TUGAS AKHIR - SM0141501

DERIVASI PADA NEAR-RING PRIMA

MOCHAMMAD REZA HABIBI
NRP 06111440000048

Dosen Pembimbing:
Drs. Komar Baihaqi, M.Si
Dian Winda S., S.Si, M.Si

DEPARTEMEN MATEMATIKA
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2018

Halaman ini sengaja dikosongkan.

FINAL PROJECT - SM141501

ON DERIVATION IN PRIME NEAR-RING

MOCHAMMAD REZA HABIBI
NRP 06111440000048

Supervisors:
Drs. Komar Baihaqi, M.Si
Dian Winda S., S.Si, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Computations, Mathematics, and Data Sciences
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2018

Halaman ini sengaja dikosongkan.

LEMBAR PENGESAHAN

DERIVASI PADA NEAR-RING PRIMA

ON DERIVATION IN PRIME NEAR-RING

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Pada bidang studi
Program Studi S-1 Departemen Matematika
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
MOCHAMMAD REZA HABIBI
NRP. 06111440000048

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,	Dosen Pembimbing I,
Dian Winda S., S.Si, M.Si	Drs. Komar Baihaqi, M.Si
NIP. 19761215 200312 2 001	NIP. 19600229 198803 1 001

Mengetahui,

Ketua Departemen Matematika
FMKSD ITS

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI, DAN PENDIDIKAN TINGGI
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
FAKULTAS MATEMATIKA, KOMPUTASI, DAN SAINS DATA
DEPARTEMEN MATEMATIKA

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Agustus 2018

Halaman ini sengaja dikosongkan.

DERIVASI PADA NEAR-RING PRIMA

Nama Mahasiswa	:	MOCHAMMAD REZA HABIBI
NRP	:	06111440000048
Departemen	:	Matematika FMKSD-ITS
Pembimbing	:	1. Drs. Komar Baihaqi, M.Si
		2. Dian Winda S., S.Si, M.Si

Abstrak

Suatu himpunan tak-kosong N dengan dua operasi biner "+" dan "." dinamakan Near-Ring jika memenuhi: $(N,+)$ adalah grup, $(N,.)$ adalah semigrup dan $(N,+,.)$ memenuhi distributif kanan. N dinamakan near-ring prima jika untuk setiap $x,y \in N$ berlaku $xNy = 0$, maka berakibat $x = 0$ atau $y = 0$. Suatu homomorpisma grup d pada near-ring N dinamakan suatu derivasi bila untuk setiap $x,y \in N$ berlaku $d(xy) = d(x)y+xd(y)$ atau $d(xy) = xd(y)+d(x)y$. Pada tugas akhir ini, ditunjukkan bahwa N merupakan ring komutatif melalui derivasi hasil kali Lie maupun hasil kali Jordan.

Kata-kunci: *Derivasi, Near-Ring, Near-Ring Prima, Ring*

Halaman ini sengaja dikosongkan.

ON DERIVATION IN PRIME NEAR-RING

Name	:	MOCHAMMAD REZA HABIBI
NRP	:	06111440000048
Department	:	Mathematics FMKSD-ITS
Supervisors	:	1. Drs. Komar Baihaqi, M.Si
		2. Dian Winda S., S.Si, M.Si

Abstract

A Near-Ring N is a non-empty set N equipped with two binary operation "+" and "." denoted by $(N, +, .)$ such that $(N, +)$ forms group, $(N, .)$ forms semigroup and the right distributive law is satisfied. N is said to be prime near-ring if for every $x, y \in N$, $xNy = 0$ implies $x = 0$ or $y = 0$. A group homomorphism d on near-ring N is called derivation if $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ or $d(xy) = xd(y) + d(x)y$ for every $x, y \in N$. In the present final project, it is shown that N is considered commutative ring by involving derivation of Lie product and Jordan product.

Keywords: *Derivation, Near-Ring, Prime Near-Ring, Ring*

Halaman ini sengaja dikosongkan.

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Wr. Wb.

Dengan nama Allah, yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang, salawat dan salam kepada Nabi Muhammad (SAW). Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, hidayah dan taufik-Nya beserta kekuatan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan Tugas Akhir dari awal hingga akhir (Alhamdulillah) dengan judul

"DERIVASI PADA NEAR-RING PRIMA"

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Departemen Matematika FMKSD Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, Penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Orang tua dan keluarga penulis yang selalu mendoakan, mendukung baik secara materiil maupun moril, memberikan semangat dan motivasi yang tiada henti kepada penulis serta keponakan penulis yang selalu menghibur penulis

2. Ibu Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si dan Bapak Drs. Komar Baihaqi, M.Si selaku pembimbing Tugas Akhir penulis yang selalu mengarahkan, memberikan masukan, saran dan wawasan matematika serta motivasi sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan

3. Ibu Soleha, S.Si, M.Si, Bapak Drs. Suhud Wahyudi, M.Si, dan Bapak Drs. Sadjidon, M.Si selaku dosen penguji Tugas Akhir, atas semua saran dan masukan yang diberikan kepada penulis
4. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si selaku koordinator tugas akhir yang memberikan arahan selama penulis mengerjakan tugas akhir
5. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku kepala Departemen Matematika ITS
6. Bapak Dr. Chairul Imron, MI.Komp. selaku dosen wali yang memberikan arahan dan masukan selama penulis menempuh perkuliahan di Departemen Matematika ITS
7. Bapak Ibu dosen, seluruh staf Tata Usaha, dan asisten laboratorium Departemen Matematika ITS
8. Mas Ali selaku admin grup 118 yang selalu memberikan semua informasi terbaru mengenai tugas akhir
9. Meylita Sari yang selalu membantu, memberi semangat dan mendukung penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir
10. Keluarga Ashar yang selalu memberi penulis semangat
11. Seluruh pihak yang terkait yang tidak dapat disebutkan satu per satu yang secara tidak langsung telah membantu penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir

Kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Akhirnya, penulis berharap semoga penulisan ini dapat bermanfaat bagi banyak pihak.

Surabaya, Agustus 2018

Penulis

Halaman ini sengaja dikosongkan.

DAFTAR ISI

			Hal
HALAMAN JUDUL			i
LEMBAR PENGESAHAN			vi
ABSTRAK			vii
ABSTRACT			ix
KATA PENGANTAR			xi
DAFTAR ISI			xv
DAFTAR GAMBAR			xvii
DAFTAR SIMBOL			xix
BAB I	Pendahuluan		1
1.1	Latar Belakang Masalah		1
1.2	Rumusan Masalah		2
1.3	Batasan Masalah		3
1.4	Tujuan		3
1.5	Manfaat		3
1.6	Sistematika Penulisan		3
BAB II	TINJAUAN PUSTAKA		5
2.1	Penelitian Terdahulu		5
2.2	Landasan Teori		6
	2.2.1	Grup	6
	2.2.2	Near-Ring	8

BAB III METODE PENELITIAN 19
3.1 Tahapan Penelitian 19
3.2 Diagram Alir Metodologi Penelitian 21
BAB IV ANALISA DAN PEMBAHASAN 23
BAB V PENUTUP 67
5.1 Kesimpulan 67
5.2 Saran 68
DAFTAR PUSTAKA 69
BIODATA PENULIS 71

DAFTAR GAMBAR

Hal

Gambar 3.1 Diagram Alir Metodologi Penelitian . . . 21

Halaman ini sengaja dikosongkan.

Daftar Simbol

$\mathbb{N}$	himpunan bilangan asli.
$\mathbb{Z}$	himpunan bilangan bulat.
$\mathbb{R}$	himpunan bilangan riil.
G	grup.
N	near-ring.
R	ring.
S	semigrup
a^{-1}	invers dari a.
e	elemen identitas
a^n	pangkat n dari a.
d	derivasi.
$\in$	elemen dari.
$\subset$	himpunan bagian.
$\subseteq$	himpunan bagian sejati.
$\cup$	gabungan himpunan.
$\mathrm{char}(R)$	karakteristik dari R.
$Z(N)$	*multiplicative center* dari N.
$R[x]$	himpunan polinomial dengan koefisien ring R.
$\mathbb{R}[x]$	himpunan polinomial dengan koefisien bilangan riil.
$x \circ y$	hasil kali Jordan.
$[x, y]$	hasil kali Lie.

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dibahas latar belakang yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Kemudian di dalamnya juga mencakup permasalahan pada topik Tugas Akhir. Kemudian dirumuskan menjadi permasalahan yang diberikan batasan-batasan untuk membatasi pembahasan pada Tugas Akhir ini.

1.1 Latar Belakang Masalah

Struktur aljabar dibangun oleh tiga komponen utama, yaitu himpunan tak-kosong, operasi biner dan aksioma. Suatu himpunan tak-kosong yang dilengkapi dengan operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma, menghasilkan suatu struktur dengan karakteristik tertentu. Sebagai contoh adalah grup dan ring.

Seiring berjalannya waktu, grup dan ring terus mengalami perkembangan. Penambahan atau pengurangan dari aksioma grup maupun ring, menghasilkan suatu perluasan dari struktur tersebut. Sebagai contoh, grup mengalami perluasan menjadi semigrup melalui pengurangan beberapa aksiomanya, atau ring mengalami perluasan menjadi near-ring melalui pengurangan beberapa aksiomanya.

Near-ring merupakan perluasan dari ring tanpa harus memenuhi komutatif terhadap penjumlahan dan distributif kiri terhadap penjumlahan dan perkalian. Pada perkembangannya, banyak penelitian yang dilakukan mengenai near-ring. Sedangkan pada penerapannya, near-ring dapat dimanfaatkan pada beberapa bidang, misalnya pada teori koding atau teori desain, seperti konstruksi BIBD

(*Balanced Incomplete Block Design*) dari near-ring planar dan konstruksi *Error Correcting Code* dari near-ring planar.

Suatu homomorpisma grup pada near-ring N yaitu $d : N \to N$ dinamakan suatu derivasi bila memenuhi $d(xy) = d(x)y + xd(y), \forall x, y \in N$[2] atau $d(xy) = xd(y) + d(x)y, \forall x, y \in N$[3]. Penelitian yang berhubungan dengan derivasi pada near-ring terus mengalami perkembangan, beberapa di antaranya adalah *Some Results on Derivations in Near-Rings*[4], *Derivation on Prime Near-Ring*[5], *Existence of Derivations on Near-Rings*[6], *Nonexistence of Nonzero Derivations on Some Classes of Zero-Symmetric 3-Prime Near-Rings*[7] dan *Derivation in Prime Near-Ring*[8].

Near-Ring sendiri juga terus mengalami perkembangan, misalnya mengenai near-ring prima yang merupakan salah satu tipe near-ring. Suatu near-ring N dinamakan near-ring prima jika untuk setiap $x, y \in N$ berlaku $xNy = 0$, maka berakibat $x = 0$ atau $y = 0$. Pada [9] dan [10] dibahas mengenai derivasi yang menyebabkan suatu near-ring prima merupakan ring komutatif. Pada penelitian ini dikaji dan dikembangkan teorema pada [9] dan [10] sehingga terbentuk teorema baru dengan memanfaatkan sifat - sifat derivasi, hasil kali Lie dan hasil kali Jordan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pendahuluan yang telah diuraikan sebelumnya, disusun suatu rumusan masalah, yakni

1. Bagaimana hubungan derivasi dengan sifat komutatif dari suatu near-ring

2. Bagaimana syarat derivasi pada near-ring supaya menjadi ring komutatif

3. Mengembangkan teorema pada [9] dan [10] untuk membentuk teorema yang baru

1.3 Batasan Masalah

Pada tugas akhir ini, diberikan batasan masalah, yakni near-ring prima dan derivasi yang dibahas hanya yang berkaitan dengan teorema yang telah dihasilkan pada [9] dan [10].

1.4 Tujuan

Tujuan dari tugas akhir ini adalah

1. Mengetahui hubungan derivasi dengan sifat komutatif dari suatu near-ring prima
2. Mengetahui syarat derivasi yang menyebabkan suatu near-ring prima merupakan ring komutatif
3. Membentuk teorema yang baru berdasarkan teorema yang ada pada [9] dan [10]

1.5 Manfaat

Penulisan tugas akhir ini diharapkan dapat bermanfaat sebagai wawasan tambahan tentang near-ring, near-ring prima dan derivasi pada near-ring serta bermanfaat sebagai referensi atau bahkan kajian dalam ilmu matematika dan aplikasinya.

1.6 Sistematika Penulisan

1. BAB I PENDAHULUAN
   Bab ini berisi gambaran umum dari penulisan yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.
2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA
   Bab ini membahas landasan teori yang mendasari penulisan Tugas Akhir mencakup penetlitian terdahulu, pengertian near-ring dan derivasi pada near-ring.

3. BAB III METODE PENELITIAN
   Bab ini menjelaskan langkah-langkah yang digunakan dalam penyelesaian masalah pada Tugas Akhir. Disamping itu, dijelaskan pula prosedur dan proses pelaksanaan tiap-tiap langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan Tugas Akhir.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN
   Pada bab ini dijelaskan secara detail mengenai derivasi pada near-ring dan syarat derivasi yang menyebabkan suatu near-ring merupakan ring komutatif melalui derivasinya.

5. BAB V PENUTUP
   Bab ini berisi kesimpulan akhir yang diperoleh dari analisis dan pembahasan pada bab sebelumnya serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas landasan teori yang mendasari penulisan Tugas Akhir. Di dalamnya mencakup penelitian terdahulu, definisi grup, ring dan perluasannya, pengertian near-ring dan near-ring prima, beserta derivasi pada near-ring, lemma dan teorema yang dibutuhkan untuk menunjang pengerjaan Tugas Akhir.

2.1 Penelitian Terdahulu

Pada [2] diberikan definisi pada near-ring sekaligus menjadi pionir untuk penelitian mengenai derivasi pada near-ring. Didefinisikan bahwa suatu homomorpisma grup pada near-ring N yaitu $d : N \rightarrow N$ dinamakan suatu derivasi bila memenuhi $d(xy) = d(x)y + xd(y), \forall x, y \in N$[2]. Pada [2] juga ditunjukkan bahwa "Jika N adalah suatu near-ring prima yang memuat suatu derivasi tak-trivial d sedemikian hingga $d(N) \subset Z(N)$, maka $(N, +)$ adalah abelian. Terlebih, jika N adalah 2-*torsion free*, maka N adalah ring komutatif". Setelahnya penelitian serupa yang menyelidiki derivasi pada near-ring terus bermunculan, salah satunya adalah [3] yang menunjukkan bahwa jika d adalah suatu derivasi pada near-ring N, maka $d(xy) = xd(y) + d(x)y$ jika dan hanya jika $d(xy) = d(x)y + xd(y), \forall x, y \in N$[3].

Pada [11] diberikan teorema yang sangat penting, yaitu "Misalkan N adalah suatu near-ring prima. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d yang memenuhi $d(N) \subset Z(N)$, maka N adalah ring komutatif". Teorema tersebut yang menjadi rujukan pada [9] dan [10] yang dikaji pada Tugas Akhir ini.

2.2 Landasan Teori

2.2.1 Grup

Pada bagian ini, dijelaskan mengenai definisi dan aksiomatik grup, yang mana merupakan dasar dari pengembangan konsep grup dan perluasan grup untuk menunjang pembahasan teorema pada BAB IV.

Definisi 2.2.1.1. [12]

Suatu himpunan tak-kosong G bersama dengan suatu operasi * pada G dinamakan grup terhadap operasi * bila memenuhi aksiomatik grup:

1. **Tertutup** Untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$
2. **Asosiatif** Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$
3. **Identitas** Ada suatu elemen $e \in G$ sedemikian hingga untuk semua $a \in G$ berlaku $a * e = a = e * a$. Elemen e dinamakan elemen identitas di G
4. **Invers** Untuk setiap $a \in G$ ada elemen $a^{-1} \in G$ yang memenuhi $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$. Elemen a^{-1} dinamakan invers dari elemen a

Bila dalam grup G memenuhi sifat $a + b = b + a$ untuk semua $a, b \in R$, maka grup G dinamakan grup komutatif atau grup abelian.

Definisi 2.2.1.2. [13]

Suatu himpunan tak-kosong S bersama dengan suatu operasi * pada S dinamakan semigrup terhadap operasi * jika memenuhi:

1. Untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a * b \in S$
2. Untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$

Terlihat bahwa setiap grup adalah semigrup, tetapi tidak sebaliknya.

Definisi 2.2.1.3. [12]

Diberikan suatu pemetaan $\phi : G \to G'$ di mana G dan G' adalah grup. Pemetaan ϕ dinamakan homomorpisma grup bila memenuhi

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b), \text{ untuk semua } a, b \in G$$

Perlu diperhatikan bahwa, dalam $\phi(ab)$ operasi biner yang digunakan adalah dalam G, sedangkan dalam $\phi(a)\phi(b)$ operasi biner yang digunakan dalam G'.

Contoh 2.2.1.1.

Diberikan grup $G = \mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan dan $G' = \{-1, 1\}$ terhadap operasi perkalian. Didefinisikan pemetaan $\phi : G \to G'$ oleh

$$\phi(z) = \begin{cases} 1, & \text{bila } z \text{ genap} \\ -1, & \text{bila } z \text{ ganjil} \end{cases}$$

Maka ϕ adalah homomorpisma grup

Penyelesaian.

Jika m dan n keduanya genap, maka $m + n$ adalah genap, didapat $\phi(m + n) = 1 = 1.1 = \phi(m)\phi(n)$. Juga jika m dan n keduanya ganjil, maka $m + n$ adalah genap, didapat $\phi(m + n) = 1 = (-1).(-1) = \phi(m)\phi(n)$. Sedangkan jika m genap dan n ganjil, maka $m + n$ adalah ganjil, didapat $\phi(m + n) = -1 = 1.(-1) = \phi(m)\phi(n)$. Dengan cara yang sama jika m ganjil dan n genap, maka $m + n$ adalah ganjil, didapat $\phi(m + n) = -1 = (-1).1 = \phi(m)\phi(n)$. Perlu diperhatikan bahwa, dalam $\phi(m + n)$ operasi yang digunakan adalah dalam $\mathbb{Z}$ yaitu operasi penjumlahan, sedangkan dalam $\phi(m)\phi(n)$ operasi yang digunakan adalah dalam G' yaitu operasi perkalian.

2.2.2 Near-Ring

Setelah dibahas mengenai grup dan semigrup, selanjutnya pada bagian ini dibahas mengenai definisi dan aksiomatik ring, yang mana merupakan dasar dari pengembangan konsep ring dan perluasan ring. Pada bagian ini diberikan juga pengertian derivasi pada near-ring, lema dan teorema untuk menunjang pembahasan teorema pada BAB IV.

Definisi 2.2.2.1. [12]

Suatu himpunan tak-kosong R dilengkapi dengan dua operasi "tambah" dan "perkalian" dinamakan suatu ring bila memenuhi empat aksioma ring, yaitu untuk setiap a, b dan c di R:

1. $(R, +)$ grup komutatif
2. $(R, .)$ semigrup

   Tertutup terhadap perkalian, $ab \in R$

   Asosiatif terhadap perkalian, $a(bc) = (ab)c$

3. $(R, +, .)$ bersifat distributif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku

   Distributif kanan yaitu $(a + b)c = ac + bc$

   Distributif kiri yaitu $a(b + c) = ab + ac$

Bila dalam ring R memenuhi sifat $ab = ba$ untuk semua $a, b \in R$, maka ring R dinamakan ring komutatif. Juga bila ring R memuat elemen $1 \in R$ yang memenuhi $1.a = a = a.1, \forall a \in R$, maka ring R dinamakan ring satuan.

Definisi 2.2.2.2. [14]

Suatu himpunan tak-kosong N bersama dengan dua operasi "+" (tambah) dan "." (perkalian) dinamakan near-ring jika memenuhi:

1. $(N, +)$ adalah grup

2. $(N, .)$ adalah semigrup

3. **Distributif kanan** terhadap perkalian dan tambah, untuk setiap $a, b, c \in N$ berlaku $(a + b)c = ac + bc$

Terlihat bahwa setiap ring adalah near-ring, tetapi tidak sebaliknya.

Contoh 2.2.2.1.

Diberikan $(G, +)$ grup dan himpunan $G' = \{f \text{ fungsi } | f : G \to G\}$, yaitu himpunan semua fungsi dari grup G ke grup G dan didefinisikan operasi penjumlahan "+" dan komposisi "$\circ$" pada G', yaitu $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ dan $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ untuk setiap $f, g \in G'$. Maka $(G', +, \circ)$ merupakan near-ring.

Penyelesaian.

Perhatikan bahwa (1)-(5) menunjukkan $(G', +)$ membentuk grup, (6)-(8) menunjukkan $(G', \circ)$ membentuk semigrup dan (9) menunjukkan G' memenuhi distributif kanan.

1. ambil sebarang $f_1, f_2, g_1, g_2 \in G'$. Misalkan $f_1 = f_2$ dan $g_1 = g_2$, sehingga $f_1(x) = f_2(x)$ dan $g_1(x) = g_2(x)$ untuk setiap $x \in G$. Maka $(f_1+g_1)(x) = f_1(x)+g_1(x) = f_2(x) + g_2(x) = (f_2 + g_2)(x)$, sehingga operasi " + " *well defined*.

2. ambil sebarang $f, g \in G'$, berlaku $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Karena $f(x) + g(x) \in G$, maka $f + g \in G'$. Jadi G' tertutup terhadap operasi " + ".

3. ambil sebarang $f, g, h \in G'$, berlaku

$$\begin{aligned}((f + g) + h)(x) &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= (f(x) + g(x)) + h(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= (f + (g + h))(x) \end{aligned}$$

Jadi G' asosiatif terhadap operasi " + "

4. terdapat elemen identitas, yaitu pemetaan nol yang didefinisikan sebagai $0'(x) = 0$. Maka untuk sebarang $f \in G'$

$$\begin{aligned} (f + 0')(x) &= f(x) + 0'(x) \\ &= f(x) + 0 \\ &= 0 \\ &= 0 + f(x) \\ &= (0' + f)(x) \end{aligned}$$

5. terdapat elemen invers, yang didefinisikan sebagai $f^{-1}(x) = -f(x)$ untuk setiap $f \in G'$. Maka

$$\begin{aligned} (f + f^{-1})(x) &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \\ &= -f(x) + f(x) \\ &= (f^{-1} + f)(x) \end{aligned}$$

6. ambil sebarang $f_1, f_2, g_1, g_2 \in G'$. Misalkan $f_1 = f_2$ dan $g_1 = g_2$, sehingga $f_1(x) = f_2(x)$ dan $g_1(x) = g_2(x)$ untuk setiap $x \in G$. Maka $(f_1 \circ g_1)(x) = f_1(g_1(x)) = f_1(g_2(x)) = f_2(g_2(x)) = (f_2 \circ g_2)(x)$, sehingga operasi " $\circ$ " *well defined.*

7. ambil sebarang $f, g \in G'$, berlaku $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Karena $f(g(x)) \in G$, maka $f \circ g \in G'$. Jadi G' tertutup terhadap operasi " $\circ$ ".

8. ambil sebarang $f, g, h \in G'$, berlaku

$$\begin{aligned}((f \circ g) \circ h)(x) &= (f \circ g)(h(x)) \\ &= f(g((h(x)))) \\ &= f((g \circ h)(x)) \\ &= (f \circ (g \circ h))(x)\end{aligned}$$

   Jadi G' asosiatif terhadap operasi " $\circ$ "

9. ambil sebarang $f, g, h \in G'$, berlaku

$$\begin{aligned}((f + g) \circ h)(x) &= (f + g)(h(x)) \\ &= f(h(x)) + g(h(x)) \\ &= (f \circ h)(x) + (g \circ h)(x) \\ &= ((f \circ h) + (g \circ h))(x)\end{aligned}$$

   Jadi G' memenuhi distributif kanan

Perlu diketahui bahwa, near-ring $(G', +, \circ)$ tidak memenuhi distributif kiri sebab

$$\begin{aligned}(f \circ (g + h))(x) &= f((g + h)(x)) \\ &= f(g(x) + h(x)) \\ &\neq f(g(x)) + f(h(x))\end{aligned}$$

Jadi $(G', +, \circ)$ adalah near ring yang bukan ring.

Contoh 2.2.2.2.

Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan didefinisikan operasi " $+$ " sebagai penjumlahan biasa dan perkalian "." sebagai berikut

$$a.b = a \text{ untuk setiap } a, b \in \mathbb{Z}$$

Maka $(\mathbb{Z}, +, .)$ merupakan near-ring.

Penyelesaian.
Sebagaimana yang diketahui, $\mathbb{Z}$ adalah grup terhadap operasi penjumalah biasa. Maka hanya perlu dibuktikan $(\mathbb{Z}, .)$ membentuk semigrup dan $\mathbb{Z}$ memenuhi distributif kanan.

1. ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a.b = a$. Karena $a \in \mathbb{Z}$, maka $a.b \in \mathbb{Z}$. Jadi $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi ".".

2. ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku

$$\begin{aligned}(a.b).c &= a.c \\ &= a \\ &= a.b \\ &= a.(b.c)\end{aligned}$$

   Jadi $\mathbb{Z}$ asosiatif terhadap operasi "."

3. ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku

$$\begin{aligned}(a+b).c &= a+b \\ &= a.c + b.c\end{aligned}$$

   Jadi $\mathbb{Z}$ memenuhi distributif kanan

Perlu diketahui bahwa, near-ring $(\mathbb{Z}, +, .)$ tidak memenuhi distributif kiri sebab $a(b+c) = a$ sedangkan $ab + ac = a + a$. Jadi $(\mathbb{Z}, +, .)$ adalah near ring yang bukan ring.

Proposisi 2.2.2.1.
Misalkan N adalah suatu near-ring. Maka untuk setiap $x, y \in N$ berlaku $(-x)y = -xy$, $-(x+y) = -y - x$ dan $-(-x) = x$.

Perlu diperhatikan bahwa, $x(-y)$ tidak harus sama dengan $-xy$.

Contoh 2.2.2.3.

Perhatikan Contoh 2.2.2.2. Misalkan $x, y \in \mathbb{Z}$, maka $x(-y) = x$ sedangkan $-xy = -x$.

Definisi 2.2.2.3. [9]

Suatu near-ring N dinamakan simetri nol jika untuk setiap $x \in N$ berlaku $x.0 = 0$.

Perlu diperhatikan bahwa, terdapat near-ring yang bukan simetri nol.

Contoh 2.2.2.4.

Perhatikan Contoh 2.2.2.2. Misalkan $f(x) = k$ untuk suatu $k \in G$ yang tak-nol, maka $(f \circ 0)(x) = f(0) = k \neq 0$ sehingga $f \circ 0 = f$. Jadi G' adalah near-ring yang bukan simetri nol.

Definisi 2.2.2.4. [9]

Misalkan N adalah suatu near-ring. Maka $Z(N)$ menyatakan *multiplicative center* dari N, yaitu elemen-elemen di N yang komutatif dengan semua elemen di N terhadap operasi perkalian.

Contoh 2.2.2.5.

Perhatikan Contoh 2.2.2.2. Misalkan $f(x) = x$, maka f berada pada $Z(G')$ sebab untuk sebarang $g \in G'$ berlaku $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.

Definisi 2.2.2.5. [9]

Suatu near-ring N dinamakan near-ring prima jika untuk setiap $x, y \in N$ berlaku $xNy = 0$, maka berakibat $x = 0$ atau $y = 0$.

Contoh 2.2.2.6.

Perhatikan Contoh 2.2.2.2. Misalkan $anb = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, maka

$$anb = 0$$

$$\begin{aligned} an &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

sehingga jika $aNb = 0$, maka $a = 0$. Jadi $(\mathbb{Z}, +, .)$ adalah near-ring prima.

Perhatikan juga Contoh 2.2.2.1. Misalkan $f \circ g \circ h = 0$, $\forall g \in G'$, maka

$$\begin{aligned} f \circ g \circ h &= 0 \\ (f \circ g \circ h)(x) &= 0 \\ f(g(h(x))) &= 0 \\ f &= 0 \end{aligned}$$

sehingga jika $fG'h = 0$, maka $f = 0$. Jadi G' adalah near-ring prima.

Lemma 2.2.2.1. [3]
Misalkan d adalah suatu homomorpisma grup pada near-ring N. Maka $d(xy) = xd(y)+d(x)y$ untuk setiap $x, y \in N$ bila dan hanya bila $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ untuk setiap $x, y \in N$.

Definisi 2.2.2.6. [2]
Suatu homomorpisma grup pada near-ring N yaitu $d : N \to N$ dinamakan suatu derivasi bila untuk setiap $x, y \in N$ berlaku $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ atau $d(xy) = xd(y) + d(x)y$.

Contoh 2.2.2.7.
Diberikan himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$. Kemudian, didefinisikan suatu pemetaan $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oleh $d(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ yang mana merupakan pemetaan nol. Pemetaan tersebut merupakan derivasi.

Penyelesaian.
Ditunjukkan bahwa d memenuhi Definisi 2.3.3.

1. ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned} d(x+y) &= 0 \\ &= 0+0 \\ &= d(x)+d(y) \end{aligned}$$

   Jadi d merupakan homomorpisma grup

2. ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned} d(xy) &= 0 \\ &= 0+0 \\ &= 0.y+x.0 \\ &= d(x)y+xd(y) \end{aligned}$$

Jadi d merupakan derivasi dan derivasi yang demikian dinamakan derivasi nol.

Contoh 2.2.2.8.

Diberikan himpunan polinomial ring $\mathbb{R}[x]$ yaitu himpunan polinomial dengan koefisien bilangan riil. Kemudian, didefinisikan suatu pemetaan $d : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ oleh $d(p(x)) = p'(x)$ untuk setiap $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, di mana $p'(x)$ merupakan turunan dari $p(x)$ terhadap x. Pemetaan tersebut merupakan derivasi.

Penyelesaian.

Ditunjukkan bahwa d memenuhi Definisi 2.3.3.

1. ambil sebarang $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, maka

$$\begin{aligned} d((p+q)(x)) &= (p+q)'(x) \\ &= (p'+q')(x) \\ &= p'(x)+q'(x) \\ &= d(p(x))+d(q(x)) \end{aligned}$$

   Jadi d merupakan homomorpisma grup

2. ambil sebarang $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, maka

$$\begin{aligned} d((pq)(x)) &= (pq)'(x) \\ &= (p'q + pq')(x) \\ &= (p'q)(x) + (pq')(x) \\ &= p'(x)q(x) + p(x)q'(x) \\ &= d(p(x))q(x) + p(x)d(q(x)) \end{aligned}$$

Jadi d merupakan derivasi dan derivasi yang demikian dinamakan derivasi tak-nol.

Lemma 2.2.2.2. [2]

Misalkan d adalah suatu derivasi pada near-ring N. Maka untuk setiap $x, y, z \in N$ berlaku:

1. $z(xd(y)+d(x)y) = zxd(y)+zd(x)y$ untuk setiap $x, y, z \in N$

2. $z(d(x)y+xd(y)) = zd(x)y+zxd(y)$ untuk setiap $x, y, z \in N$

Sifat yang demikian dinamakan sifat distributif sebagian.

Teorema 2.2.2.1. [15]

Suatu near-ring N memuat suatu derivasi bila dan hanya bila N adalah near-ring simetri nol.

Contoh 2.2.2.9.

Pada Contoh 2.2.2.2. Tidak terdapat derivasi pada near-ring $(\mathbb{Z}, +, .)$.

Penyelesaian.

Misalkan terdapat derivasi d pada near-ring $(\mathbb{Z}, +, .)$, maka untuk sebarang $n \in \mathbb{Z}$

$$d(n) = d(1 + 1 + ... + 1)$$

$$
\begin{aligned}
&= d(1) + d(1) + ..d(1) \\
&= nd(1) \\
d(n) &= n
\end{aligned}
$$

Untuk $n = 1$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
d(1) &= d(1.1) \\
d(1) &= d(1).1 + 1.d(1) \\
d(1) &= d(1) + 1 \\
0 &= 1
\end{aligned}
$$

Jadi tidak terdapat derivasi pada near-ring $(\mathbb{Z}, +, .)$.

Perlu diketahui juga bahwa, pada Contoh 2.2.2.1. Tidak terdapat derivasi pada near-ring G'.

Misalkan terdapat derivasi d pada near-ring $(G', +, \circ)$, maka

$$
\begin{aligned}
d(1) &= d(1 \circ 1) \\
d(1) &= d(1) \circ 1 + 1 \circ d(1) \\
d(1) &= d(1) + 1 \\
0 &= 1
\end{aligned}
$$

Jadi tidak terdapat derivasi pada near-ring $(G', +, \circ)$.

Lemma 2.2.2.3.

Misalkan N adalah suatu near-ring dan d adalah suatu derivasi pada N. Jika $r \in Z(N)$, maka $d(r) \in Z(N)$.

Definisi 2.2.2.7. 9]

Suatu hasil kali Lie pada near-ring N didefinisikan sebagai $[x, y] = xy - yx$, di mana $x, y \in N$.

Definisi 2.2.2.8. [9]

Suatu hasil kali Jordan pada near-ring N didefinisikan sebagai $x \circ y = xy + yx$, di mana $x, y \in N$.

Lemma 2.2.2.4. [10]

Misalkan N adalah suatu near-ring. Maka, untuk setiap $x, y \in N$ dan $k \in \mathbb{N}$ berlaku:

1. $[x, yx^k] = [x, y]x^k$
2. $[xy^k, y] = [x, y]y^k$
3. $x \circ (yx^k) = (x \circ y)x^k$
4. $(xy^k) \circ y = (x \circ y)y^k$

Lemma 2.2.2.5. [2]

Misalkan N adalah suatu near-ring prima. Jika z elemen tak-nol di $Z(N)$, maka z bukan pembagi nol.

Contoh 2.2.2.10.

Pada Contoh 2.2.2.1. Jika $f(x) = x$, maka f bukan pembagi nol.

Penyelesaian.

Untuk sebarang $g \in G'$. Jika $(f \circ g)(x) = 0$, maka

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= 0 \\ f(g(x))) &= 0 \\ g(x) &= 0 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama. Jika $(g \circ f)(x) = 0$, maka

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= 0 \\ g(f(x))) &= 0 \\ g(x) &= 0 \end{aligned}$$

Jadi f bukan pembagi nol.

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai langkah-langkah yang akan digunakan dalam penyelesaian masalah tugas akhir ini. Selain itu, dijelaskan juga prosedur dan proses beserta penjelasan dari tiap-tiap langkah yang akan dilakukan dalam penyelesaian tugas akhir ini.

3.1 Tahapan Penelitian

Adapun langkah-langkah sistematis yang akan dilakukan dalam proses pengerjaan tugas akhir ini terbagi menjadi 6 bagian, yaitu sebagai berikut:

a. Studi Literatur
   Pada tahap ini dilakukan studi referensi yang mendalam mengenai subjek yang dibahas pada tugas akhir ini. Referensi yang dapat dipelajari adalah berasal dari jurnal-jurnal, buku-buku maupun literatur-literatur yang berkaitan dengan topik yang dibahas pada tugas akhir ini.

b. Mempelajari konsep grup dan ring
   Pada tahap ini adalah proses untuk memahami inti dari grup dan ring beserta perluasan dari grup dan ring tersebut. Pada tahap ini juga dilakukan untuk memahami near-ring yang mana merupakan perluasan dari ring. Selain itu, dipelajari juga near-ring prima yang mana merupakan salah satu tipe dari near-ring dan sifat-sifat yang melekat dari near-ring prima.

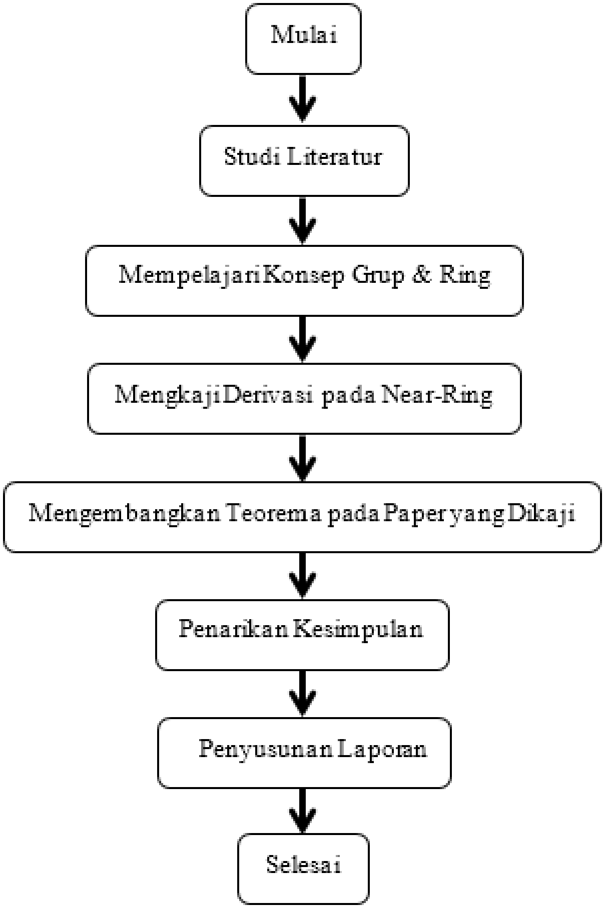
c. Mengkaji derivasi pada near-ring prima
Setelah mempelejari konsep grup dan ring. Pada tahap ini akan dikaji derivasi pada near-ring prima. Tahap ini adalah inti daripada pengerjaan tugas akhir ini, yaitu setelah memahami konsep grup dan ring beserta near-ring yang mana merupakan perluasan dari ring, diselidiki bagaimana hubungan derivasi pada near-ring prima dengan sifat komutatif dari suatu near-ring prima dan bagaimana syarat dari suatu derivasi pada near-ring prima yang menyebabkan suatu near-ring prima merupakan ring komutatif. Pada tahap ini akan dikaji juga sifat-sifat yang melekat dari derivasi pada near-ring prima.

d. Mengembangkan teorema pada paper yang dikaji
Setelah mengkaji derivasi pada near-ring prima. Pada tahap ini akan dikembangkan teorema mengenai derivasi pada near-ring prima yang terdapat pada [9] dan [10] sehingga dapat terbentuk teorema yang baru mengenai syarat derivasi pada near-ring prima yang menyebabkan suatu near-ring prima merupakan ring komutatif dengan memanfaatkan sifat-sifat derivasi pada near-ring prima, hasil kali Lie dan hasil kali Jordan.

e. Penarikan kesimpulan dan pemberian saran
Pada tahap ini, ditarik kesimpulan berdasarkan hasil analisis dan penelitian yang telah dilakukan pada tahap-tahap sebelumnya serta pemberian saran untuk perbaikan dan pegembangan penelitian selanjutya. Kemudian, dilakukan pembukan tugas akhir.

f. Penyusunan Laporan Hasil Penelitian
Pada tahap ini akan dilakukan penyusunan laporan tugas akhir berdasarkan hasil analisis dan penelitian yang telah dilakukan.

3.2 Diagram Alir Metodologi Penelitian



Gambar 3.1: Diagram Alir Metodologi Penelitian

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB IV
ANALISA DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijelaskan secara detail mengenai derivasi pada near-ring. Kemudian dijelaskan hubungan derivasi dengan keadaan yang menyebabkan near-ring merupakan ring komutatif.

Lema berikut dibutuhkan untuk membuktikan Lema 4.2.

Lemma 4.1. [2]
Misalkan N adalah suatu near-ring prima. Jika terdapat elemen tak-nol $z \in Z(N)$ yang memenuhi $z + z \in Z(N)$ maka $(N, +)$ adalah grup abelian.

Bukti. Ditunjukkan $x + y = y + x$ untuk setiap $x, y \in N$.

Perhatikan bahwa, untuk sebarang $x, y \in N$

$$\begin{aligned}
(x+y)(z+z) &= x(z+z) + y(z+z) && \text{(distributif kanan)}\\
&= (z+z)x + (z+z)y && (z+z \in Z(N))\\
&= zx + zx + zy + zy && \text{(distributif kanan)}\\
&= xz + xz + yz + yz && (z \in Z(N))\\
&= (x+x+y+y)z && \text{(distributif kanan)}
\end{aligned}$$

Di lain sisi

$$\begin{aligned}
(x+y)(z+z) &= (z+z)(x+y) && (z+z \in Z(N))\\
&= z(x+y) + z(x+y) && \text{(distributif kanan)}\\
&= (x+y)z + (x+y)z && (z \in Z(N))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= xz + yz + xz + yz && \text{(distributif kanan)} \\
&= (x + y + x + y)z && \text{(distributif kanan)}
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
(x + x + y + y)z &= (x + y + x + y)z \\
(x + x + y + y)z - (x + y + x + y)z &= 0 \\
((x + x + y + y) - (x + y + x + y))z &= 0 \quad \text{(distributif kanan)}
\end{aligned}
$$

Memakai Lema 2.2.2.5, diperoleh

$$
\begin{aligned}
(x + x + y + y) - (x + y + x + y) &= 0 \\
x + x + y + y &= x + y + x + y \\
x + y &= y + x \\
&\text{untuk setiap } x, y \in N
\end{aligned}
$$

Jadi $(N, +)$ adalah grup abelian. ■

Lema berikut dibutuhkan untuk membuktikan teorema yang terdapat pada BAB IV.

Lemma 4.2. [4]

Misalkan N adalah suatu near-ring prima. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d yang memenuhi $d(N) \subset Z(N)$ maka N adalah ring komutatif.

Bukti. Berdasarkan yang diketahui, d adalah derivasi tak-nol yang memenuhi $d(N) \subset Z(N)$. Maka terdapat $z \in N$ sedemikian hingga $d(z)$ tak-nol dan $d(z) \in Z(N)$. Dari $d(N) \subset Z(N)$ dan dari homomorpisma grup d, diperoleh $d(z + z) = d(z) + d(z) \in Z(N)$. Maka $(N, +)$ adalah grup abelian menurut Lema 4.1.

Selanjutnya, untuk $x, y \in N$

$$
d(xy) = d(x)y + xd(y) \qquad \text{(definisi derivasi)}
$$

$$\begin{aligned} &= yd(x) + d(y)x && (d(N) \subset Z(N)) \\ &= d(y)x + yd(x) && ((N, +) \text{ abelian}) \\ &= d(yx) && (\text{definisi derivasi}) \end{aligned}$$

Maka untuk sebarang $z \in N$

$$\begin{aligned} d(xy)z &= d(yx)z \\ d(xy)z - d(yx)z &= 0 \\ (d(xy) - d(yx))z &= 0 && (\text{distributif kanan}) \\ (d(xy - yx))z &= 0 && (\text{homomorpisma grup}) \\ d([x, y])z &= 0 && (\text{hasil kali Lie}) \end{aligned}$$

Substitusi y oleh yx, diperoleh

$$\begin{aligned} d([x, yx])z &= 0 \\ d([x, y]x)z &= 0 && (\text{Lema 2.2.2.4}) \\ (d([x, y])x + [x, y]d(x))z &= 0 && (\text{definisi derivasi}) \\ d([x, y])xz + [x, y]d(x)z &= 0 && (\text{distributif kanan}) \\ xd([x, y])z + [x, y]zd(x) &= 0 && (d(N) \subset Z(N)) \\ [x, y]zd(x) &= 0 \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $z \in Z$, maka

$$[x, y]Nd(x) = 0$$

Karena N adalah near-ring prima, maka persamaan di atas menunjukkan bahwa $[x, y] = 0$ atau $d(x) = 0$. Karena d adalah derivasi tak-nol, maka $d(x) = 0$ tidak memenuhi, sehingga berlaku $[x, z] = 0$ atau $xz = zx$ untuk setiap $x, z \in N$. Maka N komutatif terhadap operasi perkalian.

Kemudian, untuk sebarang $a, b, c \in N$

$$a(b + c) = (b + c)a \qquad ((N, .) \text{ komutatif})$$

$$\begin{aligned} &= ba + ca && \text{(distributif kanan)} \\ &= ab + ac && \text{((}N,.\text{) komutatif)} \end{aligned}$$

Maka N memenuhi distributif kiri.

Jadi $(N, +, .)$ adalah ring komutatif. ■

Teorema 4.3 dan 4.6 merupakan teorema yang diambil dari [9]

Teorema 4.3. [4]
Misalkan N adalah suatu near-ring prima yang simetri nol. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

i. $d([x, y]) = x^p[x, y]x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ atau

ii. $d([x, y]) = -x^p[x, y]x^q$ untuk setiap $x, y \in N$

Maka N adalah ring komutatif.

Bukti. i. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$d([x, y]) = x^p[x, y]x^q \text{ untuk setiap } x, y \in N$$

akan dibuktikan N ring komutatif menggunakan Lemma 4.2 dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa $d(N) \subset Z(N)$.

Substitusi y oleh yx pada $d([x, y]) = x^p[x, y]x^q$, diperoleh

$$d([x, yx]) = x^p[x, yx]x^q$$

Memakai Lemma 2.2.2.4 dan definisi derivasi, diperoleh

$$\begin{aligned} x^p[x, y]x^{q+1} + [x, y]d(x) &= x^p[x, y]x^{q+1} \\ [x, y]d(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$(xy - yx)d(x) = 0 \qquad \text{(hasil kali Lie)}$$
$$xyd(x) - yxd(x) = 0 \qquad \text{(distributif kanan)}$$
$$xyd(x) = yxd(x) \qquad (4.1)$$
$$zxyd(x) = zyxd(x) \text{ untuk sebarang } z \in N \qquad (4.2)$$

Substitusi y oleh zy pada persamaan (4.1), diperoleh

$$xzyd(x) = zyxd(x) \qquad (4.3)$$

Dari (4.2) dan (4.3), diperoleh

$$xzyd(x) = zxyd(x)$$
$$xzyd(x) - zxyd(x) = 0$$
$$(xz - zx)yd(x) = 0 \qquad \text{(distributif kanan)}$$
$$[x, z]yd(x) = 0 \qquad \text{(hasil kali Lie)}$$

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$, maka

$$[x, z]Nd(x) = 0 \text{ untuk setiap } x, z \in N \qquad (4.4)$$

Karena N prima, maka berlaku $[x, z] = 0$ atau $d(x) = 0$. Tetapi, karena d adalah derivasi tak-nol, maka yang memenuhi adalah $[x, z] = 0$ atau $xz = zx$ untuk setiap $x, z \in N$. Dengan kata lain $x \in Z(N)$ untuk setiap $x \in N$, berakibat $d(N) \subset Z(N)$ menurut Lemma 2.2.2.3. Maka N adalah ring komutatif menurut Lemma 4.2.

ii. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$d([x, y]) = -x^p[x, y]x^q \text{ untuk setiap } x, y \in N$$

ditunjukkan juga bahwa $d(N) \subset Z(N)$.

Substitusi y oleh yx pada $d([x,y]) = -x^p[x,y]x^q$, diperoleh

$$d([x,yx]) = -x^p[x,yx]x^q$$

Memakai Lemma 2.2.2.4 dan definisi derivasi, diperoleh

$$\begin{aligned}
-x^p[x,y]x^{q+1} + [x,y]d(x) &= -x^p[x,y]x^{q+1} \\
[x,y]d(x) &= 0 \\
(xy - yx)d(x) &= 0 && \text{(hasil kali Lie)} \\
xyd(x) - yxd(x) &= 0 && \text{(distributif kanan)} \\
xyd(x) &= yxd(x) && (4.5) \\
zxyd(x) &= zyxd(x) \text{ untuk sebarang } z \in N && (4.6)
\end{aligned}$$

Substitusi y oleh zy pada persamaan (4.5), diperoleh

$$xzyd(x) = zyxd(x) \qquad (4.7)$$

Dari (4.6) dan (4.7), diperoleh

$$\begin{aligned}
xzyd(x) &= zxyd(x) \\
xzyd(x) - zxyd(x) &= 0 \\
(xz - zx)yd(x) &= 0 && \text{(distributif kanan)} \\
[x,z]yd(x) &= 0 && \text{(hasil kali Lie)}
\end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$, maka

$$[x,z]Nd(x) = 0 \qquad \text{untuk setiap } x, z \in N$$

Sisanya mengikuti bukti pada persamaan (4.0.4) ■

Contoh 4.4.

Diberikan himpunan $N = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \middle| x, y \in R \right\}$, di mana R adalah suatu ring komutatif. Himpunan

N disertai dengan operasi penjumlahan dan perkalian matriks adalah near-ring. Terlihat bahwa N bukan prima sebab untuk $z_1, z_2 \in R$ yang tak-nol, berlaku $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, untuk setiap $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \in N$.

Selanjutnya, didefinisikan pemetaan d pada N oleh $d\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ yang mana adalah derivasi pada N sebab untuk sebarang $X, Y \in N$ dengan $X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}$ dan $Y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix}$ di N, berlaku

$$\begin{aligned} d(X+Y) &= d\left(\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{pmatrix} x_1+y_1 & 0 \\ x_2+y_2 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_2+y_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= d\left(\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}\right) + d\left(\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= d(X) + d(Y) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} d(X)Y + Xd(Y) = d&\left(\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix} + \\ &\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix} d\left(\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_2 y_1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= d(\left(\begin{pmatrix} x_1 y_1 & 0 \\ x_2 y_1 & 0 \end{pmatrix}\right)) \\
&= d(\left(\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix}\right)) \\
&= d(XY)
\end{aligned}
$$

Terlebih d memenuhi $d[X, Y] = [X, Y]$ untuk setiap $X, Y \in N$. Tetapi N bukan ring komutatif.

Pada Contoh 4.4 menunjukkan perlunya eksistensi near-ring prima supaya berlaku Teorema 4.3. Selanjutnya berdasarkan Teorema 4.3 serta sifat - sifat derivasi dan hasil kali Lie sehingga diperoleh teorema berikut

Teorema 4.5.

Misalkan N adalah suatu near-ring prima yang simetri nol. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

i. $[x, d(y)] = x^p[x, y]x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ atau

ii. $[d(x), y] = y^p[x, y]y^q$ untuk setiap $x, y \in N$

Maka N adalah ring komutatif.

Bukti. i. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$[x, d(y)] = x^p[x, y]x^q \text{ untuk setiap } x, y \in N$$

Substitusi y oleh yx pada $[x, d(y)] = x^p[x, y]x^q$, diperoleh

$$[x, d(yx)] = x^p[x, yx]x^q$$

$$= x^p[x,y]x^{q+1} \qquad \text{(Lemma 2.2.2.4)}$$
$$= [x,d(y)]x$$

Memakai definisi hasil kali Lie dan sifat distributif kanan, diperoleh

$$xd(yx) - d(yx)x = xd(y)x - d(y)x^2$$
$$x(d(y)x + yd(x)) - (d(y)x + yd(x))x = xd(y)x - d(y)x^2$$
$$\text{(definisi derivasi)}$$

Memakai Lemma 2.2.2.2 dan Proposisi 2.2.2.1, maka

$$xd(y)x + xyd(x) - yd(x)x - d(y)x^2 = xd(y)x - d(y)x^2$$
$$xyd(x) - yd(x)x = 0$$
$$xyd(x) = yd(x)x \tag{4.8}$$
$$zxyd(x) = zyd(x)x \text{ untuk sebarang } z \in N \tag{4.9}$$

Substitusi y oleh zy pada persamaan (4.8), diperoleh

$$xzyd(x) = zyd(x)x \tag{4.10}$$

Dari (4.9) dan (4.10), diperoleh

$$xzyd(x) = zxyd(x)$$
$$xzyd(x) - zxyd(x) = 0$$
$$(xz - zx)yd(x) = 0 \qquad \text{(distributif kanan)}$$
$$[x,z]yd(x) = 0 \qquad \text{(hasil kali Lie)}$$

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$, maka

$$[x,z]Nd(x) = 0 \qquad \text{untuk setiap } x, z \in N$$

Sisanya mengikuti bukti pada Teorema 4.3 persamaan (4.4)

ii. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$[d(x), y] = y^p [x, y] y^q \text{ untuk setiap } x, y \in N$$

Substitusi x oleh xy, diperoleh

$$\begin{aligned} [d(xy), y] &= y^p [xy, y] y^q \\ &= y^p [x, y] y^{q+1} && \text{(Lemma 2.2.2.4)} \\ &= [d(x), y] y \end{aligned}$$

Memakai definisi hasil kali Lie dan sifat distributif kanan, diperoleh

$$d(xy)y - yd(xy) = d(x)y^2 - yd(x)y$$
$$(d(x)y + xd(y))y - y(d(x)y + xd(y)) = d(x)y^2 - yd(x)y \qquad \text{(definisi derivasi)}$$

Memakai Lemma 2.2.2.2 dan Proposisi 2.2.2.1, maka

$$\begin{aligned} d(x)y^2 + xd(y)y - yxd(y) - yd(x)y &= d(x)y^2 - yd(x)y \\ xd(y)y - yxd(y) &= 0 \\ xd(y)y &= yxd(y) && (4.11) \\ zxd(y)y &= zyxd(y) \text{ untuk sebarang } z \in N && (4.12) \end{aligned}$$

Substitusi x oleh xz pada persamaan (4.11), diperoleh

$$zxd(y)y = yzxd(y) \qquad (4.13)$$

Dari (4.12) dan (4.13), diperoleh

$$\begin{aligned} zyxd(y) &= yzxd(y) \\ zyxd(y) - yzxd(y) &= 0 \\ (zy - yz)xd(y) &= 0 && \text{(distributif kanan)} \end{aligned}$$

$$[z, y]xd(y) = 0 \qquad \text{(hasil kali Lie)}$$

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$, maka

$$[z, y]Nd(y) = 0 \qquad \text{untuk setiap } y, z \in N$$

Sisanya mengikuti bukti pada Teorema 4.3 persamaan (4.4) ■

Teorema 4.6. [4]

Misalkan N adalah suatu near-ring prima yang simetri nol. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

i. $d(x \circ y) = x^p(x \circ y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ atau

ii. $d(x \circ y) = -x^p(x \circ y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$

Maka N adalah ring komutatif.

Bukti. i. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$d(x \circ y) = x^p(x \circ y)x^q \text{ untuk setiap } x, y \in N$$

Substitusi y oleh yx pada $d(x \circ y) = x^p(x \circ y)x^q$, diperoleh

$$d(x \circ yx) = x^p(x \circ yx)x^q$$

Memakai Lemma 2.2.2.4 dan definisi derivasi, diperoleh

$$\begin{aligned} x^p(x \circ y)x^{q+1} + (x \circ y)d(x) &= x^p(x \circ y)x^{q+1} \\ (x \circ y)d(x) &= 0 \\ (xy + yx)d(x) &= 0 && \text{(hasil kali Jordan)} \\ xyd(x) + yxd(x) &= 0 && \text{(distributif kanan)} \\ xyd(x) &= -yxd(x) && (4.14) \end{aligned}$$

Substitusi y oleh zy pada persamaan (4.14) dan untuk setiap $z \in N$, diperoleh

$$\begin{aligned} xzyd(x) &= -zyxd(x) \\ &= (-z)yxd(x) \quad \text{(Proposisi 2.2.2.1)} \\ &= (-z)(-xyd(x)) \qquad \text{(dari 4.14)} \\ &= (-z)(-x)yd(x) \\ &\qquad \text{(Proposisi 2.2.2.1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xzyd(x) - (-z)(-x)yd(x) &= 0 \\ (xz - (-z)(-x))yd(x) &= 0 \qquad \text{(distributif kanan)} \end{aligned}$$

Substitusi x oleh $(-x)$ pada persamaan di atas, diperoleh

$$\begin{aligned} (-xz + zx)yd(-x) &= 0 \\ [z, x]yd(-x) &= 0 \qquad \text{(hasil kali Lie)} \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$, maka

$$[z, x]Nd(x) = 0 \qquad \text{untuk setiap } x, z \in N$$

Sisanya mengikuti bukti pada Teorema 4.3 persamaan (4.4)

ii. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$d(x \circ y) = -x^p(x \circ y)x^q \text{ untuk setiap } x, y \in N$$

Substitusi y oleh yx, diperoleh

$$d(x \circ (yx)) = -x^p(x \circ (yx))x^q$$

Memakai Lemma 2.2.2.4 dan definisi derivasi, diperoleh

$$-x^p(x \circ y)x^{q+1} + (x \circ y)d(x) = -x^p(x \circ y)x^{q+1}$$

$$
\begin{aligned}
(x \circ y)d(x) &= 0 \\
(xy + yx)d(x) &= 0 && \text{(hasil kali Jordan)} \\
xyd(x) + yxd(x) &= 0 && \text{(distributif kanan)} \\
xyd(x) &= -yxd(x) && (4.15)
\end{aligned}
$$

Substitusi y oleh zy pada persamaan (4.15) dan untuk setiap $z \in N$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
xzyd(x) &= -zyxd(x) \\
&= (-z)yxd(x) && \text{(Proposisi 2.2.2.1)} \\
&= (-z)(-xyd(x)) && \text{(dari 4.15)} \\
&= (-z)(-x)yd(x) \\
& && \text{(Proposisi 2.2.2.1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
xzyd(x) - (-z)(-x)yd(x) &= 0 \\
(xz - (-z)(-x))yd(x) &= 0 && \text{(distributif kanan)}
\end{aligned}
$$

Substitusi x oleh $(-x)$ pada persamaan di atas, diperoleh

$$
\begin{aligned}
(-xz + zx)yd(-x) &= 0 \\
[z, x]yd(-x) &= 0 && \text{(hasil kali Lie)}
\end{aligned}
$$

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$, maka

$$
[z, x]Nd(x) = 0 \qquad \text{untuk setiap } x, z \in N
$$

Sisanya mengikuti bukti pada Teorema 4.3 persamaan (4.4) ■

Berdasarkan Teorema 4.6 serta sifat - sifat derivasi dan hasil kali Jordan sehingga diperoleh teorema berikut

Teorema 4.7.

Misalkan N adalah suatu near-ring prima yang simetri nol. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

i. $x \circ d(y) = x^p(x \circ y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ atau

ii. $d(x) \circ y = y^p(x \circ y)y^q$ untuk setiap $x, y \in N$

Maka N adalah ring komutatif.

Bukti. i. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$x \circ d(y) = x^p(x \circ y)x^q \text{ untuk setiap } x, y \in N$$

Substitusi y oleh yx pada $x \circ d(y) = x^p(x \circ y)x^q$, diperoleh

$$\begin{aligned} x \circ d(yx) &= x^p(x \circ (yx))x^q \\ &= x^p(x \circ (y))x^{q+1} && \text{(Lemma 2.2.2.4)} \\ &= (x \circ d(y))x \end{aligned}$$

Memakai definisi hasil kali Jordan dan sifat distributif kanan, diperoleh

$$\begin{gathered} xd(yx) + d(yx)x = xd(y)x + d(y)x^2 \\ x(d(y)x + yd(x)) + (yd(x) + d(y)x)x = xd(y)x + d(y)x^2 \end{gathered}$$
$$\text{(definisi derivasi)}$$

Memakai Lema 2.2.2.2, maka

$$\begin{aligned} &xd(y)x + xyd(x) + yd(x)x + d(y)x^2 = xd(y)x + d(y)x^2 \\ &xyd(x) + yd(x)x = 0 \\ &\qquad xyd(x) = -yd(x)x \end{aligned} \tag{4.16}$$

Substitusi y oleh zy pada persamaan (4.16) dan untuk setiap $z \in N$, diperoleh

$$\begin{aligned} xzyd(x) &= -zyd(x)x \\ &= (-z)yd(x)x && \text{(Proposisi 2.2.2.1)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-z)(-xyd(x)) && \text{(dari 4.16)}\\
&= (-z)(-x)yd(x) && \text{(Proposisi 2.2.2.1)}\\
0 &= xzyd(x) - (-z)(-x)yd(x) &&\\
0 &= (xz - (-z)(-x))yd(x) && \text{(distributif kanan)}
\end{aligned}
$$

Substitusi x oleh $(-x)$ pada persamaan di atas, diperoleh

$$
\begin{aligned}
(-xz + zx)yd(-x) &= 0 &&\\
-xzyd(-x) + zxyd(-x) &= 0 && \text{(distributif kanan)}\\
zxyd(-x) &= xzyd(-x) &&\\
zxyd(-x) - xzyd(-x) &= 0 &&\\
(zx - xz)yd(-x) &= 0 && \text{(distributif kanan)}\\
[z, x]yd(-x) &= 0 && \text{(hasil kali Lie)}
\end{aligned}
$$

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$, maka

$$[z, x]Nd(-x) = 0 \qquad \text{untuk setiap } x, z \in N$$

Sisanya mengikuti bukti pada Teorema 4.3 persamaan (4.4)

ii. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$d(x) \circ y = y^p(x \circ y)y^q \text{ untuk setiap } x, y \in N$$

Substitusi x oleh xy pada $d(x) \circ y = y^p(x \circ y)y^q$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
d(xy) \circ y &= y^p((xy) \circ y)y^q &&\\
&= y^p((x) \circ y)y^{q+1} && \text{(Lemma 2.2.2.4)}\\
&= d(x) \circ y &&
\end{aligned}
$$

Memakai definisi hasil kali Jordan dan sifat distributif kanan, diperoleh

$$d(xy)y + yd(xy) = d(x)y^2 + yd(x)y$$

$$(d(x)y + xd(y))y + y(xd(y) + d(x)y) = d(x)y^2 + yd(x)y \quad \text{(definisi derivasi)}$$

Memakai Lema 2.2.2.2, maka

$$\begin{aligned} d(x)y^2 + xd(y)y + yxd(y) + yd(x)y &= d(x)y^2 + yd(x)y \\ xd(y)y + yxd(y) &= 0 \\ yxd(y) &= -xd(y)y \end{aligned} \tag{4.17}$$

Substitusi x oleh zx pada persamaan (4.17) dan untuk setiap $z \in N$, diperoleh

$$\begin{aligned} yzxd(y) &= -zxd(y)y \\ &= (-z)xd(y)y && \text{(Proposisi 2.2.2.1)} \\ &= (-z)(-yxd(y)) && \text{(dari 4.17)} \\ &= (-z)(-y)xd(y) && \text{(Proposisi 2.2.2.1)} \\ 0 &= yzxd(y) - (-z)(-y)xd(y) \\ 0 &= (yz - (-z)(-y))xd(y) && \text{(distributif kanan)} \end{aligned}$$

Substitusi y oleh $(-y)$ pada persamaan di atas, diperoleh

$$\begin{aligned} (-yz + zy)xd(-y) &= 0 \\ -yzxd(-y) + zyxd(-y) &= 0 && \text{(distributif kanan)} \\ zyxd(-y) &= yzxd(-y) \\ zyxd(-y) - yzxd(-y) &= 0 \\ (zy - yz)xd(-y) &= 0 && \text{(distributif kanan)} \\ [z, y]xd(-y) &= 0 && \text{(hasil kali Lie)} \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $x \in N$, maka

$$[z, y]Nd(-y) = 0 \qquad \text{untuk setiap } y, z \in N$$

Sisanya mengikuti bukti pada Teorema 4.3 persamaan (4.4) ■

Contoh 4.8.

Diberikan himpunan $N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| n \in R \right\}$, di mana R adalah suatu ring komutatif. Himpunan N disertai dengan operasi penjumlahan dan perkalian matriks adalah near-ring. N bukan near-ring prima sebab untuk $n_1, n_2 \in R$ yang tak-nol, berlaku $\begin{pmatrix} 0 & n_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & n_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, untuk setiap $\begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N$.

Selanjutnya, didefinisikan pemetaan d pada N oleh $d\left(\begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ yang mana adalah derivasi pada N sebab untuk sebarang $X, Y \in N$ dengan $X = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $Y = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, berlaku

$$\begin{aligned} d(X+Y) &= d\left(\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{pmatrix} 0 & x+y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & x+y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= d\left(\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + d\left(\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= d(X) + d(Y) \end{aligned}$$

dan

$$d(X)Y + Xd(Y) = d\left(\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\left(\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= d(\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\Bigg) \\
&= d(\left(\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\Bigg) \\
&= d(XY)
\end{aligned}
$$

Terlebih d memenuhi $d(X) \circ Y = X \circ Y$ atau $X \circ d(Y) = X \circ Y$ untuk setiap $X, Y \in N$ sebab $XY = 0$ untuk setiap $X, Y \in N$. Kenyataannya N adalah ring komutatif meski tidak memenuhi syarat prima.

Teorema 4.9, 4.12, 4.15 dan 4.16 merupakan teorema yang diambil dari [9]

Teorema 4.9. [5]

Misalkan N adalah suatu near-ring prima yang simetri nol. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

i. $d([x, y]) = x^p(x \circ y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ atau

ii. $d([x, y]) = -x^p(x \circ y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$

Maka N adalah ring komutatif.

Bukti. i. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$d([x, y]) = x^p(x \circ y)x^q \text{ untuk setiap } x, y \in N$$

Substitusi y oleh yx pada $d([x, y]) = x^p(x \circ y)x^q$, diperoleh

$$d([x, yx]) = x^p(x \circ (yx))x^q$$

Memakai Lemma 2.2.2.4 dan definisi derivasi, diperoleh

$$
\begin{aligned}
x^p(x \circ y)x^{q+1} + [x,y]d(x) &= x^p(x \circ y)x^{q+1} \\
[x,y]d(x) &= 0 \\
(xy - yx)d(x) &= 0 && \text{(hasil kali Lie)} \\
xyd(x) - yxd(x) &= 0 && \text{(distributif kanan)} \\
xyd(x) &= yxd(x) && (4.18) \\
zxyd(x) &= zyxd(x) \text{ untuk sebarang } z \in N && (4.19)
\end{aligned}
$$

Substitusi y oleh zy pada persamaan (4.18), diperoleh

$$xzyd(x) = zyxd(x) \tag{4.20}$$

Dari (4.19) dan (4.20), diperoleh

$$
\begin{aligned}
xzyd(x) &= zxyd(x) \\
xzyd(x) - zxyd(x) &= 0 \\
(xz - zx)yd(x) &= 0 && \text{(distributif kanan)} \\
[x,z]yd(x) &= 0 && \text{(hasil kali Lie)}
\end{aligned}
$$

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$, maka

$$[x,z]Nd(x) = 0 \qquad \text{untuk setiap } x, z \in N$$

Sisanya mengikuti bukti pada Teorema 4.3 persamaan (4.4)

ii. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$d([x,y]) = -x^p(x \circ y)x^q \text{ untuk setiap } x, y \in N$$

Substitusi y oleh yx pada $d([x,y]) = -x^p(x \circ y)x^q$, diperoleh

$$d([x,yx]) = -x^p(x \circ (yx))x^q$$

Memakai Lemma 2.2.2.4 dan definisi derivasi, diperoleh

$$
\begin{aligned}
-x^p(x \circ y)x^{q+1} + [x,y]d(x) &= -x^p(x \circ y)x^{q+1} \\
[x,y]d(x) &= 0 \\
(xy - yx)d(x) &= 0 && \text{(hasil kali Lie)} \\
xyd(x) - yxd(x) &= 0 && \text{(distributif kanan)} \\
xyd(x) &= yxd(x) && (4.21) \\
zxyd(x) &= zyxd(x) \text{ untuk sebarang } z \in N && (4.22)
\end{aligned}
$$

Substitusi y oleh zy pada persamaan (4.21), diperoleh

$$xzyd(x) = zyxd(x) \tag{4.23}$$

Dari (4.22) dan (4.23), diperoleh

$$
\begin{aligned}
xzyd(x) &= zxyd(x) \\
xzyd(x) - zxyd(x) &= 0 \\
(xz - zx)yd(x) &= 0 && \text{(distributif kanan)} \\
[x,z]yd(x) &= 0 && \text{(hasil kali Lie)}
\end{aligned}
$$

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$, maka

$$[x,z]Nd(x) = 0 \qquad \text{untuk setiap } x,z \in N$$

Sisanya mengikuti bukti pada Teorema 4.3 persamaan (4.4) ∎

Definisi berikut dibutuhkan untuk keperluan Contoh 4.11, 4.14, 4.17 dan 4.20.

Definisi 4.10. [1]
Diberikan ring R. Jika $f(x), g(x) \in R[x]$, di mana $f(x) = \sum a_i x^i$ dan $g(x) = \sum b_i x^i$, maka didefinisikan penjumlahan dan perkalian sebagai berikut

1. $f(x) + g(x) = \sum c_i x^i$, di mana $c_i = a_i + b_i$
2. $f(x)g(x) = \sum d_i x^i$, di mana $d_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$

Perlu diperhatikan bahwa, jika R adalah ring komutatif maka $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$ dan $f(x)g(x) = g(x)f(x)$. Terlebih jika R tidak memuat pembagi nol, maka $R[x]$ juga tidak memuat pembagi nol.

Contoh 4.11.

Diberikan himpunan polinomial $R[x]$ disertai dengan operasi penjumlahan dan perkalian polinomial seperti pada Definisi 4.10. R adalah suatu ring komutatif dengan $\text{char}(R) = 2$ dan tidak memuat pembagi nol. Untuk sebarang $h(x) \in R[x]$, jika $f(x)h(x)g(x) = 0$, di mana $f(x), g(x) \in R[x]$, maka $f(x) = 0$ atau $g(x) = 0$, sebab jika $f(x) \neq 0$, maka $h(x)g(x) = 0$. Karena $R[x]$ tidak memuat pembagi nol, sehingga harus $g(x) = 0$. Dengan cara yang sama, jika $g(x) \neq 0$, maka harus $f(x) = 0$. Sehingga dapat disimpulkan, untuk sebarang $h(x) \in R[x]$, jika $f(x)h(x)g(x) = 0$, maka berakibat $f(x) = 0$ atau $g(x) = 0$, yang mana menunjukkan bahwa $R[x]$ adalah prima.

Selanjutnya, didefinisikan pemetaan d pada $R[x]$ oleh $d\left(\sum c_i x^i\right) = \sum i c_i x^{i-1}$ yang mana adalah derivasi pada $R[x]$ sebab untuk sebarang $f(x), g(x) \in R[x]$ dengan $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ dan $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, berlaku

$$\begin{aligned}
d(f(x) + g(x)) &= d\left(\sum a_i x^i + \sum b_i x^i\right) \\
&= d\left(\sum (a_i + b_i) x^i\right) \\
&= \sum i(a_i + b_i) x^{i-1} \\
&= \sum (ia_i + ib_i) x^{i-1} \\
&= \sum ia_i x^{i-1} + \sum ib_i x^{i-1}
\end{aligned}$$

$$= d(f(x)) + d(g(x))$$

dan

$$\begin{aligned}
&d(f(x))g(x) + f(x)d(g(x)) = \\
&\qquad (a_1 + 2a_2x + ... + ma_mx^{m-1})(b_0 + b_1x + ... + b_nx^n) \\
&\qquad + (a_0 + a_1x + ... + a_mx^m)(b_1 + 2b_2x + ... + nb_nx^{n-1}) \\
&\quad = \left(a_1b_0 + \left(\sum_{k=0}^{2} ka_kb_{2-k}\right) x + .. \right. \\
&\qquad \left. + \left(\sum_{k=0}^{m+n} ka_kb_{m+n-k}\right) x^{m+n-1}\right) \\
&\qquad + \left(a_0b_1 + \left(\sum_{k=0}^{2}(2-k)a_kb_{2-k}\right) x + .. \right. \\
&\qquad \left. + \left(\sum_{k=0}^{m+n}(m+n-k)a_kb_{m+n-k}\right) x^{m+n-1}\right) \\
&\quad = (a_0b_1 + a_1b_0) + \left(\sum_{k=0}^{2} 2a_kb_{2-k}\right) x + .. \\
&\qquad + \left(\sum_{k=0}^{m+n}(m+n)a_kb_{m+n-k}\right) x^{m+n-1} \\
&\quad = d\left(a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \left(\sum_{k=0}^{2} a_kb_{2-k}\right) x^2 + .. \right. \\
&\qquad \left. + \left(\sum_{k=0}^{m+n} a_kb_{m+n-k}\right) x^{m+n}\right) \\
&\quad = d\big((a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m) \\
&\qquad (b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n)\big) \\
&\quad = d(f(x)g(x))
\end{aligned}$$

Terlebih d memenuhi $d[f(x), g(x)] = f(x) \circ g(x)$ untuk setiap $f(x), g(x) \in R[x]$ sebab

$$\begin{aligned} d[f(x), g(x)] &= d(f(x)g(x) - g(x)f(x)) \\ &= d(0) \\ &= 0 \\ &= 2f(x)g(x) \qquad\qquad (\mathrm{char}(R[x] = 2)) \\ &= f(x)g(x) + g(x)f(x) \\ &= f(x) \circ g(x) \end{aligned}$$

Maka $R[x]$ adalah ring komutatif menurut Teorema 4.9.

Teorema 4.12. [5]
Misalkan N adalah suatu near-ring prima yang simetri nol. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

i. $d(x \circ y) = x^p[x, y]x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ atau

ii. $d(x \circ y) = -x^p[x, y]x^q$ untuk setiap $x, y \in N$

Maka N adalah ring komutatif.

Bukti. i. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$d(x \circ y) = x^p[x, y]x^q \text{ untuk setiap } x, y \in N$$

Substitusi y oleh yx pada $d(x \circ y) = x^p[x, y]x^q$, diperoleh

$$d(x \circ yx) = x^p[x, yx]x^q$$

Memakai Lemma 2.2.2.4 dan definisi derivasi, diperoleh

$$\begin{aligned} x^p[x, y]x^{q+1} + (x \circ y)d(x) &= x^p[x, y]x^{q+1} \\ (x \circ y)d(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(xy + yx)d(x) &= 0 && \text{(hasil kali Jordan)} \\
xyd(x) + yxd(x) &= 0 && \text{(distributif kanan)} \\
xyd(x) &= -yxd(x) && (4.24)
\end{aligned}
$$

Substitusi y oleh zy pada persamaan (4.24) dan untuk setiap $z \in N$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
xzyd(x) &= -zyxd(x) \\
&= (-z)yxd(x) \quad \text{(Proposisi 2.2.2.1)} \\
&= (-z)(-xyd(x)) \qquad \text{(dari 4.24)} \\
&= (-z)(-x)yd(x) \\
& \qquad \text{(Proposisi 2.2.2.1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
xzyd(x) - (-z)(-x)yd(x) &= 0 \\
(xz - (-z)(-x))yd(x) &= 0 && \text{(distributif kanan)}
\end{aligned}
$$

Substitusi x oleh $(-x)$ pada persamaan di atas, diperoleh

$$
\begin{aligned}
(-xz + zx)yd(-x) &= 0 \\
[z, x]yd(-x) &= 0 && \text{(hasil kali Lie)}
\end{aligned}
$$

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$, maka

$$[z, x]Nd(x) = 0 \qquad \text{untuk setiap } x, z \in N$$

Sisanya mengikuti bukti pada Teorema 4.3 persamaan (4.4)

ii. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$d(x \circ y) = -x^p[x, y]x^q \text{ untuk setiap } x, y \in N$$

Substitusi y oleh yx pada $d(x \circ y) = -x^p[x, y]x^q$, diperoleh

$$d(x \circ (yx)) = -x^p[x, yx]x^q$$

Memakai Lemma 2.2.2.4 dan definisi derivasi, diperoleh

$$
\begin{aligned}
-x^p[x,y]x^{q+1} + (x \circ y)d(x) &= -x^p[x,y]x^{q+1} \\
(x \circ y)d(x) &= 0 \\
(xy + yx)d(x) &= 0 && \text{(hasil kali Jordan)} \\
xyd(x) + yxd(x) &= 0 && \text{(distributif kanan)} \\
xyd(x) &= -yxd(x) && (4.25)
\end{aligned}
$$

Substitusi y oleh zy pada persamaan (4.25) dan untuk setiap $z \in N$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
xzyd(x) &= -zyxd(x) \\
&= (-z)yxd(x) && \text{(Proposisi 2.2.2.1)} \\
&= (-z)(-xyd(x)) && \text{(dari 4.25)} \\
&= (-z)(-x)yd(x) \\
& && \text{(Proposisi 2.2.2.1)} \\
xzyd(x) - (-z)(-x)yd(x) &= 0 \\
(xz - (-z)(-x))yd(x) &= 0 && \text{(distributif kanan)}
\end{aligned}
$$

Substitusi x oleh $(-x)$ pada persamaan di atas, diperoleh

$$
\begin{aligned}
(-xz + zx)yd(-x) &= 0 \\
[z,x]yd(-x) &= 0 && \text{(hasil kali Lie)}
\end{aligned}
$$

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$, maka

$$[z,x]Nd(x) = 0 \qquad \text{untuk setiap } x, z \in N$$

Sisanya mengikuti bukti pada Teorema 4.3 persamaan (4.4) ■

Berdasarkan Teorema 4.9 serta sifat - sifat derivasi dan hasil kali Lie sehingga diperoleh teorema berikut

Teorema 4.13.

Misalkan N adalah suatu near-ring prima yang simetri nol. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

i. $[x, d(y)] = x^p(x \circ y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ atau

ii. $[d(x), y] = y^p(x \circ y)y^q$ untuk setiap $x, y \in N$

Maka N adalah ring komutatif.

Bukti. i. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$[x, d(y)] = x^p(x \circ y)x^q \text{ untuk setiap } x, y \in N$$

Substitusi y oleh yx pads $[x, d(y)] = x^p(x \circ y)x^q$, diperoleh

$$\begin{aligned}[x, d(yx)] &= x^p(x \circ (yx))x^q \\ &= x^p(x \circ (y))x^{q+1} && \text{(Lemma 2.2.2.4)} \\ &= [x, d(y)]x\end{aligned}$$

Memakai definisi hasil kali dan sifat distributif kanan, diperoleh

$$xd(yx) - d(yx)x = xd(y)x - d(y)x^2$$
$$x(d(y)x + yd(x)) - (d(y)x + yd(x))x = xd(y)x - d(y)x^2$$
$$\text{(definisi derivasi)}$$

Memakai Lema 2.2.2.2 dan Proposisi 2.2.2.1, maka

$$xd(y)x + xyd(x) - yd(x) - d(y)x^2 = xd(y)x - d(y)x^2$$
$$xyd(x) - yd(x)x = 0$$
$$xyd(x) = yd(x)x \tag{4.26}$$
$$zxyd(x) = zyd(x)x \text{untuk sebarang } z \in N \tag{4.27}$$

Substitusi y oleh zy pada persamaan (4.26), diperoleh

$$xzyd(x) = zyd(x)x \tag{4.28}$$

Dari (4.27) dan (4.28), diperoleh

$$\begin{aligned} xzyd(x) &= zxyd(x) \\ xzyd(x) - zxyd(x) &= 0 \\ (xz - zx)yd(x) &= 0 && \text{(distributif kanan)} \\ [x, z]yd(x) &= 0 && \text{(hasil kali Lie)} \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$, maka

$$[x, z]Nd(x) = 0 \qquad \text{untuk setiap } x, z \in N$$

Sisanya mengikuti bukti pada Teorema 4.3 persamaan (4.4)

ii. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$[d(x), y] = y^p(x \circ y)y^q \text{ untuk setiap } x, y \in N$$

Substitusi x oleh xy pada $[d(x), y] = y^p(x \circ y)y^q$, diperoleh

$$\begin{aligned} [d(xy), y] &= y^p((xy) \circ y)y^q \\ &= y^p((x) \circ y)y^{q+1} && \text{(Lemma 2.2.2.4)} \\ &= [d(x), y]y \end{aligned}$$

Memakai definisi hasil kali Lie dan sifat distributif kanan, diperoleh

$$d(xy)y - yd(xy) = d(x)y^2 - yd(x)y$$

$$(d(x)y + xd(y))y - y(d(x)y + xd(y)) = d(x)y^2 - yd(x)y$$

(definisi derivasi)

Memakai Lema 2.2.2.2 dan Proposisi 2.2.2.1, maka

$$\begin{aligned}
d(x)y^2 + xd(y)y - yxd(y) - yd(x)y &= d(x)y^2 - yd(x)y \\
xd(y)y - yxd(y) &= 0 \\
xd(y)y &= yxd(y) && (4.29) \\
zxd(y)y &= zyxd(y) \text{untuk sebarang } z \in N && (4.30)
\end{aligned}$$

Substitusi x oleh xz pada persamaan (4.29), diperoleh

$$zxd(y)y = yzxd(y) \qquad (4.31)$$

Dari (4.30) dan (4.31), diperoleh

$$\begin{aligned}
zyxd(y) &= yzxd(y) \\
zyxd(y) - yzxd(y) &= 0 \\
(zy - yz)xd(y) &= 0 && \text{(distributif kanan)} \\
[z, y]xd(y) &= 0 && \text{(hasil kali Lie)}
\end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$, maka

$$[z, y]Nd(y) = 0 \qquad \text{untuk setiap } y, z \in N$$

Sisanya mengikuti bukti pada Teorema 4.3 persamaan (4.4) ■

Contoh 4.14.

Diberikan himpunan polinomial $\mathbb{Z}_2[x]$ disertai dengan operasi penjumlahan dan perkalian polinomial seperti pada Definisi 4.10. Untuk sebarang $h \in \mathbb{Z}_2[x]$, jika $f(x)h(x)g(x) = 0$, di mana $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$, maka $f(x) = 0$ atau $g(x) = 0$, sebab jika $f(x) \neq 0$, maka $h(x)g(x) = 0$. Karena $\mathbb{Z}_2[x]$ tidak memuat pembagi nol, sehingga harus $g(x) = 0$. Dengan cara yang sama, jika $g(x) \neq 0$, maka harus $f(x) = 0$. Sehingga dapat disimpulkan, untuk sebarang $h(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$, jika $f(x)h(x)g(x) = 0$, maka berakibat $f(x) = 0$ atau $g(x) =$

0, yang mana menunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_2[x]$ adalah prima.

Selanjutnya, didefinisikan pemetaan d pada $\mathbb{Z}_2[x]$ oleh $d(h(x)) = h'(x)$, di mana $h'(x)$ merupakan turunan dari $h(x)$ terhadap x yang mana adalah derivasi pada $\mathbb{Z}_2[x]$ sebab untuk sebarang $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$, berlaku

$$\begin{aligned} d(f(x) + g(x)) &= (f(x) + g(x))' \\ &= f'(x) + g'(x) \\ &= d(f(x)) + d(g(x)) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} d(f(x)g(x)) &= (f(x)g(x))' \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= d(f(x))g(x) + f(x)d(g(x)) \end{aligned}$$

Terlebih d memenuhi $[f(x), d(g(x))] = f(x) \circ g(x)$ atau $[d(f(x)), g(x)] = f(x) \circ g(x)$ untuk setiap $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ sebab

$$\begin{aligned} [f(x), d(g(x))] &= f(x)d(g(x)) - d(g(x))f(x) \\ &= 0 \\ &= 2f(x)g(x) && (\mathrm{char}(\mathbb{Z}_2[x] = 2)) \\ &= f(x)g(x) + g(x)f(x) \\ &= f(x) \circ g \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} [d(f(x)), g(x)] &= d(f(x))g(x) - g(x)d(f(x)) \\ &= 0 \\ &= 2f(x)g(x) && (\mathrm{char}(\mathbb{Z}_2[x] = 2)) \\ &= f(x)g(x) + g(x)f(x) \\ &= f(x) \circ g(x) \end{aligned}$$

Maka $\mathbb{Z}_2[x]$ adalah ring komutatif menurut Teorema 4.13.

Teorema 4.15. [5]

Misalkan N adalah suatu near-ring prima yang simetri nol. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

i. $d([x, y]) = y^p(x \circ y)y^q$ untuk setiap $x, y \in N$ atau

ii. $d([x, y]) = -y^p(x \circ y)y^q$ untuk setiap $x, y \in N$

Maka N adalah ring komutatif.

Bukti. i. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$d([x, y]) = y^p(x \circ y)y^q \text{untuk setiap} x, y \in N$$

Substitusi x oleh xy pada $d([x, y]) = y^p(x \circ y)y^q$, diperoleh

$$d([xy, y]) = y^p((xy) \circ y)y^q$$

Memakai Lemma 2.2.2.4 dan definisi derivasi, diperoleh

$$\begin{aligned}
y^p(x \circ y)y^{q+1} + [x, y]d(y) &= y^p(x \circ y)y^{q+1} \\
[x, y]d(y) &= 0 \\
(xy - yx)d(y) &= 0 && \text{(hasil kali Lie)} \\
xyd(y) - yxd(y) &= 0 && \text{(distributif kanan)} \\
xyd(y) &= yxd(y) && (4.32) \\
zxyd(y) &= zyxd(y) \text{ untuk sebarang } z \in N \\
& && (4.33)
\end{aligned}$$

Substitusi x oleh zx pada persamaan (4.32), diperoleh

$$zxyd(y) = yzxd(y) \tag{4.34}$$

Dari (4.33) dan (4.34), diperoleh

$$zyxd(y) = yzxd(y)$$

$$\begin{aligned} zyxd(y) - yzxd(y) &= 0 & \\ (zy - yz)xd(y) &= 0 & \text{(distributif kanan)} \\ [z, y]xd(y) &= 0 & \text{(hasil kali Lie)} \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $x \in N$, maka

$$[z, y]Nd(y) = 0 \qquad \text{untuk setiap } y, z \in N$$

Sisanya mengikuti bukti pada Teorema 4.3 persamaan (4.4)

ii. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$d([x, y]) = -y^p(x \circ y)y^q \text{ untuk setiap } x, y \in N$$

Substitusi x oleh xy pada $d([x, y]) = -y^p(x \circ y)y^q$, diperoleh

$$d([xy, y]) = -y^p((xy) \circ y)y^q$$

Memakai Lemma 2.2.2.4 dan definisi derivasi, diperoleh

$$\begin{aligned} -y^p(x \circ y)y^{q+1} + [x, y]d(y) &= -y^p(x \circ y)y^{q+1} & \\ [x, y]d(y) &= 0 & \\ (xy - yx)d(y) &= 0 & \text{(hasil kali Lie)} \\ xyd(y) - yxd(y) &= 0 & \text{(distributif kanan)} \\ xyd(y) &= yxd(y) & (4.35) \\ zxyd(y) &= zyxd(y) \text{ untuk sebarang } z \in N & (4.36) \end{aligned}$$

Substitusi x oleh zx pada persamaan (4.35), diperoleh

$$zxyd(y) = yzxd(y) \qquad (4.37)$$

Dari (4.36) dan (4.37), diperoleh

$$zyxd(y) = yzxd(y)$$

$$
\begin{aligned}
zyxd(y) - yzxd(y) &= 0 \\
(zy - yz)xd(y) &= 0 && \text{(distributif kanan)} \\
[z, y]xd(y) &= 0 && \text{(hasil kali Lie)}
\end{aligned}
$$

Karena berlaku untuk setiap $x \in N$, maka

$$[z, y]Nd(y) = 0 \qquad \text{untuk setiap } y, z \in N$$

Sisanya mengikuti bukti pada Teorema 4.3 persamaan (4.4) ■

Teorema 4.16. [5]
Misalkan N adalah suatu near-ring prima yang simetri nol. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

i. $d(x \circ y) = y^p[x, y]y^q$ untuk setiap $x, y \in N$ atau

ii. $d(x \circ y) = -y^p[x, y]y^q$ untuk setiap $x, y \in N$

Maka N adalah ring komutatif.

Bukti. i. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$d(x \circ y) = y^p[x, y]y^q \text{ untuk setiap } x, y \in N$$

Substitusi x oleh xy pada $d(x \circ y) = y^p[x, y]y^q$, diperoleh

$$d((xy) \circ y) = y^p[xy, y]y^q$$

Memakai Lemma 2.2.2.4 dan definisi derivasi, diperoleh

$$
\begin{aligned}
y^p[x, y]y^{q+1} + (x \circ y)d(y) &= y^p[x, y]y^{q+1} \\
(x \circ y)d(y) &= 0 \\
(xy + yx)d(y) &= 0 && \text{(hasil kali Jordan)} \\
xyd(y) + yxd(y) &= 0 && \text{(distributif kanan)}
\end{aligned}
$$

$$yxd(y) = -xyd(y) \tag{4.38}$$

Substitusi x oleh zx pada persamaan (4.38) dan untuk setiap $z \in N$, diperoleh

$$\begin{aligned} yzxd(y) &= -zxyd(y) \\ &= (-z)xyd(y) \quad \text{(Proposisi 2.2.2.1)} \\ &= (-z)(-yxd(y)) \quad \text{(dari 4.38)} \\ &= (-z)(-y)xd(y) \\ & \quad \text{(Proposisi 2.2.2.1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} yzxd(y) - (-z)(-y)xd(y) &= 0 \\ (yz - (-z)(-y))xd(y) &= 0 \quad \text{(distributif kanan)} \end{aligned}$$

Substitusi y oleh $(-y)$ pada persamaan di atas, diperoleh

$$\begin{aligned} (-yz + zy)xd(-y) &= 0 \\ [z, y]xd(-y) &= 0 \quad \text{(hasil kali Lie)} \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$, maka

$$[z, y]Nd(-y) = 0 \qquad \text{untuk setiap } y, z \in N$$

Sisanya mengikuti bukti pada Teorema 4.1 persamaan (4.4)

ii. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$d(x \circ y) = -y^p[x, y]y^q \text{ untuk setiap } x, y \in N$$

Substitusi x oleh xy pada $d(x \circ y) = -y^p[x, y]y^q$, diperoleh

$$d(xy \circ y) = -y^p[xy, y]y^q$$

Memakai Lemma 2.2.2.4 dan definisi derivasi, diperoleh

$$d((xy) \circ y) = -y^p[xy, y]y^q$$

$$\begin{aligned}
d((x \circ y)y) &= -y^p[x,y]y^{q+1} \\
d(x \circ y)y + (x \circ y)d(y) &= -y^p[x,y]y^{q+1} \\
&\qquad\qquad \text{(definisi derivasi)} \\
-y^p[x,y]y^{q+1} + (x \circ y)d(y) &= -y^p[x,y]y^{q+1} \\
(x \circ y)d(y) &= 0 \\
(xy + yx)d(y) &= 0 \qquad \text{(hasil kali Jordan)} \\
xyd(y) + yxd(y) &= 0 \qquad \text{(distributif kanan)} \\
yxd(y) &= -xyd(y) \qquad (4.39)
\end{aligned}$$

Substitusi x oleh zx pada persamaan (4.39) dan untuk setiap $z \in N$, diperoleh

$$\begin{aligned}
yzxd(y) &= -zxyd(y) \\
&= (-z)xyd(y) \quad \text{(Proposisi 2.2.2.1)} \\
&= (-z)(-yxd(y)) \qquad \text{(dari 4.39)} \\
&= (-z)(-y)xd(y) \\
&\qquad\qquad \text{(Proposisi 2.2.2.1)} \\
yzxd(y) - (-z)(-y)xd(y) &= 0 \\
(yz - (-z)(-y))xd(y) &= 0 \qquad \text{(distributif kanan)}
\end{aligned}$$

Substitusi y oleh $(-y)$ pada persamaan di atas, diperoleh

$$\begin{aligned}
(-yz + zy)xd(-y) &= 0 \\
[z,y]xd(-y) &= 0 \qquad \text{(hasil kali Lie)}
\end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$, maka

$$[z,y]Nd(-y) = 0 \qquad \text{untuk setiap } y, z \in N$$

Sisanya mengikuti bukti pada Teorema 4.1 persamaan (4.4) ■

Contoh 4.17.

Perhatikan Contoh 4.14. Derivasi d pada $\mathbb{Z}_2[x]$ juga memenuhi $d(f(x) \circ g(x)) = [f(x), g(x)]$ untuk setiap $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ sebab

$$\begin{aligned} d(f(x) \circ g(x)) &= d(f(x)g(x) + g(x)f(x)) \\ &= d(2f(x)g(x)) \\ &= d(0) && (\text{char}(\mathbb{Z}_2[x] = 2)) \\ &= 0 \\ &= f(x)g(x) - g(x)f(x) \\ &= [f(x), g(x)] \end{aligned}$$

Maka $\mathbb{Z}_2[x]$ adalah ring komutatif menurut Teorema 4.16.

Berdasarkan Teorema 4.16 serta sifat - sifat derivasi dan hasil kali Jordan sehingga diperoleh teorema berikut

Teorema 4.18.

Misalkan N adalah suatu near-ring prima yang simetri nol. Jika terdapat suatu derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

i. $x \circ d(y) = x^p[x, y]x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ atau

ii. $d(x) \circ y = y^p[x, y]y^q$ untuk setiap $x, y \in N$

Maka N adalah ring komutatif.

Bukti. i. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$x \circ d(y) = x^p[x, y]x^q \text{ untuk setiap } x, y \in N$$

Substitusi y oleh yx pada $x \circ d(y) = x^p[x, y]x^q$, diperoleh

$$\begin{aligned} x \circ d(yx) &= x^p[x, yx]x^q \\ &= x^p[x, y]x^{q+1} && (\text{Lemma } 2.2.2.4) \end{aligned}$$

$$= x \circ d(y)$$

Memakai definisi hasil kali Jordan dan sifat distributif kanan, diperoleh

$$xd(yx) + d(yx)x = xd(y)x + d(y)x^2$$
$$x(d(y)x + yd(x)) + (yd(x) + d(y)x)x = xd(y)x + d(y)x^2$$
$$\text{(definisi derivasi)}$$

Memakai Lema 2.2.2.2, maka

$$\begin{aligned} xd(y)x + xyd(x) + yd(x)x + d(y)x^2 &= xd(y)x + d(y)x^2 \\ xyd(x) + yd(x)x &= 0 \\ xyd(x) &= -yd(x)x \end{aligned} \tag{4.40}$$

Substitusi y oleh zy pada persamaan (4.40) dan untuk setiap $z \in N$, diperoleh

$$\begin{aligned} xzyd(x) &= -zyd(x)x \\ &= (-z)yd(x)x && \text{(Proposisi 2.2.2.1)} \\ &= (-z)(-xyd(x)) && \text{(dari 4.40)} \\ &= (-z)(-x)yd(x) && \text{(Proposisi 2.2.2.1)} \\ 0 &= xzyd(x) - (-z)(-x)yd(x) \\ 0 &= (xz - (-z)(-x))yd(x) && \text{(distributif kanan)} \end{aligned}$$

Substitusi x oleh $(-x)$ pada persamaan di atas, diperoleh

$$\begin{aligned} (-xz + zx)yd(-x) &= 0 \\ -xzyd(-x) + zxyd(-x) &= 0 && \text{(distributif kanan)} \\ zxyd(-x) &= xzyd(-x) \\ zxyd(-x) - xzyd(-x) &= 0 \\ (zx - xz)yd(-x) &= 0 && \text{(distributif kanan)} \\ [z, x]yd(-x) &= 0 && \text{(hasil kali Lie)} \end{aligned}$$

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$, maka

$$[z,x]Nd(-x) = 0 \qquad \text{untuk setiap } x,z \in N$$

Sisanya mengikuti bukti pada Teorema 4.3 persamaan (4.4)

ii. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N dan $p,q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ yang memenuhi

$$d(x) \circ y = y^p[x,y]y^q \text{ untuk setiap } x,y \in N$$

Substitusi x oleh xy pada $d(x) \circ y = y^p[x,y]y^q$, diperoleh

$$\begin{aligned} d(xy) \circ y &= y^p[xy,y]y^q \\ &= y^p[x,y]y^{q+1} && \text{(Lemma 2.2.2.4)} \\ &= (d(x) \circ y)y && (4.41) \\ & && (4.42) \end{aligned}$$

Memakai hasil kali Jordan dan sifat distributif kanan, diperoleh

$$d(xy)y + yd(xy) = d(x)y^2 + yd(x)y$$
$$(d(x)y + xd(y))y + y(xd(y) + d(x)y) = d(x)y^2 + yd(x)y$$
$$\text{(definisi derivasi)}$$

Memakai Lema 2.2.2.2, maka

$$\begin{aligned} d(x)y^2 + xd(y)y + yxd(y) + yd(x)y &= d(x)y^2 + yd(x)y \\ xd(y)y + yxd(y) &= 0 \\ yxd(y) &= -xd(y)y && (4.43) \end{aligned}$$

Substitusi x oleh zx pada persamaan (4.43) dan untuk setiap $z \in N$, diperoleh

$$yzxd(y) = -zxd(y)y$$

$$
\begin{aligned}
&= (-z)xd(y)y && \text{(Proposisi 2.2.2.1)}\\
&= (-z)(-yxd(y)) && \text{(dari 4.43)}\\
&= (-z)(-y)xd(y) && \text{(Proposisi 2.2.2.1)}\\
0 &= yzxd(y) - (-z)(-y)xd(y) &&\\
0 &= (yz - (-z)(-y))xd(y) && \text{(distributif kanan)}
\end{aligned}
$$

Substitusi y oleh $(-y)$ pada persamaan di atas, diperoleh

$$
\begin{aligned}
(-yz + zy)xd(-y) &= 0 &&\\
-yzxd(-y) + zyxd(-y) &= 0 && \text{(distributif kanan)}\\
zyxd(-y) &= yzxd(-y) &&\\
zyxd(-y) - yzxd(-y) &= 0 &&\\
(zy - yz)xd(-y) &= 0 && \text{(distributif kanan)}\\
[z, y]xd(-y) &= 0 && \text{(hasil kali Lie)}
\end{aligned}
$$

Karena berlaku untuk setiap $x \in N$, maka

$$[z, y]Nd(-y) = 0 \qquad \text{untuk setiap } y, z \in N$$

Sisanya mengikuti bukti pada Teorema 4.3 persamaan (4.4) ■

Suatu near-ring N dinamakan 2-*torsion free* jika $\forall x, y \in N$ berlaku $2x = 0$, maka $x = 0$.Adapun jika N adalah 2-*torsion free*, maka dari Teorema 4.7 diperoleh hasil berikut

Teorema 4.19.

Misalkan N adalah suatu near-ring prima yang simetri nol dan 2-*torsion free*. Maka untuk setiap $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tidak terdapat derivasi tak-nol d pada N yang memenuhi

i. $x \circ d(y) = x^p(x \circ y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ atau

ii. $d(x) \circ y = y^p(x \circ y)y^q$ untuk setiap $x, y \in N$

Bukti. i. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N yang memenuhi $x \circ d(y) = x^p(x \circ y)x^q$ untuk setiap $x, y \in N$. Maka menurut Teorema 4.7 N adalah ring komutatif. Terlebih dari Teorema 4.7 persamaan (4.16) diperoleh

$$\begin{aligned} xyd(x) &= -yd(x)x \\ xyd(x) + yd(x)x &= 0 \\ xyd(x) + xyd(x) &= 0 && (N \text{ ring komutatif}) \\ 2xyd(x) &= 0 \end{aligned}$$

Karena N 2-*torsion free*, maka

$$xyd(x) = 0 \qquad \text{untuk setiap } x, y \in N$$

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$, maka

$$xNd(x) = 0 \qquad \text{untuk setiap } x \in N$$

Karena N prima, maka berlaku $x = 0$ atau $d(x) = 0$. Tetapi, karena d adalah derivasi tak-nol, maka yang memenuhi adalah $x = 0$ untuk setiap $x \in N$. Kontradiksi, maka tidak terdapat derivasi yang demikian.

ii. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N yang memenuhi $d(x) \circ y = y^p(x \circ y)y^q$ untuk setiap $x, y \in N$. Maka menurut Teorema 4.7 N adalah ring komutatif. Terlebih dari Teorema 4.7 persamaan (4.17) diperoleh

$$\begin{aligned} yxd(y) &= -xd(y)y \\ yxd(y) + xd(y)y &= 0 \\ yxd(y) + yxd(y) &= 0 && (N \text{ ring komutatif}) \\ 2yxd(y) &= 0 \end{aligned}$$

Karena N 2-*torsion free*, maka

$$yxd(y) = 0 \qquad \text{untuk setiap } x, y \in N$$

Karena berlaku untuk setiap $x \in N$, maka

$$yNd(y) = 0 \qquad \text{untuk setiap } y \in N$$

Karena N prima, maka berlaku $y = 0$ atau $d(y) = 0$. Tetapi, karena d adalah derivasi tak-nol, maka yang memenuhi adalah $y = 0$ untuk setiap $y \in N$. Kontradiksi, maka tidak terdapat derivasi yang demikian. ■

Contoh 4.20.

Diberikan himpunan polinomial $\mathbb{R}[x]$ disertai dengan operasi penjumlahan dan perkalian polinomial seperti pada Definisi 4.10. $R[x]$ adalah 2-*torsion free*, maka tidak terdapat derivasi tak-nol d pada $\mathbb{R}[x]$ yang memenuhi $f(x) \circ d(g(x)) = f(x) \circ g(x)$ atau $d(f(x)) \circ g(x) = f(x) \circ g(x)$ untuk setiap $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$.

i. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada $\mathbb{R}[x]$ yang memenuhi $f(x) \circ d(g(x)) = f(x) \circ g(x)$ untuk setiap $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$. Maka menurut Teorema 4.7 $\mathbb{R}[x]$ adalah ring komutatif, sehingga untuk sebarang $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ berlaku

$$\begin{aligned} f(x) \circ d(g(x)) &= f(x) \circ g(x) \\ f(x)d(g(x)) + d(g(x))f(x) &= f(x)g(x) + g(x)f(x) \\ 2f(x)d(g(x)) &= 2f(x)g(x) \\ 2f(x)d(g(x)) - 2f(x)g(x) &= 0 \\ 2f(x)(d(g(x)) - g(x)) &= 0 \\ f(x)(d(g(x)) - g(x)) &= 0 \end{aligned}$$

Jika $d(g(x)) - g(x) = 0$ maka $d(g(x)) = g(x)$ untuk setiap $g(x) \in R[x]$. Tetapi d bukan derivasi pada $R[x]$ sebab $d(f(x)g(x)) = f(x)g(x) \neq f(x)g(x) + g(x)f(x) = d(f(x))g(x) + f(x)d(g(x))$. Jika $f(x) = 0$ untuk setiap

$f(x) \in R[x]$ maka $\mathbb{R}[x]$ adalah ring nol. Tetapi $\mathbb{R}[x]$ bukan ring nol sebab jika $\mathbb{R}[x]$ adalah ring nol maka d juga adalah derivasi nol. Jadi tidak terdapat derivasi yang demikian.

ii.Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada $\mathbb{R}[x]$ yang memenuhi $d(f(x)) \circ g(x) = f(x) \circ g(x)$ untuk setiap $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$. Maka menurut Teorema 4.4 $\mathbb{R}[x]$ adalah ring komutatif, sehingga untuk sebarang $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ berlaku

$$\begin{aligned} d(f(x)) \circ g(x) &= f(x) \circ g(x) \\ d(f(x))g(x) + g(x)d(f(x)) &= f(x)g(x) + g(x)f(x) \\ 2g(x)d(f(x)) &= 2g(x)f(x) \\ 2g(x)d(f(x)) - 2g(x)f(x) &= 0 \\ 2g(x)(d(f(x)) - f(x)) &= 0 \\ g(x)(d(f(x)) - f(x)) &= 0 \end{aligned}$$

Jika $d(f(x)) - f(x) = 0$ maka $d(f(x)) = f(x)$ untuk setiap $f(x) \in R[x]$. Tetapi d bukan derivasi pada $R[x]$ sebab $d(g(x)f(x)) = g(x)f(x) \neq g(x)f(x) + g(x)f(x) = d(g(x))f(x) + g(x)d(f(x))$. Jika $g(x) = 0$ untuk setiap $g(x) \in R[x]$ maka $\mathbb{R}[x]$ adalah ring nol. Tetapi $\mathbb{R}[x]$ bukan ring nol sebab jika $\mathbb{R}[x]$ adalah ring nol maka d juga adalah derivasi nol. Jadi tidak terdapat derivasi yang demikian.

Adapun jika N adalah 2-*torsion free*, maka dari Teorema 4.18 diperoleh hasil berikut

Teorema 4.21.

Misalkan N adalah suatu near-ring prima yang simetri nol dan 2-*torsion free*. Maka untuk setiap $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tidak terdapat derivasi tak-nol d pada N yang memenuhi

i. $x \circ d(y) = x^p[x, y]x^q$ untuk setiap $x, y \in N$ atau

ii. $d(x) \circ y = y^p[x, y]y^q$ untuk setiap $x, y \in N$

Bukti. i. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N yang memenuhi $x \circ d(y) = x^p[x, y]x^q$ untuk setiap $x, y \in N$. Maka menurut Teorema 4.18 N adalah ring komutatif. Terlebih dari Teorema 4.18 persamaan (4.40) diperoleh

$$\begin{aligned} xyd(x) &= -yd(x)x \\ xyd(x) + yd(x)x &= 0 \\ xyd(x) + xyd(x) &= 0 && (N \text{ ring komutatif}) \\ 2xyd(x) &= 0 \end{aligned}$$

Karena N 2-*torsion free*, maka

$$xyd(x) = 0 \qquad \text{untuk setiap } x, y \in N$$

Karena berlaku untuk setiap $y \in N$, maka

$$xNd(x) = 0 \qquad \text{untuk setiap } x \in N$$

Karena N prima, maka berlaku $x = 0$ atau $d(x) = 0$. Tetapi, karena d adalah derivasi tak-nol, maka yang memenuhi adalah $x = 0$ untuk setiap $x \in N$. Kontradiksi, maka tidak terdapat derivasi yang demikian.

ii. Misalkan terdapat derivasi tak-nol d pada N yang memenuhi $d(x) \circ y = y^p[x, y]y^q$ untuk setiap $x, y \in N$. Maka menurut Teorema 4.18 N adalah ring komutatif. Terlebih dari Teorema 4.18 persamaan (4.43) diperoleh

$$\begin{aligned} yxd(y) &= -xd(y)y \\ yxd(y) + xd(y)y &= 0 \\ yxd(y) + yxd(y) &= 0 && (N \text{ ring komutatif}) \\ 2yxd(y) &= 0 \end{aligned}$$

Karena N 2-*torsion free*, maka

$$yxd(y) = 0 \qquad\qquad \text{untuk setiap } x, y \in N$$

Karena berlaku untuk setiap $x \in N$, maka

$$yNd(y) = 0 \qquad\qquad \text{untuk setiap } y \in N$$

Karena N prima, maka berlaku $y = 0$ atau $d(y) = 0$. Tetapi, karena d adalah derivasi tak-nol, maka yang memenuhi adalah $y = 0$ untuk setiap $y \in N$. Kontradiksi, maka tidak terdapat derivasi yang demikian. ■

Perlu diperhatikan bahwa, Contoh 4.11, 4.14, 4.17 dan 4.20 adalah daerah integral, sehingga diperoleh hasil berikut

Lemma 4.22.
Jika R adalah ring komutatif prima, maka R adalah daerah integral.

Bukti. Suatu ring R dikatakan prima jika untuk suatu $a, b \in R$ dan sebarang $r \in R$ berlaku $arb = 0$, maka berakibat $a = 0$ atau $b = 0$. Perlu diperhatikan bahwa, definisi tersebut ekivalen dengan suatu ring R dikatakan prima jika $I = 0$ adalah ideal prima dari ring R, yaitu untuk sebarang $a, b \in R$, jika $ab \in I$ maka $a \in I$ atau $b \in I$. Untuk menunjukkan R adalah daerah integral, hanya perlu dibuktikan untuk sebarang $a, b \in R$, jika $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ maka $ab \neq 0$. Sekarang misalkan a dan b adalah elemen tak-nol di R, sehingga $a \notin I$ dan $b \notin I$. Karena I ideal prima di R, sehingga $ab \notin I$ atau $ab \notin \{0\}$. Maka $ab \neq 0$ dan R adalah daerah integral. ■

Halaman ini sengaja dikosongkan.

BAB V
PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan yang diperoleh dari Tugas Akhir serta saran untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang telah disajikan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut :

1. Terdapat hubungan antara derivasi pada near-ring prima yang menyebabkan near-ring tersebut menjadi ring komutatif melalui derivasi hasil kali Lie dan hasil kali Jordan

2. Suatu near-ring prima N yang simetri nol merupakan ring komutatif jika terdapat $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan derivasi tak-nol d pada N yang memenuhi salah satu dari (1)-(20) untuk setiap $x, y \in N$, yaitu:

    1. $d([x, y]) = x^p[x, y]x^q$
    2. $d([x, y]) = -x^p[x, y]x^q$
    3. $d(x \circ y) = x^p(x \circ y)x^q$
    4. $d(x \circ y) = -x^p(x \circ y)x^q$
    5. $d([x, y]) = x^p(x \circ y)x^q$
    6. $d([x, y]) = -x^p(x \circ y)x^q$
    7. $d(x \circ y) = x^p[x, y]x^q$
    8. $d(x \circ y = -x^p[x, y]x^q$

9. $d([x, y]) = y^p(x \circ y)y^q$
10. $d([x, y]) = -y^p(x \circ y)y^q$
11. $d(x \circ y) = y^p[x, y]y^q$
12. $d(x \circ y) = -y^p[x, y]y^q$
13. $[x, d(y)] = x^p[x, y]x^q$
14. $[d(x), y] = y^p[x, y]y^q$
15. $x \circ d(y) = x^p(x \circ y)x^q$
16. $d(x) \circ y = y^p(x \circ y)y^q$
17. $[x, d(y)] = x^p(x \circ y)x^q$
18. $[d(x), y] = y^p(x \circ y)y^q$
19. $x \circ d(y) = x^p[x, y]x^q$
20. $d(x) \circ y = y^p[x, y]y^q$

3. Terdapat hubungan antara eksistensi derivasi pada near-ring prima dengan 2-*torsion free* near-ring

5.2 Saran

Sebagaimana yang diketahui, kondisi (1)-(20) berlaku untuk setiap $x, y \in N$. Perlu ditinjau apakah kondisi (1)-(20) masih berlaku hanya untuk $x, y \in I$, di mana I adalah semigrup ideal dari N. Perlu ditinjau juga hubungan derivasi pada near-ring prima dengan graf near-ring dan pelabelan pada graf. Selain itu, perlu dikembangkan teorema yang tidak memerlukan prima dari near-ring N sehingga kedepannya dapat diperumum untuk sebarang near-ring N.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Papantonopoulou, A. 2014. *"Algebra Pure and Applied"*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

[2] Bell, H. E., and Mason, G. 1987. *On Derivation in Near-Rings*. Elsevier Science Publisher B. V., 31-35.

[3] Wang, X. K. 1994. *"Derivations in Prime Near-Rings"*. Proceedings American Mathematical Society, Vol. 121, No. 2, 361-366.

[4] Argac, et al. 2001. *"Some Results on Derivations in Near-Rings"*. Nearrings and Nearfields, 42-46.

[5] Oukhtite, et al. 2001. *"Derivations On Prime Near-Rings"*. Int. J. Open Problems Compt. Math, Vol. 4, No. 2.

[6] Al-Shaalan, et al. 2013. *"Existence of Derivations on Near-Rings"*. Mathematica Slovaca 63, No. 3, 431-448

[7] Kamal, et al. 2014. *"Nonexistence of Nonzero Derivations on Some Classes of Zero-Symmetric 3-Prime Near-Rings"*. Ukrainian Mathematical Journal, Volume 66, Issue 3, 473-478.

[8] Gotmare, A. R. 2016. *"Derivation in Prime Near-Ring"*. International J. of Pure and Engg. Mathematics (IJPEM), Vol. 4, No. 1, 101-105

[9] Shang, Y. (2011).*A Study of Derivations in Prime Near-Rings*. Mathematica Balkanica New Series, Vol. 25, Fasc. 4, 413-418.

[10] Moharram, A., and Madugu, A. 2017. *Some Commutativity Theorems for Prime Near-Rings Involving Derivations.* Journal of Advances in Mathematics and Computer Science.

[11] Bell, H. E., and Mason, G. 1995. *"On Derivation in Near-Rings II"*. Nearrings, Nearfields and K-Loops, 191-197.

[12] Subiono. 2016. *"Aljabar Sebagai suatu Pondasi Matematika"*. Surabaya: Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

[13] Howie, J. M. 1995. *"Fundamentals of Semigroup Theory"*. London: Clarendon Press.

[14] Pilz, G. 1983. *"Near-Rings, the Theory and its Application"*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

[15] Al-Shaalan, K. H. and Kamal, A. M. 2014. *"Commutativity of Near-Rings with Derivations"*. Algebra Colloquium 21:2, 215-230.

Biodata Penulis

Penulis bernama Mochammad Reza Habibi, lahir di Surabaya, 08 Oktoer 1996. Terlahir sebagai anak terakhir dari 3 bersaudara.

Sejak usia empat tahun, penulis mulai bersekolah formal di TK Kenanga (2000-2002), SD Hasyim Asy'ari (2002-2008), SMPN 37 Surabaya (2008-2011), SMAN 2 Surabaya (2001-2014). Setelah lulus SMA, penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember tahun 2014 dan mengambil bidang minat Analisis dan Aljabar.

Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui email berikut *rezahabibi96@gmail.com*