eta}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + Kp_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + (M+\phi)t^{n-1}(1-u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\
&\quad + \frac{3}{2}t^{n-1}[1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}]
\end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} [(1+K) \left( \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^n + Kp_{j-\frac{1}{2}}^n + (M+\phi)t^n(1-u_{j-\frac{1}{2}}^n) \\
&+ \frac{3}{2}t^n[1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^nv_{j-\frac{1}{2}}^n] + \frac{3}{2}t^{n-1}[1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}]] \\
&= \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}u_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{t^{n-1}}{k^n}u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&\Leftrightarrow (1+K) \left( \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{\eta}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^n + Kp_{j-\frac{1}{2}}^n + (M+\phi)t^n(1-u_{j-\frac{1}{2}}^n) \\
&+ \frac{3}{2}t^n[1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^nv_{j-\frac{1}{2}}^n] - 2\frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n}u_{j-\frac{1}{2}}^n = (1+K) \left( \frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) \\
&\quad + \frac{\eta}{2}v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + Kp_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + (M+\phi)t^{n-1}(1-u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\
&\quad + \frac{3}{2}t^{n-1}[1 - (u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})^2 + f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] - 2\frac{t^{n-1}}{k^n}u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

5

$$\frac{1}{2}[(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n + (L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}] = t^{n-\frac{1}{2}} \left( \frac{h_{j-\frac{1}{2}}^n - h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{k^n} \right)$$

dengan

$$\begin{aligned}
(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^n &= [(1 + \frac{K}{2})p' + \frac{\eta}{2}p + \frac{h}{2} + \frac{3}{2}\lambda t[fp - pu] - tK(2h + u)]_{j-\frac{1}{2}}^n \\
&= (1 + \frac{K}{2}) \frac{p_j^n - p_{j-1}^n}{l_j} + \frac{\eta}{2}p_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{2}h_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2}t^n(f_{j-\frac{1}{2}}^np_{j-\frac{1}{2}}^n - p_{j-\frac{1}{2}}^nu_{j-\frac{1}{2}}^n) \\
&\quad - t^n K(2h_{j-\frac{1}{2}}^n + u_{j-\frac{1}{2}}^n) \\
(L_2)_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} &= [(1 + \frac{K}{2})p' + \frac{\eta}{2}p + \frac{h}{2} + \frac{3}{2}t[fp - pu] - tK(2h + u)]_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
&= (1 + \frac{K}{2}) \frac{p_j^{n-1} - p_{j-1}^{n-1}}{l_j} + \frac{\eta}{2}p_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{1}{2}h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{3}{2}t^{n-1}(f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}p_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - p_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\
&\quad - t^{n-1}K(2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1})
\end{aligned}$$

sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left( \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{p_j^n - p_{j-1}^n}{l_j} + \frac{\eta}{2} p_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2} t^n (f_{j-\frac{1}{2}}^n p_{j-\frac{1}{2}}^n - p_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n) \right. \\
& \quad \left. - t^n K (2h_{j-\frac{1}{2}}^n + u_{j-\frac{1}{2}}^n) \right) \\
& + \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{p_j^{n-1} - p_{j-1}^{n-1}}{l_j} + \frac{\eta}{2} p_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{3}{2} t^{n-1} (f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} p_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - p_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\
& - t^{n-1} K (2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) = \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n - \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} \\
\Leftrightarrow & \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{p_j^n - p_{j-1}^n}{l_j} + \frac{\eta}{2} p_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{3}{2} t^n (f_{j-\frac{1}{2}}^n p_{j-\frac{1}{2}}^n - p_{j-\frac{1}{2}}^n u_{j-\frac{1}{2}}^n) \\
& \quad - t^n K (2h_{j-\frac{1}{2}}^n + u_{j-\frac{1}{2}}^n) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^n \\
& = \left(1 + \frac{K}{2}\right) \frac{p_j^{n-1} - p_{j-1}^{n-1}}{l_j} + \frac{\eta}{2} p_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{1}{2} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{3}{2} t^{n-1} (f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} p_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} - p_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) \\
& \quad - t^{n-1} K (2h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}
\end{aligned}$$

Setelah dilakukan diskritisasi selanjutnya dilakukan linierisasi dengan metode Newton sebagai berikut:

1

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l_j} (f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{1}{l_j} (\delta f_j - \delta f_{j-1}) &= \frac{1}{2} (u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{1}{2} (\delta u_j + \delta u_{j-1}) \\
(\delta f_j - \delta f_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta u_j + \delta u_{j-1}) &= -(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (u_j^n + u_{j-1}^n)
\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l_j} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{l_j} (\delta u_j - \delta u_{j-1}) &= \frac{1}{2} (v_j^n + v_{j-1}^n) + \frac{1}{2} (\delta v_j + \delta v_{j-1}) \\
(\delta u_j - \delta u_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta v_j + \delta v_{j-1}) &= -(u_j^n - u_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (v_j^n + v_{j-1}^n)
\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
\frac{1}{l_j} (h_j^n - h_{j-1}^n) + \frac{1}{l_j} (\delta h_j - \delta h_{j-1}) &= \frac{1}{2} (p_j^n + p_{j-1}^n) + \frac{1}{2} (\delta p_j + \delta p_{j-1}) \\
(\delta h_j - \delta h_{j-1}) - \frac{l_j}{2} (\delta p_j + \delta p_{j-1}) &= -(h_j^n - h_{j-1}^n) + \frac{l_j}{2} (p_j^n + p_{j-1}^n)
\end{aligned}$$



4

$$\begin{aligned}
& (1 + K) \left[ \left( \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{l_j} \right) + \left( \frac{\delta v_j^n + \delta v_{j-1}^n}{l_j} \right) \right] + K \left( p_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta p_j^n + \delta p_{j-1}^n}{2} \right) \\
& + (M + \phi) t^n \left( 1 - \left( u_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta u_j^n + \delta u_{j-1}^n}{2} \right) \right) \\
& + \frac{3}{2} t^n \left[ 1 - \left( u_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta u_j^n + \delta u_{j-1}^n}{2} \right) \right]^2 \\
& + \left( f_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta f_j^n + \delta f_{j-1}^n}{2} \right) \left( v_{j-\frac{1}{2}} + \frac{\delta v_j^n + \delta v_{j-1}^n}{2} \right) - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left( u_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta u_j^n + \delta u_{j-1}^n}{2} \right) \\
& = R_1
\end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned}
& (1 + \frac{K}{2}) \left( p_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta p_j^n - \delta p_{j-1}^n}{l_j} \right) + \frac{1}{2} \left( h_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta h_j^n + h_{j-1}^n}{2} \right) \\
& + \frac{3}{2} t^n \left[ \left( f_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta f_j^n + \delta f_{j-1}^n}{2} \right) \left( p_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta p_j^n + \delta p_{j-1}^n}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left( h_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta h_j^n + \delta h_{j-1}^n}{2} \right) \left( u_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta u_j^n + \delta u_{j-1}^n}{2} \right) \right] \\
& - t^n K \left( 2 \left( h_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta h_j^n + \delta h_{j-1}^n}{2} \right) + \left( v_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta v_j^n + \delta v_{j-1}^n}{2} \right) \right) \\
& - 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left( h_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\delta h_j^n + \delta h_{j-1}^n}{2} \right) \\
& = R_2
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
R_1 & = -(1 + K) \left[ \left( \frac{v_j^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) + \left( \frac{\delta v_j^{n-1} + \delta v_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) \right] - K \left( p_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{\delta p_j^{n-1} + \delta p_{j-1}^{n-1}}{2} \right) \\
& - (M + \phi) t^n \left( 1 - \left( u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{\delta u_j^{n-1} + \delta u_{j-1}^{n-1}}{2} \right) \right) \\
& - \frac{3}{2} t^n \left[ 1 - \left( u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{\delta u_j^{n-1} + \delta u_{j-1}^{n-1}}{2} \right) \right]^2 \\
& + \left( f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{\delta f_j^{n-1} + \delta f_{j-1}^{n-1}}{2} \right) \left( v_{j-\frac{1}{2}} + \frac{\delta v_j^{n-1} + \delta v_{j-1}^{n-1}}{2} \right) \\
& + 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^{n-1}} \left( u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{\delta u_j^{n-1} + \delta u_{j-1}^{n-1}}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2 &= -(1 + \frac{K}{2}) \left( p_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{\delta p_j^{n-1} - \delta p_{j-1}^{n-1}}{l_j} \right) - \frac{1}{2} \left( h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{\delta h_j^{n-1} + h_{j-1}^{n-1}}{2} \right) \\
&- \frac{3}{2} t^{n-1} \left[ \left( f_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{\delta f_j^{n-1} + \delta f_{j-1}^{n-1}}{2} \right) \left( p_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{\delta p_j^{n-1} + \delta p_{j-1}^{n-1}}{2} \right) \right. \\
&- \left. \left( h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{\delta h_j^{n-1} + \delta h_{j-1}^{n-1}}{2} \right) \left( u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{\delta u_j^{n-1} + \delta u_{j-1}^{n-1}}{2} \right) \right] \\
&+ t^{n-1} K \left( 2 \left( h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{\delta h_j^{n-1} + \delta h_{j-1}^{n-1}}{2} \right) + \left( v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{\delta v_j^{n-1} + \delta v_{j-1}^{n-1}}{2} \right) \right) \\
&+ 2 \frac{t^{n-\frac{1}{2}}}{k^n} \left( h_{j-\frac{1}{2}}^{n-1} + \frac{\delta h_j^{n-1} + \delta h_{j-1}^{n-1}}{2} \right)
\end{aligned}$$

## Lampiran 6 : Matlab Source Code

Berikut ini adalah *M-file* yang digunakan untuk mendapatkan hasil dari perhitungan numerik.

```
1 clear all
2 clc
3 close all
4 format long
5 np = 100;
6 nt = 20;
7 nt1 = 6;
8 lambda = 1;
9 K = 1;
10 na = 0;
11 deleta = 0.1;
12 delt = 0.3;
13 Po = 1;
14 M = 1;
15
16 eta(1) = 0;
17 etac(1) = 0;
18 for j = 2:np
19     eta(j) = eta(j-1) + deleta;
20     etac(j) = 0.5*(eta(j) + eta(j-1));
21 end
22
23
24 for n = 1:nt
25     if n == 1
26         t(1) = 0;
27         t1(1) = 0;
28     else
29         t(n) = t(n-1) + delt;
30         t1(n) = 0.5*(t(n) + t(n-1));
31     end
32 end
33
```

```

34 for n = 1:nt;
35     k = 1;
36     stop = 1;
37     while stop > 0.00001
38         %%initial condition
39         for j = 1:np
40             if n == 1
41                 f(j,1,n) = eta(j)*erf(0.5*eta(j)/sqrt(1
                     + K*(1 - na))) + 2*sqrt((1 + K*(1 -
                     na))/pi)*(exp(-0.25*(eta(j)^2)/(1 + K
                     *(1 - na))) - 1);
42                 u(j,1,n) = erf(0.5*eta(j)/sqrt(1 + K*(1
                     - na)));
43                 v(j,1,n) = exp(-0.25*(eta(j)^2)/(1 + K
                     *(1 - na)))/sqrt(pi*(1 + K*(1 - na)))
                     ;
44                 g(j,1,n) = -na*exp(-0.25*(eta(j)^2)/(1 +
                     K*(1 - na)))/sqrt(pi*(1 + K*(1 - na)
                     ));
45                 p(j,1,n) = na*eta(j)*exp(-0.25*(eta(j)
                     ^2)/(1 + K*(1 - na)))/(sqrt(pi*(1 + K
                     *(1 - na)))*2*(1 + K*(1 - na)));
46             else
47                 f(j,1,n) = ff(j,n-1);
48                 u(j,1,n) = uu(j,n-1);
49                 v(j,1,n) = vv(j,n-1);
50                 g(j,1,n) = gg(j,n-1);
51                 p(j,1,n) = pp(j,n-1);
52             end
53         end
54
55     for j = 2:np
56         if n == 1
57             cfb(j,n) = 0; cub(j,n) = 0;
58             cvb(j,n) = 0; cgb(j,n) = 0; cpb(j,n) = 0;
59             cdervb(j,n) = 0; cderpb(j,n) = 0;

```

```

60         cfvb(j,n) = cfb(j,n)*cvb(j,n);
61         cfpb(j,n) = cfb(j,n)*cpb(j,n);
62         cgub(j,n) = cgb(j,n)*cub(j,n);
63         cuub(j,n) = cub(j,n)^2;
64     else
65         cfb(j,n) = ffb(j,n-1);
66         cub(j,n) = uub(j,n-1);
67         cvb(j,n) = vvb(j,n-1);
68         cgb(j,n) = ggb(j,n-1);
69         cpb(j,n) = ppb(j,n-1);
70         cuub(j,n) = cub(j,n)^2;
71         dervb(j,n) = ddervb(j,n-1);
72         derpb(j,n) = dderpb(j,n-1);
73         cfvb(j,n) = cfb(j,n)*cvb(j,n);
74         cfpb(j,n) = cfb(j,n)*cpb(j,n);
75         cgub(j,n) = cgb(j,n)*cub(j,n);
76     end
77
78     fb(j,k,n) = 0.5*(f(j,k,n) + f(j-1,k,n));
79     ub(j,k,n) = 0.5*(u(j,k,n) + u(j-1,k,n));
80     vb(j,k,n) = 0.5*(v(j,k,n) + v(j-1,k,n));
81     gb(j,k,n) = 0.5*(g(j,k,n) + g(j-1,k,n));
82     pb(j,k,n) = 0.5*(p(j,k,n) + p(j-1,k,n));
83     dervb(j,k,n) = (v(j,k,n) - v(j-1,k,n))/deleta;
84     derpb(j,k,n) = (p(j,k,n) - p(j-1,k,n))/deleta;
85     fvb(j,k,n) = fb(j,k,n)*vb(j,k,n);
86     fpb(j,k,n) = fb(j,k,n)*pb(j,k,n);
87     gub(j,k,n) = gb(j,k,n)*ub(j,k,n);
88     uub(j,k,n) = ub(j,k,n)^2;
89
90     if n < nt1 + 1
91         a1(j,k) = (1 + K)/deleta + 0.25*etac(j) +
92             0.75*lambda*t1(n)*fb(j,k,n);
93         a2(j,k) = -(1 + K)/deleta + 0.25*etac(j) +
94             0.75*lambda*t1(n)*fb(j,k,n);
95         a3(j,k) = 0.75*lambda*t1(n)*vb(j,k,n);

```

94  $a4(j, k) = a3(j, k);$   
95  $a5(j, k) = -0.75 * \text{lambda} * t1(n) * \text{ub}(j, k, n) -$   
 $0.5 * (M + \text{Po}) * t1(n) - t1(n) / \text{delt};$   
96  $a6(j, k) = a5(j, k);$   
97  $a7(j, k) = 0.5 * K;$   
98  $a8(j, k) = a7(j, k);$   
99  
100  $b1(j, k) = (1 + 0.5 * K) / \text{deleta} + 0.25 * \text{etac}(j)$   
 $+ 0.75 * \text{lambda} * t1(n) * \text{fb}(j, k, n);$   
101  $b2(j, k) = -(1 + 0.5 * K) / \text{deleta} + 0.25 * \text{etac}(j)$   
 $+ 0.75 * \text{lambda} * t1(n) * \text{fb}(j, k, n);$   
102  $b3(j, k) = 0.75 * \text{lambda} * t1(n) * \text{pb}(j, k, n);$   
103  $b4(j, k) = b3(j, k);$   
104  $b5(j, k) = -0.75 * \text{lambda} * t1(n) * \text{gb}(j, k, n);$   
105  $b6(j, k) = b5(j, k);$   
106  $b7(j, k) = 0.25 - 0.75 * t1(n) * \text{lambda} * \text{ub}(j, k, n)$   
 $- t1(n) * K - t1(n) * \text{delt};$   
107  $b8(j, k) = b7(j, k);$   
108  $b9(j, k) = -0.5 * t1(n) * K;$   
109  $b10(j, k) = b9(j, k);$   
110  
111  $r1(j, k) = f(j-1, k, n) - f(j, k, n) + \text{deleta} * \text{ub}$   
 $(j, k, n);$   
112  $r2(j, k) = u(j-1, k, n) - u(j, k, n) + \text{deleta} * \text{vb}$   
 $(j, k, n);$   
113  $r3(j, k) = g(j-1, k, n) - g(j, k, n) + \text{deleta} * \text{pb}$   
 $(j, k, n);$   
114  $r4(j, k) = -(1 + K) * \text{dervb}(j, k, n) - 0.5 * \text{etac}(j)$   
 $* \text{vb}(j, k, n) - 1.5 * \text{lambda} * t1(n) * (1 - \text{uub}$   
 $(j, k, n) + \dots$   
115  $\text{fvb}(j, k, n) - K * \text{pb}(j, k, n) - (M + \text{Po}) * t1$   
 $(n) * (1 - \text{ub}(j, k, n)) + 2 * t1(n) * \text{ub}(j, k$   
 $, n) / \text{delt} - (1 + K) * \text{cdervb}(j, n) - \dots$   
116  $0.5 * \text{etac}(j) * \text{cvb}(j, n) - 1.5 * \text{lambda} * t1(n)$   
 $* (1 - \text{cuub}(j, n) + \text{cfvb}(j, n)) - (M +$   
 $\text{Po}) * t1(n) * (1 - \text{cub}(j, n)) - 2 * t1(n) *$

```

117         cub(j , n) / delt - K*cpb(j , n);
r5(j , k) = -(1 + 0.5*K)*derpb(j , k, n) - 0.5*
118         etac(j)*pb(j , k, n) - 0.5*gb(j , k, n) - 1.5*
lambda*t1(n)*(fpb(j , k, n) - gub(j , k, n)) +
...
118         2*t1(n)*gb(j , k, n) / delt + t1(n)*K*(2*gb(
j , k, n) + vb(j , k, n)) - (1 + 0.5*K)*
cderpb(j , n) - 0.5*etac(j)*cpb(j , n) -
0.5*cgb(j , n) - ...
119         1.5*lambda*t1(n)*(cfpb(j , n) - cgub(j , n)
) - 2*t1(n)*cgb(j , n) / delt + t1(n)*K
*(2*cgb(j , n) + cvb(j , n));
120     else
121         a1(j , k) = (1 + K) / deleta + 0.75*lambda*fb(j
, k, n);
122         a2(j , k) = -(1 + K) / deleta + 0.75*lambda*fb(
j , k, n);
123         a3(j , k) = 0.75*lambda*vb(j , k, n);
124         a4(j , k) = a3(j , k);
125         a5(j , k) = -0.75*lambda*ub(j , k, n) - 0.5*(M +
Po) - 1 / delt;
126         a6(j , k) = a5(j , k);
127         a7(j , k) = 0.5*K;
128         a8(j , k) = a7(j , k);
129
130         b1(j , k) = (1 + 0.5*K) / deleta + 0.75*lambda*
fb(j , k, n);
131         b2(j , k) = -(1 + 0.5*K) / deleta + 0.75*lambda
*fb(j , k, n);
132         b3(j , k) = 0.75*lambda*pb(j , k, n);
133         b4(j , k) = b3(j , k);
134         b5(j , k) = -0.75*lambda*gb(j , k, n);
135         b6(j , k) = b5(j , k);
136         b7(j , k) = -0.75*lambda*ub(j , k, n) - K - 1 /
delt;
137         b8(j , k) = b7(j , k);

```

```

138     b9(j,k) = -0.5*K;
139     b10(j,k) = b9(j,k);
140
141     r1(j,k) = f(j-1,k,n) - f(j,k,n) + deleta*ub
           (j,k,n);
142     r2(j,k) = u(j-1,k,n) - u(j,k,n) + deleta*vb
           (j,k,n);
143     r3(j,k) = g(j-1,k,n) - g(j,k,n) + deleta*pb
           (j,k,n);
144     r4(j,k) = -(1 + K)*dervb(j,k,n) - 1.5*
           lambda*(1 - uub(j,k,n) + fvb(j,k,n)) - K
           *pb(j,k,n) - (M + Po)*(1 - ub(j,k,n)) +
           2*ub(j,k,n)/delt - ...
145     (1 + K)*cdervb(j,n) - 1.5*lambda*(1 -
           cuub(j,n) + cfvb(j,n)) - K*cpb(j,n)
           - (M + Po)*(1 - cub(j,n)) - 2*cub(j,
           n)/delt;
146     r5(j,k) = -(1 + 0.5*K)*derpb(j,k,n) - 1.5*
           lambda*(fpb(j,k,n) - gub(j,k,n)) + K*(2*
           gb(j,k,n) + vb(j,k,n)) + 2*gb(j,k,n)/
           delt - ...
147     (1 + 0.5*K)*cderpb(j,n) - 1.5*lambda*(
           cfpb(j,n) - cgub(j,n)) - K*(2*cgb(j,
           n) + cvb(j,n)) - 2*cgb(j,n)/delt;
148     end
149     end
150     %%Matriks
151     a{2,k} = [0 0 1 0 0; -0.5*deleta 0 0 -0.5*deleta 0;
           0 -0.5*deleta 0 0 -0.5*deleta; a2(2,k) a8(2,k)
           a3(2,k) a1(2,k) a7(2,k); b10(2,k) b2(2,k) b3(2,k)
           ) b9(2,k) b1(2,k)];
152     for j = 3:np
153         a{j,k} = [-0.5*deleta 0 1 0 0; -1 0 0 -0.5*
           deleta 0; 0 -1 0 0 -0.5*deleta; a6(j,k) 0 a3
           (j,k) a1(j,k) a7(j,k); b6(j,k) b8(j,k) b3(j,
           k) b9(j,k) b1(j,k)];

```



```

154         b{j,k} = [0 0 -1 0 0; 0 0 0 -0.5*deleta 0; 0 0
                0 0 -0.5*deleta; 0 0 a4(j,k) a2(j,k) a8(j,k)
                ; 0 0 b4(j,k) b10(j,k) b2(j,k)];
155     end;
156     for j = 2:np
157         c{j,k} = [-0.5*deleta 0 0 0 0; 1 0 0 0 0; 0 1 0
                0 0; a5(j,k) 0 0 0 0; b5(j,k) b7(j,k) 0 0
                0];
158     end;
159     %%forward sweep
160     alfa{2,k} = a{2,k};
161     gamma{2,k} = inv(alfa{2,k})*c{2,k};
162     for j = 3:np
163         alfa{j,k} = a{j,k} - (b{j,k}*gamma{j-1,k});
164         gamma{j,k} = inv(alfa{j,k})*c{j,k};
165     end;
166     for j = 2:np
167         rr{j,k} = [r1(j,k); r2(j,k); r3(j,k); r4(j,k); r5(
                j,k)];
168     end;
169     ww{2,k} = inv(alfa{2,k})*rr{2,k};
170     for j = 3:np
171         ww{j,k} = inv(alfa{j,k})*(rr{j,k} - (b{j,k}*ww{
                j-1,k}));
172     end;
173
174     %%backward sweep
175     delu(1,k) = 0; delu(np,k) = 0;
176     delg(1,k) = 0; delg(np,k) = 0;
177     delf(1,k) = 0;
178
179     dell{np,k} = ww{np,k};
180     for j = np-1:-1:2
181         dell{j,k} = ww{j,k} - (gamma{j,k}*dell{j+1,k});
182     end;
183     delv(1,k) = dell{2,k}(1,1);

```

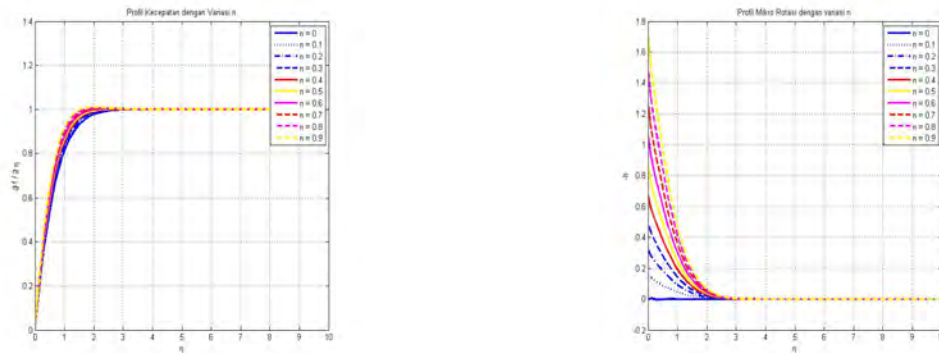
```

184     delp(1,k) = dell{2,k}(2,1);
185     delf(2,k) = dell{2,k}(3,1);
186     delv(2,k) = dell{2,k}(4,1);
187     delp(2,k) = dell{2,k}(5,1);
188     delg(1,k) = -na*delv(1,k);
189
190     for j = np:-1:3
191         delu(j-1,k) = dell{j,k}(1,1);
192         delg(j-1,k) = dell{j,k}(2,1);
193         delf(j,k) = dell{j,k}(3,1);
194         delv(j,k) = dell{j,k}(4,1);
195         delp(j,k) = dell{j,k}(5,1);
196
197     end;
198     %% Newton's Method
199     for j = 1:np
200         u(j,k+1,n) = u(j,k,n) + delu(j,k);
201         g(j,k+1,n) = g(j,k,n) + delg(j,k);
202         f(j,k+1,n) = f(j,k,n) + delf(j,k);
203         v(j,k+1,n) = v(j,k,n) + delv(j,k);
204         p(j,k+1,n) = p(j,k,n) + delp(j,k);
205     end;
206
207     %%pengecekan konvergensi iterasi
208     stop = abs(delv(1,k));
209     kmax = k;
210     k = k+1;
211 end
212 end

```

---

## Lampiran 7 : Hasil Simulasi



Gambar 6.1: Profil Kecepatan dan Profil mikro rotasi dengan variasi  $n$

Pada grafik di atas dapat dilihat bahwa semakin besar variasi  $n$  atau dengan kata lain semakin lemah konsentrasi fluida yang diberikan mengakibatkan semakin besar kecepatan dan profil mikro rotasi. Akan tetapi bertambahnya kecepatan aliran fluida tidak terlalu signifikan dibandingkan pada profil mikro rotasi. Hal ini dapat dilihat pada tabel sebagai berikut:

Tabel 6.1: Nilai Kecepatan dan Profil Mikro Rotasi terhadap  $\eta = 1$  dengan variasi  $n$

$n$	$\frac{\partial f}{\partial \eta}$	$-h$
0	0.771937678354962	4.984966837263321e-004
0.1	0.782262262693302	0.054077500337950
0.2	0.793013321641416	0.109367993355614
0.3	0.804213655605170	0.166471480292840
0.4	0.815896591822123	0.225496120620866
0.5	0.828100068052870	0.286574131582960
0.6	0.840862992869314	0.349828855916222
0.7	0.854228500750069	0.415408688845167
0.8	0.868247932539886	0.483476666297586
0.9	0.882975186342491	0.554210896629362

## BAB VI

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 6.1 KESIMPULAN

Berdasarkan analisa dan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, makas diperoleh kesimpulan bahwa :

1. Model matematika pengaruh MHD pada fluida *micropolar* yang melewati bola berpori dibangun oleh tiga persamaan pembangun yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum linier dan momentum anguler yang masing-masing diperoleh dari penerapan Hukum kekekalan massa dan prinsip konservasi momentum linier. Kemudian persamaan pembangun diubah ke bentuk model persamaan tak berdimensi, dan dilakukan transformasi kebentuk persamaan similiaritas untuk mendapatkan model akhir dari pengaruh MHD pada fluida *micropolar* yang melewati bola berpori yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$(1 + K) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + K \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{3}{2} t \left[ 1 - \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] + (M + \phi) t \left( 1 - \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t}$$

dan

$$\left( 1 + \frac{K}{2} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \frac{\eta}{2} \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{1}{2} h + \frac{3}{2} t \left( f \frac{\partial h}{\partial \eta} - h \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = t \frac{\partial h}{\partial t} + t K \left( 2h + \frac{\partial^2 t}{\partial \eta^2} \right)$$

2. Model matematika pengaruh MHD pada fluida *micropolar* yang melewati bola berpori dapat diselesaikan dengan metode Keller-Box. Penyelesaian numerik ini diawali dengan mengubah model matematika ke persamaan orde satu. Kemudian model matematika didiskritisasikan dengan beda hingga pusat. Model matematika hasil diskritisasi berupa sistem persamaan tak linier, sehingga dilakukan linierisasi model dengan Metode Newton dan diselesaikan dengan Metode Eliminasi Matrik Blok Tridiagonal.

3. Hasil simulasi numerik dengan menggunakan beberapa variasi parameter yaitu parameter magnetik, *micropolar*, porositas dan permeabilitas didapatkan bahwa:
- a. Pengaruh parameter magnetik ( $M$ ) terhadap profil kecepatan dan mikro rotasi. Semakin meningkat parameter magnetik maka semakin meningkat profil kecepatan aliran fluida dilihat dari posisi aliran pada bola berpori saat  $\eta = 0$  ke luar aliran. Sedangkan pada profil mikro rotasi terdapat dua kondisi, semakin meningkatnya parameter magnetik pada aliran pekat, maka semakin menurun kecepatan rotasi partikel *micropolar* dan diawali keadaan diam dilihat dari posisi aliran pada bola berpori saat  $\eta = 0$  ke luar aliran tetapi pada aliran agak pekat semakin meningkatnya parameter magnetik maka semakin meningkat kecepatan rotasi partikel *micropolar* dan diawali dengan keadaan berotasi dilihat dari posisi aliran pada bola berpori saat  $\eta = 0$  ke luar aliran.
  - b. Pengaruh parameter *micropolar* ( $K$ ) terhadap profil kecepatan dan mikro rotasi. Semakin meningkat parameter *micropolar* maka semakin menurun profil kecepatan aliran fluida dilihat dari posisi aliran pada bola berpori saat  $\eta = 0$  ke luar aliran. Sedangkan pada profil mikro rotasi terdapat dua kondisi, semakin meningkatnya parameter *micropolar* pada aliran pekat, maka semakin meningkat kecepatan rotasi partikel *micropolar* dan diawali keadaan diam dilihat dari posisi aliran pada bola berpori saat  $\eta = 0$  ke luar aliran tetapi pada aliran agak pekat semakin meningkatnya parameter *micropolar* maka semakin menurun kecepatan rotasi partikel *micropolar* dan diawali dengan keadaan berotasi dilihat dari posisi aliran pada bola berpori saat  $\eta = 0$  ke luar aliran.
  - c. Pengaruh parameter porositas( $\phi$ ) terhadap profil kecepatan dan mikro rotasi. Semakin meningkat parameter porositas maka semakin meningkat profil kecepatan aliran fluida dilihat dari posisi aliran pada bola berpori saat  $\eta = 0$  ke luar aliran. Sedangkan pada profil mikro rotasi terdapat dua kondisi, semakin meningkatnya parameter porositas pada aliran pekat, maka semakin menurun kecepatan rotasi partikel *micropolar* dan diawali keadaan diam dilihat dari posisi aliran pada bola berpori saat  $\eta = 0$  ke luar aliran tetapi pada aliran agak pekat semakin meningkatnya parameter porositas maka semakin meningkat kecepatan rotasi partikel *micropolar* dan diawali dengan keadaan berotasi dilihat dari posisi aliran pada bola berpori saat  $\eta = 0$  ke luar aliran.

- d. Pengaruh parameter permeabilitas ( $K^*$ ) terhadap profil kecepatan dan mikro rotasi. Semakin meningkat parameter permeabilitas maka semakin menurun profil kecepatan aliran fluida dilihat dari posisi aliran pada bola berpori saat  $\eta = 0$  ke luar aliran. Sedangkan pada profil mikro rotasi terdapat dua kondisi, semakin meningkatnya parameter permeabilitas pada aliran pekat, maka semakin meningkat kecepatan rotasi partikel *micropolar* dan diawali keadaan diam dilihat dari posisi aliran pada bola berpori saat  $\eta = 0$  ke luar aliran tetapi pada aliran agak pekat semakin meningkatnya parameter permeabilitas maka semakin menurun kecepatan rotasi partikel *micropolar* dan diawali dengan keadaan berotasi dilihat dari posisi aliran pada bola berpori saat  $\eta = 0$  ke luar aliran.
- e. Konsentrasi fluida mempengaruhi kecepatan aliran dan profil mikro rotasi, sehingga semakin lemah konsentrasi fluida mengakibatkan kecepatan aliran dan profil mikro rotasi semakin besar.

## 6.2 SARAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, saran yang dapat diberikan pada penelitian yang selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan studi tidak pada titik stagnasi atau ( $x \neq 0$ ), sehingga dapat dilihat profil mikro rotasi dan kecepatan disekeliling permukaan bola berpori.
2. Pada penelitian ini penelitian dilakukan pada bola berpori yang terletak pada aliran bebas tanpa halangan, diharapkan selanjutnya dapat dilakukan pada bola berpori yang terletak diantara dua dinding pembatas untuk mengetahui pengaruh pada lapisan batas yang dihasilkan.
3. Pada penelitian ini penelitian dilakukan dengan mengabaikan pengaruh temperatur, diharapkan pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan penelitian dengan memperhitungkan adanya pengaruh temperatur.



## DAFTAR PUSTAKA

- Abdel-Rahman, G.M. (2009), "Studying Effect of MHD on thin films of a micropolar fluid", *Physica B: Condensed Matter*. 404(21):3859-3866.
- Anderson, J.D. (2010), *Fundamental of Aerodynamics*, Fifth Edition, University of Maryland.
- Arber, T. (2013), *Fundamentals of Magnetohydrodynamics (MHD)*, University of Warwick. UK.
- Bejan, A. (2013), *Convection Heat Transfer*, Fourth Edition Wiley.
- Cheng, C.Y. (2008), "Natural Convection Heat and Mass Transfer from a Sphere in Micropolar Fluids with Constant Wall Temperature and Concentration", *International Communication in Heat and Mass Transfer*. 35(6):750-755.
- Guram, G. dan Smith, A. (1980), "Stagnation flows of micropolar fluids with strong and weak interactions", *Computers and Mathematics with Applications*.6(2):213-233.
- Imron, C. Suhariningsih. Widodo, B., Yuwono, T. (2013), "Numerical Simulation of Fluid Flow Around Circular and I Shape Cylinder in A Tandem Configuration", *Applied Mathematical Sciences*, Vol.7. 114: 5657-5666.
- Lukaszewicz, G. (1999), *Micropolar fluids: theory and applications*, Springer.
- Jat, R. N., Saxena, V., dan Rajotia, D. (2012), "MHD Stagnation Point Flow and Heat Transfer of a Micropolar Fluid in a Porous Medium", *Journal of International Academy of Physical Sciences*. Vol.16 No.4(2012)
- Mohammad, N.F. (2014), "Unsteady Maghnetohydrodynamic Convective Boundary Layer Flow Past A Sphere In Viscous and Micropolar Fluids", *Applied Scientific Research*. Faculty of Science Universiti Teknologi Malaysia.
- Nadeem, S., Hussain, M. dan Naz, M. (2010), "MHD Stagnation Flow of a Micropolar Fluid Through a Porous Medium", *Meccanica*(2010)45:869-880.



- Satyanarayana, N.P., Venketaswarlu, B. dan Venkataramana, S. (2013), "Effect of Hall Current and Radiation Absorption on MHD Micropolar Fluid in a rotating System", *Ain Shams Engineering Journal*. 4(4):843-854.
- Singh, K. dan Kumar, M. (2015), "The Effect of Chemical Reaction and Double Stratification on MHD Free Convection in a Micropolar Fluid with Heat Generation and Ohmic Heating", *Jordan Journal of Mechanical and Industrial Engineering*. Vol.9 No.4, August 2015. ISSN 1995-6665. Pages 279-288.
- Stokes, V.K. (1984), *Theory in Fluids with a Microstructure*, Springer.
- Uddin, Z. dan Kumar, M. (2013), "Hall and Ion-slip Effect on MHD Boundary Layer Flow of a Micropolar Fluid past a Wedge", *Scientia Iranica B*(2013)20(3),467-476.
- Widodo, B. (2012), *Pemodelan Matematika*, ITSPress, Surabaya.
- Widodo, B. Anggriani, I. Imron, C. (2015), "The Characterization of Boundary Layer In The Maghnetohydrodynamic Micropolar Fluid Past a Solid Sphere", *International Conference on Science and Innovative Engineering(ICSE)*, Kuala Lumpur, Malaysia.
- Widodo, B., dkk. (2016), "Viscoelastic Fluid Flow Past a Porous Circular Cylinder when The Magnetic Field Included", *International Journal of Far East Journal of Mathematical Sciences-Puspha Publishing House-India*. Vol.99(2),173-186.

## BIODATA PENULIS



Penulis bernama lengkap Indira Anggriani, dilahirkan di Jombang pada 22 Juni 1992. Pendidikan formal ditempuh mulai dari SD Negeri Jombatan IV Jombang, lulus pada tahun 2004, SMP Negeri 2 Jombang, lulus tahun 2007, dan SMA Negeri 2 Jombang, lulus pada tahun 2010. Setelah lulus dari SMA penulis melanjutkan studi di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya melalui jalur PMDK Reguler sebagai mahasiswa angkatan 2010 dan wisuda pada bulan September 2014 dengan mengambil bidang minat Pemodelan Matematika dan Simulasi. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan S2 di Jurusan Matematika, Insitut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya dengan mendapatkan beasiswa *Fresh Graduate* dan mengambil bidang minat Pemodelan Matematika dan Simulasi. Informasi, kritik, dan saran yang berhubungan dengan Tesis ini dapat ditujukan ke alamat e-mail: [anggriani.indira@gmail.com](mailto:anggriani.indira@gmail.com).