



TESIS - SM 142501

**ANALISA ALIRAN KONVEKSI CAMPURAN PADA FLUIDA
VISKOELASTIK *MAGNETOHYDRODYNAMICS* (MHD)
YANG MELEWATI SILINDER SIRKULAR BERPORI**

GALUH OKTAVIA SISWONO
NRP 1213 201 055

DOSEN PEMBIMBING
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2015



THESIS - SM 142501

**ANALYSIS OF MIXED CONVECTION FLOW
MAGNETOHYDRODYNAMICS (MHD) VISCOELASTIC
FLUID PAST A POROUS CIRCULAR CYLINDER**

GALUH OKTAVIA SISWONO
NRP 1213 201 055

SUPERVISOR
Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.

MASTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2015

**ANALISA ALIRAN KONVEKSI CAMPURAN PADA FLUIDA
VISKOELASTIK *MAGNETO*HYDRODYNAMICS (MHD) YANG
MELEWATI SILINDER SIRKULAR BERPORI**

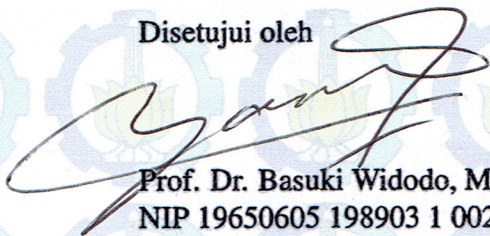
Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)

di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:
GALUH OKTAVIA SISWONO
NRP. 1213 201 055


Tanggal Ujian : 22 Mei 2015
Periode Wisuda : September 2015

Disetujui oleh




Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
NIP 19650605 198903 1 002

Pembimbing I




Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.
NIP 19611115 198703 1 003

Pembimbing II



Dr. Mahmud Yunus, M.Si.
NIP 19620407 198703 1 005


(Penguji)



Dr. Budi Setiyono, S.Si., M.T.
NIP 19720207 199702 1 001

(Penguji)

Direktur Program Pascasarjana



Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T.
NIP. 19640405 199002 1 001

ANALISA ALIRAN KONVEKSI CAMPURAN PADA FLUIDA VISKOELASTIK *MAGNETOHYDRODYNAMICS* (MHD) YANG MELEWATI SILINDER SIRKULAR BERPORI

Nama Mahasiswa : Galuh Oktavia Siswono
NRP : 1213 201 055
Pembimbing : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
2. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.

ABSTRAK

Pada Thesis ini dibahas mengenai permasalahan *magnetohydrodynamics* (MHD), yaitu pemodelan matematika dan analisa dari aliran konveksi campuran pada fluida steady incompressible viskoelastik bermedan magnet yang melewati sebuah silinder sirkular berpori horizontal. Persamaan pembangun dimensional, persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi, dibentuk dari keadaan fisik dan direduksi dengan menggunakan pendekatan Boussinesq dan teori lapisan batas. Persamaan pembangun dimensional yang diperoleh selanjutnya diubah ke dalam bentuk non-dimensional dengan mensubstitusi variabel non-dimensional. Persamaan non-dimensional selanjutnya ditransformasikan menjadi persamaan similar dan diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode beda hingga. Pada tesis ini dipelajari mengenai pengaruh dari variasi beberapa parameter yang mempengaruhi permasalahan, yakni parameter viskoelastik, parameter konveksi campuran, parameter medan magnet pada fluida, parameter porositas, bilangan Prandtl, dan variasi jari-jari silinder. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa profil kecepatan semakin besar pada saat parameter konveksi campuran dan parameter medan magnet pada fluida semakin meningkat, profil kecepatan semakin menurun pada saat parameter viskoelastik, parameter porositas, bilangan Prandtl, dan jari-jari silinder semakin besar, profil temperatur semakin meningkat pada saat parameter viskoelastik, konveksi campuran, medan magnet pada fluida, porositas, dan jari-jari silinder semakin besar, dan profil temperatur dari fluida semakin menurun pada saat bilangan Prandtl semakin besar.

Kata kunci: *magnetohydrodynamics*, aliran konveksi campuran, fluida viskoelastik

ANALYSIS OF MIXED CONVECTION FLOW MAGNETOHYDRODYNAMICS (MHD) VISCOELASTIC FLUID PAST A POROUS CIRCULAR CYLINDER

Name : Galuh Oktavia Siswono
NRP : 1213 201 055
Supervisors : 1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc.
2. Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.

ABSTRACT

This thesis considers a magnetohydrodynamics (MHD) problem, i.e. mathematical modeling and analysis of mixed convection flow on steady incompressible and viscoelastic fluid with the presence of magnetic field passing over porous horizontal circular cylinder. Dimensional Governing Equations, i.e. continuity, momentum, and energy equations, are formulated from the physical phenomena and reduced by using Boussinesq approximation and boundary layer theory. These dimensional boundary layer further are converted into non-dimensional form by substituting several non-dimensional variables. Further, those non-dimensional equations are transformed into similar equations and solved numerically by using finite difference method. The effect of various parameters involved in the solution, i.e. viscoelastic parameter, mixed convection parameter, magnetic field on the fluid, porosity parameter, Prandtl number, and radius of the cylinder, have been studied. Numerical results show that velocity profiles increase when both of mixed convection parameter and magnetic field on the fluid increase, velocity profiles decrease when viscoelastic parameter, porosity parameter, Prandtl number, and radius of the cylinder increase, temperature profiles increase when viscoelastic, mixed convection, magnetic field, porosity parameters, and radius of the cylinder increase, and temperature profiles of the fluid decrease when Prandtl number increases.

Keywords: magnetohydrodynamics, mixed convection flow, viscoelastic fluid

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan kesehatan, kesempatan, dan petunjuk-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis dengan judul

**”Analisa Aliran Konveksi Campuran Pada Fluida Viskoelastik
Magnetohydrodynamics (MHD) Yang Melewati Silinder Sirkular Berpori”**

Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Strata 2 (S-2) Program Magister Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Terselesainya Tesis ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Kedua orang tua, Bapak Gatot Siswono dan Ibu Siti Aisyah, yang telah memberikan motivasi lahir dan batin sampai terselesainya Tesis ini.
2. Bapak Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.ES., Ph.D. selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya yang telah memberikan kesempatan dan fasilitas yang mendukung kepada penulis dalam untuk menyelesaikan Tesis ini.
3. Direktorat Jendral Perguruan Tinggi (DIKTI) selaku penyandang dana yang telah memberikan beasiswa *Fresh Graduate*.
4. Bapak Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T. selaku Direktur Program Pascasarjana ITS.
5. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika ITS.
6. Bapak Dr. Subiono, M.S. selaku Koordinator Program Studi Pascasarjana Matematika ITS.
7. Ibu Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si., M.T. selaku dosen wali.
8. Bapak Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. dan Bapak Dr. Chairul Imron, M.I.Komp. selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan, perhatian, arahan, nasehat, dan motivasi kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis ini.

9. Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si. dan Bapak Dr. Budi Setiyono, S.Si., M.T. selaku dosen penguji atas masukan, kritik, dan saran yang membantu penulis untuk memperbaiki Tesis ini.
10. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika ITS yang telah memberikan bekal ilmu pengetahuan kepada penulis dan juga atas segala bantuan, kemudahan, dan kelancaran selama penulis mengikuti proses perkuliahan.
11. Saudara kandung, Gayatri Inersia Siswono, Gati Ajeng Wilis Siswono, dan Ganjar Ageng Wicaksono Siswono, yang telah memberikan dukungan moral selama penulis menempuh pendidikan sampai mendapat gelar Magister.
12. Teman-teman S2 Matematika ITS angkatan 2013 yang telah menemani, memotivasi, dan segala bantuannya selama ini, khususnya teman-teman tim CFD, Annisa Dwi Sulistyanyingtyas, Wayan Rumite, Mohammad Ghani, Putri Pradika Wanti, dan Mohamad Tafrikan, atas dukungan yang selalu diberikan kepada penulis selama penelitian sampai terselesaikannya Tesis ini.
13. Teman-teman S1 Matematika ITS angkatan 2009 yang selalu memberikan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan pendidikan Magister.
14. Semua pihak yang turut serta mendukung dalam penyusunan Tesis ini.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari berbagai pihak, sehingga penelitian selanjutnya diharapkan bisa lebih baik dan semoga laporan Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak, bagi kemajuan dan perkembangan ilmu pengetahuan, dan dapat berkontribusi terhadap kemajuan ITS, bangsa, dan negara.

Surabaya, Mei 2015

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK	iii
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR SIMBOL	xv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
BAB II KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	5
2.1 Penelitian Terdahulu	5
2.2 Perpindahan Panas Konveksi	6
2.2.1 Konveksi Bebas (<i>Free Convection Flow</i>)	7
2.2.2 Konveksi Paksa (<i>Forced Convection Flow</i>)	7
2.2.3 Konveksi Aliran Campuran (<i>Mixed Convection Flow</i>)	7
2.3 Fluida Newtonian dan Fluida Non Newtonian	7
2.4 Magnetohydrodynamics (MHD)	8
2.5 Aliran Lapisan Batas (<i>Boundary Layer</i>)	10
2.6 Porositas dan Permeabilitas	12
2.7 Metode Beda Hingga (<i>Finite Difference Method</i>)	13
BAB III METODA PENELITIAN	15
3.1 Tahapan Penelitian	15
3.1.1 Tahap Analisa Permasalahan	15
3.1.2 Tahap Implementasi	16

3.1.3	Tahap Penyelesaian dan Analisa Akhir	17
BAB IV	MODEL MATEMATIKA	19
4.1	Persamaan Pembangun	19
4.1.1	Persamaan Kontinuitas	19
4.1.2	Persamaan Momentum	21
4.1.3	Persamaan Energi	23
BAB V	PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA	27
5.1	Penurunan Persamaan Pembangun	27
5.1.1	Penurunan Persamaan Momentum	27
5.2	Persamaan Non-dimensional	36
5.3	Diskritisasi dengan Skema Metode Beda Hingga Orde Kedua	40
5.3.1	Pendiskritan Persamaan Momentum	41
5.3.2	Pendiskritan Persamaan Energi	42
5.4	Algoritma	44
5.5	Analisa Hasil	44
BAB VI	KESIMPULAN DAN SARAN	55
6.1	Kesimpulan	55
6.2	Saran	56
	DAFTAR PUSTAKA	57
	LAMPIRAN	59

DAFTAR TABEL

Tabel 5.1	Tabel nilai penyebaran panas $-\theta'(0)$ pada saat Variasi K dengan $M = 0, \phi = 0, Pr = 1, \lambda = 0$ dan $\lambda = 1$	45
-----------	--	----

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Lapisan Batas yang Terbentuk pada saat Fluida Melewati (a) Sebuah Silinder Sirkular, (b) Silinder Sirkular Berpori, dan (c) Model Fisik dan Sistem Koordinat dari Lapisan Batas Aliran Fluida Viskoelastik yang Melewati Silinder Sirkular Berpori	2
Gambar 2.1	Variasi dari Distribusi Temperatur untuk Pr yang Berbeda (Ghosh dan Shit, 2012)	6
Gambar 2.2	Lapisan Batas yang Terbentuk pada saat Fluida Melewati Sebuah Silinder Sirkular (Anwar, dkk, 2008)	11
Gambar 2.3	Lapisan Batas yang Terbentuk dari Fluida yang Melewati Suatu Permukaan Lengkung	12
Gambar 2.4	Stensil Metode Beda Hingga Eksplisit	14
Gambar 3.1	Gambaran Daerah Pengamatan	15
Gambar 3.2	Model Fisik dan Sistem Koordinat untuk Permasalahan Aliran MHD pada Silinder Sirkular Berpori	16
Gambar 4.1	Volume Kendali	22
Gambar 5.1	Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Viskoelastik (K)	46
Gambar 5.2	Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Viskoelastik (K)	47
Gambar 5.3	Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Konveksi Campuran (λ)	47
Gambar 5.4	Profil Temperatur Variasi Parameter Konveksi Campuran (λ)	48
Gambar 5.5	Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Medan Magnet (M)	49
Gambar 5.6	Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Medan Magnet (M)	49
Gambar 5.7	Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Porositas (ϕ)	50
Gambar 5.8	Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Porositas (ϕ)	50

Gambar 5.9	Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Bilangan Prandtl (Pr)	51
Gambar 5.10	Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Bilangan Prandtl (Pr)	52
Gambar 5.11	Profil Kecepatan dengan Variasi Jari-Jari Silinder Sirkular (a)	52
Gambar 5.12	Profil Temperatur dengan Variasi Jari-Jari Silinder Sirkular (a)	53

BAB I

PENDAHULUAN

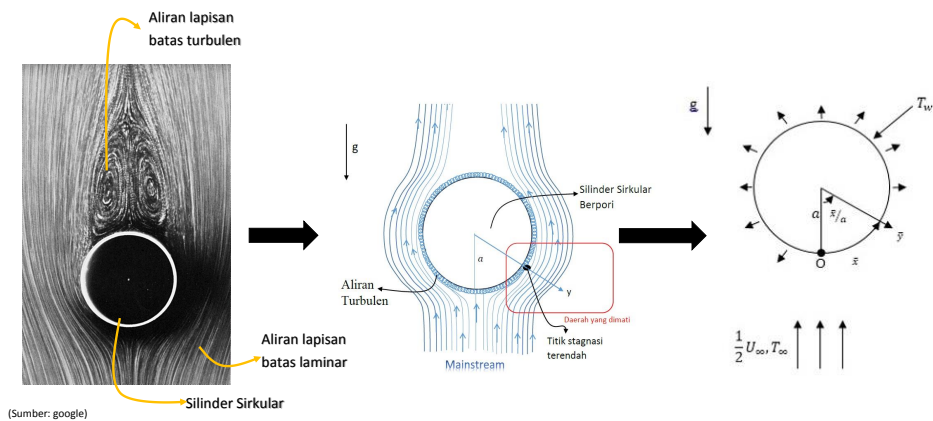
1.1 Latar Belakang

Perpindahan panas konvektif atau konveksi adalah perpindahan panas dari satu tempat ke tempat lain dengan perantara fluida yang disebabkan oleh adanya perbedaan temperatur. Konveksi secara garis besar dibagi menjadi dua, yakni konveksi bebas dan konveksi paksa. Namun, pada perkembangan perpindahan panas, dikenal juga konveksi campuran, yaitu konveksi yang terjadi pada saat konveksi bebas dan konveksi paksa terjadi pada saat bersamaan. Studi pada jenis-jenis konveksi telah dilakukan oleh banyak peneliti dan hasil penelitian tersebut diterapkan pada bidang teknik. Begitu juga solusi analitik dari persamaan konveksi, hal ini juga masih dikembangkan sesuai dengan kekompleksan dari kenonlinearan pada Navier-Stokes dan persamaan energi. Upaya awal untuk menghitung permasalahan ini melibatkan penyelesaian persamaan lapisan batas (*Boundary Layer*) sederhana. Lapisan batas adalah suatu lapisan tipis yang terbentuk pada permukaan padat sebagai akibat adanya aliran dari suatu fluida. Konsep mengenai konveksi lapisan batas memiliki peran penting di bidang teknik, seperti teknik automobile, kelautan, dan pengeboran. Berdasarkan pada pentingnya pemanfaatan konveksi lapisan batas, banyak riset dilakukan pada bidang ini. Berikut ini adalah beberapa penelitian di bidang konveksi lapisan batas: Merkin, J.H.(1976) dan Molla, M., dkk (2006) melakukan penelitian dengan menggunakan konveksi natural, Pantokratos, A. (2014) melakukan penelitian pada konveksi paksa lapisan batas, dan penelitian mengenai konveksi campuran dilakukan oleh Nazar, R., dkk (2003), dan Hsiao, K.L.(2010).

Penelitian mengenai konveksi campuran selama ini difokuskan pada fluida Newtonian, namun pada perkembangannya penelitian mengenai konveksi campuran juga dilakukan pada fluida non-Newtonian. Fluida non-Newtonian adalah jenis fluida yang tidak tahan terhadap tegangan geser (*shear stress*), gradien kecepatan (*shear rate*) dan temperatur. Pada suatu aliran, fluida non-Newtonian tidak akan terus mengalir ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Hal ini terjadi karena ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida non-Newtonian maka viskositas fluida ini akan berubah (tidak konstan). Pada tesis ini dilakukan penelitian dengan menggunakan konveksi campuran pada salah satu jenis dari fluida

non-Newtonian, yakni fluida viskoelastik. Fluida viskoelastik adalah fluida yang memiliki karakteristik yang tidak sama dengan fluida pada umumnya karena fluida viskoelastik memiliki sifat baik zat padat (elastik) maupun fluida yang kental atau viskos. Contoh dari fluida viskoelastik adalah ter, tepung donat, cairan logam maupun komposit, polimer padat atau cair dan polimer lainnya yang menunjukkan karakteristik tersebut. Saat ini, jenis fluida viskoelastik telah menarik perhatian banyak peneliti karena aplikasi dari fluida ini sangat penting, terutama pada pengeboran minyak, industri makanan dan kertas. Misalnya, pada proses pengeboran minyak, fluida viskoelastik yang mengandung panas mengalir melewati permukaan sebuah media dan mengakibatkan terjadinya proses perpindahan panas dari fluida ke media. Fluida viskoelastik yang digunakan pada penelitian ini adalah fluida viskoelastik *magnetohydrodynamics* (MHD), dengan objek penelitian berupa bentuk geometri sederhana, yakni silinder sirkular berpori.

Langkah awal yang dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan ini adalah dengan menggunakan model matematika yang diturunkan dari persamaan lapisan batas (*Boundary Layer*). Konsep formulasi lapisan batas ini diperkenalkan untuk persamaan yang disederhanakan dari persamaan kompleks dan hal tersebut digunakan sebagai gambaran bentuk karakteristik suatu aliran. Berikut ini adalah deskripsi dari permasalahan lapisan batas yang diamati.



Gambar 1.1: Lapisan Batas yang Terbentuk pada saat Fluida Melewati (a) Sebuah Silinder Sirkular, (b) Silinder Sirkular Berpori, dan (c) Model Fisik dan Sistem Koordinat dari Lapisan Batas Aliran Fluida Viskoelastik yang Melewati Silinder Sirkular Berpori

Deskripsi dari permasalahan ini diilustrasikan pada Gambar 1.1 yang menunjukkan bentuk geometri dari masalah lapisan batas pada suatu silinder sirkular berpori. Aliran dari fluida pada permasalahan ini dianggap bergerak dari bawah kemudian melewati silinder sirkular berpori dengan jari-jari a yang terbenam di

dalam fluida kental dan *incompressible* temperatur disekitarnya adalah T_∞ dan Temperatur pada dinding silinder adalah T_w . Selanjutnya, berdasarkan Gambar 1.1 diuraikan suatu persamaan lapisan batas yang dibangun dari hukum konservasi kekekalan massa, kedua Newton, dan juga hukum termodinamika sehingga diperoleh persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi. Ketiga persamaan tersebut kemudian direduksi menggunakan teori persamaan lapisan batas sehingga didapatkan persamaan lapisan batas dimensional yang lebih sederhana. Persamaan pembangun dimensional yang diperoleh diubah ke dalam bentuk persamaan pembangun non-dimensional dengan mensubstitusikan variabel non-dimensional, kemudian diubah ke dalam bentuk persamaan similaritas. Persamaan Similaritas yang diperoleh selanjutnya diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode beda hingga orde kedua. Pada penelitian ini hasil perhitungan numerik divisualisasikan berupa grafik dari pengaruh variasi parameter terhadap *physical properties* fluida, yakni: profil kecepatan dan profil temperatur dari fluida.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang yang ada, permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini adalah

1. Bagaimana model matematika dari aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastik bermedan magnet yang melewati silinder sirkular berpori.
2. Bagaimana penyelesaian numerik model matematika aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastik bermedan magnet yang melewati silinder sirkular berpori dengan menggunakan skema Metode Beda Hingga (*Finite Difference Method*).
3. Bagaimana pengaruh parameter viskoelastik, parameter konveksi campuran, medan magnet pada fluida, parameter porositas, dan bilangan Prandtl terhadap profil kecepatan dan profil temperatur.

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini dibatasi sebagai berikut:

1. Objek penelitian adalah silinder sirkular berpori horizontal dengan temperatur dinding konstan.
2. Medan magnet diasumsikan menginduksi fluida.

3. Pada penelitian ini digunakan fluida tak mampu-mampat *incompressible* dan dalam keadaan tunak (*steady*).
4. Domain dari penelitian ini disumsikan *infinite*.

1.4 Tujuan Penelitian

Dari perumusan masalah yang ada, maka tujuan dari penelitian ini adalah

1. Menyusun model matematika dari aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastik bermedan magnet yang melewati silinder sirkular berpori.
2. Mendapatkan solusi numerik dari model aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastik bermedan magnet yang melewati silinder sirkular berpori.
3. Menganalisa pengaruh parameter viskoelastik, parameter konveksi campuran, medan magnet pada fluida, parameter porositas, dan bilangan Prandtl terhadap profil kecepatan dan profil temperatur.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah penelitian ini dapat digunakan sebagai referensi untuk penelitian selanjutnya mengenai pengaplikasian fluida viskoelastik *magnetohydrodynamics* yang melewati silinder sirkular berpori pada proses pengeboran minyak, pengolahan logam, dan pabrik kertas.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

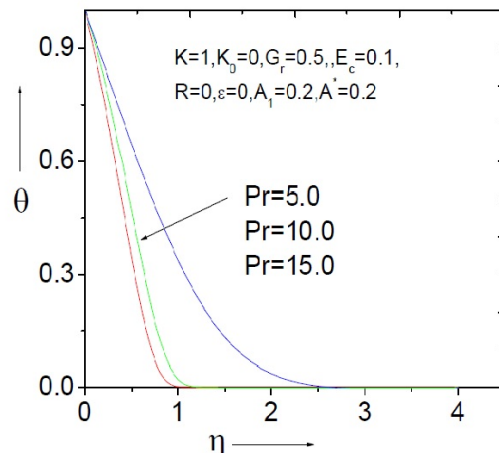
2.1 Penelitian Terdahulu

Penelitian mengenai konveksi campuran untuk fluida viskoelastik dikembangkan oleh para peneliti di bidang teknik. Merkin (1976), Anwar (2008), Hsiao (2010), Gosh dan Shit (2012), serta Kasim (2014) adalah beberapa nama peneliti yang melakukan penelitian di bidang ini.

Ghosh dan Shit (2012) dalam paper *Mixed Convection MHD Flow of Viscoelastic Fluid in a Porous Medium past a Hot Vertical Plate* menjelaskan mengenai aliran fluida viskoelastik dengan memori pendek (dengan menggunakan model fluida Walters' B) yang melewati pelat vertikal panas berpori dengan adanya pengaruh medan magnet. Pada penelitian mereka, persamaan momentum dan energi direduksi menjadi rangkaian persamaan diferensial parsial non linier dengan mempertimbangkan kondisi batas. Persamaan diferensial parsial ditransformasikan ke dalam persamaan diferensial biasa dengan menggunakan teknik perturbasi dan penyelesaian numeriknya menggunakan metode beda hingga implisit linearisasi Newton. Penyelesaian komputasi ditampilkan secara grafik untuk menggambarkan pengaruh dari radiasi panas, pembentukan atau penyerapan panas, parameter viskoelastis, disipasi (energi yang hilang) viskos, Hartmann number, dan parameter permeabilitas. Pada hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa bilangan Prandtl memiliki pengaruh lebih besar pada distribusi temperatur bila dibandingkan dengan parameter viskositas maupun parameter radiasi panas. Salah satu hasil komputasinya dapat dilihat pada Gambar 2.1, pada gambar tersebut, digambarkan antara η = variabel similaritas dan θ = temperatur, dapat dilihat perubahan distribusi temperatur yang semakin kecil akibat dari perubahan bilangan Prandtl (Pr), yakni untuk $Pr = 5.0, 10.0, \text{ dan } 15.0$.

Pada Gambar 2.1 terlihat bahwa grafik bergeser ke kiri dengan meningkatnya bilangan Prandtl. Sehingga dapat disimpulkan bahwa semakin besar bilangan Prandtl maka distribusi temperatur akan semakin lemah, demikian sebaliknya, jika bilangan Prandtl kecil maka distribusi temperatur pun juga akan semakin kuat.

Penelitian dengan menggunakan konveksi campuran pada suatu fluida yang melewati silinder sirkular pernah dilakukan oleh Merkin (1976), Nazar, dkk (2003), dan Anwar, dkk (2008). Pada penelitian yang dilakukan oleh Anwar (2008), tentang



Gambar 2.1: Variasi dari Distribusi Temperatur untuk Pr yang Berbeda (Ghosh dan Shit, 2012)

aliran konveksi pada fluida viskoelastik yang melewati silinder sirkular horizontal dijelaskan penyelesaian persamaan lapisan batas dengan penyelesaian numeriknya menggunakan metode beda hingga Keller Box. Pada penelitian tersebut tidak ada pengaruh porositas pada silinder dan medan magnet pada fluida. Sehingga untuk pengembangannya, dilakukan penelitian dengan menggunakan silinder berpori pada fluida bermedan magnet.

Penyelesaian numerik dari persamaan konveksi lapisan batas adalah dengan mengubah persamaan pembangun non-dimensional ke dalam persamaan similaritas dengan mensubstitusikan fungsi alir (ψ) dan menyederhanakannya sehingga didapatkan persamaan diferensial sederhana. Persamaan diferensial sederhana tersebut selanjutnya akan diselesaikan dengan menggunakan metode numerik seperti halnya penelitian-penelitian yang telah dilakukan oleh peneliti terdahulu, yakni dengan cara mendiskritisasi persamaan similaritas dengan menggunakan metode beda hingga. Metode beda hingga sering digunakan sebagai metode untuk mendapatkan solusi numerik dari suatu model matematika, seperti penelitian yang dilakukan oleh Widodo, B., dkk (2011), Ahmed (2012), dan Kasim (2014).

2.2 Perpindahan Panas Konveksi

Perpindahan panas konvektif atau yang lebih dikenal dengan konveksi merupakan perpindahan panas dari satu tempat ke tempat lain yang disebabkan oleh perbedaan temperatur dan menggunakan fluida sebagai penghantarnya. Bentuk konvektif dari persamaan panas pada umumnya dibagi menjadi dua proses dasar, yakni konveksi aliran bebas dan konveksi aliran paksa. Namun, pada perkembangannya dikenal juga konveksi aliran campuran. Berikut ini adalah penjelasan

mengenai ketiga konveksi tersebut.

2.2.1 Konveksi Bebas (Free Convection Flow)

Konveksi bebas atau natural terjadi pada saat pergerakan fluida yang disebabkan oleh gaya apung (*buoyancy forces*) yang dihasilkan dari perbedaan massa jenis sesuai dengan variasi temperatur pada fluida. Contoh konveksi bebas yaitu asap yang berasal dari api, fenomena ini dapat dilihat ketika suatu hutan terbakar, asap akan naik ke atas karena adanya perbedaan massa jenis antara asap dan udara sekitar (Kasim, 2014)

2.2.2 Konveksi Paksa (Forced Convection Flow)

Konveksi paksa terjadi pada saat fluida dipaksa untuk mengalir di atas permukaan oleh sumber eksternal ataupun internal, sedangkan gaya apung diabaikan. Sumber internal bekerja pada saat fluida mengalir di antara benda solid seperti mengalir melalui pipa, sedangkan sumber eksternal bekerja pada saat fluida mengalir tanpa batasan dari benda solid atau dapat dikatakan pada saat fluida mengalir di atas permukaan pelat datar. Konveksi paksa, dalam pengaplikasiannya pada perpindahan panas, sering digunakan untuk meningkatkan laju perubahan panas.

2.2.3 Konveksi Aliran Campuran (Mixed Convection Flow)

Pada perkembangan perpindahan panas konveksi, dikenal konveksi alir campuran (*mixed convection flows*) atau konveksi campuran (*mixed convection*) yang merupakan kombinasi dari aliran konveksi bebas dan aliran konveksi paksa. Konveksi campuran terjadi pada saat efek dari konveksi paksa pada konveksi bebas menjadi signifikan. Contoh dari konveksi campuran dalam kehidupan sehari-hari dapat kita lihat pada saat asap timbul dari api (konveksi bebas) dan pada saat bersamaan asap juga ditimbulkan oleh faktor eksternal seperti ledakan dari gas silinder (konveksi paksa).

2.3 Fluida Newtonian dan Fluida Non Newtonian

Fluida Newtonian adalah suatu fluida yang memiliki viskositas bernilai konstan (meskipun terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut). Koefisien viskositas dinamik (μ) dari fluida Newtonian bergantung pada temperatur dan tekanan namun tidak bergantung pada besar gradien kecepatan. Secara matematis persamaan dari fluida Newtonian dapat ditulis sebagai berikut:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Sedangkan fluida non-Newtonian adalah fluida yang akan mengalami perubahan viskositas ketika terdapat gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Hal ini yang menyebabkan fluida non-Newtonian tidak memiliki viskositas yang konstan (berkebalikan dengan fluida Newtonian). Berikut ini adalah contoh dari fluida Non-Newtonian dalam kehidupan sehari-hari, yakni fluida plastik padat, fluida eksponensial, fluida viskoelastik (yang memiliki karakteristik viskos dan elastik), fluida tiksotropik atau fluida yang viskositasnya bergantung pada waktu, dan fluida rheopektik atau fluida yang viskositasnya seolah semakin lama semakin besar. Meskipun riset mengenai penyebaran panas pada fluida yang bersifat viskos (Newtonian) sudah banyak dilakukan, riset untuk non-Newtonian sangat kurang. Dari beberapa contoh fluida non-Newtonian, fluida viskoelastik adalah salah satu contoh fluida yang paling menarik untuk diteliti karena selain memiliki sifat viskos (kental) fluida ini juga memiliki sifat elastis yang artinya fluida ini memiliki karakteristik zat padat elastik maupun fluida viskos. Sehingga pada penelitian ini, permasalahan yang mengaplikasikan konsep dari lapisan batas untuk fluida viscoelastis akan dipertimbangkan.

Model sederhana untuk fluida viskoelastik pada awalnya diperkenalkan oleh Rivlin pada tahun 1949. Penelitian untuk fluida viskoelastik juga dilakukan oleh Co dan Bird (1977), mereka mengatakan bahwa fluida tidak akan pernah bergerak sangat jauh atau sangat rapat dari konfigurasi awalnya. Dalam beberapa tahun ini, penelitian untuk permasalahan fluida viskoelastik menjadi sangat penting, mengingat pemanfaatannya yang sangat luas dan bisa digunakan untuk pengembangan ilmu sains maupun teknik. Maka perlu dilakukan penelitian untuk permasalahan fluida viskoelastik. Pada penelitian sebelumnya pemodelan matematika untuk fluida viskoelastik dalam keadaan tunak (dengan memori pendek) digunakan tegangan geser dengan model fluida Walters' B yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\tau = \mu_0(2\mathbf{d}) - k_0(2\hat{\mathbf{d}}) \quad (2.1)$$

dengan $\hat{\mathbf{d}} = V \cdot \nabla(\mathbf{d}) - (\mathbf{d}) \cdot (\nabla V)^T - \nabla V(\mathbf{d})$.

2.4 Magnetohydrodynamics (MHD)

Magnetohydrodynamics (MHD) (dinamika fluida magneto atau *hydromagnetics*) adalah studi mengenai dinamika fluida konduksi listrik. Contoh fluida yang dapat dikonduksi adalah plasma, logam cair, dan air garam atau elektrolit. MHD diperkenalkan dan dikembangkan oleh Hannes Alfvén seorang fisikawan

yang mendapatkan nobel dalam fisika pada tahun 1970. Konsep dasar MHD adalah medan magnet dapat menginduksi arus listrik pada fluida konduktif bergerak yang pada gilirannya menciptakan gaya pada fluida dan juga mengubah medan magnet itu sendiri. Himpunan persamaan yang menggambarkan MHD adalah kombinasi dari persamaan Navier-Stokes pada dinamika fluida dan persamaan Maxwell pada elektromagnetik. Persamaan diferensial MHD harus diselesaikan secara simultan, baik analitik maupun secara numerik.

Bentuk ideal persamaan MHD terdiri dari persamaan fluida, yakni persamaan kontinuitas, persamaan momentum dan persamaan energi, dan persamaan Maxwell. Berikut ini adalah persamaan dasar yang dibutuhkan untuk membuat bentuk ideal persamaan MHD:

Persamaan momentum:

$$\rho \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) = -\nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

Persamaan konservasi massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

Persamaan konservasi energi:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

Persamaan Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Pada permasalahan *magnetohydrodynamics* Persamaan 2.2 pada persamaan Maxwell tidak berlaku sehingga dapat dihilangkan dan Persamaan 2.3 hanya digunakan pada kondisi awal. Selain itu, untuk frekuensi atau pada kecepatan rendah, perpindahan arus bisa diabaikan (Arber, 2013). Sehingga, persamaan umum MHD dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) &= 0 \\
\rho \left(\frac{dv}{dt} \right) &= -\nabla P + J \times B \\
\nabla \times B &= \mu_0 \\
\frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) &= 0
\end{aligned}$$

dan untuk mencari besar medan listrik, digunakan formulasi berikut:

$$E + V \times B = \eta J, \quad (2.4)$$

jika $\eta = 0$ maka persamaan MHD tersebut dikatakan sebagai persamaan MHD ideal.

Pada permasalahan ini, nilai dari bilangan Reynolds yang diambil nilainya sangat kecil, sehingga baik medan listrik maupun medan magnet yang terinduksi diabaikan, sehingga nilai $E \approx 0$ dan $b \approx 0$. (Mangi, 2013)

2.5 Aliran Lapisan Batas (*Boundary Layer*)

Konsep lapisan batas pertama kali dikemukakan pada tahun 1904 oleh Ludwig Prandtl, seorang ahli aerodinamika Jerman. *Boundary layer* atau lapisan batas adalah suatu lapisan tipis pada permukaan padat dimana fluida mengalir. Lapisan batas suatu fluida dipengaruhi oleh viskositas maupun gaya inersia benda tersebut.

Aliran fluida pada lapisan batas menurut perbandingan gaya-gaya inersia dengan viskositasnya secara garis besar terdiri dari tiga jenis aliran, yakni aliran laminar, aliran transisi dan aliran turbulen (Widodo, 2012).

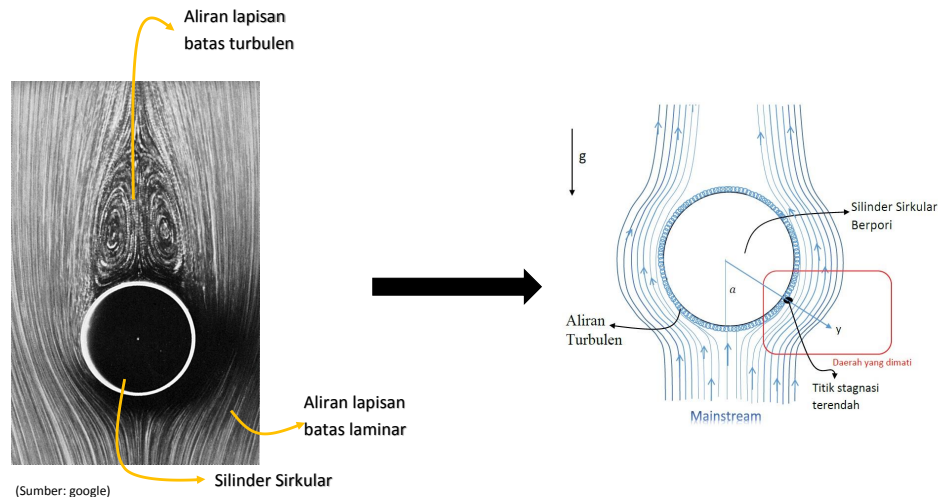
Pada aliran laminar, partikel-partikel zat cair bergerak teratur mengikuti lintasan yang saling sejajar. Aliran ini terjadi apabila bilangan Reynolds kurang dari 500 ($Re < 500$) atau pada saat fluida bergerak dengan kecepatan kecil dan atau fluida memiliki viskositas (kekentalan) yang besar. Aliran transisi adalah aliran yang terjadi antara aliran laminar dan turbulen. Terjadinya masa transisi antara aliran laminar dan turbulen karena adanya perubahan viskositas dan kecepatan yang menyebabkan daya redam terhadap gangguan akan berkurang hingga batas tertentu. Aliran transisi terjadi apabila bilangan Reynolds antara 500 sampai 12.500 ($500 < Re < 12.500$). Sedangkan aliran turbulen terjadi pada saat partikel-partikel zat cair bergerak secara acak atau tidak teratur. Aliran turbulen terjadi apabila bilangan Reynolds lebih dari 12.500 ($Re > 12.500$).

Bilangan Reynolds untuk suatu aliran dapat dihitung menggunakan rumus

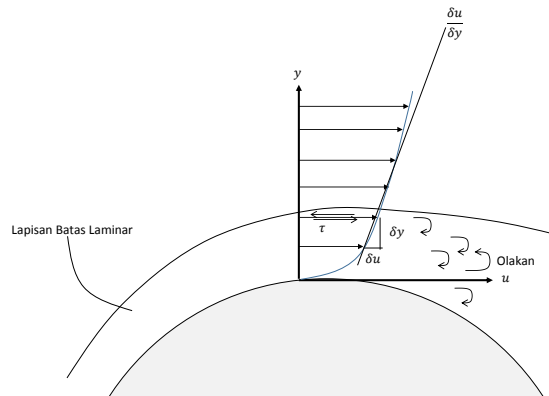
berikut:

$$Re = \frac{U_{\infty} a}{\nu} \quad (2.5)$$

Proses transfer yang berlangsung pada fluida dan benda padat adalah momentum masa dan perpindahan panas. Pada saat memformulasikan hukum kekekalan massa, momentum, dan energi, hukum termodinamik dan gas dinamik juga harus diperhatikan. Sehingga dapat disimpulkan bahwa bersama dengan aliran boundary layer, ada juga *thermal boundary layer* dan pengaruh timbal balik dari lapisan-lapisan batas lain juga harus diperhitungkan. Teori mengenai lapisan batas digunakan pada berbagai ilmu teknik sains, seperti hidrodinamik, aerodinamik, *automobile* dan teknik kelautan. Lapisan batas sendiri adalah suatu lapisan tipis yang terbentuk pada permukaan padat sebagai akibat adanya aliran dari suatu fluida. Beberapa penelitian dengan menggunakan lapisan batas pun sudah sering dilakukan contohnya aliran fluida pada pelat datar (Hussanan, dkk, 2014), aliran fluida pada sirkular silinder (Anwar, dkk, 2008), dan aliran fluida pada bola (Shafie, dkk, 2005). Ilustrasi untuk menjelaskan mengenai aliran fluida aliran fluida yang melewati sebuah silinder sirkular berpori dan membentuk suatu lapisan batas dapat dilihat pada Gambar 2.2. Selain itu, pada Gambar 2.3 dapat dilihat lapisan batas dan viskositas yang terbentuk dari fluida yang melewati suatu permukaan lengkung.



Gambar 2.2: Lapisan Batas yang Terbentuk pada saat Fluida Melewati Sebuah Silinder Sirkular (Anwar, dkk, 2008)



Gambar 2.3: Lapisan Batas yang Terbentuk dari Fluida yang Melewati Suatu Permukaan Lengkung

2.6 Porositas dan Permeabilitas

Porositas adalah kemampuan suatu benda/media berpori (misalnya batuan atau tanah) untuk menyerap dan menahan suatu fluida di dalamnya. Porositas suatu benda erat kaitannya dengan permeabilitas. Permeabilitas pada mekanika fluida (biasanya dilambangkan dengan κ atau K^*) adalah suatu parameter yang menunjukkan kemampuan suatu benda/media berpori (misalnya batuan, tanah, atau benda tidak terkonsolidasi) untuk memungkinkan suatu fluida mengalir melewatinya. Semakin tinggi permeabilitas suatu benda berpori akan memungkinkan fluida dapat bergerak lebih cepat saat melaluinya (Bear, 1972). Parameter permeabilitas pertama kali dikemukakan oleh Henry Darcy pada tahun 1856, seorang ahli hidrologi dari Perancis. Menurut Hukum Darcy, permeabilitas merupakan bagian proporsionalitas konstan yang berhubungan dengan debit (laju aliran) dan sifat fisik fluida (misalnya viskositas), untuk mengukur besar gradien tekanan pada media berpori diterapkan:

$$V = \frac{K^* \Delta P}{\mu \Delta x}$$

Permeabilitas untuk suatu media berpori yang hanya dialiri oleh air, dengan melihat hukum Darcy, didefinisikan:

$$K^* = K_h \frac{\mu}{\rho g}$$

dengan K_h adalah konduktivitas hidrolis.

2.7 Metode Beda Hingga (*Finite Difference Method*)

Dalam matematika, metode beda hingga (FDM) adalah metode numerik untuk mendekati solusi dari persamaan diferensial menggunakan persamaan beda hingga untuk mendekati derivatif. Metode beda hingga secara umum memiliki tiga pendekatan yaitu beda maju, beda pusat dan beda mundur. Berikut ini akan disajikan skema metode beda hingga maju, metode beda hingga mundur dan metode beda hingga pusat:

a. Beda Maju

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

b. Beda Mundur

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x}$$

c. Beda Pusat

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Pada Tesis ini digunakan perhitungan numerik dengan menggunakan skema metode beda pusat untuk orde kedua sebagai berikut:

Beda hingga pusat untuk turunan pertama orde kedua:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y_i} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y^2) \quad (2.6)$$

Beda hingga pusat untuk turunan kedua orde kedua :

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{y_i} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2) \quad (2.7)$$

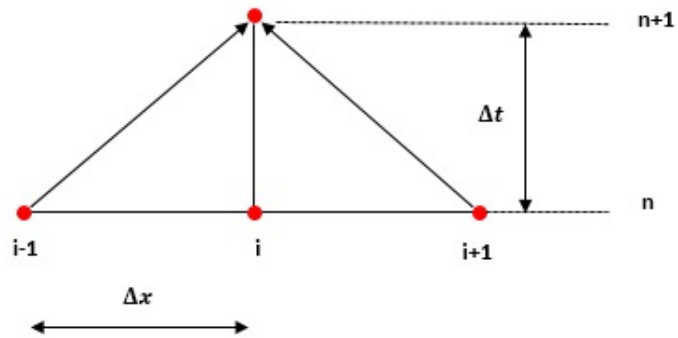
Beda hingga pusat untuk turunan ketiga orde kedua :

$$\left. \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right|_{y_i} = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2\Delta y^3} + O(\Delta y^2) \quad (2.8)$$

Beda hingga pusat untuk turunan keempat orde kedua :

$$\left. \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right|_{y_i} = \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{\Delta y^4} + O(\Delta y^2) \quad (2.9)$$

Stensil metode beda hingga yang digunakan pada penelitian ini ditunjukkan oleh Gambar 2.4 sebagai berikut.



Gambar 2.4: Stensil Metode Beda Hingga Eksplisit

BAB III

METODA PENELITIAN

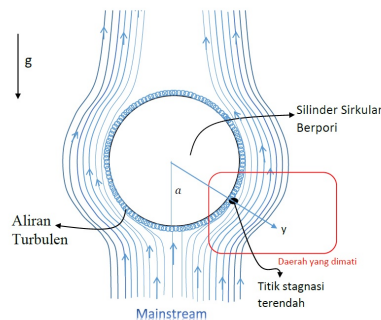
Bab ini menjelaskan tahapan dan tempat penelitian yang dilakukan untuk menyelesaikan permasalahan aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastik bermedan magnet yang melewati silinder sirkular berpori. Adapun tempat dan tahapan penelitian yang digunakan adalah sebagai berikut.

3.1 Tahapan Penelitian

Berdasarkan pada rumusan masalah yang ada, penelitian ini diselesaikan dengan menggunakan tiga tahap, yaitu: tahap analisa awal atau tahap analisa permasalahan, tahap implementasi, dan tahap penyelesaian dan analisa akhir.

3.1.1 Tahap Analisa Permasalahan

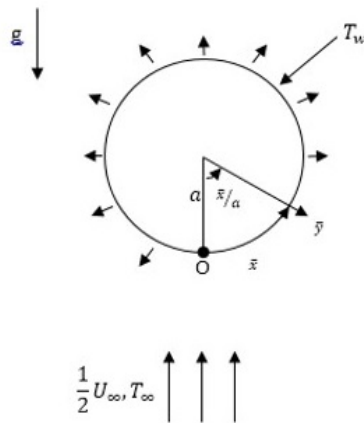
Fluida viskoelastik pada penelitian ini memiliki pengaruh dominan, sehingga penelitian ini dilakukan di daerah dekat dengan *bluff body*. Pada umumnya, penelitian yang dilakukan disekitar *bluff body* menggunakan teori persamaan lapisan batas. Sehingga, pada penelitian ini model matematika yang dibangun adalah model matematika di daerah lapisan batas dari silinder sirkular berpori, yakni disekitar titik stagnasi terendah ($x \approx 0$). Titik stagnasi terendah adalah titik dimana lapisan batas berada paling dekat dengan *bluff body*. Gambaran area yang diamati pada penelitian ini, diilustrasikan pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1: Gambaran Daerah Pengamatan

Berdasarkan pada Gambar 3.1, dapat digambarkan keadaan fisik dan sistem koordinat dari permasalahan aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastik MHD yang melewati silinder sirkular berpori seperti yang ditunjukkan oleh Gambar

3.2. Pada gambar tersebut dapat diketahui bahwa fluida viskoelastik bergerak dari bawah ke atas melewati sebuah silinder sirkular berpori berjari-jari a dengan kecepatan *ambient fluid* U_∞ dan temperatur *ambient fluid* T_∞ . Diasumsikan bahwa temperatur pada permukaan silinder (T_w) konstan, dengan keadaan jika $T_w > T_\infty$ maka silinder dalam keadaan panas sehingga aliran konveksi membantu aliran fluida dan jika $T_w < T_\infty$ maka silinder dalam keadaan dingin sehingga menghambat aliran fluida.



Gambar 3.2: Model Fisik dan Sistem Koordinat untuk Permasalahan Aliran MHD pada Silinder Sirkular Berpori

Berdasarkan penjelasan tersebut, untuk menjawab rumusan masalah pada Bab I, maka dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Studi literatur
2. Menganalisa karakteristik dari fluida dan silinder sirkular berpori.
3. Penurunan persamaan konservasi massa, hukum Newton II, dan Hukum Termodinamika I untuk mendapatkan persamaan pembangun.
4. Persamaan Pembangun disederhanakan dengan menggunakan pendekatan Boussinesq dan teori lapisan batas sehingga diperoleh persamaan pembangun dimensional dari aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastik bermedan magnet yang melewati silinder sirkular berpori.
5. Menentukan kondisi batas (*boundary condition*).

3.1.2 Tahap Implementasi

Pada tahap ini, peneliti mengimplementasikan metode yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan ini. Persamaan yang didiskritisasi dengan metode

beda hingga orde kedua adalah persamaan similaritas. Persamaan similaritas didapatkan dengan melakukan tahapan sebagai berikut:

1. Mengubah persamaan dimensional ke dalam bentuk persamaan non-dimensional dengan mensubstitusikan variabel non-dimensional.
2. Persamaan non-dimensional selanjutnya diubah menjadi persamaan similar dengan mensubstitusi fungsi aliran (*stream function*).

Persamaan similaritas yang diperoleh adalah persamaan similaritas pada titik stagnasi terendah ($x \approx 0$) sebagai berikut:

$$0 = f''' + ff'' - f'^2 + 1 - (M + \phi)(f' - 1) + \lambda\theta - K(2f'f''' - ff^{(4)} - f''^2) \quad (3.1)$$

$$0 = \frac{1}{Pr}\theta'' + f\theta' \quad (3.2)$$

Implementasi metode beda hingga eksplisit dengan skema orde kedua dilakukan dengan cara mendiskritisasikan model matematika pada Persamaan 3.1 dan 3.2.

3.1.3 Tahap Penyelesaian dan Analisa Akhir

Pada tahap ini, dilakukan tahapan-tahapan sebagai berikut:

1. Hasil diskritisasi Persamaan 3.1 dan 3.2 diselesaikan secara numerik dengan menggunakan program Matlab. Algoritma yang digunakan pada perhitungan ini dapat dilihat pada Algorithm 1.
2. Dilakukan variasi pada parameter viskoelastik (K), parameter konveksi campuran (λ), medan magnet pada fluida (M), parameter porositas (ϕ), dan bilangan Prandtl (Pr) agar diketahui pengaruhnya terhadap karakteristik dari fluida, yakni: profil kecepatan dan profil temperatur.
3. Visualisasi hasil numerik dilakukan untuk mendukung hasil-hasil pengukuran, terutama visualisasi aliran yang terbentuk di sekitar silinder sirkular berpori. Proses visualisasi dilakukan dengan menggunakan software Matlab.
4. Analisa hasil simulasi numerik dari pengaruh parameter terhadap karakteristik dari fluida.

BAB IV

MODEL MATEMATIKA

Pada tesis ini dibangun model matematika dari aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastik bermedan magnet yang melewati silinder sirkular berpori. Sesuai dengan gambaran area yang diamati, model fisik dari permasalahan ini, yang ditunjukkan pada Gambar 3.1 dan Gambar 3.2, dan dengan menggunakan hukum konservasi massa, hukum kedua Newton, dan hukum termodinamika dapat dibangun persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi.

4.1 Persamaan Pembangun

Persamaan pembangun yang digunakan pada penelitian ini adalah persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi yang diuraikan dari hukum konservasi, hukum kedua Newton, dan Hukum Termodinamika sebagai berikut.

4.1.1 Persamaan Kontinuitas

Sesuai permasalahan aliran konveksi campuran fluida viskoelastik bermedan magnet yang melewati silinder berpori, dari suatu lapisan batas yang terbentuk dapat dikonstruksikan persamaan kontinuitas. Menurut Munson, dkk (2002), sebuah sistem didefinisikan sebagai sebuah kumpulan dari isi yang tidak berubah. Maka, prinsip kekekalan massa untuk sebuah sistem dinyatakan secara sederhana sebagai laju terhadap waktu dari massa sistem adalah nol atau secara matematis dapat ditulis sebagai berikut .

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = 0$$

dengan massa sistem lebih umum dinyatakan sebagai berikut:

$$M_{sys} = \int_{sys} \rho \, dV \quad (4.1)$$

dengan pengintegralan meliputi seluruh volume sistem. Persamaan 4.1 menyatakan bahwa massa sistem sama dengan jumlah dari seluruh perkalian kerapatan yang merupakan unsur volume dari isi sistemnya. Untuk sebuah sistem dan sebuah volume atur tetap dan tidak berdeformasi yang berimpit pada suatu saat yang sama, berlaku teorema pengangkutan Reynolds, yaitu laju perubahan massa terhadap

waktu pada suatu sistem yang dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{DM_{sys}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\mathcal{V} + \int_S \rho \bar{n} \cdot \mathbf{V} dA$$

sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\mathcal{V} + \int_S \rho \bar{n} \cdot \mathbf{V} dA = 0$$

atau dapat ditulis:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\mathcal{V} = - \int_S \rho \mathbf{V} \bar{n} dA \quad (4.2)$$

Persamaan tersebut menunjukkan rata-rata perubahan total massa dalam kontrol volume. Integral permukaan dapat diubah ke bentuk integral volume (\mathcal{V}) dengan menggunakan teorema differensi Gauss sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \nabla(\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = - \int_S (\rho \mathbf{V}) \bar{n} dA$$

Sehingga persamaan 4.2 dapat disederhanakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\mathcal{V} &= - \int_V \nabla(\rho \cdot \mathbf{V}) d\mathcal{V} \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\mathcal{V} + \int_V \nabla(\rho \cdot \mathbf{V}) d\mathcal{V} &= 0 \\ \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_V \nabla(\rho \cdot \mathbf{V}) d\mathcal{V} &= 0 \\ \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \mathbf{V}) \right) d\mathcal{V} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \rho + \frac{\partial v}{\partial y} \rho &= 0 \end{aligned}$$

Karena fluida yang digunakan pada penelitian ini diasumsikan adalah fluida yang bersifat tak mampu-mampat dan dalam kondisi tunak (*steady*), yaitu aliran fluida tidak bergantung terhadap waktu, maka mengakibatkan ρ bernilai konstan dan $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Sehingga diperoleh persamaan kontinuitas sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.3)$$

atau dapat ditulis dalam bentuk vektor sebagai berikut:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (4.4)$$

4.1.2 Persamaan Momentum

Aliran dari fluida pada permasalahan ini dianggap bergerak dari bawah ke atas melewati sebuah silinder sirkular berpori dengan jari-jari a yang terbenam pada fluida tak mampu-mampat yang kental dan temperatur di sekitar silinder T_∞ . Aliran fluida ini tentunya juga menunjukkan adanya gerakan dari partikel-partikel fluida tersebut. Kemudian, apabila ada suatu partikel yang bergerak maka berlaku hukum kedua Newton yang digunakan sebagai dasar penurunan persamaan momentum. Hukum kedua Newton dari gerak sebuah sistem adalah laju perubahan terhadap waktu dari momentum linier sistem sama dengan jumlah dari gaya-gaya luar yang bekerja pada sistem. (Munson dkk, 2002)

Karena momentum adalah massa dikalikan dengan kecepatan, maka momentum dari sebuah partikel kecil pada massa sistem (Persamaan 4.1) adalah $\mathbf{V}\rho d\mathcal{V}$. Jadi, momentum dari seluruh sistem dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V}$$

sehingga hukum kedua Newton secara matematis dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} = \sum F$$

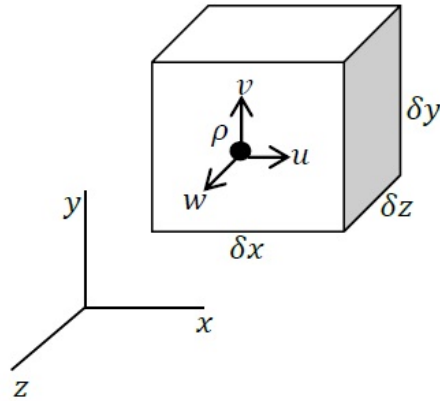
atau dengan menggunakan teorema pengangkutan Reynold:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} + \int_S \mathbf{V}\rho \mathbf{V} \cdot \bar{n} dA = \sum F$$

maka diperoleh persamaan momentum dari sistem sebagai berikut:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{V} d\mathcal{V} + \int_S \mathbf{V}\rho \mathbf{V} \cdot \bar{n} dA$$

dengan $\mathbf{V} \cdot \bar{n}$ merupakan besarnya proyeksi kecepatan fluida yang tegak lurus dengan permukaan volume kendali. Bentuk integral permukaan kendali menunjukkan *flux* momentum yang melewati permukaan volume kendali fluida yang masuk maupun keluar. Gambaran mengenai volume kendali dalam bentuk kubikal beserta elemen massa dari volume kendali dapat dilihat pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1: Volume Kendali

Digunakan langkah yang sama dengan persamaan kontinuitas, sehingga didapatkan persamaan momentum sebagai berikut:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{V} + \rho \mathbf{V}(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \sum F$$

Pada penelitian ini diasumsikan fluida yang digunakan adalah fluida *incompressible* dan dalam kondisi steady, sehingga didapatkan persamaan momentum untuk fluida *incompressible* dalam keadaan *steady* sebagai berikut:

$$\rho \mathbf{V}(\nabla \cdot \mathbf{V}) = \sum F$$

dengan $\sum F$ adalah gaya yang bekerja pada volume kendali (*volume force*). Pada penelitian ini untuk aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastik *magnetohydrodynamics* yang melewati sebuah silinder sirkular berpori, berlaku gaya sebagai berikut, gaya tekan (F_P), gaya kental atau viskos (F_τ), gaya gravitasi (F_g), gaya akibat adanya *magnetohydrodynamics* (F_M), dan gaya akibat adanya porositas pada silinder (F_ϕ). Sehingga didapatkan persamaan momentum sebagai berikut:

$$\rho \mathbf{V}(\nabla \cdot \mathbf{V}) = F_P + F_\tau + F_g + F_M + F_\phi \quad (4.5)$$

Selanjutnya, menurut Persamaan 4.5 dapat dibangun persamaan momentum ke arah sumbu- x dan sumbu- y sebagai berikut:

Persamaan momentum ke arah sumbu- x :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x \quad (4.6)$$

Persamaan momentum ke arah sumbu- y :

$$\rho(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + F_y \quad (4.7)$$

dengan F_x adalah F_g , F_M , dan F_ϕ yang bekerja pada sumbu- x dan F_y adalah F_g , F_M , dan F_ϕ yang bekerja pada sumbu- y .

4.1.3 Persamaan Energi

Pada penelitian ini fluida mengalir dari bawah ke atas, gerakan fluida ini disebabkan oleh bagian bawah fluida tersebut terkena panas akibat dari adanya pengaruh konveksi campuran, yakni panas timbul secara alami dan ada sumber panas lain yang menyebabkan adanya panas paksa. Kemudian, fluida tersebut mengalami perbedaan temperatur sehingga mengakibatkan perbedaan kerapatan. Sebagai akibat dari aliran fluida dengan temperatur yang berbeda ini menimbulkan adanya perpindahan energi yang berasal dari kalor antara media dengan fluida. Fenomena ini menunjukkan berlakunya hukum Termodinamika I mengenai energi total yang tersimpan dari suatu sistem. Persamaan energi adalah pernyataan mengenai hukum pertama termodinamika, dengan hukum pertama termodinamika untuk sebuah sistem adalah laju pertambahan terhadap waktu dari energi tersimpan total dari suatu sistem sama dengan laju netto pertambahan perpindahan energi dari kalor ke dalam sistem ditambah laju netto pertambahan energi dari kerja yang dipindahkan ke dalam sistem. Secara matematis pernyataan tersebut dapat ditulis sebagai berikut (Munson dkk, 2002).

$$\frac{D}{Dt} \int_{sistem} e\rho d\mathcal{V} = (\sum \dot{Q}_{in} - \sum \dot{Q}_{out})_{sistem} + (\sum \dot{W}_{in} - \sum \dot{W}_{out})_{sistem}$$

atau dapat ditulis:

$$\frac{D}{Dt} \int_{sistem} e\rho d\mathcal{V} = (\dot{Q}_{in} + \dot{W}_{in})_{sistem} \quad (4.8)$$

dengan e adalah energi total per satuan massa yang tersimpan dari setiap partikel yang besarnya: $e = e_d + \frac{v^2}{2} + gh$. Berdasarkan pada sistem dan kandungan volume atur berimpit yang tetap dan tak berdeformasi, dapat disimpulkan teorema transport Reynold sebagai berikut.

$$\frac{D}{Dt} \int_{sys} e\rho d\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V e\rho d\mathcal{V} + \int_S e\rho \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{n}} dA \quad (4.9)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan 4.9 ke dalam Persamaan 4.8, diperoleh bentuk persamaan volume kendali dan permukaan kendali untuk hukum pertama Termodinamika sebagai berikut.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V e\rho dV + \int_S e\rho\mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{n}} dA = (\dot{Q}_{in} + \dot{W}_{in})_{sistem} \quad (4.10)$$

Pada penelitian ini, diasumsikan volume kendali dalam keadaan diam sehingga tidak ada usaha yang dilakukan oleh sistem ($\dot{W} = 0$), sehingga Persamaan 4.10 dapat ditulis sebagai berikut.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V e\rho dV + \int_S e\rho\mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{n}} dA = (\dot{Q}_{in})_{sistem}$$

atau dalam bentuk volume kendali dapat ditulis sebagai berikut

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V e\rho dV + \int_V \nabla \cdot (e\rho\mathbf{V}) dV = \int_V \nabla \cdot (k\nabla T) dV + \int_V \dot{q} dV$$

Karena pada penelitian ini pembentukan panas (*heat generation*) dari benda diabaikan, maka menyebabkan nilai dari $\dot{q} = 0$. Sehingga diperoleh persamaan berikut.

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e\mathbf{V}) \right) = \nabla \cdot (k\nabla T) \quad (4.11)$$

dengan $\nabla \cdot (k\nabla T)$ adalah konduksi panas yang terjadi pada volume kendali.

Berdasarkan sifat divergensi, diketahui bahwa:

$$\nabla \cdot e\mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot (\nabla e) + e(\nabla \cdot \mathbf{V})$$

dengan mensubstitusikan Persamaan 4.4 diperoleh

$$\nabla \cdot e\mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot (\nabla e)$$

Sehingga Persamaan 4.11 dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla e) \right) = \nabla \cdot (k\nabla T) \quad (4.12)$$

Pada Termodinamika, variasi tekanan pada aliran tidak cukup berpengaruh dan dapat diabaikan karena tekanan dalam sistem konstan, sehingga perubahan dari energi e dapat didekati dengan perubahan entalpi \hat{h} , dengan $\hat{h} = e + \frac{P}{\rho}$, sebagai

berikut

$$\partial e = \partial \hat{h} - \partial \left(\frac{P}{\rho} \right) \approx \partial \hat{h} \quad (4.13)$$

Substitusikan Persamaan 4.13 ke dalam Persamaan 4.12, maka diperoleh persamaan berikut

$$\rho \left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla \hat{h}) \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (4.14)$$

dengan mensubstitusi $\partial \hat{h} \approx C_p \partial T$ ke Persamaan 4.14, maka diperoleh persamaan berikut

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla T) \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (4.15)$$

dengan

$$\mathbf{V} \cdot (\nabla T) = u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}$$

dan

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (k \nabla T) &= k \nabla \cdot (\nabla T) \\ &= k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

maka Persamaan 4.15 dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \\ \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{k}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

dengan mengambil $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$, tidak ada perubahan terhadap waktu ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$), dan $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$, maka persamaan energi pada keadaan tunak diperoleh sebagai berikut:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.16)$$

BAB V

PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA

Pada Bab IV telah didapatkan persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi. Pada persamaan pembangun tersebut, persamaan momentum yang dihasilkan masih belum sederhana sehingga pada bab ini dilakukan penyederhanaan persamaan momentum sehingga didapatkan persamaan pembangun dimensional dan kondisi batas dari permasalahan ini. Persamaan pembangun dimensional yang diperoleh, selanjutnya diubah ke dalam bentuk dimensional dan kemudian diubah ke dalam bentuk persamaan similaritas. Persamaan similaritas yang terbentuk adalah persamaan lapisan batas di sekitar titik stagnasi bawah ($x \approx 0$). Persamaan similaritas tersebut selanjutnya diselesaikan dengan menggunakan metode beda hingga orde kedua. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan MATLAB untuk mengetahui gambaran karakteristik dari fluida viskoelastik *magneto-hydrodynamics* yang melewati silinder sirkular berpori dengan adanya konveksi alir campuran.

5.1 Penurunan Persamaan Pembangun

Pada bab ini dibahas mengenai penurunan persamaan pembangun secara lebih jauh, yakni persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan energi dalam kondisi tunak dan tak mampu-mampat yang telah diperoleh pada bab sebelumnya. Persamaan pembangun dimensional yang diperoleh nantinya diubah ke dalam bentuk persamaan non-dimensional. Setelah itu persamaan pembangun non-dimensional diubah ke dalam bentuk persamaan similaritas dan diselesaikan dengan metode numerik.

5.1.1 Penurunan Persamaan Momentum

Pada bab sebelumnya telah dibahas mengenai pembangunan persamaan momentum dan menurut Persamaan 4.6 dan 4.7 telah didapatkan persamaan momentum pada sumbu- x dan sumbu- y sebagai berikut.

Persamaan momentum ke arah sumbu- x :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x \quad (5.1)$$

Persamaan momentum ke arah sumbu- y :

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + F_y \quad (5.2)$$

Pada pembangunan persamaan momentum dengan kondisi tunak, digunakan tegangan geser untuk model fluida Walters' B. Model fluida Walters' B adalah model fluida yang digunakan untuk aliran fluida dengan memori pendek. Persamaan konsekutif dari variabel Cauchy stress tensor untuk fluida Waters' B didefinisikan sebagai berikut:

$$\tau = \mu_0(2\mathbf{d}) - k_0(\widehat{\mathbf{d}}) \quad (5.3)$$

Pada permasalahan ini, variabel turunan dari upper convected $\widehat{\mathbf{d}}$ diberikan sebagai berikut:

$$\widehat{\mathbf{d}} = \mathbf{V} \cdot \nabla(\mathbf{d}) - (\mathbf{d}) \cdot (\nabla \mathbf{V})^T - \nabla \mathbf{V}(\mathbf{d}) \quad (5.4)$$

Sesuai dengan Persamaan 5.4, didapatkan $2\widehat{\mathbf{d}}$ sebagai berikut:

$$2\widehat{\mathbf{d}} = \mathbf{V} \cdot \nabla(2\mathbf{d}) - (2\mathbf{d}) \cdot (\nabla \mathbf{V})^T - \nabla \mathbf{V}(2\mathbf{d}) \quad (5.5)$$

sehingga Persamaan tegangan geser 5.3 untuk kondisi tunak dapat ditulis sebagai berikut:

$$\tau_{ij} = \mu_0(2\mathbf{d}_{ij}) - k_0(\mathbf{V} \cdot \nabla(2\mathbf{d}_{ij}) - (2\mathbf{d}_{ij}) \cdot (\nabla \mathbf{V})^T - \nabla \mathbf{V} \cdot (2\mathbf{d}_{ij})) \quad (5.6)$$

dengan:

$$\mathbf{d}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_j} \right], i = x, y; \text{ dan } j = x, y \quad (5.7)$$

dengan menggunakan Persamaan 5.6 dan 5.7 didapatkan komponen tegangan geser sebagai berikut:

1. untuk $i = x, j = x$, diperoleh

$$\begin{aligned} \tau_{xx} = & 2\mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - k_0 \left[2u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \right. \\ & \left. 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

2. untuk $i = x, j = y$ (τ_{xy}) dan $i = y, j = x$ (τ_{yx}) bernilai sama, sehingga diperoleh

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - k_0 \left[u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (5.9)$$

3. untuk $i = y, j = y$, diperoleh

$$\tau_{yy} = 2\mu_0 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) - k_0 \left[2u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (5.10)$$

Kemudian Persamaan 5.8, 5.9, dan 5.10 diturunkan terhadap x atau y agar Persamaan 5.1 dan 5.2 dapat terpenuhi. Sehingga didapatkan penurunan sebagai berikut:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} = 2\mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - k_0 \left(-6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left(u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - k_0 \left(u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = & 2\mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left(2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \right. \\ & \left. 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Substitusikan Persamaan 5.11 sampai 5.14 ke Persamaan 5.1 dan 5.2, sehingga didapatkan komponen persamaan momentum pada sumbu- x dan sumbu- y sebagai berikut,

Persamaan momentum sumbu- x :

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[2\mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - k_0 \left(-6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] + \\ & \left[\mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left(u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \right. \right. \\ & \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \\ & \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \\ & \left. \left. 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] + F_x \end{aligned}$$

Persamaan momentum sumbu- y

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[\mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - k_0 \left(u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \right. \right. \\ & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\ & \left. \left. 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] + \\ & \left[2\mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left(2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] + F_y \end{aligned}$$

Penyederhanaan dilakukan pada persamaan momentum sumbu- x dan sumbu- y dengan mensubstitusikan Persamaan 4.3, sehingga diperoleh:

Persamaan momentum pada sumbu- x sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\ & k_0 \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \right. \\ & \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\ & \left. 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] + F_x \end{aligned} \quad (5.15)$$

Persamaan momentum pada sumbu- y sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left(u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \right. \\ & v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \\ & \left. \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + F_y \end{aligned} \quad (5.16)$$

Pada permasalahan aliran fluida, aliran selalu dipengaruhi oleh gaya yang bekerja pada fluida. Sehingga, pada permasalahan aliran fluida yang dipengaruhi oleh medan magnet (MHD), menurut Hsiao (2010), dan permasalahan aliran fluida yang melewati benda berpori, menurut hukum Darcy, gaya yang bekerja pada fluida $F = (F_x, F_y, 0)$ didefinisikan oleh:

$$\begin{aligned} F &= F_g + F_M + F_\phi \\ F &= \rho \mathbf{g} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{\mu_0}{K^*} \mathbf{V} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Menurut Hukum Ohm, kerapatan arus listrik diberikan sebagai berikut:

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (5.18)$$

Pada penelitian ini, baik medan listrik maupun medan magnet yang terinduksi diabaikan karena bilangan Reynold magnetik yang diambil sangat kecil, Mangi (2013), sehingga $E \approx 0$ dan $b \approx 0$. Berdasarkan pernyataan tersebut, maka Persamaan 5.18 menjadi:

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \quad (5.19)$$

Substitusikan Persamaan 5.19 ke dalam Persamaan 5.17, sehingga didapatkan persamaan berikut:

$$F = \rho \mathbf{g} + \sigma(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B} + \frac{\mu_0}{K^*}(-u, -v, 0) \quad (5.20)$$

dengan:

$$(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} \times \mathbf{B}_0 \quad (5.21)$$

Hasil perhitungan Persamaan 5.21, didapatkan:

$$(\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 = (-uB_0^2, -vB_0^2, 0) \quad (5.22)$$

sehingga Persamaan 5.20 dapat ditulis sebagai berikut:

$$F = \rho \mathbf{g} + \sigma(-uB_0^2, -vB_0^2, 0) + \frac{\mu_0}{K^*}(-u, -v, 0) \quad (5.23)$$

Secara umum pada aliran dua dimensi, gaya gravitasi didefinisikan oleh $\mathbf{g} = (-g_x, -g_y, 0)$. Nilai negatif pada g_x dan g_y karena aliran yang melewati silinder berpori mengalir dari bawah sehingga melawan arah gravitasi. Sehingga persamaan 5.23 dapat ditulis sebagai berikut:

$$F = \rho(-g_x, -g_y, 0) + \sigma(-uB_0^2, -vB_0^2, 0) + \frac{\mu_0}{K^*}(-u, -v, 0)$$

atau didapatkan gaya pada sumbu- x (F_x) dan gaya pada sumbu- y (F_y) sebagai berikut.

$$F_x = -\rho g_x - \sigma(uB_0^2) - \frac{\mu_0}{K^*}u \quad (5.24)$$

dan

$$F_y = -\rho g_y - \sigma vB_0^2 - \frac{\mu_0}{K^*}v \quad (5.25)$$

Substitusikan Persamaan 5.24 dan 5.25 ke dalam Persamaan 5.15 dan Persamaan 5.16, sehingga diperoleh persamaan momentum sebagai berikut.

Persamaan momentum sumbu- x :

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\
&\frac{k_0}{\rho} \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \right. \\
&\frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\
&\left. 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] - \mathbf{g}_x - \frac{1}{\rho} \sigma u B_0^2 - \frac{\mu_0}{\rho K^*} u
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Persamaan momentum sumbu- y

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \right. \\
&v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \\
&\frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \left. 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] - \\
&\mathbf{g}_y - \frac{1}{\rho} \sigma v B_0^2 - \frac{\mu_0}{\rho K^*} v
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Persamaan momentum yang dihasilkan, yakni Persamaan 5.26 dan 5.27, terlalu rumit untuk diselesaikan, sehingga digunakan teori lapisan batas untuk mereduksi kerumitan dari persamaan tersebut. Menurut teori Prandtl, kerumitan persamaan pembangun dapat disederhanakan untuk menghasilkan kumpulan persamaan pendekatan atau disebut dengan persamaan lapisan batas (Bejan, 2004). Persamaan momentum lapisan batas diperoleh dengan menyederhanakan order magnitud untuk tiap suku dari persamaan yang sudah didapatkan. Proses penyederhanaan menggunakan teori lapisan batas dapat dilihat pada Ozisik (1985). Persamaan momentum 5.26 dan 5.27 diukur ke dalam bentuk unit 1 dan Δ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
u \sim 1, \quad x \sim 1, \quad v \sim \Delta, \quad y \sim \Delta, \quad \frac{k_0}{\rho} \sim \Delta^2, \quad \frac{\mu_0}{\rho} \sim \Delta^2, \\
g \sim 1, \quad \sigma \sim \frac{1}{\Delta^2}, \quad B_0^2 \sim \Delta^2, \quad K^* \sim \Delta^2
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Hasil perhitungan dari proses order magnitud menyebabkan persamaan momentum pada sumbu- y hilang karena pada pendekatan persamaan lapisan batas menunjukkan momentum pada sumbu- y bersifat konstan di seluruh lapisan batas.

Sehingga didapatkan persamaan momentum sebagai berikut:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] - \mathbf{g}_x - \frac{1}{\rho} \sigma u B_0^2 - \frac{\nu}{K^*} u \quad (5.29)$$

dengan $\nu = \frac{\mu_0}{\rho}$ adalah viskositas kinematik.

Pada permasalahan ini dengan adanya pengaruh aliran konvektif, maka tekanan P pada Persamaan momentum 5.29 adalah kombinasi dari tekanan hidrostatis (P_h) dan tekanan dinamik (P_d). Sehingga tekanan P dapat ditulis sebagai berikut:

$$P = P_h + P_d \quad (5.30)$$

Tekanan hidrostatis (P_h) adalah tekanan yang berasal dari fluida di sekitar silinder berpori dengan medan gravitasi diberikan sebagai berikut:

$$\nabla P_h = \rho_\infty \mathbf{g}, \quad (5.31)$$

dengan ρ_∞ adalah densitas dari fluida di sekitar silinder berpori (*ambient fluid*). Karena gravitasi bergerak ke bawah dan sumbu- x bergerak ke atas, maka gradien dari tekanan adalah

$$\frac{\partial P_h}{\partial x} = -\rho_\infty \mathbf{g}_x \quad (5.32)$$

Sehingga turunan tekanan P pada Persamaan 5.30 terhadap x $\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial P_d}{\partial x} - \frac{\partial P_h}{\partial x} = -\frac{\partial P_d}{\partial x} + \rho_\infty \mathbf{g}_x \quad (5.33)$$

Substitusi Persamaan 5.33 ke Persamaan momentum 5.29, sehingga didapatkan persamaan momentum sebagai berikut:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_d}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \mathbf{g}_x \frac{1}{\rho} (\rho_\infty - \rho) - \frac{1}{\rho} \sigma u B_0^2 - \frac{\nu}{K^*} u \quad (5.34)$$

Pada dinamika fluida, pendekatan Boussinesq digunakan pada aliran konveksi natural. Karena pada penelitian ini digunakan konveksi alir campuran yang merupakan perpaduan dari konveksi natural dan konveksi paksa, maka pendekatan Boussinesq juga berlaku pada penelitian ini. Menurut pendekatan Boussinesq, perbedaan densitas yang cukup kecil dapat diabaikan, kecuali pada saat dikalikan dengan gravitasi (g). Pendekatan ini digunakan untuk mendekati perbedaan densitas yang menyebabkan aliran terjadi pada interaksi antara gaya gravitasi dan gradien tekanan hidrostatis, sesuai dengan pengaruh suhu murni. Nilai maksimum untuk $(T - T_\infty)$ diasumsikan kecil dan sesuai dengan deret Taylor, didefinisikan sebagai berikut (Leal, 1992),

$$\frac{\rho_\infty}{\rho} = 1 + \beta(T - T_\infty) + O(T - T_\infty)^2$$

atau persamaan tersebut juga dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\rho_\infty - \rho}{\rho} = \beta(T - T_\infty) \quad (5.35)$$

dan menurut Nazar (2003), percepatan gravitasi untuk alian pada sumbu- x didefinisikan sebagai berikut:

$$g_x = -g \sin \frac{x}{a} \quad (5.36)$$

dengan a adalah jari-jari silinder sirkular berpori.

Substitusi Persamaan 5.35 dan 5.36 ke dalam Persamaan 5.34, sehingga didapatkan persamaan momentum sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_d}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + g\beta(T - T_\infty) \sin \left(\frac{x}{a} \right) - \\ &\quad \frac{1}{\rho} \sigma u B_0^2 - \frac{\nu}{K^*} u \end{aligned} \quad (5.37)$$

Persamaan 5.37 dievaluasi di luar lapisan batas, sehingga di dapatkan (Aurangzaib, dkk., 2013):

$$-\frac{\partial P_d}{\partial x} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \sigma u_e B_0^2 + \frac{\nu}{K^*} u_e$$

dengan $u_e(x)$ adalah kecepatan di luar daerah lapisan batas. Sehingga Persamaan

5.37 dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \mathbf{g} \beta (T - T_\infty) \sin \left(\frac{x}{a} \right) - \\
&\quad \frac{1}{\rho} \sigma B_0^2 (u - u_e) - \frac{\nu}{K^*} (u - u_e)
\end{aligned} \tag{5.38}$$

5.2 Persamaan Non-dimensional

Berdasarkan pada persamaan kontinuitas dan persamaan energi yang telah diperoleh pada bab sebelumnya, yakni: Persamaan 4.3 dan 4.16, serta hasil penyederhanaan persamaan momentum pada Persamaan 5.38, maka diperoleh Persamaan Pembangun untuk aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastik bermedan magnet yang melewati silinder sirkular berpori sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{5.39}$$

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \mathbf{g} \beta (T - T_\infty) \sin \left(\frac{x}{a} \right) - \\
&\quad \frac{1}{\rho} \sigma B_0^2 (u - u_e) - \frac{\nu}{K^*} (u - u_e)
\end{aligned} \tag{5.40}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{5.41}$$

sehingga Persamaan Pembangun dimensional untuk permasalahan ini dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \bar{u}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{x}} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[\bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] + \mathbf{g} \beta (T - T_\infty) \sin \left(\frac{\bar{x}}{a} \right) - \\
&\quad \frac{1}{\rho} \sigma B_0^2 (\bar{u} - \bar{u}_e) - \frac{\nu}{K^*} (\bar{u} - \bar{u}_e)
\end{aligned} \tag{5.43}$$

$$\bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} \tag{5.44}$$

dengan kondisi batas diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \bar{u} = \bar{v} = 0, T = T_w, \text{ untuk } \bar{y} = 0, \\ \bar{u} = \bar{u}_e(x), \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0, T = T_\infty, \text{ untuk } y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.45)$$

Persamaan pembangun dimensional tersebut diubah ke dalam persamaan pembangun non-dimensional dengan mensubstitusikan variabel non-dimensional. Variabel non-dimensional pada penelitian ini diberikan sebagai berikut (Anwar, 2008):

$$\begin{aligned} x = \frac{\bar{x}}{a}, y = Re^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\bar{y}}{a} \right), u = \frac{\bar{u}}{U_\infty}, \\ v = Re^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\bar{v}}{U_\infty} \right), u_e = \frac{\bar{u}_e}{\bar{x}} U_\infty, \theta = \frac{(T - T_\infty)}{(T_w - T_\infty)} \end{aligned} \quad (5.46)$$

dengan bilangan Reynold (Re) didefinisikan $Re = \frac{U_\infty a}{\nu}$. Substitusikan variabel non dimensional pada Persamaan 5.46 ke Persamaan pembangun dimensional 5.42, 5.43, dan 5.44, sehingga diperoleh persamaan pembangun non-dimensional sebagai berikut:

Persamaan kontinuitas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.47)$$

Persamaan momentum:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \right. \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] - (M + \phi)(u - u_e) + \lambda \theta \sin x \end{aligned} \quad (5.48)$$

Persamaan energi:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \quad (5.49)$$

Kondisi batas pada Persamaan 5.45 pada bentuk non-dimensional menjadi:

$$\begin{aligned} u = v = 0, \theta = 1 & \text{ untuk } y = 0 \\ u = u_e(x), \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \theta = 0 & \text{ untuk } y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.50)$$

dengan parameter-parameter non-dimensional yang digunakan pada permasalahan ini didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Pr &= \frac{\nu}{\alpha} \\ K &= \frac{k_0 U_\infty}{a \rho \nu} \\ M &= \frac{\sigma B_0 a}{\rho U_\infty} \\ \phi &= \frac{\nu}{K^*} \frac{a}{U_\infty} \\ \lambda &= \frac{Gr}{Re^2} \end{aligned} \quad (5.51)$$

dan bilangan Grashof didefinisikan sebagai berikut:

$$Gr = g\beta \left(T - T_\infty \right) \frac{a^3}{\nu^2} \quad (5.52)$$

Penyelesaian dari persamaan pembangun non-dimensional adalah dengan mentransformasikannya ke dalam bentuk persamaan similar, yakni dengan mensubstitusikan variabel similaritas. Pada dinamika fluida, khususnya pada permasalahan persamaan lapisan batas, persamaan similaritas merupakan bentuk solusi dimana mengubah beberapa koordinat menjadi satu koordinat yang sama tanpa merubah bentuk asli dari koordinat tersebut. Secara fisik persamaan similaritas menggambarkan aliran yang terlihat sama baik sepanjang waktu, atau di semua skala panjang. Pada permasalahan ini, digunakan variabel similaritas sebagai berikut (Anwar, 2008):

$$\psi = x f(x, y), \theta = \theta(x, y) \quad (5.53)$$

dengan ψ adalah fungsi aliran (*stream function*) yang digunakan untuk mendefinisikan:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ dan } v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.54)$$

Selain itu, menurut Merkin (1976) diasumsikan $u_e(x) = \sin x$.

Sehingga, dengan mensubstitusikan Persamaan 5.53 dan 5.54 ke dalam Persamaan pembangun non-dimensional 5.47, 5.48, dan 5.49 diperoleh persamaan similaritas sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) &= \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - K \left(2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - \right. \\
 & f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \left. \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right) - Kx \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - \right. \\
 & \left. \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right) + \\
 & \frac{\sin x \cos x}{x} + \lambda \frac{\sin x}{x} \theta - \\
 & (M + \phi) \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\sin x}{x} \right) \tag{5.55}
 \end{aligned}$$

$$x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + f \frac{\partial \theta}{\partial y} \tag{5.56}$$

sedangkan kondisi batas pada persamaan non-dimensional, yakni Persamaan 5.50, diubah ke dalam kondisi batas persamaan similar sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \theta = 1 \quad \text{untuk } y = 0 \\
 \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \theta = 0 \quad \text{untuk } y \rightarrow \infty
 \end{aligned}$$

Pada penelitian ini diteliti karakteristik fluida pada daerah titik stagnasi terendah. Titik stagnasi terendah adalah titik dimana lapisan batas berada paling dekat dengan benda. Pada dinamika fluida, titik stagnasi terendah dari silinder sirkular bernilai mendekati nol atau $x \approx 0$, sehingga Persamaan 5.55 dan 5.56 menjadi:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 1 - (M + \phi) \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\sin x}{x} \right) + \\
 & \lambda \theta - K \left(2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right) \\
 0 &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + f \frac{\partial \theta}{\partial y}
 \end{aligned}$$

atau dapat direduksi menjadi persamaan diferensial sederhana sebagai berikut:

$$0 = f''' + ff'' - f'^2 + 1 - (M + \phi)(f' - 1) + \lambda\theta - K(2f'f''' - ff^{(4)} - f''^2) \quad (5.57)$$

$$0 = \frac{1}{Pr}\theta'' + f\theta' \quad (5.58)$$

dengan Kondisi Batas:

$$\begin{aligned} f(0) = f'(0) = 0, \theta(0) = 1, \\ f'(\infty) = 1, f''(\infty) = 0, \theta(\infty) = 0. \end{aligned} \quad (5.59)$$

dengan ' menunjukkan turunan terhadap y .

Pada permasalahan ini koefisien gesekan kulit *skin friction* C_f didefinisikan sebagai berikut:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2} \quad (5.60)$$

dengan

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y}=0} + k_0 \left(\bar{u} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \bar{v} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)_{\bar{y}=0} \quad (5.61)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan 5.61 ke Persamaan 5.60, didapatkan koefisien gesekan kulit sebagai berikut:

$$C_f = x f''(x, 0)$$

Sedangkan koefisien penyebaran panas Q_w , menurut Shafie (2005), diberikan sebagai berikut:

$$Q_w = -\theta'(x, 0)$$

5.3 Diskritisasi dengan Skema Metode Beda Hingga Orde Kedua

Pada penelitian ini digunakan diskritisasi dengan menggunakan metode beda hingga orde kedua. Diberikan skema metode beda hingga orde kedua sebagai berikut:

Skema beda hingga pusat untuk turunan pertama orde kedua:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y_i} = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y^2) \quad (5.62)$$

Skema beda hingga pusat untuk turunan kedua orde kedua :

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{y_i} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2) \quad (5.63)$$

Skema beda hingga pusat untuk turunan ketiga orde kedua :

$$\left. \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right|_{y_i} = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2\Delta y^3} + O(\Delta y^2) \quad (5.64)$$

5.3.1 Pendiskritan Persamaan Momentum

Pada Thesis ini dilakukan analisa pengaruh dari parameter yang ada pada fluida terhadap profil temperatur dan profil kecepatan. Perbandingan parameter terhadap profil kecepatan didapatkan dengan menghitung nilai dari f' , sehingga dilakukan permisalan sebagai berikut:

misalkan:

$$f' = s \quad (5.65)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan 5.65 ke dalam Persamaan 5.57 diperoleh persamaan momentum sebagai berikut:

$$0 = s'' + s\Delta y s' - s^2 + 1 - (M + \phi)(s - 1) + \lambda\theta - K(2ss'' - s\Delta y s''' - s'^2) \quad (5.66)$$

Pendiskritan dilakukan dengan menggunakan skema metode beda pusat orde kedua seperti yang ditunjukkan pada Persamaan 5.62 hingga 5.64, sehingga hasil diskritisasi Persamaan 5.66 adalah sebagai berikut:

$$s_i^2 = \left(-As_{i+1} + Bs_i - As_{i-1} + Ds_i s_{i+1} + Es_i s_{i-1} + Gs_{i+1} s_{i-1} - C - \lambda\theta_i - Gs_i s_{i+2} + Gs_i s_{i-2} - \frac{G}{2}s_{i+1}^2 - \frac{G}{2}s_{i-1}^2 \right) / F$$

atau dapat ditulis:

$$s_i = \left(\left(-As_{i+1} + Bs_i - As_{i-1} + Ds_i s_{i+1} + Es_i s_{i-1} + Gs_{i+1} s_{i-1} - C - \lambda\theta_i - Gs_i s_{i+2} + Gs_i s_{i-2} - \frac{G}{2}s_{i+1}^2 - \frac{G}{2}s_{i-1}^2 \right) / F \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.67)$$

dengan:

$$A = \frac{1}{\Delta y^2}; \quad B = (2A + (M + \phi)); \quad C = (1 + (M + \phi)); \quad D = \left(-\frac{1}{2} + 3KA \right); \\ E = \left(\frac{1}{2} + AK \right); \quad F = (4AK - 1); \quad G = \frac{AK}{2} \quad (5.68)$$

5.3.2 Pendiskritan Persamaan Energi

Pendiskritan pada persamaan energi juga dilakukan dengan substitusi Skema beda hingga 5.62 sampai 5.64 ke Persamaan energi 5.58, sehingga didapatkan hasil pendiskritan sebagai berikut:

$$0 = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}}{\Delta y^2} \right) + f_i \left(\frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta y} \right) \quad (5.69)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan 5.65 dan 5.68 ke dalam Persamaan 5.69, didapatkan:

$$\frac{A}{Pr} \left(\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1} \right) + \frac{1}{2}s_i \left(\theta_{i+1} - \theta_{i-1} \right) = 0$$

dilakukan penyederhanaan lebih lanjut, misalkan $H = \frac{A}{Pr}$, didapatkan hasil diskritisasi untuk persamaan energi sebagai berikut:

$$\theta_i = \left(H - \frac{1}{2}s_i \right) \theta_{i-1} + \left(H + \frac{1}{2}s_i \right) \theta_{i+1} / 2H \quad (5.70)$$

Selanjutnya dilakukan proses iterasi dengan menggunakan iterasi Gauss Seidel pada persamaan momentum dan energi untuk $i = 1, 2, 3, \dots, Z$, sehingga diperoleh:

1. Persamaan Momentum:

- a. untuk $i = 1$, diperoleh $s_{i-1} = s_{i+1}$ dan $s_{i-2} = s_i$

$$s_i = \left(\left(-As_{i+1} + Bs_i - As_{i+1} + Ds_i s_{i+1} + Es_i s_{i+1} + Gs_{i+1} s_{i+1} - C - \lambda\theta_i - Gs_i s_{i+2} + Gs_i s_i - \frac{G}{2} s_{i+1}^2 - \frac{G}{2} s_{i+1}^2 \right) / F \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.71)$$

b. untuk $i = 2$, diperoleh $s_{i-2} = s_i$

$$s_i = \left(\left(-As_{i+1} + Bs_i - As_{i-1} + Ds_i s_{i+1} + Es_i s_{i-1} + Gs_{i+1} s_{i-1} - C - \lambda\theta_i - Gs_i s_{i+2} + Gs_i s_i - \frac{G}{2} s_{i+1}^2 - \frac{G}{2} s_{i-1}^2 \right) / F \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.72)$$

c. untuk $2 < i < Z - 1$

$$s_i = \left(\left(-As_{i+1} + Bs_i - As_{i-1} + Ds_i s_{i+1} + Es_i s_{i-1} + Gs_{i+1} s_{i-1} - C - \lambda\theta_i - Gs_i s_{i+2} + Gs_i s_{i-2} - \frac{G}{2} s_{i+1}^2 - \frac{G}{2} s_{i-1}^2 \right) / F \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.73)$$

d. untuk $i = Z - 1$, diperoleh $s_{i+2} = 1$

$$s_i = \left(\left(-As_{i+1} + Bs_i - As_{i-1} + Ds_i s_{i+1} + Es_i s_{i-1} + Gs_{i+1} s_{i-1} - C - \lambda\theta_i - Gs_i + Gs_i s_{i-2} - \frac{G}{2} s_{i+1}^2 - \frac{G}{2} s_{i-1}^2 \right) / F \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.74)$$

e. untuk $i = Z$, diperoleh $s_{i+1} = 1$ dan $s_{i+2} = 1$

$$s_i = \left(\left(-A + Bs_i - As_{i-1} + Ds_i + Es_i s_{i-1} + Gs_{i-1} - C - \lambda\theta_i - Gs_i + Gs_i s_{i-2} - \frac{G}{2} - \frac{G}{2} s_{i-1}^2 \right) / F \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.75)$$

2. Persamaan Energi:

a. untuk $i = 1$, diperoleh $\theta_{i-1} = \theta_{i+1} + 2\Delta y$

$$\theta_i = ((H + \frac{1}{2}s_i)\theta_{i+1} + (H - \frac{1}{2}s_i)(\theta_{i+1} + 2\Delta y))/(2H) \quad (5.76)$$

b. untuk $i = 1 < i < Z$,

$$\theta_i = (H - \frac{1}{2}s_i)\theta_{i-1} + (H + \frac{1}{2}s_i)\theta_{i+1}/2H \quad (5.77)$$

c. untuk $i = Z$, diperoleh $\theta_{i+1} = 0$

$$\theta_i = (((H - \frac{1}{2}s_i)\theta_{i-1})/(2H)) \quad (5.78)$$

5.4 Algoritma

Penyelesaian yang digunakan pada penelitian ini adalah penyelesaian secara numerik. Algoritma yang digunakan dalam penyelesaian numerik untuk permasalahan ini dapat dilihat pada Algorithm 1.

5.5 Analisa Hasil

Persamaan 5.67 dan 5.70 diselesaikan dengan perhitungan numerik dan divisualisasikan dengan menggunakan *software* MATLAB. Grafik yang dihasilkan menunjukkan pengaruh dari variasi nilai dari parameter viskoelastik (K), parameter konveksi campuran (λ), parameter medan magnet (M), parameter porositas (ϕ), dan bilangan Prandtl (Pr) terhadap profil kecepatan (f') dan profil temperatur (θ). Pada perhitungan numerik, digunakan $\Delta y = 0.025$.

Pada penelitian ini dilakukan perhitungan nilai penyebaran panas $-\theta'(0)$, perhitungan nilai penyebaran panas dilakukan dengan menggunakan $M = 0$, $\phi = 0$, $Pr = 1$ dan nilai parameter konveksi campuran $\lambda = 0$ dan $\lambda = 1$. Hasil nilai perbandingan tersebut dapat dilihat pada Tabel 5.1.

Pada Tabel 5.1 dapat dilihat bahwa nilai penyebaran panas yang diperoleh pada penelitian ini memiliki nilai yang cukup signifikan dengan hasil perhitungan numerik yang telah dilakukan oleh penelitian sebelumnya, yakni dengan selisih tidak lebih dari $2,5 \times 10^{-3}$. Selisih ini timbul karena adanya perbedaan metode yang digunakan, yakni penggunaan metode beda hingga dengan orde kesalahan pertama pada penelitian sebelumnya dan penggunaan metode beda hingga dengan orde

Algorithm 1 Algoritma Perhitungan Numerik dengan Menggunakan Matlab

Set Input: nilai variasi parameter yang diuji, partisi ketebalan lapisan batas (Δy), panjang ketebalan lapisan batas (y).

procedure

Kondisi awal (*initial condition*) $f(i)$ dan $\theta(i)$

for $it_{max} = 1$ sampai m **do**

for $i = 1$ sampai Z **do**

$$s_i = \left[\left(-As_{i+1} + Bs_i - As_{i-1} + Ds_i s_{i+1} + Es_i s_{i-1} + Gs_{i+1} s_{i-1} - C - \lambda \theta_i - Gs_i s_{i+2} + Gs_i s_{i-2} - \frac{G}{2} s_{i+1}^2 - \frac{G}{2} s_{i-1}^2 \right) / F \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_i = \left(H - \frac{1}{2} s_i \right) \theta_{i-1} + \left(H + \frac{1}{2} s_i \right) \theta_{i+1} / 2H$$

if $i = 1$ **then**

$s_{i-1} \leftarrow s_{i+1}$

$s_{i-2} \leftarrow s_i$

$\theta_{i-1} \leftarrow \theta_{i+1} + 2\Delta y$

if $i = 2$ **then**

$s_{i-2} \leftarrow s_i$

if $i = Z - 1$ **then**

$s_{i+2} \leftarrow 1$

if $i = Z$ **then**

$s_{i+1} \leftarrow 1$

$s_{i+2} \leftarrow 1$

$\theta_{i+1} \leftarrow 0$

end if

end if

end if

end if

end for

end for

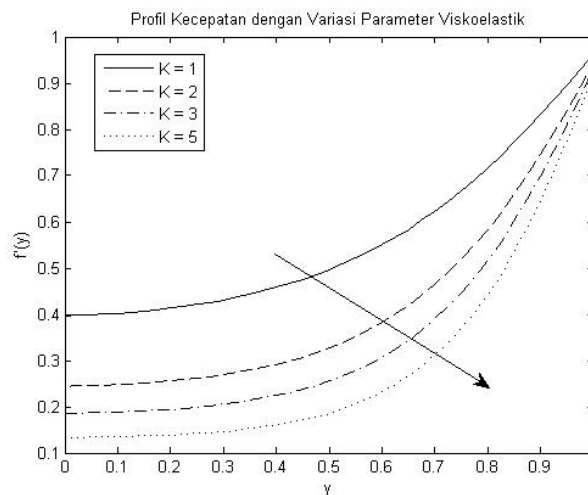
end procedure

Tabel 5.1: Tabel nilai penyebaran panas $-\theta'(0)$ pada saat Variasi K dengan $M = 0$, $\phi = 0$, $Pr = 1$, $\lambda = 0$ dan $\lambda = 1$

K	$\lambda = 0$		$\lambda = 1$	
	Anwar,dkk (2008)	Penelitian ini	Anwar,dkk (2008)	Penelitian ini
0.01	0.56913	0.5691	0.613861	0.6138
0.1	0.558175	0.5560	0.600089	0.6007
0.2	0.548077	0.5484	0.587800	0.5859
0.4	0.532036	0.5345	0.568851	0.5672
0.6	0.519487	0.5171	0.554389	0.5525
0.7	0.514101	0.5123	0.548256	0.5484
0.9	0.504626	0.5037	0.537559	0.5383
1	0.500411	0.5000	0.532833	0.5330

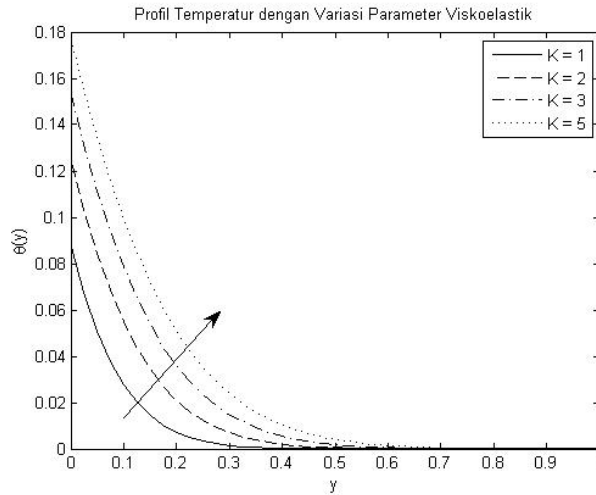
kesalahan kedua pada penelitian ini. Menurut Versteeg, H. dan Malalasekera, W. (2007), metode beda hingga dengan orde kesalahan kedua memiliki tingkat akurasi yang lebih tinggi bila dibandingkan dengan tingkat akurasi yang dimiliki oleh metode beda hingga dengan orde kesalahan tingkat pertama. Sehingga, dapat disimpulkan bahwa dengan penggunaan metode beda hingga orde kedua pada penelitian ini, hasil perhitungan numerik penelitian ini lebih akurat bila dibandingkan dengan hasil perhitungan pada penelitian sebelumnya.

Selanjutnya, perhitungan numerik yang dilakukan untuk mengetahui parameter-parameter pada tesis ini, meliputi parameter viskoelastik, parameter konveksi campuran, parameter magnetik pada fluida, parameter porositas, dan bilangan Prandtl, terhadap profil kecepatan dan profil temperatur dari fluida dapat dilihat pada Gambar 5.1 sampai Gambar 5.12, dengan penjelasan sebagai berikut.



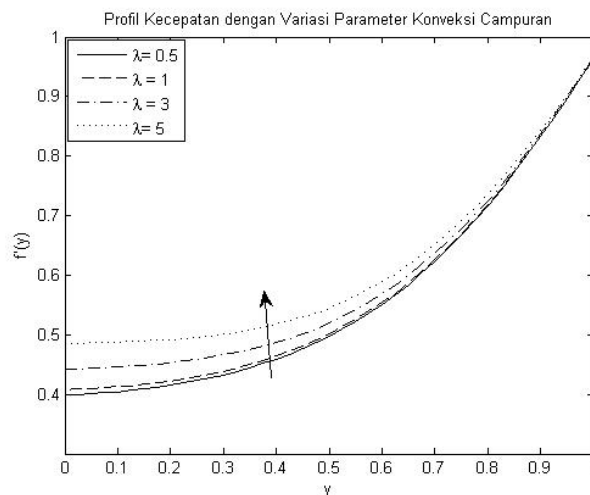
Gambar 5.1: Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Viskoelastik (K)

Pada Gambar 5.1 dan Gambar 5.2 diilustrasikan mengenai profil kecepatan dan profil temperatur aliran fluida viskoelastik *magneto hydrodynamics* dengan variasi parameter viskoelastik dan parameter tetap yang digunakan adalah $K = 1, 2, 3, 5$, $M = 0.5$, $Pr = 1$, $\phi = 0.1$, dan $\lambda = 1$. Pengamatan dilakukan dengan melihat kecepatan dan temperatur fluida di setiap titik, misal ambil kecepatan fluida pada titik yang paling dekat dengan benda yakni pada saat $y = 0$, sesuai dengan gambar yang ditunjukkan oleh Gambar 5.1 terlihat bahwa pada saat $K = 1$ kecepatan fluida menunjukkan 0.4, pada saat $K = 2$ kecepatannya menurun menjadi 0.25, pada saat $K = 3$ kecepatannya menjadi semakin lambat 0.18, dan pada saat $K = 5$ kecepatannya semakin lambat hingga mencapai 0.13. Sehingga dapat disimpulkan bahwa dengan peningkatan besar parameter viskoelastik untuk $K =$

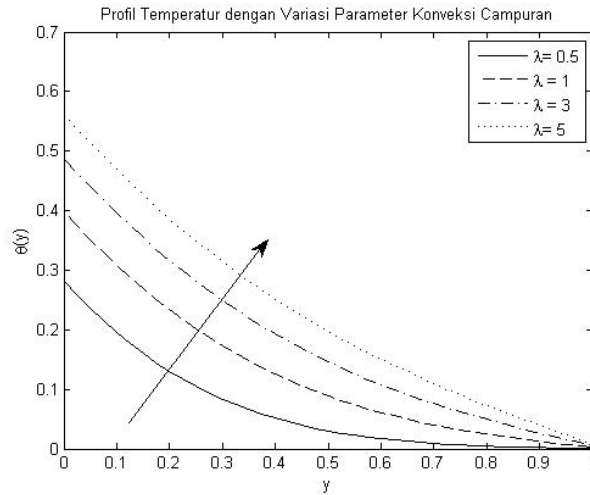


Gambar 5.2: Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Viskoelastik (K)

1, 2, 3, 5, menyebabkan profil kecepatannya semakin menurun dan profil temperaturnya semakin meningkat. Hal ini telah memenuhi konsep mengenai kekentalan suatu fluida karena dapat dipahami bahwa pergerakan suatu fluida menjadi lebih lambat jika fluida tersebut memiliki kekentalan (*viscous*) dan keelastisan yang tinggi. Semakin mengentalnya fluida juga menyebabkan semakin besarnya gaya gesek yang terjadi antara fluida dan benda, kemudian akibat dari semakin besar gaya gesek yang timbul mengakibatkan semakin meningkatnya temperatur dari fluida.



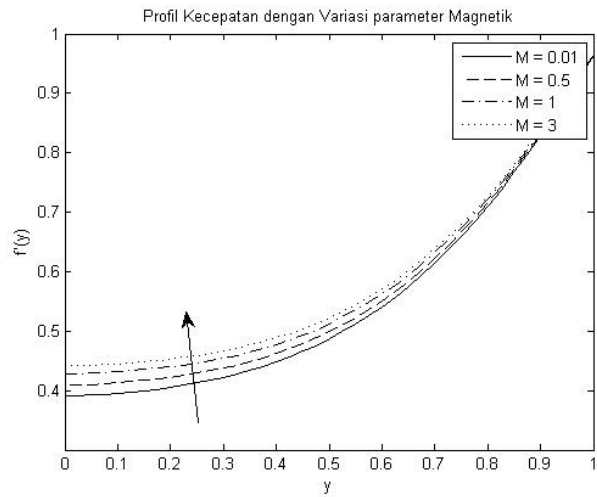
Gambar 5.3: Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Konveksi Campuran (λ)



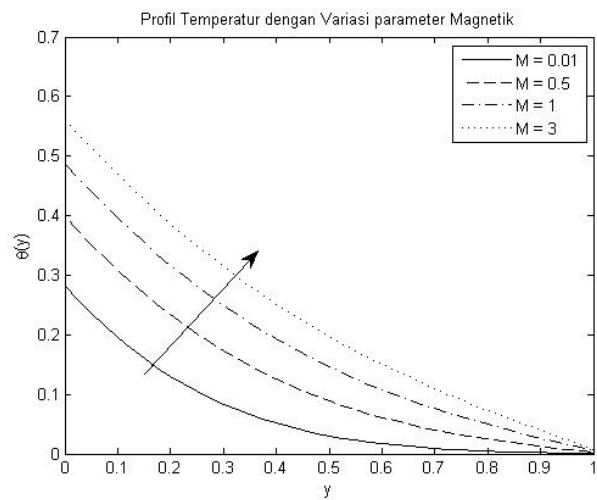
Gambar 5.4: Profil Temperatur Variasi Parameter Konveksi Campuran (λ)

Pada penelitian ini digunakan nilai $\lambda > 0$ atau terjadi pada saat silinder dalam keadaan panas dengan $T_w > T_\infty$. Perhitungan numerik dilakukan dengan parameter tetap $M = 0.5$, $Pr = 1$, $K = 1$, dan $\phi = 0.1$. Pengaruh dari variasi parameter konveksi campuran (λ) terhadap profil temperatur dan profil kecepatan dapat dilihat pada grafik yang ditunjukkan oleh Gambar 5.3 dan Gambar 5.4, pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa semakin meningkatnya besar parameter konveksi campuran (λ), yakni pada kasus ini digunakan $\lambda = 0.5, 1, 3, 5$, maka menyebabkan profil kecepatan dan profil temperatur dari aliran pada fluida yang melewati silinder sirkular berpori semakin meningkat. Hal ini telah memenuhi teori pada konveksi campuran karena semakin besar parameter konveksi campuran menyebabkan semakin besarnya konveksi paksa (*force convection*) yang bekerja pada fluida tersebut. Selain itu, pengaplikasian dari konveksi paksa pada perpindahan panas adalah sebagai peningkat laju perubahan panas.

Gambaran mengenai pengaruh dari variasi medan magnet (M) terhadap profil temperatur dan profil kecepatan dapat dilihat pada grafik yang ditunjukkan oleh Gambar 5.5 dan Gambar 5.6, pada grafik tersebut dilakukan perhitungan dengan melakukan menggunakan parameter yang tetap, yakni: $\lambda = 2$, $Pr = 1$, $K = 1$, dan $\phi = 0.1$, dan melakukan variasi terhadap nilai parameter medan magnet (M). Dapat dilihat bahwa semakin meningkatnya besar parameter medan magnet pada fluida viskoelastik *magnetohydrodynamics* menyebabkan profil kecepatan dan profil temperatur dari fluida semakin meningkat. Hal itu disebabkan karena besar Gaya Lorentz yang bekerja semakin meningkat seiring dengan bertambahnya besar medan magnet yang terkandung di fluida. Peningkatan besar gaya Lorentz mengakibatkan peningkatan gerak dari muatan listrik di dalam suatu medan

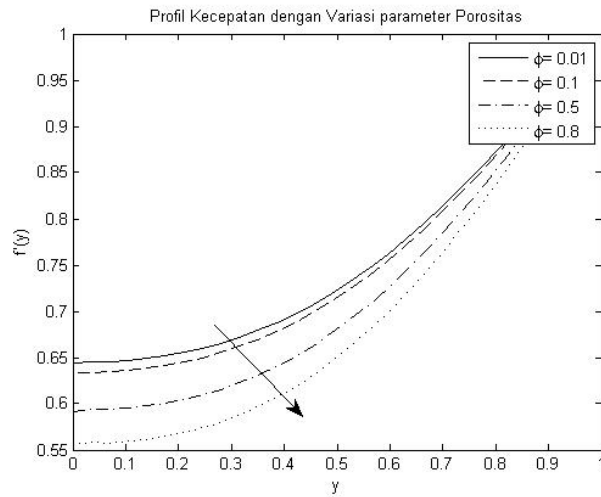


Gambar 5.5: Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Medan Magnet (M)

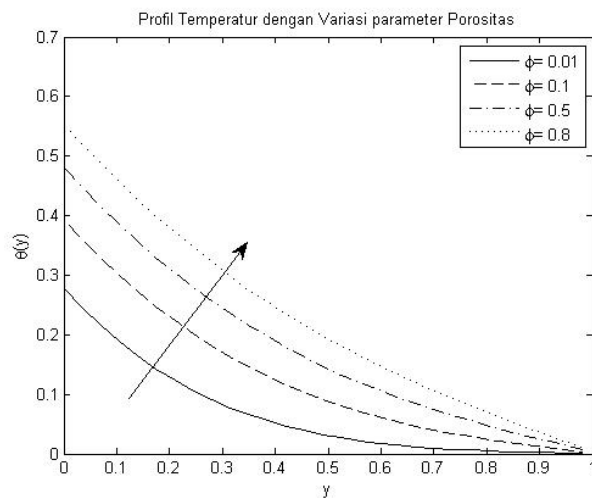


Gambar 5.6: Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Medan Magnet (M)

magnet. Sehingga, dapat dipahami bahwa semakin cepat muatan listrik yang terkandung di medan magnet menyebabkan semakin meningkatnya kecepatan dari fluida karena medan magnet diasumsikan menginduksi fluida dengan sempurna. Akibat gerak yang makin cepat maka gesekan antara fluida dan benda juga semakin besar sehingga profil temperatur dari fluida juga semakin meningkat. Selain itu, kerapatan pada fluida pada saat besar medan magnet semakin meningkat menyebabkan kerapatan fluida semakin berkurang nilainya. Pada saat kerapatan fluida makin kecil, maka gaya bouyancy yang bekerja semakin besar. Semakin besarnya gaya bouyancy pada fluida menyebabkan semakin cepatnya kecepatan fluida dan semakin tingginya suhu fluida tersebut.

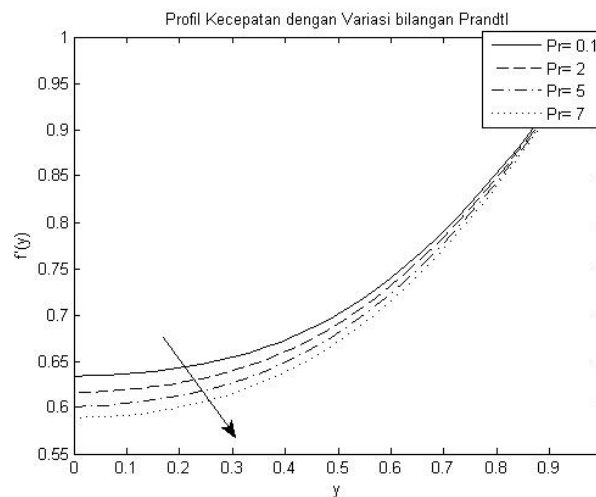


Gambar 5.7: Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Porositas (ϕ)



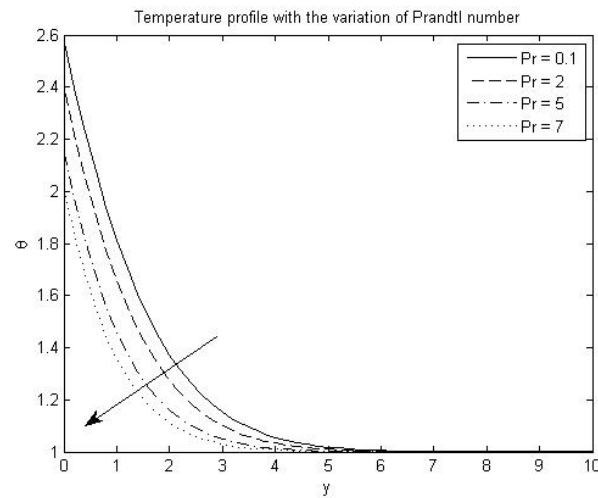
Gambar 5.8: Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Porositas (ϕ)

Pada grafik yang ditunjukkan oleh Gambar 5.7 dan Gambar 5.8 dapat dilihat pengaruh dari variasi parameter porositas (ϕ) terhadap profil kecepatan dan profil temperatur. Hasil perhitungan numerik tersebut dilakukan pada parameter tetap sebagai berikut $\lambda = 0.1$, $Pr = 1$, $K = 1$, dan $M = 0.5$ dengan melakukan variasi parameter porositas $\phi = 0.01, 0.1, 0.5, 0.8$. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa semakin meningkatnya nilai parameter porositas pada silinder sirkular berpori menyebabkan profil kecepatan semakin berkurang dan profil temperatur meningkat. Hasil perhitungan numerik dari variasi parameter porositas yang telah ditunjukkan pada Gambar 5.7 dan Gambar 5.8 telah sesuai dengan hukum Darcy. Porositas pada mekanika fluida memiliki makna kemampuan suatu benda berpori untuk menyerap dan menyimpan suatu fluida yang melewatinya. sehingga dapat dipahami bahwa jika porositas dari suatu benda semakin besar maka aliran dari fluida yang melewatinya semakin terhambat. Selain itu, menurut Hukum Darcy, semakin meningkatnya permeabilitas (K^*) dari suatu benda menyebabkan semakin meningkatnya kecepatan fluida untuk melewati benda tersebut. Oleh karena itu, pada saat parameter porositas ($\phi = \frac{\nu}{K^* U_\infty}$) dari fluida semakin besar maka permeabilitas dari fluida semakin kecil sehingga kecepatan fluida juga semakin rendah.



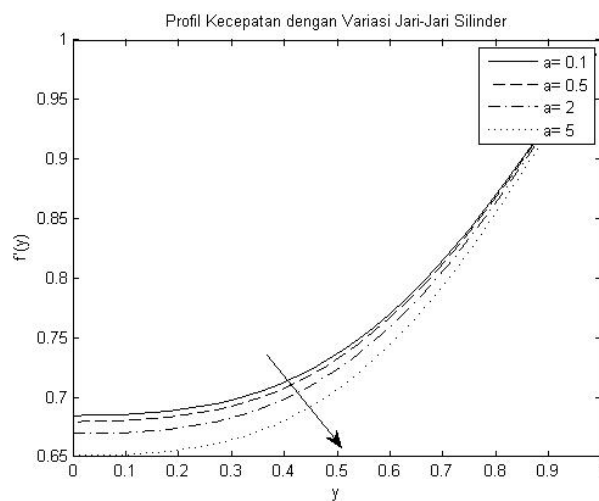
Gambar 5.9: Profil Kecepatan dengan Variasi Parameter Bilangan Prandtl (Pr)

Pengaruh dari variasi bilangan Prandtl (Pr) terhadap profil temperatur dan profil kecepatan dapat dilihat pada grafik yang ditunjukkan oleh Gambar 5.9 dan Gambar 5.10. Pada kasus ini, hasil perhitungan numerik dari bilangan Prandtl dibangun dengan menggunakan nilai parameter tetap $\lambda = 1$, $\phi = 0.5$, $K = 1$, dan $M = 1$ dan menggunakan variasi bilangan Prandtl $Pr = 0.1, 2, 5, 7$. Pada grafik tersebut dapat

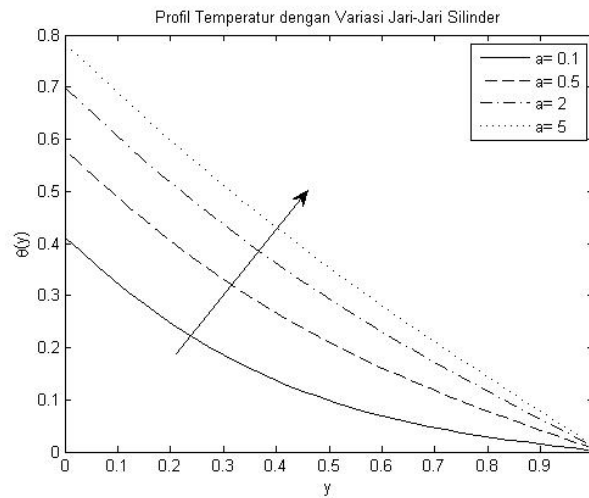


Gambar 5.10: Profil Temperatur dengan Variasi Parameter Bilangan Prandtl (Pr)

dilihat bahwa semakin meningkatnya nilai bilangan Prandtl, maka menyebabkan profil kecepatan dan temperatur pada fluida yang melewati silinder sirkular berpori semakin kecil. Grafik yang dihasilkan pada kasus ini menunjukkan hal yang sama dengan definisi dari bilangan Prandtl. Bilangan Prandtl adalah perbandingan nilai dari viskositas kinematik dan difusivitas panas, dengan semakin meningkatnya nilai dari bilangan Prandtl berpengaruh pada besar viskositas kinematik dan difusivitas panas dari fluida. Pada saat viskositas kinematik nilainya semakin besar, maka kecepatan fluida semakin lambat karena kekentalan fluida meningkat. Sedangkan pada saat difusivitas panas nilainya semakin kecil maka menyebabkan temperatur panas suatu fluida semakin kecil karena difusivitas panas adalah koefisien panas.



Gambar 5.11: Profil Kecepatan dengan Variasi Jari-Jari Silinder Sirkular (a)



Gambar 5.12: Profil Temperatur dengan Variasi Jari-Jari Silinder Sirkular (a)

Pada penelitian ini juga dianalisa pengaruh perubahan jari-jari silinder sirkular. Pengaruh dari perubahan jari-jari pada silinder sirkular dapat dilihat pada grafik yang ditunjukkan oleh Gambar 5.11 dan Gambar 5.12. Pada grafik tersebut variasi dilakukan dengan menggunakan nilai $a = 0.1, 0.5, 2, 5$ dengan nilai parameter tetap $Pr = 1, K = 1, M = 0.5$ dan $\lambda = 0.1$. Pada grafik yang dihasilkan terlihat bahwa semakin bertambah panjang radius silinder sirkular, dengan menggunakan $a = 0.1, 0.5, 2, 5$, menyebabkan profil kecepatan fluida semakin menurun dan profil temperatur fluida semakin meningkat. Semakin besar radius silinder menyebabkan luas penampang silinder yang harus dilewati oleh fluida semakin besar, sehingga fluida membutuhkan waktu yang lebih lama untuk melewatinya. Karena luas penampang silinder yang semakin besar, gesekan yang terjadi pada fluida dan silinder semakin besar sehingga temperatur fluida semakin meningkat.

BAB VI

KESIMPULAN DAN SARAN

6.1 Kesimpulan

Berdasarkan pada rumusan masalah yang telah dijelaskan pada Bab I, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika dari aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastik bermedan magnet yang melewati silinder sirkular berpori yang terbentuk tertera pada Persamaan 5.39, 5.40, dan 5.41. Model matematika tersebut diperoleh berdasarkan penguraian hukum konservasi massa, kedua Newton, dan Termodinamika I. Kemudian, dilakukan pendekatan Boussinesq dan penyederhanakan persamaan kontinuitas, momentum dan energi dengan menggunakan teori lapisan batas.
2. Model matematika dari aliran konveksi campuran pada fluida viskoelastik bermedan magnet yang melewati silinder sirkular berpori dapat diselesaikan dengan menggunakan Metode Beda Hingga (*Finite Difference Method*) orde kedua. Persamaan yang didiskritisasi adalah persamaan similaritas pada titik stagnasi terendah, yaitu Persamaan 5.57 dan 5.58, dengan hasil diskritisasi ditunjukkan pada Persamaan 5.67 dan 5.70.
3. Pengaruh dari parameter viskoelastik, parameter konveksi campuran, medan magnet pada fluida, parameter porositas, bilangan Prandtl, dan jari-jari silinder terhadap profil kecepatan dan profil temperatur, berdasarkan pada grafik yang diperoleh dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut.
 - a. Variasi parameter viskoelastik (K) untuk $K = 1, 2, 3, 5$ dan parameter tetap $M = 0.5, Pr = 1, \phi = 0.1$, dan $\lambda = 1$ menyebabkan profil kecepatan fluida (f') semakin menurun dan profil temperatur (θ) semakin meningkat.
 - b. Karakteristik dari fluida pada lapisan batas yang diperoleh dengan melakukan variasi parameter konveksi campuran (λ) untuk nilai variasi $\lambda = 0.5, 1, 3, 5$ dan parameter tetap $M = 0.5, Pr = 1, \phi = 0.1$, dan $K = 1$ adalah profil kecepatan (f') dan profil temperatur (θ) semakin meningkat.

- c. Variasi yang dilakukan pada besar medan magnet pada fluida, yakni pada $M = 0.01, 0.5, 1, 3$ dan parameter tetap $\lambda = 2, K = 1, \phi = 0.1$, dan $Pr = 1$, menunjukkan bahwa dengan semakin meningkatnya medan magnet pada fluida menyebabkan semakin meningkatnya profil kecepatan dan profil temperatur dari fluida.
- d. Karakteristik dari fluida pada lapisan batas yang diperoleh dengan melakukan variasi pada parameter porositas (ϕ) untuk nilai variasi $\phi = 0.01, 0.1, 0.5, 0.8$ dan dengan menggunakan parameter tetap $M = 0.5, Pr = 1, K = 1$, dan $\lambda = 1$ adalah sebagai berikut: profil kecepatan (f') semakin menurun dan profil temperatur (θ) semakin meningkat.
- e. Karakteristik dari fluida pada lapisan batas yang diperoleh dengan melakukan variasi pada bilangan Prandtl (Pr) untuk nilai variasi $Pr = 0.1, 2, 5, 7$ dan dengan menggunakan parameter tetap $M = 0.5, K = 1, \phi = 0.1$, dan $\lambda = 1$ adalah profil kecepatan (f') dan profil temperatur (θ) semakin menurun.
- f. Karakteristik dari fluida pada lapisan batas yang diperoleh dengan melakukan variasi pada besar jari-jari silinder sirkular berpori (a) untuk nilai variasi $a = 0.1, 0.5, 2, 5$ dan dengan menggunakan parameter tetap $M = 0.5, K = 1$, dan $\lambda = 1$ adalah profil kecepatan (f') semakin menurun dan profil temperatur (θ) semakin meningkat.

6.2 Saran

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, saran yang dapat diberikan pada penelitian yang selanjutnya adalah sebagai berikut:

1. Pada penelitian ini dilakukan pada kondisi tunak atau tunak, diharapkan penelitian selanjutnya dapat dilakukan untuk permasalahan pada kondisi tak tunak (*unsteady*).
2. Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan studi pada objek penelitian yang lebih kompleks, misalnya silinder eliptik berpori, silinder sirkular berpori paralel, maupun silinder yang berputar.
3. Pada penelitian ini penelitian dilakukan pada domain tak terbatas, diharapkan pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan pada domain terbatas sehingga dapat dilihat lebih detail mengenai profil kecepatan dan profil temperatur di lapisan batas.

DAFTAR PUSTAKA

- Ahmed, N., Sharma, D., dan Deka, H. (2012), "MHD Mixed Convection and Mass Transfer from an Infinite Vertical Porous Plate with Chemical Reaction in Presence of a Heat Source", *Applied Mathematical Sciences*, 1011-1020.
- Anwar, I., Amin, N., dan Prop, I. (2008), "Mixed Convection Boundary Layer Flow of a Viscoelastic Fluid Over a Horizontal Circular Cylinder", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 814-821.
- Arber, T. (2013), *Fundamentals of Magnetohydrodynamics (MHD)*, Lecture handout: University of Warwick, UK.
- Aurangzaib, Kasim, A.R.M., Mohammad, N.F., dan Shafie, S. (2013), "Unsteady MHD Mixed Convection Flow with Heat and Mass Transfer over a Vertical Plate in a Micropolar Fluid-Saturated Porous Medium", *Journal of Applied Science and Engineering*, 141-150.
- Bear, J. (1972), *Dynamics of Fluids in Porous Media*, Dover.
- Bejan (2004), *Convection Heat Transfer*, John Wiley, New York.
- Co, A. dan Bird, R.B. (1997), "Slow Viscoelastic Radial Flow between Parallel Disks", *Applied Scientific Research*, 385-404.
- Ghosh, S.K. dan Shit, G.C. (2012), "Mixed Convection MHD Flow of Viscoelastic Fluid in a Porous Medium past a Hot Vertical Plate", *World Journal of Mechanics*, Scientific Research. 262-271.
- Hsiao, K.L. (2010), "MHD Mixed Convection for Viscoelastic Fluid Past a Porous Wedge", *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46, Elsevier, 1-8.
- Hussanan, A., Ismail, Z., Khan, I., Hussein, A., dan Shafie, S. (2014), "Unsteady Boundary Layer MHD Free Convection Flow in a Porous Medium with Constant Mass Diffusion and Newtonian Heating", *The European Physical Journal Plus*. 1-16.
- Kasim, A.R.M. (2014), *Convective Boundary Flow of Viscoelastic Fluid*, Thesis Ph.D., Faculty of science Universiti Teknologi Malaysia, Malaysia.

- Lam, C.Y. (1994), *Applied Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Prentice Hall Simon and Schuster Asia Pte Ltd., Singapore.
- Leal, L.G. (1992), *Laminar Flow and Convective Transport Process: Scalling, Principles and Asymptotic Analysis*, Heinemann, London.
- Merkin, J.H. (1976), "Free convection boundary layer on an isothermal horizontal circular cylinders", ASME/AIChE, *Heat transfer Conference*, St. Louis, Mo. Agustus 9-11.
- Molla, M.M., Hossain, M.A., dan Taher, M.A. (2006), "Magnetohydrodynamics Natural Convection Flow on a Sphere with Uniform Heat Flux in Presence of Heat Generation", *Acta Mechanica*, 75-86.
- Munson, B.R., Young, D.F., Okiishi, T.H. (2002), *Fundamental of Fluid Mechanics Fourth Edition*, John Wiley and Sons, Inc., USA.
- Nazar, R., Amin, N., dan Pop, I. (2003), "Mixed Convection Boundary Layer Flow from a Horizontal Circular Cylinder in Micropolar Fluids: Case of Constant Wall Temperature", *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, 86-109.
- Ozisik, M.N. (1985), *Heat Transfer: A Basic Approach*, McGraw-Hill, New York.
- Pantokratoras, A. (2014), "The Forced Convection Flow over a Flat Plate with Finite Length with a Constant Convective Boundary Condition", *Journal of Mechanical Science and Technology*, Springer, Vol 28, 1909-1915.
- Potter, M. dan David. (2008), *Schaums's online of Fluid Mechanics*, Erlangga, Jakarta.
- Versteeg, H. dan Malalasekera, W. (2007), *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*, Prentice Hall.
- Widodo, B., Fatahillah, A., dan Rahayuningsih, T. (2011), "Mathematical Modelling and Numerical Solution of Iron Corrosion Problem Based on Condensation Chemical Properties", *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 5(1), 79-86.
- Widodo, B. (2012), *Pemodelan Matematika*, ITSpress, Surabaya, Indonesia.

LAMPIRAN

1. Perhitungan Tegangan pada Persamaan Momentum

Diberikan:

$$\tau_{ij} = \mu_0(2\mathbf{d}_{ij}) - k_0(\mathbf{V}\nabla(2\mathbf{d}_{ij}) - (2d_{ij})\cdot(\nabla\mathbf{V})^T - \nabla\mathbf{V}(2\mathbf{d}_{ij}))$$

dengan:

$$\mathbf{d}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_j} \right), \quad i = x, y \text{ dan } j = x, y$$

Substitusikan:

$$\mathbf{V} \nabla(\mathbf{d}_{ij}) = \mathbf{V} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_j} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_j} \right) \right) \right)$$

Berikut ini adalah perhitungan komponen *stress tensor*:

1. untuk $i = x$ dan $j = x$

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] - 2k_0 \left[\mathbf{V}\nabla \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} d_{ii} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} d_{ij} \right) - \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} d_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d_{jj} \right) \right] \\ &= 2\mu_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] - 2k_0 \left[\mathbf{V}\cdot\nabla \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] \\ &= 2\mu_0 \frac{\partial u}{\partial x} - 2k_0 \left[u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right] \\ &= 2\mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - 2k_0 \left[u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

2. untuk $i = x$ dan $j = y$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= 2\mu_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] - 2k_0 \left[\mathbf{V} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right) - \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} d_{ii} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} d_{ij} \right) - \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} d_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d_{jj} \right) \right] \\
&= 2\mu_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] - 2k_0 \left[\mathbf{V} \cdot \nabla \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] - \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right] \\
&= \mu_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2k_0 \left[\left(\frac{u}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{v}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right) - \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \right] \\
&= \mu_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2k_0 \left[\left(\frac{u}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \frac{v}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right) - \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right]
\end{aligned}$$

3. untuk $i = y$ dan $j = x$

$$\begin{aligned}
\tau_{yx} &= 2\mu_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] - 2k_0 \left[\mathbf{V} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right) - \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} d_{ii} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} d_{ij} \right) - \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} d_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d_{jj} \right) \right] \\
&= 2\mu_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - 2k_0 \left[\mathbf{V} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) - \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\partial u}{\partial y} d_{ii} + \frac{\partial u}{\partial x} d_{ij} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial y} d_{ij} + \frac{\partial v}{\partial x} d_{jj} \right) \right] \\
&= \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2k_0 \left[\mathbf{V} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right) - \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right) - \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) \right) \right] \\
&= \mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2k_0 \left[\frac{u}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{v}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right]
\end{aligned}$$

4. untuk $i = y$ dan $j = y$

$$\begin{aligned}
\tau_{yy} &= 2\mu_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right] - 2k_0 \left[\mathbf{V} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \right) - \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} d_{ii} + \frac{\partial v_j}{\partial x_j} d_{ij} \right) - \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} d_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d_{jj} \right) \right] \\
&= 2\mu_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - 2k_0 \left[\mathbf{V} \cdot \nabla \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right] \\
&= 2\mu_0 \frac{\partial v}{\partial y} - 2k_0 \left[u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \\
&= 2\mu_0 \frac{\partial v}{\partial y} - 2k_0 \left[u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

Penurunan komponen tegangan untuk memenuhi persamaan momentum sumbu- x dan y :

1. Diferensiasi τ_{xx} terhadap x

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - k_0 \left(2u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \\
&= 2\mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - k_0 \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \right. \\
&\quad \left. 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \right. \\
&\quad \left. 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \\
&= 2\mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - k_0 \left(-6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \right. \\
&\quad \left. 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)
\end{aligned}$$

2. Diferensiasi τ_{xy} terhadap y

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_{xy}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - k_0 \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\
&= \mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - k_0 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \right. \\
&\quad \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \\
&\quad \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \\
&\quad \left. 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
&= \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left(u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \\
&\quad \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \\
&\quad \left. 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)
\end{aligned}$$

3. Diferensiasi τ_{xy} terhadap x

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_{xy}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_0 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - k_0 \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \\
&= \mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \right. \\
&\quad \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \\
&\quad \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \\
&\quad \left. 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \\
&= \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - k_0 \left(u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \right. \\
&\quad v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)
\end{aligned}$$

4. Diferensiasi τ_{yy} terhadap y

$$\begin{aligned}
 \frac{\tau_{yy}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu_0 \frac{\partial v}{\partial y} - k_0 \left(2u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \\
 &= 2\mu_0 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k_0 \left(2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \right. \\
 &\quad \left. 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \right. \\
 &\quad \left. 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\
 &= 2\mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left(2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \right. \\
 &\quad \left. 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned}$$

2. Penyederhanaan Persamaan Momentum

Berikut ini adalah perhitungan dari penyederhanaan persamaan momentum:

1. Persamaan momentum sumbu- x :

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[2\mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - k_0 \left(-6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \right. \right. \\ & \left. \left. 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] + \\ & \left[\mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - k_0 \left(u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \right. \\ & \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \right. \\ & \left. \left. 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] + F_x \end{aligned}$$

Berikut ini adalah penyederhanaan persamaan momentum pada sumbu- x :

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \\ & k_0 \left[2u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + 2v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \right. \\ & 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \\ & 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ & v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \\ & \left. \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + F_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right) - \\
&k_0 \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \left(u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) + \right. \\
&v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \left(v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) - \\
&4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \\
&2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \\
&\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\
&v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \\
&\left. \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + F_x \\
&= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \\
&k_0 \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \right. \\
&v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \\
&4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \\
&2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) - \\
&\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\
&v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \\
&\left. \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + F_x
\end{aligned}$$

substitusikan persamaan berikut

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - k_0 \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \right. \\ & v \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \\ & \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ & v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \\ & \left. \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + F_x \end{aligned}$$

Menurut persamaan kontinuitas juga dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

Substitusikan persamaan tersebut ke dalam persamaan momentum sumbu- x , sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\ & k_0 \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \right. \\ & \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \\ & \left. \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] + F_x \\ = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\ & k_0 \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \right. \\ & \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \\ & \left. \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] + F_x \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan momentum pada sumbu- x sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\ & k_0 \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \right. \\ & \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\ & \left. 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] + F_x \end{aligned}$$

2. Persamaan momentum sumbu- y

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[\mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - k_0 \left(u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \right. \right. \\ & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\ & \left. 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \Big] + \\ & \left[2\mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left(2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. 4 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] + F_y \end{aligned}$$

Berikut ini adalah penyederhanaan persamaan momentum pada sumbu- y :

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[\mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \right. \\ & k_0 \left(u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \right. \\ & \left. v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \right. \\ & \left. \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \right. \\ & \left. 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \Big] + F_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[\mu_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \right. \\
&k_0 \left(\left(u \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \right. \\
&\quad \left. \left(v \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \left(\left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + F_y \\
&= -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[\mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \right. \\
&k_0 \left(u \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right) + u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \right. \\
&\quad \left. v \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \right) + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \left(2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \left(2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 4 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + F_y
\end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

diperoleh penyederhanaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[\mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left(u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial v}{\partial y} \left(4 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \right. \\
&\quad \left. \left. 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] + F_y
\end{aligned}$$

menurut persamaan kontinuitas, diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial x}\end{aligned}$$

Sehingga penyederhanaan lebih lanjut untuk persamaan sumbu- y adalah:

$$\begin{aligned}\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[\mu_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - k_0\left(u\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2} + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. v\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y} + v\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) - \right. \\ &\quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}\left(4\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right] + F_y \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[\mu_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - k_0\left(u\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2} + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. v\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y} + v\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \right. \\ &\quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right] + F_y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[\mu_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - k_0\left(u\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2} + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. v\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y} + v\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \right. \\ &\quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right] + F_y \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[\mu_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - k_0\left(u\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2} + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. v\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y} + v\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \right. \\ &\quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right] + F_y \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[\mu_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - k_0\left(u\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y^2} + \right.\right. \\ &\quad \left.\left. v\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y} + v\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x}\left(3\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) - \right. \\ &\quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right] + F_y\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan momentum pada sumbu- y sebagai berikut:

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \left[\mu_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - k_0 \left(u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + F_y$$

3. Perhitungan Persamaan Momentum dengan Menggunakan Teori Penyederhanaan Persamaan Lapisan Batas

Berikut ini adalah penyederhanaan persamaan momentum dengan menggunakan teori lapisan batas, dengan mensubstitusikan Persamaan 5.28 ke dalam Persamaan 5.26 dan Persamaan 5.27 diperoleh:

1. Persamaan momentum sumbu- x

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\
 & \frac{k_0}{\rho} \left[u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \right. \\
 & \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \\
 & \left. 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] - g_x - \frac{1}{\rho} \sigma u B_0^2 - \frac{\mu_0}{\rho K^*} u
 \end{aligned}$$

Sesuai dengan konsep lapisan batas yang ditunjukkan oleh Ozisik (1985) dan Kasim (2014), maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
 1 \frac{1}{1} \quad \Delta \frac{1}{\Delta} = & \Delta^2 \left(\frac{1}{1} \quad \frac{1}{\Delta^2} \right) \\
 & \Delta^2 \left[1 \left(\frac{1}{1} \quad \frac{1}{\Delta^2} \right) \quad \Delta \left(\frac{1}{\Delta} \quad \frac{1}{\Delta^3} \right) \right. \\
 & \frac{1}{\Delta} \left(\frac{1}{\Delta} \quad \frac{\Delta^2}{1} \right) \quad \frac{1}{1} \left(\frac{1}{1} \quad \frac{1}{\Delta^2} \right) \\
 & \left. \frac{\Delta}{1} \quad \frac{1}{\Delta} \right] \quad 1 \quad \frac{1}{\Delta^2} \quad 1 \quad \Delta^2 \quad \frac{1}{\Delta^2} \quad 1 \\
 1 \quad 1 = & \left(\Delta^2 \quad 1 \right) \\
 & \Delta^2 \left[\left(1 \quad \frac{1}{\Delta^2} \right) \quad \left(1 \quad \frac{1}{\Delta^2} \right) \right. \\
 & \left(\frac{1}{\Delta^2} \quad \Delta \right) \quad \left(1 \quad \frac{1}{\Delta^2} \right) \\
 & \left. 1 \right] \quad 1 \quad 1 \quad 1
 \end{aligned}$$

$$1 \quad 1 = \begin{pmatrix} \Delta^2 & 1 \\ \Delta^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta^2 & 1 \\ 1 & \Delta^3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \Delta^2 & 1 \\ \Delta^2 & 1 \end{pmatrix} \\ \Delta^2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Persamaan momentum sumbu-y

$$\begin{aligned} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu_0}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \right. \\ & v \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \\ & \left. \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] - \\ & g_y - \frac{1}{\rho} \sigma v B_0^2 - \frac{\mu_0}{\rho K^*} v \end{aligned}$$

Sesuai dengan konsep lapisan batas yang ditunjukkan oleh Ozisik (1985) dan Kasim (2014), maka diperoleh:

$$\begin{aligned} 1 \frac{\Delta}{1} \quad \Delta \frac{\Delta}{\Delta} = & \Delta^2 \left(\frac{\Delta^2}{1} \quad \frac{\Delta^2}{\Delta^2} \right) \quad \Delta^2 \left[1 \frac{\Delta^3}{1} \quad 1 \frac{\Delta^3}{\Delta^2} \right. \\ & \Delta \frac{\Delta^3}{\Delta} \quad \Delta \frac{\Delta^3}{\Delta^3} \quad \left. \frac{1}{1} \left(\frac{\Delta^2}{\Delta^2} \quad \frac{\Delta^2}{1} \right) \right. \\ & \left. \frac{\Delta}{1} \left(\frac{\Delta^2}{\Delta} \quad \frac{1}{\Delta^2} \right) \quad \frac{1}{\Delta} \frac{\Delta^2}{\Delta} \right] \\ & \Delta \quad \frac{1}{\Delta^2} \Delta \quad \Delta^2 \quad \frac{\Delta^2}{\Delta^2} \Delta \\ \Delta \quad \Delta = & \Delta^2 \left(\Delta^2 \quad 1 \right) \quad \Delta^2 \left[\Delta^3 \quad \Delta \right. \\ & \left. \Delta^3 \quad \Delta 1 \quad 1 \left(1 \quad \Delta^2 \right) \right. \\ & \left. \Delta \left(\Delta \quad \frac{1}{\Delta^2} \right) \quad \frac{1}{\Delta} \Delta \right] \\ & \Delta \quad \Delta \quad \Delta \end{aligned}$$

$$\Delta \quad \Delta \quad = \quad \begin{array}{cc} \Delta^4 & \Delta^2 \\ \Delta^5 & \Delta^3 \\ \left(\begin{array}{cc} \Delta^4 & \Delta \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} \Delta^2 & \Delta^4 \end{array} \right) \\ \Delta & \Delta \end{array} \left[\begin{array}{cc} \Delta^5 & \Delta^3 \\ \Delta^2 & \Delta \end{array} \right]$$

4. Perhitungan Persamaan Pembangun Non-dimensional

Persamaan pembangun non-dimensional didapatkan dengan mensubstitusi variabel non-dimensional Persamaan 5.46 ke dalam Persamaan pembangun dimensional 5.42, 5.43, dan 5.44. Perhitungan yang dilakukan diuraikan sebagai berikut:

Persamaan Kontinuitas

Perhitungan pada persamaan kontinuitas adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= 0 \\ \frac{\partial(u U_\infty)}{\partial(ax)} + \frac{\partial(\frac{v U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}})}{\partial(\frac{ay}{Re^{\frac{1}{2}}})} &= 0 \\ \frac{U_\infty}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\frac{U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}}}{\frac{a}{Re^{\frac{1}{2}}}} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{U_\infty}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0\end{aligned}$$

sehingga didapatkan persamaan kontinuitas non dimensional sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Persamaan Momentum

Persamaan momentum dimensional diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= \bar{u}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{x}} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{\kappa_0}{\rho} \left[\bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] + g\beta(T - T_\infty) \sin\left(\frac{\bar{x}}{a}\right) - \\ &\quad \frac{1}{\rho} \sigma B_0^2 (\bar{u} - \bar{u}_e) - \frac{\nu}{K^*} (\bar{u} - \bar{u}_e)\end{aligned}$$

Perhitungan pada ruas kiri:

$$\begin{aligned}\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= (u U_\infty) \frac{\partial(u U_\infty)}{\partial(ax)} + \left(\frac{v U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}}\right) \frac{\partial(u U_\infty)}{\partial\left(\frac{a y}{Re^{\frac{1}{2}}}\right)} \\ &= \frac{U_\infty^2}{a} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{Re^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a}{Re^{\frac{1}{2}}}} v \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{U_\infty^2}{a} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{U_\infty^2}{a} v \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{U_\infty^2}{a} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

Perhitungan pada ruas kanan:

$$\begin{aligned}
&= \bar{u}_e \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{x}} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) - \frac{k_0}{\rho} \left[\bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right] + \mathbf{g} \beta (T - T_\infty) \sin \left(\frac{\bar{x}}{a} \right) - \\
&\quad \frac{1}{\rho} \sigma B_0^2 (\bar{u} - \bar{u}_e) - \frac{\nu}{K^*} (\bar{u} - \bar{u}_e) \\
&= u_e U_\infty \frac{\partial u_e U_\infty}{\partial (ax)} + \nu \left(\frac{\partial^2 (u U_\infty)}{\partial \left(\frac{a y}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)^2} \right) - \\
&\quad \frac{k_0}{\rho} \left[(u U_\infty) \frac{\partial^3 (u U_\infty)}{\partial (ax) \partial \left(\frac{a y}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)^2} + \left(\frac{v U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{\partial^3 (u U_\infty)}{\partial \left(\frac{a y}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)^3} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial (u U_\infty)}{\partial \left(\frac{a y}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)} \frac{\partial^2 (u U_\infty)}{\partial (ax) \partial \left(\frac{a y}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)} + \frac{\partial (u U_\infty)}{\partial (ax)} \frac{\partial^2 (u U_\infty)}{\partial \left(\frac{a y}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)^2} \right] + \\
&\quad \mathbf{g} \beta (T_w - T_\infty) \theta \sin \left(\frac{(ax)}{a} \right) - \frac{1}{\rho} \sigma B_0^2 ((u U_\infty) - (u_e U_\infty)) - \\
&\quad \frac{\nu}{K^*} ((u U_\infty) - (u_e U_\infty)) \\
&= \frac{(U_\infty)^2}{a} u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \nu \frac{U_\infty Re}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \\
&\quad \frac{k_0}{\rho} \left[\left(\frac{U_\infty^2 Re}{a^3} \right) u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \left(\frac{U_\infty^2 Re^{\frac{1}{2}} Re}{Re^{\frac{1}{2}} a^3} \right) v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{U_{infly}^2 (Re^{\frac{1}{2}})^2}{a a^2} \right) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{U_\infty U_\infty Re}{a a^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \\
&\quad \mathbf{g} \beta (T_w - T_\infty) \theta \sin x - \frac{1}{\rho} \sigma B_0^2 U_\infty (u - u_e) - \frac{\nu}{K^*} U_\infty (u - u_e) \\
&= \frac{(U_\infty)^2}{a} u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{U_\infty Re}{a^2} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \\
&\quad \left(\frac{U_\infty^2 Re}{a^3} \right) \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \mathbf{g} \beta (T_w - T_\infty) \theta \sin x - \\
&\quad \frac{1}{\rho} \sigma B_0^2 U_\infty (u - u_e) - \frac{\nu}{K^*} U_\infty (u - u_e)
\end{aligned}$$

sehingga didapatkan penyederhanaan dari kedua ruas sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{U_\infty^2}{a} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{(U_\infty)^2}{a} u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{U_\infty Re}{a^2} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \\
&\quad \left(\frac{U_\infty^2 Re}{a^3} \right) \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \mathbf{g} \beta (T_w - T_\infty) \theta \sin x - \\
&\quad \frac{1}{\rho} \sigma B_0^2 U_\infty (u - u_e) - \frac{\nu}{K^*} U_\infty (u - u_e) \\
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{a}{U_\infty^2} \left[\frac{(U_\infty)^2}{a} u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{U_\infty Re}{a^2} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \right. \\
&\quad \left(\frac{U_\infty^2 Re}{a^3} \right) \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \mathbf{g} \beta (T_w - T_\infty) \theta \sin x - \\
&\quad \left. \frac{1}{\rho} \sigma B_0^2 U_\infty (u - u_e) - \frac{\nu}{K^*} U_\infty (u - u_e) \right] \\
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{Re}{U_\infty a} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \\
&\quad \frac{Re}{a^2} \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{a}{U_\infty^2} \mathbf{g} \beta (T_w - T_\infty) \theta \sin x - \\
&\quad \frac{a}{U_\infty} \frac{1}{\rho} \sigma B_0^2 (u - u_e) - \frac{\nu}{K^*} \frac{a}{U_\infty} (u - u_e) \\
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{U_\infty a}{\nu} \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \\
&\quad \frac{U_\infty a}{a^2} \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{a}{U_\infty^2} \mathbf{g} \beta (T_w - T_\infty) \theta \sin x - \\
&\quad \frac{a}{U_\infty} \frac{1}{\rho} \sigma B_0^2 (u - u_e) - \frac{\nu}{K^*} \frac{a}{U_\infty} (u - u_e) \\
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{U_\infty}{a \nu} \frac{k_0}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{a}{U_\infty^2} \mathbf{g} \beta (T_w - T_\infty) \theta \sin x - \\
&\quad \frac{a}{U_\infty} \frac{1}{\rho} \sigma B_0^2 (u - u_e) - \frac{\nu}{K^*} \frac{a}{U_\infty} (u - u_e)
\end{aligned}$$

Diberikan parameter non-dimensional sebagai berikut:

$$\begin{aligned} K &= \frac{k_0 U_\infty}{a \rho \nu} \\ M &= \frac{\sigma B_0^2 a}{\rho U_\infty} \\ \phi &= \frac{\nu a}{K^* U_\infty} \\ \lambda &= \frac{Gr}{Re^2} \end{aligned}$$

dengan $Gr = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)a^3}{\nu^2}$, maka dapat diperoleh:

$$\lambda = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)a}{U_\infty^2}$$

Persamaan momentum tersebut dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \lambda \theta \sin x - \\ &\quad M(u - u_e) - \phi(u - u_e) \end{aligned}$$

dengan $u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$, maka didapatkan persamaan momentum non-dimensional sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] + \lambda \theta \sin x - (M + \phi)(u - u_e) \end{aligned}$$

Persamaan Energi

Perhitungan pada ruas kiri:

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} &= (u U_\infty) \frac{\partial((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial(ax)} + \left(v \frac{U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{\partial((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial\left(\frac{ay}{Re^{\frac{1}{2}}}\right)} \\ &= \frac{U_\infty}{a} u \frac{\partial((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial x} + \frac{U_\infty}{Re^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a}{Re^{\frac{1}{2}}}} v \frac{\partial((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial y} \\ &= \frac{U_\infty}{a} \left(u \frac{\partial((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial x} + v \frac{\partial((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Perhitungan pada ruas kanan:

$$\begin{aligned}\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} &= \alpha \frac{\partial^2 ((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial \left(\frac{a y}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)^2} \\ &= \frac{\alpha}{\left(\frac{a}{Re^{\frac{1}{2}}} \right)^2} \frac{\partial^2 ((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial y^2} \\ &= \frac{\alpha (Re^{\frac{1}{2}})^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2 ((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial y^2} \right)\end{aligned}$$

dengan:

$$\begin{aligned}\frac{\partial ((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial x} &= \frac{\partial ((T_w - T_\infty)\theta)}{\partial x} + \frac{\partial (T_\infty)}{\partial x} \\ \frac{\partial ((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial y} &= \frac{\partial ((T_w - T_\infty)\theta)}{\partial y} + \frac{\partial (T_\infty)}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 ((T_w - T_\infty)\theta + T_\infty)}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial ((T_w - T_\infty)\theta)}{\partial y} + \frac{\partial (T_\infty)}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

dan T_∞ adalah konstanta, sehingga jika diturunkan terhadap x maupun y bernilai nol. Maka persamaan energi kedua ruas tersebut dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{U_\infty}{a} (T_w - T_\infty) \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= \frac{\alpha (Re^{\frac{1}{2}})^2}{a^2} (T_w - T_\infty) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \\ \frac{U_\infty}{a} \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) &= \frac{\alpha (Re^{\frac{1}{2}})^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{a}{U_\infty} \frac{\alpha (Re^{\frac{1}{2}})^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\alpha Re}{a U_\infty} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right)\end{aligned}$$

dengan mensubstitusikan $Re = \left(\frac{U_\infty a}{\nu} \right)$ didapatkan:

$$\begin{aligned}u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\alpha \frac{U_\infty a}{\nu}}{a U_\infty} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\ u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\alpha}{\nu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\end{aligned}$$

diberikan parameter non-dimensional $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ sehingga didapatkan persamaan energi non-dimensional sebagai berikut:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

5. Perhitungan Persamaan Similaritas

Diperoleh persamaan pembangun non-dimensional sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] + \lambda \theta \sin x - (M + \phi)(u - u_e) \\ u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\end{aligned}$$

Persamaan embangun nondimensional tersebut ditransormasikan ke dalam bentuk persamaan *similarity*. Diasumsikan $u_e = \sin x$ (Merkin, 1976) dan diberikan variabel similaritas untuk silinder sirkular berpori sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\psi &= x f(x, y) \\ \theta &= \theta(x, y)\end{aligned}$$

dengan ψ adalah *stream function* yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}\end{aligned}$$

Persamaan Kontinuitas

Perhitungan untuk persamaan kontinuitas non-dimensional dengan mensubstitusikan variabel *similarity* adalah:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= 0\end{aligned}$$

Pada penyederhanaan tersebut, persamaan kontinuitas bernilai nol sehingga dapat dihilangkan.

Persamaan Momentum

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - K \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right] + \lambda \theta \sin x - (M + \phi)(u - u_e) \\
\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) &= \sin x \frac{\partial \sin x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) - \\
&\quad K \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \right) \right) \right] - \\
&\quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) \right) \right) - \\
&\quad \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right) \right) \right] + \lambda \theta \sin x - \\
&\quad (M + \phi) \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \sin x \right) \\
\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) &= \sin x \frac{\partial \sin x}{\partial x} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \\
&\quad K \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \right) \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \right) - \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} \right) \right] + \lambda \theta \sin x - \\
&\quad (M + \phi) \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \sin x \right)
\end{aligned}$$

dengan:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial y} &= x \frac{\partial f}{\partial y}; & \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}; & \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} &= x \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}; & \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} &= x \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= f + x \frac{\partial f}{\partial x}; & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
x \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) - \left(f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) &= \sin x \frac{\partial \sin x}{\partial x} + x \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - \\
&K \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(x \frac{\partial f}{\partial y} \right) \left(x \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right) \right) - \right. \\
&\left. \left(f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left(x \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right) - \right. \\
&\left. \left(x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right) \right] + \\
&\lambda \theta \sin x - (M + \phi) \left(x \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \\
&(M + \phi) \sin x \\
x \left(\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) - \left(f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right) \right) &= \sin x \cos x + x \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - \\
&K \left[2x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \right. \\
&x^2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} - x f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \\
&x^2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - x \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 - \\
&\left. x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right] + \\
&\lambda \theta \sin x - (M + \phi) \left(x \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \\
&(M + \phi) \sin x \\
\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) - \left(f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \right) &= \frac{\sin x \cos x}{x} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - \\
&K \left[2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \right. \\
&x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} - f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \\
&x \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 - \\
&\left. x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right] + \\
&\frac{\lambda \theta \sin x}{x} - (M + \phi) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \\
&(M + \phi) \frac{\sin x}{x}
\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan persamaan momentum similar sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) &= \frac{\sin x \cos x}{x} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \\
 & f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - K \left[2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right] - \\
 & Kx \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \right. \\
 & \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right] + \frac{\lambda \theta \sin x}{x} - (M + \phi) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \\
 & (M + \phi) \frac{\sin x}{x}
 \end{aligned}$$

Persamaan Energi

Persamaan energi non-dimensional akan ditransformasikan ke dalam persamaan similar dengan menggunakan cara yang sama, yakni:

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\
 \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial(\theta(x, y))}{\partial x} + \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta(x, y)}{\partial y} \right) \\
 x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \left(f + x \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \\
 x \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - f \frac{\partial \theta}{\partial y} - x \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}
 \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan persamaan energi similar sebagai berikut:

$$x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + f \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Pada dinamika fluida, kecepatan lokal dari fluida bernilai nol pada titik stagnasi terendah dari silinder ($x \approx 0$). Diketahui bahwa:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{x} = 1
 \end{aligned}$$

Sehingga persamaan similar yang diperoleh menjadi:

Persamaan momentum:

$$0 = 1 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - K \left[2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} - f \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 \right] + \lambda \theta - (M + \phi) \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + (M + \phi)$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$0 = 1 + f''' - (f')^2 + f f'' - K[2f' f''' - f f^{(4)} - (f'')^2] + \lambda \theta - (M + \phi) f' + (M + \phi)$$

Persamaan energi:

$$0 = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + f \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$0 = \frac{1}{Pr} \theta'' + f \theta'$$

6. Diskritisasi

Digunakan pendiskritan dengan skema Metode Bada Hingga ADI sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^n}{\Delta t} &= \frac{1}{2}(\partial_x^2 U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \partial_y^2 U_{i,j}^n) \\ \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} &= \frac{1}{2}(\partial_x^2 U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \partial_y^2 U_{i,j}^{n+1})\end{aligned}$$

Karena pada penelitian ini dilakukan pada kondisi steady state 1-D, $j=0$ dan $n=0$, sehingga dilakukan diskritisasi dengan menggunakan skema berikut:

Skema beda hingga pusat orde kedua untuk turunan pertama:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta y} + O(\Delta y^2)$$

Skema beda hingga pusat orde kedua untuk turunan kedua:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{y_i} = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2)$$

Skema beda hingga pusat orde ketiga untuk turunan ketiga:

$$\left. \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right|_{y_i} = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2\Delta y^3} + O(\Delta y^2)$$

Pendiskritan Persamaan Momentum

Pendiskritan untuk persamaan momentum, yakni dengan mensubstitusikan skema beda hingga (5.67) sampai (5.70) ke dalam persamaan (5.72), sehingga didapatkan hasil pendiskritan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{s_{i+1} - 2s_i + s_{i-1}}{\Delta y^2} + s_i \Delta y \left(\frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{2\Delta y} \right) - s_i^2 + 1 - (M + \phi)(s_i - 1) + \lambda \theta_i - \\ &K \left(2s_i \left(\frac{s_{i+1} - 2s_i + s_{i-1}}{\Delta y^2} \right) - s_i \Delta y \left(\frac{s_{i+2} - 2s_{i+1} + 2s_{i-1} - s_{i-2}}{2\Delta y^3} \right) - \right. \\ &\left. \left(\frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{2\Delta y} \right)^2 \right)\end{aligned}$$

Misalkan:

$$A = \frac{1}{\Delta y^2} \quad (6.1)$$

maka diperoleh:

$$\begin{aligned} 0 &= A \left(s_{i+1} - 2s_i + s_{i-1} \right) + s_i \left(\frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{2} \right) - s_i^2 + 1 + (M + \phi) - (M + \phi)s_i + \lambda\theta_i - \\ &\quad K \left(2As_i \left(s_{i+1} - 2s_i + s_{i-1} \right) - As_i \left(\frac{s_{i+2} - 2s_{i+1} + 2s_{i-1} - s_{i-2}}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{A}{4} \left(s_{i+1} - s_{i-1} \right)^2 \right) \\ 0 &= As_{i+1} - 2As_i + As_{i-1} + \frac{1}{2}s_i s_{i+1} - \frac{1}{2}s_i s_{i-1} - s_i^2 + 1 + (M + \phi) - (M + \phi)s_i + \lambda\theta_i - \\ &\quad K \left(2As_i s_{i+1} - 4As_i s_i + 2As_i s_{i-1} - \frac{A}{2}s_i s_{i+2} + As_i s_{i+1} - As_i s_{i-1} + \frac{A}{2}s_i s_{i-2} - \right. \\ &\quad \left. \frac{A}{4}s_{i+1}^2 + \frac{A}{2}s_{i+1}s_{i-1} - \frac{A}{4}s_{i-1}^2 \right) \\ 0 &= As_{i+1} - 2As_i + As_{i-1} + \frac{1}{2}s_i s_{i+1} - \frac{1}{2}s_i s_{i-1} - s_i^2 + 1 + (M + \phi) - (M + \phi)s_i + \lambda\theta_i - \\ &\quad 2KAs_i s_{i+1} + 4AKs_i s_i - 2AKs_i s_{i-1} + \frac{AK}{2}s_i s_{i+2} - AKs_i s_{i+1} + AKs_i s_{i-1} - \frac{AK}{2}s_i s_{i-2} + \\ &\quad \frac{AK}{4}s_{i+1}^2 - \frac{AK}{2}s_{i+1}s_{i-1} + \frac{AK}{4}s_{i-1}^2 \\ 0 &= As_{i+1} - (2A + (M + \phi))s_i + As_{i-1} + \left(\frac{1}{2} - 3KA \right) s_i s_{i+1} - \left(\frac{1}{2} + AK \right) s_i s_{i-1} - \\ &\quad \frac{AK}{2}s_{i+1}s_{i-1} + 1 + (M + \phi) + \lambda\theta_i + \frac{AK}{2}s_i s_{i+2} - \frac{AK}{2}s_i s_{i-2} + \\ &\quad \frac{AK}{4}s_{i+1}^2 + (4AK - 1)s_i^2 + \frac{AK}{4}s_{i-1}^2 \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk penyederhanaan bentuk, misalkan:

$$\begin{aligned} B &= (2A + (M + \phi)); C = (1 + (M + \phi)); D = \left(-\frac{1}{2} + 3KA \right); \\ E &= \left(\frac{1}{2} + AK \right); F = (4AK - 1); G = \frac{AK}{2} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Sehingga diperoleh hasil diskritisasi persamaan momentum sebagai berikut:

$$s_i^2 = (-As_{i+1} + Bs_i - As_{i-1} + Ds_i s_{i+1} + Es_i s_{i-1} + Gs_{i+1} s_{i-1} - C - \lambda\theta_i - Gs_i s_{i+2} + Gs_i s_{i-2} - \frac{G}{2}s_{i+1}^2 - \frac{G}{2}s_{i-1}^2)/F$$

atau dapat ditulis:

$$s_i = \left((-As_{i+1} + Bs_i - As_{i-1} + Ds_i s_{i+1} + Es_i s_{i-1} + Gs_{i+1} s_{i-1} - C - \lambda\theta_i - Gs_i s_{i+2} + Gs_i s_{i-2} - \frac{G}{2}s_{i+1}^2 - \frac{G}{2}s_{i-1}^2)/F \right)^{\frac{1}{2}}$$

Pendiskritan Persamaan Energi

Pendiskritan pada persamaan energi juga dilakukan dengan substitusi skema beda hingga ke Persamaan energi (5.60), sehingga didapatkan hasil pendiskritan sebagai berikut:

$$0 = \frac{1}{Pr} \left(\frac{\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1}}{\delta y^2} \right) + f_i \left(\frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\delta y} \right) \quad (6.3)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (5.71) dan (5.74) ke dalam Persamaan (5.75), didapatkan:

$$\frac{A}{Pr} \left(\theta_{i-1} - 2\theta_i + \theta_{i+1} \right) + \frac{1}{2}s_i \left(\theta_{i+1} - \theta_{i-1} \right) = 0$$

dilakukan penyederhanaan lebih lanjut, misalkan $H = \frac{A}{Pr}$, didapatkan hasil diskritisasi untuk persamaan energi sebagai berikut:

$$\theta_i = (H - \frac{1}{2}s_i)\theta_{i-1} + (H + \frac{1}{2}s_i)\theta_{i+1}/2H \quad (6.4)$$

Setelah proses diskritisasi, tahap penyelesaian berikutnya adalah dengan menggunakan algoritma tridiagonal matriks. Pada algoritma tridiagonal matriks dapat dilakukan metode eliminasi Gauss, namun pada penelitian ini digunakan metode Gauss-Seidel.

Iterasi Gauss Seidel

Iterasi dilakukan dengan menggunakan metode iterasi Gauss-Seidel pada kedua hasil diskritisasi untuk $i = 1, 2, 3, \dots, Z$ sebagai berikut:

1. Persamaan Momentum:

a. untuk $i = 1$, diperoleh $s_{i-1} = s_{i+1}$ dan $s_{i-2} = s_i$

$$s_i = \left(\left(-As_{i+1} + Bs_i - As_{i+1} + Ds_i s_{i+1} + Es_i s_{i+1} + Gs_{i+1} s_{i+1} - C - \lambda\theta_i - Gs_i s_{i+2} + Gs_i s_i - \frac{G}{2} s_{i+1}^2 - \frac{G}{2} s_{i+1}^2 \right) / F \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.5)$$

b. untuk $i = 2$, diperoleh $s_{i-2} = s_i$

$$s_i = \left(\left(-As_{i+1} + Bs_i - As_{i-1} + Ds_i s_{i+1} + Es_i s_{i-1} + Gs_{i+1} s_{i-1} - C - \lambda\theta_i - Gs_i s_{i+2} + Gs_i s_i - \frac{G}{2} s_{i+1}^2 - \frac{G}{2} s_{i-1}^2 \right) / F \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.6)$$

c. untuk $2 < i < Z - 1$

$$s_i = \left(\left(-As_{i+1} + Bs_i - As_{i-1} + Ds_i s_{i+1} + Es_i s_{i-1} + Gs_{i+1} s_{i-1} - C - \lambda\theta_i - Gs_i s_{i+2} + Gs_i s_{i-2} - \frac{G}{2} s_{i+1}^2 - \frac{G}{2} s_{i-1}^2 \right) / F \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.7)$$

d. untuk $i = Z - 1$, diperoleh $s_{i+2} = 1$

$$s_i = \left(\left(-As_{i+1} + Bs_i - As_{i-1} + Ds_i s_{i+1} + Es_i s_{i-1} + Gs_{i+1} s_{i-1} - C - \lambda\theta_i - Gs_i + Gs_i s_{i-2} - \frac{G}{2} s_{i+1}^2 - \frac{G}{2} s_{i-1}^2 \right) / F \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.8)$$

e. untuk $i = Z$, diperoleh $s_{i+1} = 1$ dan $s_{i+2} = 1$

$$s_i = \left(\left(-A + Bs_i - As_{i-1} + Ds_i + Es_i s_{i-1} + Gs_{i-1} - C - \lambda\theta_i - Gs_i + Gs_i s_{i-2} - \frac{G}{2} - \frac{G}{2}s_{i-1}^2 \right) / F \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.9)$$

2. Persamaan Energi:

a. untuk $i = 1$, diperoleh $\theta_{i-1} = \theta_{i+1} + 2\Delta y$

$$\theta_i = \left((H + \frac{1}{2}s_i)\theta_{i+1} + (H - \frac{1}{2}s_i)(\theta_{i+1} + 2\Delta y) \right) / (2H) \quad (6.10)$$

b. untuk $i = 1 < i < Z$,

$$\theta_i = (H + \frac{1}{2}s_i)\theta_{i+1} / 2H \quad (6.11)$$

c. untuk $i = Z$, diperoleh $\theta_{i+1} = \theta_{i-1}$

$$\theta_i = \left((H + \frac{1}{2}s_i)\theta_{i-1} + (H - \frac{1}{2}s_i)\theta_{i-1} \right) / (2H) \quad (6.12)$$

7. Program Matlab

Berikut ini adalah *M-file* yang digunakan untuk mendapatkan hasil dari perhitungan numerik.

```
1 %Misalkan  $f' = u$ 
2 clc; clear all; close all;
3 %INPUT DATA
4 %Variation of  $\phi$  (Porosity Parameter)
5 %
6 %
7 %%POROSITY PARAMETER( $\phi$ )
8 Porosity (1) = 0.01;
9 Porosity (2) = 0.1;
10 Porosity (3) = 0.5;
11 Porosity (4) = 0.8;
12 %
13 %%STEP SIZE OF Y
14 %
15  $\text{delta}_y = 0.035;$ 
16  $y = 0 : \text{delta}_y : 1;$ 
17  $Z = \text{length}(y);$ 
18 %
19 %INITIAL CONDITION
20 for  $i = 1 : Z$ 
21      $\text{theta}(i) = 0;$ 
22      $f(i) = 0;$ 
23      $s(i) = 0;$ 
```



```

24
25 end
26 %
=====
27 for it = 1:4
28     lambda = 0.1;
29     Pr = 1;
30     K = 1;
31     M = 0.5;
32     phi = Porosity ( it );
33     m = 1000;
34     n = 50;
35
36 %
=====
37 %PERMISALAN f' = s
38 %
-----
39 for i = 1:Z
40     if i == 1
41         s ( i ) = ( f ( i + 1 ) - f ( i + 1 ) ) / ( 2 * delta_y );
42     elseif ( i == Z )
43         s ( i ) = ( f ( i - 1 ) - f ( i - 1 ) ) / ( 2 * delta_y );
44     else
45         s ( i ) = ( f ( i + 1 ) - f ( i - 1 ) ) / ( 2 * delta_y );
46     end
47
48 end
49 %
=====
50 %KOEFISIEN

```

```

51 %
=====
52 A=1/(( delta_y ) ^2);
53 B=2*A+M+phi;
54 C=1+M+phi;
55 D=(-0.5+(3*A*K));
56 E=(0.5+(A*K));
57 F=((4*A*K)-1);
58 G=((A*K)/2);
59 H=(A/Pr);
60 I=2*delta_y;
61 %
=====
62 for it_max=1:m %ITERASI MAKSIMAL
63 %
-----
64 for i=1:Z
65 %
=====
66 %MOMENTUM EQUATION
67 %
-----
68 if (i==1)
69     s(i)=sqrt((-A*s(i+1)+B*s(i)-A*s(i+1)+D*s(i)*
70         s(i+1)+E*s(i)*s(i+1)-...
71         G*s(i)*s(i+2)+G*s(i)*s(i)-(0.5*G)*s(i+1)*s(i
72         +1)+G*s(i+1)*s(i+1)-...
73         (0.5*G)*s(i+1)*s(i+1)-C-lambda*theta(i))/F);
74 elseif (i==2)
75     s(i)=sqrt((-A*s(i+1)+B*s(i)-A*s(i-1)+D*s(i)*
76         s(i+1)+E*s(i)*s(i-1)-...

```

```

74      G*s(i)*s(i+2)+G*s(i)*s(i)-(0.5*G)*s(i+1)*s(i
      +1)+G*s(i+1)*s(i-1)-...
75      (0.5*G)*s(i-1)*s(i-1)-C-lambda*theta(i))/F);
76  elseif (i==Z-1)
77      s(i)=sqrt((-A*s(i+1)+B*s(i)-A*s(i-1)+D*s(i)*
      s(i+1)+E*s(i)*s(i-1)-...
78      G*s(i)*1+G*s(i)*s(i-2)-(0.5*G)*s(i+1)*s(i+1)
      +G*s(i+1)*s(i-1)-...
79      (0.5*G)*s(i-1)*s(i-1)-C-lambda*theta(i))/F);
80  elseif (i==Z)
81      s(i)=sqrt((-A*1+B*s(i)-A*s(i-1)+D*s(i)*1+E*s(
      i)*s(i-1)-...
82      G*s(i)*1+G*s(i)*s(i-2)-(0.5*G)*1+G*1*s(i-1)
      -...
83      (0.5*G)*s(i-1)*s(i-1)-C-lambda*theta(i))/F);
84  else
85      s(i)=sqrt((-A*s(i+1)+B*s(i)-A*s(i-1)+D*s(i)*
      s(i+1)+E*s(i)*s(i-1)-...
86      G*s(i)*s(i+2)+G*s(i)*s(i-2)-(0.5*G)*s(i+1)*s
      (i+1)+G*s(i+1)*s(i-1)-...
87      (0.5*G)*s(i-1)*s(i-1)-C-lambda*theta(i))/F);
88  end
89  %
      _____
90  %
      =====
91  %ENERGY EQUATION
92  %
      =====
93  if it_max <=n
94  %
      _____

```

```

95 if (i==1)
96 %BC: i==1: teta(i-1)=(teta(i+1)-F),
97 theta(i)=(((H+(0.5*s(i)))*theta(i+1)+(H-(0.5*s(i)))*(
    theta(i+1)+I))/(2*H));
98 %
    _____

99 elseif (i==Z)
100 %BC: i==Z: teta(i+1)=teta(i-1)
101 theta(i)=(((H-(0.5*s(i)))*theta(i-1))/(2*H));
102 %
    _____

103 elseif ((i>1)&(i<Z))
104 theta(i)=(((H+(0.5*s(i)))*theta(i+1)+(H-(0.5*s(i)))*
    theta(i-1))/(2*H));
105 %
    _____

106 else
107     theta(i)=0;
108 end
109
110
111 %
    =====

112 end
113 %
    _____

114     end
115     %
        _____

116 end

```

```

117 %
=====
118 %%FIGURE
119 %
=====

120     if ( it ==1)
121         figure (1);
122         plot (y, s, 'k-');
123         title (' Profil Kecepatan dengan Variasi parameter
124                 Porositas ');
124         ylabel (' f '(y) ');
125         xlabel (' y ');
126         hold on;
127     figure (2);
128     plot (y, theta, 'k-');
129     title (' Profil Temperatur dengan Variasi parameter
130             Porositas ');
130     ylabel (' \theta (y) ');
131     xlabel (' y ');
132     hold on;
133 %-----
134     elseif ( it ==2)
135         figure (1);
136         plot (y, s, 'k—');
137         ylabel (' f '(y) ');
138         xlabel (' y ');
139         hold on;
140     figure (2);
141     plot (y, theta, 'k—');
142     ylabel (' \theta (y) ');
143     xlabel (' y ');
144     hold on;
145 %-----
146     elseif ( it ==3)

```

```

147     figure (1);
148     plot (y, s, 'k-.');
149     ylabel ('f''(y)');
150     xlabel ('y');
151     hold on;
152 figure (2);
153 plot (y, theta, 'k-.');
154 ylabel ('\theta(y)');
155 xlabel ('y');
156 hold on;
157 %-----
158     else
159     figure (1);
160     plot (y, s, 'k:');
161     ylabel ('f''(y)');
162     xlabel ('y');
163     legend ('\phi= 0.01', '\phi= 0.1', '\phi= 0.5', '\phi=
164             0.8')
164     hold on;
165
166 figure (2);
167 plot (y, theta, 'k:');
168 ylabel ('\theta(y)');
169 xlabel ('y');
170 legend ('\phi= 0.01', '\phi= 0.1', '\phi= 0.5', '\phi= 0.8'
171         )
171 hold on;
172     end;
173 %
174 end;
175 %
=====

```


BIODATA PENULIS



Penulis bernama lengkap Galuh Oktavia Siswono, dilahirkan di Sidoarjo pada 2 Oktober 1991 dan merupakan anak pertama dari empat bersaudara pasangan Gatot Siswono dan Siti Aisyah. Pendidikan formal ditempuh mulai dari SD Negeri Kertajaya X/216 Surabaya, lulus pada tahun 2003, SMP Negeri 1 Surabaya, lulus tahun 2006, dan SMA Negeri 2 Surabaya, lulus pada tahun 2009. Setelah lulus dari SMA penulis melanjutkan studi di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya melalui jalur PMDK Reguler sebagai mahasiswa angkatan 2009 dan wisuda pada bulan Maret 2013 dengan mengambil bidang minat Riset Operasi dan Pengolahan Data (ROPD). Kemudian penulis melanjutkan pendidikan S2 di Jurusan Matematika, Insitut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya dengan mendapatkan beasiswa *Fresh Graduate* dan mengambil bidang minat Pemodelan Matematika dan Simulasi. Informasi, kritik, dan saran yang berhubungan dengan Tesis ini dapat ditujukan ke alamat e-mail: galuhoktavias@gmail.com.