TESIS - SM 142501

BILANGAN DOMINASI JARAK DUA PADA GRAF-GRAF HASIL OPERASI KORONA DAN *COMB*

RENI UMILASARI
NRP 1213 201 011

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2015

THESIS – SM 142501

DOMINATING NUMBER OF DISTANCE TWO OF CORONA AND COMB PRODUCT OF GRAPHS

RENI UMILASARI
NRP 1213 201 011

SUPERVISOR
Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

MAGISTER PROGRAM
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2015

BILANGAN DOMINASI JARAK DUA PADA GRAF-GRAF HASIL OPERASI KORONA DAN COMB

Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

oleh:
RENI UMILASARI
NRP. 1213 201 011

Tanggal Ujian : 10 Maret 2015
Periode Wisuda : September 2015

Disetujui oleh:

Dr. Darmaji, S.Si., M.T. (Pembimbing)
NIP. 19691015 199412 1 001

Dr. Chairul Imron, M.I.Komp. (Penguji)
NIP. 19611115 198703 1 003

Endah Rokhmati M.P., S.Si., M.T., Ph.D. (Penguji)
NIP. 19761213 200212 2 001

Direktur Program Pascasarjana,

Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, M.T.
NIP. 19640405 199002 1 001

BILANGAN DOMINASI JARAK DUA PADA GRAF-GRAF HASIL OPERASI KORONA DAN *COMB*

Nama Mahasiswa	:	Reni Umilasari
NRP	:	1213 201 011
Dosen Pembimbing	:	Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

ABSTRAK

Himpunan dominasi S pada graf $G = (V, E)$ adalah subset dari $V(G)$ sedemikian setiap simpul G yang bukan elemen S terhubung dan berjarak satu terhadap S. Kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi pada graf G disebut bilangan dominasi dari graf G dan dinotasikan $\gamma(G)$. Sedangkan himpunan dominasi jarak dua yang dinotasikan dengan S_2, yaitu subset dari $V(G)$ sedemikian simpul G yang bukan elemen S_2 memiliki jarak maksimal dua terhadap S_2. Bilangan dominasi jarak dua dari graf G $\gamma_2(G)$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi jarak dua. Dalam penelitian ini ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada graf Lintasan, graf Lingkaran, dan graf Bintang. Di samping itu juga ditentukan bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua pada graf hasil operasi korona dan *comb* dari ketiga graf tersebut. Selanjutnya dicari relasi antara bilangan dominasi jarak satu dan dua dari hasil yang diperoleh.

Dari penelitian ini, dapat ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada graf Lintasan P_n, graf Lingkaran C_n, dan graf Bintang S_n. Bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi korona dapat ditentukan untuk sebarang dua graf $G_m \odot H_n$. Sedangkan untuk yang jarak dua dapat ditentukan pada graf Lintasan dan graf Lingkaran yang dioperasikan dengan sebarang graf, yaitu $P_m \odot G_n$ serta $C_n \odot H_m$. Selain itu, bilangan dominasi jarak satu dan dua pada graf hasil operasi *comb* juga dapat ditentukan antara lain meliputi graf $P_m \triangleright P_n, P_m \triangleright C_n, P_m \triangleright S_n, C_n \triangleright P_m, C_n \triangleright C_m$ dan $C_n \triangleright S_m$. Bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua pada suatu graf tidak memiliki relasi secara umum. Hal ini karena beberapa faktor, seperti jarak antar simpul, pemilihan simpul elemen himpunan dominasi, derajat setiap simpul, diameter dan sebagainya.

***Kata kunci*:** bilangan dominasi, himpunan dominasi, graf bintang, graf lingkaran, graf lintasan, operasi *comb*, operasi korona

DOMINATING NUMBER OF DISTANCE TWO OF CORONA AND COMB PRODUCT OF GRAPHS

Name	:	Reni Umilasari
NRP	:	1213 201 011
Supervisor	:	Dr. Darmaji, S.Si., M.T.

ABSTRACT

Dominating set S in graph $G = (V, E)$ is a subset of $V(G)$ such that every vertex of G which is not element of S is connected and has distance one to S. Minimum cardinality among dominating set in a graph G is called dominating number of graph G and denoted by $\gamma(G)$. While dominating set of distance two which is denoted by S_2 is a subset of $V(G)$ such that every vertex of G which is not element of S is connected and has maximum distance two to S_2. Dominating number of distance two of graph G $\gamma_2(G)$ is minimum cardinality of dominating set of distance two. This research will be determined the dominating number of distance two of Path, Cycle, and Star. Subsequently, the dominating number of distance one and two of corona and comb product of the graphs will be determined. Futhermore, we will determine the relation between dominating number of distance one and two of the results which have been obtained.

Based on the observation, we can find the dominating number of distance two of Path P_m, Cycle C_m, and Star S_n. Dominating number of distance one of corona product graphs can be determined for any two graphs $G_m \odot H_n$. Then, the distance two can be determined on Path and Cycle which are operated by any graphs, $P_m \odot G_n$ and $C_n \odot H_m$. The dominating number of distance one and two of comb product of graphs also can be determined for $P_m \triangleright P_n, P_m \triangleright C_n, P_m \triangleright S_n, C_n \triangleright P_m, C_n \triangleright C_m$ dan $C_n \triangleright S_m$. Dominating number of distance one and distance two for any graphs do not have general relation. These are caused by several factors such as distance for every vertex, determine the dominating set vertex elements, degree of every vertex, diameter, and etc.

***Keywords*:** comb product, corona product, cycle, dominating number, dominating set, path, star

KATA PENGANTAR

Assalamu’alaikum Wr. Wb.

Puji syukur ke hadirat Allah Swt atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul

”Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf-Graf Hasil Operasi Korona dan Comb”

dengan baik. Tesis ini disusun sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Strata 2 (S-2) Program Magister Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya. Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih atas bantuan dan bimbingan dalam penyusunan tesis ini, terutama kepada yang terhormat:

1. Bapak Dr. Darmaji, M.T. selaku dosen pembimbing atas segala bantuan, bimbingan, arahan dan motivasinya dalam mengerjakan Tesis sehingga dapat terselesaikan dengan baik.

2. Bapak Prof Slamin, M.Comp.Sc., Ph.D yang senantiasa memberikan waktunya untuk berbagi ilmu dalam dunia graf.

3. Bapak Dr. Chairul Imron, M.I.Komp. dan Ibu Endah Rokhmati M.P, S.Si, M.T., Ph.D. selaku dosen penguji atas semua saran yang telah diberikan demi perbaikan Tesis ini.

4. Bapak Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc. selaku dosen wali yang telah membimbing dan motivasi selama menempuh pendidikan magister.

5. Bapak Dr. Subiono, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Pascasarjana Matematika ITS yang telah memberi bimbingan selama menempuh pendidikan magister.

6. Ibu Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA ITS.

7. Bapak dan Ibu dosen Jurusan Matematika FMIPA ITS yang telah mendidik penulis baik di dalam maupun di luar perkuliahan serta Bapak dan Ibu staf Tata Usaha Jurusan Matematika ITS.

8. Kedua orang tua Bapak Suwono, Ibu Sriani dan keluarga tercinta, Nakneng, Mbak Rini terima kasih atas perhatian doa dan segala dukungannya, beserta Mas Yudhistira Dian P., terima kasih atas kesetiaan, kesabaran, dukungan, motivasi, perhatian, waktu dan doa yang telah diberikan selama penulis menempuh studi di ITS.
9. Keluarga besar Pascasarjana Matematika ITS 2013, Novian, Mbk Retno, Mas Riski, Mas Fahim, dan warga Ash Sulha yang telah menemani, membantu, mendoakan, dan memberikan semangat kepada penulis, serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa dalam Tesis ini masih terdapat kekurangan. Oleh sebab itu, kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan untuk kesempurnaan Tesis ini. Akhirnya, penulis berharap semoga Tesis ini dapat bermanfaat bagi semua pihak dan memberikan kontribusi terhadap berkembangnya pengetahuan baru khususnya dalam bidang teori graf.

Surabaya, Maret 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

$G(V, E)$	Graf G dengan himpunan simpul V dan himpunan sisi E
$V(G)$	Himpunan simpul graf G
$E(G)$	Himpunan sisi graf G
$\|G\|$	*Order* (banyak simpul graf G)
$\parallel G \parallel$	*Size* (banyak sisi graf G)
$d(u, v)$	Jarak dari simpul u ke simpul v
$ecc(v)$	Eksentrisitas simpul v
$rad(G)$	*Radius* graf G
$diam(G)$	Diameter graf G
$S(G)$	Himpunan dominasi jarak satu pada graf G
$\gamma(G)$	Bilangan dominasi jarak satu pada graf G
$S_2(G)$	Himpunan dominasi jarak dua pada graf G
$\gamma_2(G)$	*Dominating number* jarak dua pada graf G
$\odot$	Operator korona
$\triangleright$	Operator *comb*

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu ilmu yang banyak memberikan alternatif dalam menyelesaikan masalah di segala bidang. Salah satu cabang ilmu matematika yang dapat menyelesaikan suatu masalah adalah teori graf. Secara matematis, graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) yang ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan tidak kosong yang disebut simpul (*vertex*), sedangkan E adalah himpunan boleh kosong yang menghubungkan sepasang simpul dan disebut sisi (*edge*). Untuk selanjutnya, kita dapat menulis suatu graf dengan notasi G, tanpa menyebutkan himpunan simpul dan sisinya.

Salah satu topik yang menjadi kajian dalam teori graf adalah himpunan dominasi dan bilangan dominasi. Menurut Haynes (1996), himpunan dominasi (S) pada graf G adalah subset dari $V(G)$ sedemikian setiap simpul G yang bukan elemen S terhubung dan berjarak satu terhadap S. Kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi pada graf G disebut bilangan dominasi dari graf G dan dinotasikan $\gamma(G)$. Oleh karena itu, bilangan dominasi sangat erat kaitannya dengan himpunan dominasi.

Sejarah dominasi (*dominating*) pada graf dimulai pada awal tahun 1850 sejak pemain catur Eropa berantusias untuk menyelesaikan masalah "*dominating queens*". Dalam masalah ini, dominasi digunakan untuk menentukan banyaknya *queen* sedemikian setiap *queen* bisa mendominasi atau menyerang setiap posisi dengan sekali perpindahan pada papan catur ukuran 8×8. Dalam teori graf, *queens* direpresentasikan sebagai simpul dan jalur perpindahan antar kotak pada papan catur dianggap sebagai sisi.

Dominasi secara matematis dikenalkan pada awal tahun 1960. Sejak saat itu baik himpunan dominasi maupun bilangan dominasi telah banyak digunakan dalam berbagai aplikasi, antara lain menentukan banyaknya penempatan kamera pengawas dalam sudut-sudut lorong pada suatu bangunan dan penentuan lokasi serta banyaknya pos-pos polisi lalu lintas pada sudut-sudut kota agar setiap jalan dapat dipantau dengan baik.

Contoh aplikasi lainnya dari bilangan dominasi adalah untuk menentukan banyaknya mobil pemadam kebakaran yang dibutuhkan dalam suatu lingkungan perumahan untuk menangani jika terjadi kebakaran. Gambar 1.1 merupakan denah suatu perumahan di Surabaya serta representasinya dalam graf dengan ketentuan persimpangan jalan dianggap sebagai simpul dan jalan dianggap sebagai sisi pada graf. Pada gambar tersebut terdapat 32 persimpangan serta 52 ruas jalan. Mobil pemadam kebakaran akan ditempatkan pada persimpangan jalan dengan ketentuan setiap mobil diwajibkan untuk mengamankan maksimal satu blok-blok terdekat. Sehingga untuk mengetahui optimasi penempatan pemadam kebakaran serta banyaknya mobil pemadam kebakaran yang dibutuhkan dapat ditentukan dengan mencari bilangan dominasi pada graf tersebut.

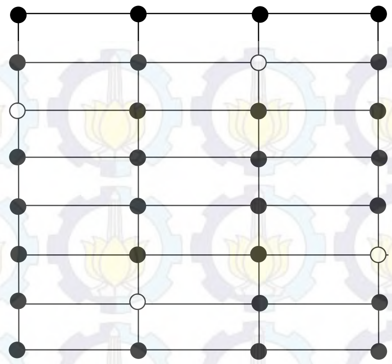
Graf hasil representasi denah perumahan tersebut merupakan graf Grid ($P_4 \times P_8$) seperti pada Gambar 1.1(b). Menurut Snyder (2011), bilangan dominasi dari graf Grid $G(4 \times n) = n$ untuk $n \geq 4$, sehingga $\gamma(4 \times 8) = 8$. Dengan kata lain, mobil pemadam kebakaran yang harus disiapkan sebanyak 8 buah. Simpul-simpul berwarna putih merepresentasikan penempatan mobil pemadam kebakaran. Akan tetapi, jika banyaknya mobil pemadam kebakaran yang dimiliki jumlahnya terbatas, maka penempatannya harus diubah. Misalkan satu mobil digunakan untuk mengamankan maksimal dua blok terdekat. Sehingga dalam lingkungan perumahan tersebut hanya dibutuhkan 4 mobil pemadam kebakaran untuk mengamankan semua blok yang ada seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.2.

(a) (b)

Gambar 1.1: (a) Denah Perumahan (b) Representasi Himpunan Dominasi Jarak Satu

(Sumber Gambar 1.1(a): http://www.google.co.id/maps/place/Rayan+Regency)

Operasi antara dua graf merupakan salah satu cara untuk memperoleh bentuk graf-graf baru. Terdapat berbagai jenis operasi dalam graf, misalnya operasi *join*



Gambar 1.2: Himpunan Dominasi Jarak Dua

(+), gabungan (∪), kartesian (×), korona (⊙), dan operasi *comb* (▷). Sebagai contoh, graf Grid merupakan graf hasil operasi kartesian dua graf Lintasan. Contoh lain yaitu graf Katerpilar $F_{n,2}$ yang merupakan graf hasil operasi *comb* dari lintasan P_n dengan lintasan P_2.

Penelitian tentang bilangan dominasi telah banyak dilakukan antara lain oleh Snyder (2011) yang berjudul "*c-Dominating sets for families of graphs*". Dalam tulisan tersebut ditentukan bilangan dominasi pada graf Grid untuk $G(2\times n), G(3\times n)$ dan $G(4 \times n)$ dengan menentukan bilangan c sedemikian $\gamma(G) = c|G|$ untuk $0 \leq c \leq 1$. Klavžar (1997) dalam penelitiannya *"Dominating Cartesian Product of Cycles"* menunjukkan bilangan dominasi dari operasi kartesian graf-graf Lingkaran, serta *"Total Domination Number of Grid Graph"* oleh Gravier (2002) yang mengembangkan konsep *dominating* pada graf dengan menentukan bilangan dominasi total pada graf Grid.

Salah satu topik mengenai bilangan dominasi suatu graf yang belum diteliti adalah jika antara simpul yang merupakan elemen himpunan dominasi dengan simpul lainnya memiliki jarak kurang dan atau sama dengan dua. Sehingga dalam penelitian ini akan ditentukan bilangan dominasi jarak dua (γ_2) dari graf-graf sederhana yaitu graf Lintasan, Lingkaran dan Bintang serta graf hasil operasi korona dan *comb* dari kombinasi dua graf diantara ketiga graf tersebut. Selain itu, bilangan dominasi jarak satu dari graf hasil operasi korona dan operasi *comb* yang belum pernah ditemukan juga akan diteliti. Kemudian dicari relasi antara bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua dari hasil yang diperoleh. Himpunan dominasi jarak dua yang dinotasikan dengan S_2, yaitu subset dari $V(G)$ sedemikian simpul G yang bukan elemen S_2 memiliki jarak maksimal 2 terhadap simpul-simpul di S_2. Bilangan dominasi jarak dua γ_2 merupakan kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi jarak dua.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, masalah yang dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Berapakah bilangan dominasi jarak dua pada graf Lintasan, Lingkaran, dan Bintang.
2. Berapakah bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi korona dan *comb* dari kombinasi dua graf, yaitu graf Lintasan, Lingkaran, dan Bintang.
3. Berapakah bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi korona dan *comb* dari kombinasi dua graf, yaitu graf Lintasan, Lingkaran, dan Bintang.
4. Bagaimana relasi antara bilangan dominasi jarak satu dan bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi korona dan *comb*.

1.3 Batasan Masalah

Untuk menjaga fokus pembahasan pada penelitian, masalah dalam penelitan ini dibatasi pada:

1. graf terhubung sederhana,
2. bilangan dominasi jarak satu dan dua,
3. graf yang menjadi objek penelitian adalah Lintasan, Lingkaran, dan Bintang serta graf hasil operasi korona dan operasi *comb* dari kombinasi dua graf di antara ketiga graf tersebut,
4. kombinasi dua graf yang diteliti baik untuk operasi korona maupun *comb* antara lain graf Lintasan dengan Lintasan, Lintasan dengan Lingkaran, Lintasan dengan Bintang, Lingkaran dengan Lingkaran, Lingkaran dengan Lintasan, serta Lingkaran dengan Bintang.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengetahui bilangan dominasi jarak dua pada graf Lintasan, Lingkaran, dan Bintang.

2. Mengetahui bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi korona dan *comb* dari kombinasi dua graf, yaitu graf Lintasan, Lingkaran, dan Bintang.

3. Mengetahui bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi korona dan *comb* dari kombinasi dua graf, yaitu graf Lintasan, Lingkaran, dan Bintang.

4. Mengidentifikasi relasi antara bilangan dominasi jarak dua dan bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi korona dan *comb*.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini antara lain:

1. menambah pengetahuan dalam bidang teori graf,

2. memberikan kontribusi terhadap berkembangnya pengetahuan baru dalam bidang teori graf, khususnya dalam ruang lingkup bilangan dominasi pada graf, dan

3. memberikan motivasi kepada pembaca untuk melakukan penelitian tentang bilangan dominasi jarak dua pada graf-graf yang lain atau dengan pengembangan konsep.

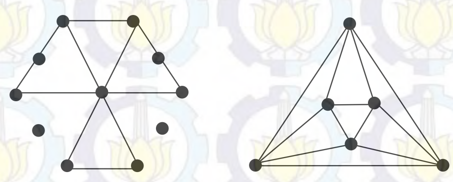
BAB II

KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

2.1 Terminologi Dasar Graf

Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) yang ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ dengan V adalah himpunan tidak kosong yang disebut simpul (*vertex*), sedangkan E adalah himpunan boleh kosong yang menghubungkan sepasang simpul dan disebut sisi (*edge*). Simpul pada graf dapat dilabeli dengan huruf, angka, atau dengan menggunakan huruf dan angka. Misalkan u dan v adalah simpul-simpul pada suatu graf, maka sisi yang menghubungkan simpul u dan v dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dilambangkan dengan e. Banyak simpul pada graf G disebut *order* dari G dinotasikan $|G|$, sedangkan banyak sisi disebut *size* dari G dinotasikan $\| G \|$. Graf yang ordernya berhingga disebut graf berhingga.

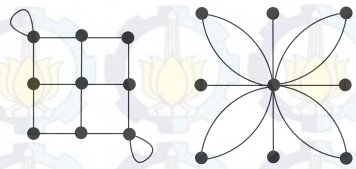
Simpul u dikatakan bertetangga ($adjacent$) dengan simpul v jika terdapat sebuah sisi e diantara u dan v yaitu $e = uv$, atau dapat dinyatakan bahwa sisi e menempel ($incident$) dengan kedua simpul u dan v. Derajat (*degree*) pada setiap simpul didefinisikan sebagai banyaknya sisi yang menempel pada simpul tersebut. Jika setiap simpul pada graf G mempunyai derajat sama dengan n maka graf G disebut graf reguler n, jika tidak maka graf tersebut dikatakan non reguler. Simpul v pada suatu graf G yang memiliki derajat 0 disebut *isolated vertex*, sedangkan sebuah simpul yang hanya mempunyai derajat satu disebut daun, simpul ujung atau *pendant*. Pada Gambar 2.1 ditunjukkan contoh graf dengan 2 *isolated vertex* serta graf reguler 4.



(a) (b)

Gambar 2.1: (a) Graf dengan 2 *Isolated Vertex*, (b) Graf Reguler 4

Beberapa sisi berbeda pada suatu graf yang menghubungkan pasangan simpul yang sama maka graf tersebut dikatakan memiliki sisi ganda (*multiple edge*). Sisi yang menghubungkan simpul yang sama disebut *loop*. Sebuah graf yang tidak mengandung sisi ganda dan *loop* disebut sebagai graf sederhana (*simple graph*).

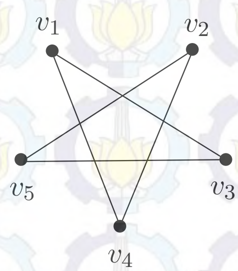


(a) (b)

Gambar 2.2: (a) Graf dengan *Loop*, (b) Graf dengan 4 *Pendant* dan Sisi Ganda

Matriks ketetanggaan (*adjacency matrix*) dari sebuah graf G dengan himpunan simpul $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ merupakan matriks berordo $n \times n$, yaitu $A_{n\times n} = [a_{ij}]$, dengan:

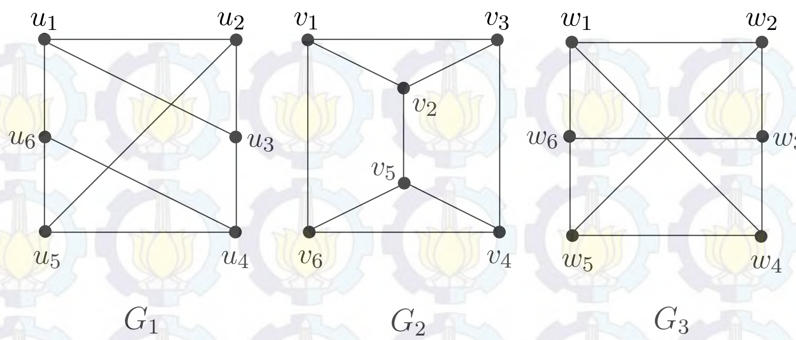
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ jika } v_iv_j \in E(G) \\ 0, \text{ yang lain} \end{cases}$$



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambar 2.3: Graf dengan Matriks Ketetanggaanya

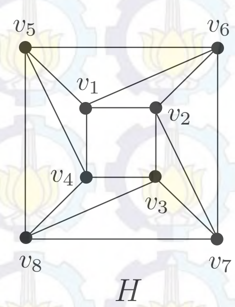
Dua buah graf yang sama tetapi secara geometri berbeda disebut graf yang saling isomorfis (*Isomorphic Graph*). Graf G_1 dan G_2 dikatakan isomorfis jika terdapat pemetaan satu-satu $f : V(G_1) \to V(G_2)$ yang menyajikan semua sifat ketetanggaan, yaitu $f(u)$ dan $f(v)$ pada G_2 bertetangga jika dan hanya jika u dan v bertetangga pada G_1. Selain itu, untuk menjamin bahwa kedua graf dikatakan isomorfis dapat dilihat dari matriks ketetanggaan kedua graf tersebut. Jika sama maka kedua graf tersebut dikatakan isomorfis seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.4. Graf G_1 dan G_2 adalah dua graf yang isomorfis, sedangkan graf G_3 tidak isomorfis.



Gambar 2.4: Isomorfisma dalam Graf

Misalkan G graf dengan himpunan simpul $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Jalan $v_0 - v_l$ pada graf G adalah sebuah barisan berhingga $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_l, v_l$ bergantian simpul dan sisi pada graf G sedemikian $e_i = v_{i-1}v_i$ untuk setiap i, $1 \leq i \leq l$. Jalan yang demikian juga dinotasikan dengan $v_0v_1 \ldots v_l$. Lintasan (*path*) adalah jalan yang setiap simpulnya berbeda. Pada Gambar 2.5 $v_5v_6v_1v_2v_6v_7$ merupakan sebuah jalan dengan panjang 5 yang bukan lintasan, sedangkan $v_5v_6v_1v_2v_7$ merupakan sebuah lintasan dengan panjang 4.

Jarak $d(u,v)$ dari simpul u ke simpul v adalah panjang lintasan terpendek dari simpul u ke simpul v. Eksentrisitas $ecc(v)$ pada sebuah simpul v dalam graf G adalah jarak terjauh dari simpul v ke setiap simpul di G. Jari-jari (*radius*) yang dinotasikan $rad(G)$ dari graf G adalah eksentrisitas minimum di antara simpul-simpul di G. Simpul v disebut simpul pusat jika $ecc(v) = r(G)$, sedangkan diameter dari graf G adalah jarak terpanjang di antara sebarang dua simpul pada G dan dinotasikan $diam(G) = max\{d(v_iu_j)|v_i, u_j \in V(G)\}$. Misalkan graf H pada Gambar 2.5, $d(v_2, v_8) = 2$, $ecc(v_1) = 2$, $r(H) = 2$ dan $diam(H) = 2$.



Gambar 2.5: Graf dengan *Radius* 2 dan Diameter 2

2.2 Jenis - jenis Graf

Graf-graf sederhana yang tergolong *well known graph* yang digunakan dalam penelitian ini meliputi graf Lintasan, graf Lingkaran, dan graf Bintang. Berikut definisi dari masing-masing graf tersebut.

2.2.1 Graf Lintasan

Graf Lintasan yang dinotasikan dengan P_n merupakan graf terhubung sederhana yang membentuk lintasan yang terdiri dari n simpul dan $n - 1$ sisi dengan $n \geq 2$. Kedua simpul ujung pada graf ini merupakan *pendant*, yaitu simpul dengan derajat sama dengan satu, sedangkan simpul yang lain berderajat dua.

Gambar 2.6: Graf Lintasan P_6

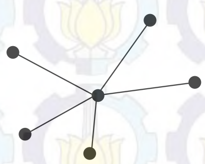
2.2.2 Graf Lingkaran

Graf Lingkaran adalah graf terhubung sederhana yang memiliki n simpul dan n sisi dengan setiap simpulnya berderajat dua. Graf Lingkaran dinotasikan dengan C_n dengan $n \geq 3$. Gambar 2.7 merupakan contoh graf Lingkaran dengan 4 simpul.

Gambar 2.7: Graf Lingkaran C_4

2.2.3 Graf Bintang

Graf Bintang S_n dengan $n \geq 1$ adalah graf terhubung sederhana yang memiliki $n + 1$ simpul dan n sisi. Satu simpul pada graf Bintang biasa disebut simpul pusat yaitu simpul yang berderajat n, sedangkan simpul yang lain berderajat satu.

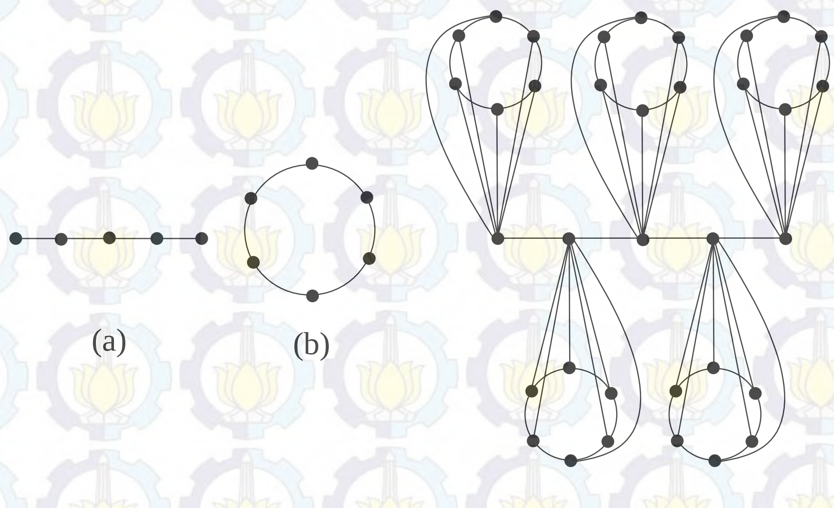


Gambar 2.8: Graf Bintang S_5

2.3 Operasi Graf

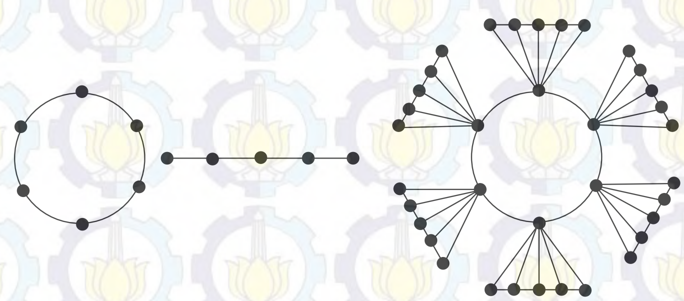
2.3.1 Operasi Korona

Operasi korona dari graf G dan graf H didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G dan $|G|$ duplikat dari graf H yaitu H_i dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, |G|$ kemudian menghubungkan setiap simpul ke-i dari G ke setiap simpul di H_i (Harary, Frucht, 1970).



(a) (b) (c)

Gambar 2.9: (a) Graf Lintasan P_5, (b) Graf Lingkaran C_6, (c) Graf Hasil Operasi Korona $P_5 \odot C_6$

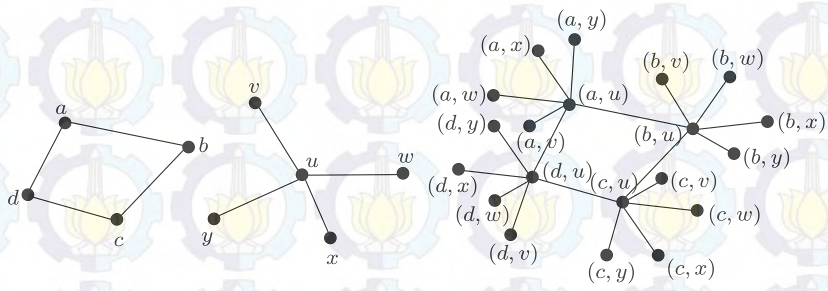


(a) (b) (c)

Gambar 2.10: (a) Graf Lingkaran C_6, (b) Graf Lintasan P_5, (c) Graf Hasil Operasi Korona $C_6 \odot P_5$

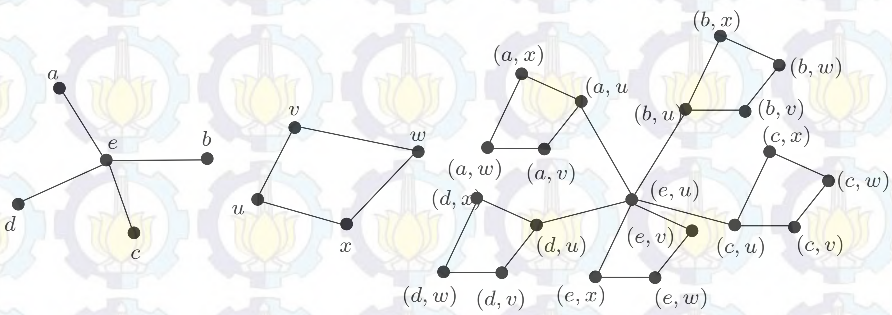
2.3.2 Operasi Comb

Misalkan G dan H adalah graf terhubung dan u adalah simpul di H. Operasi *comb* dari graf G dan graf H dinotasikan dengan $G \triangleright H$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu kopian G dan $|G|$ kopian dari H dan melekatkan simpul u dari masingmasing graf H kopian ke-i pada simpul ke-i dari graf G.(Saputro, S., dkk, 2013)



(a) (b) (c)

Gambar 2.11: (a) Graf Lingkaran C_4, (b) Graf Bintang S_4, (c) Graf Hasil Operasi *Comb* $C_4 \triangleright S_4$



(a) (b) (c)

Gambar 2.12: (a) Graf Bintang S_4, (b) Graf Lingkaran C_4, (c) Graf Hasil Operasi *Comb* $S_4 \triangleright C_4$

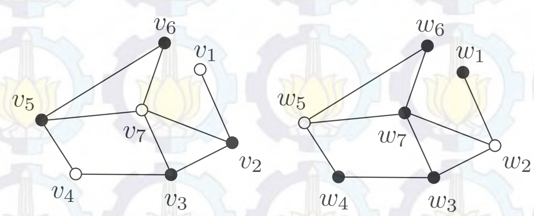
Gambar 2.9 sampai Gambar 2.12 menunjukkan bahwa graf-graf hasil operasi korona dan operasi *comb* bukan graf yang isomorfis, sehingga kedua operasi tersebut tidak bersifat komutatif.

2.4 Himpunan Dominasi dan Bilangan Dominasi

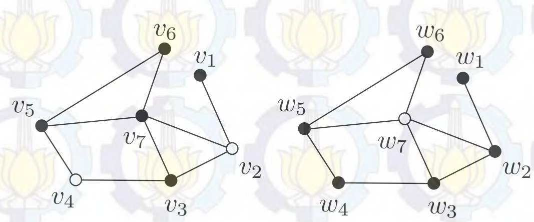
2.4.1 Definisi Himpunan Dominasi dan Bilangan Dominasi

Himpunan dominasi (*dominating set*) S pada graf G adalah subset dari $V(G)$ sedemikian setiap simpul G yang bukan elemen S terhubung dan berjarak satu terhadap S (Haynes, 1996). Kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi pada graf G disebut bilangan dominasi (*dominating number*) dari graf G dan dinotasikan $\gamma(G)$. $S_a = \{v_1, v_4, v_7\}$ dan $S_b = \{w_2, w_5\}$, yaitu simpul-simpul yang berwarna putih pada Gambar 2.13 menunjukkan contoh himpunan dominasi jarak satu pada suatu graf.

Akan tetapi S_b merupakan himpunan dominasi dengan kardinalitas minimum, sehingga bilangan dominasi jarak satu $\gamma(G) = 2$. Sedangkan himpunan dominasi jarak dua yang dinotasikan dengan S_2, yaitu subset dari $V(G)$ sedemikian simpul G yang bukan elemen S_2 terhubung dan memiliki jarak maksimal 2 terhadap S_2. Bilangan dominasi jarak dua dari graf G $\gamma_2(G)$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi jarak dua. Gambar 2.14 (a) bukan himpunan dominasi jarak dua yang minimum, sedangkan pada Gambar 2.14 (b) terlihat hanya terdapat satu simpul pada graf tersebut yang memiliki jarak maksimal 2 terhadap setiap simpul yang lain, sehingga $\gamma_2(G) = 1$. Dengan demikian, berdasarkan ilustrasi contoh di atas dapat disimpulkan bahwa bilangan dominasi jarak dua dari suatu graf G lebih kecil atau sama dengan bilangan dominasi jarak satu ($\gamma_2 \leq \gamma$).



Gambar 2.13: (a) Himpunan Dominasi Jarak Satu, (b) Himpunan Dominasi Jarak Satu Minimum



Gambar 2.14: (a) Himpunan Dominasi Jarak Dua, (b) Himpunan Dominasi Jarak Dua Minimum

2.4.2 *Hasil-hasil Penelitian Bilangan Dominasi Jarak Satu*

Pada Tabel 2.1 dan Tabel 2.2 disajikan beberapa hasil penelitian mengenai bilangan dominasi jarak satu pada graf Lintasan, graf Lingkaran, dan graf Bintang serta beberapa graf hasil operasi korona diantara graf-graf tersebut yang akan dibandingkan dengan bilangan dominasi jarak dua untuk menentukan relasinya.

Tabel 2.1: Hasil-Hasil Penelitian Bilangan Dominasi Jarak Satu pada Graf Sederhana

Graf	Bilangan Dominasi
Graf Lintasan (P_m)	$\gamma(P_m) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$
Graf Lingkaran (C_n)	$\gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$
Graf Bintang (S_n)	$\gamma(S_n) = 1$

Sumber: Goddard, Henning, 2006

Tabel 2.2: Hasil-Hasil Penelitian Bilangan Dominasi Jarak Satu pada Graf Hasil Operasi

Graf	Bilangan Dominasi
Graf Korona Lintasan dan Lingkaran ($P_m \odot C_n$)	$\gamma(P_m \odot C_n) = m$
Graf Korona Lingkaran dan Lintasan ($C_n \odot P_m$)	$\gamma(C_n \odot P_m) = n$

Sumber: Mursyidah, Rahmawati, 2014

Pada Tabel 2.1 simbol $\lceil a \rceil$ (dibaca *ceil* dari a)didefinisikan sebagai bilangan bulat terkecil yang lebih besar sama dengan a untuk a bilangan real yaitu apabila $a = k + r$ dengan $k \in \mathbb{Z}$ dan $0 < r \leq 1$ maka $\lceil a \rceil = k + 1$. Sehingga pada penjelasan selanjutnya akan ditunjukkan analisis nilai bilangan dominasi serta sifat pembagian pada bilangan bulat dan bilangan modulo.

2.5 Sifat Pembagian pada Bilangan Bulat dan Bilangan Modulo

Misalkan a dan b adalah dua buah bilangan bulat dengan syarat $a \neq 0$, a habis membagi b (a *divides* b) atau biasanya ditulis $a|b$ jika terdapat bilangan bulat c sedemikian sedemikian hingga $b = ac$.

Teorema 2.1 (Algoritma Pembagian) Misalkan m dan n adalah dua buah bilangan bulat dengan syarat $n > 0$. Jika m dibagi dengan n maka terdapat dua buah bilangan bulat unik q (*quotient*) dan r (*remainder*), sedemikian sehingga $m = nq + r$ dengan $0 \leq r < n$. Untuk selanjutnya secara berturut-turut q adan r disebut sebagai hasil dan sisa pembagian. (Subiono, 2015).

Selanjutnya didefinisikan kongrungen modulo dari suatu bilangan. Secara sederhana dikatakan $a \equiv b$ (mod n) jika dan hanya jika a dan b memiliki sisa yang sama apabila dibagi dengan m. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada definisi berikut ini.

Denisi 2.1 Misalkan $n > 0$ adalah sebarang bilangan bulat tetapi tetap. Untuk sebarang dua bilangan bulat a dan b adalah **kongruen mod** n ditulis $a \equiv b$ (mod n) jika $n|(a-b)$(Subiono, 2015).

Berikut ini ditunjukkan analisis mengenai *ceil* dari suatu bilangan yang kaitannya dengan bilangan modulo. Misal $m, n \in \mathbb{Z}^+$ dan $s \in \{0, 1, 2, ..., m\}$, didapatkan beberapa hasil berikut ini.

1. $n \equiv 0$ (mod m)

   $n \equiv 0$ (mod m) artinya $m|n$, sehingga terdapat $k \in Z^+$ sedemikian hingga $n = m \cdot k$ atau $k = \frac{n}{m}$. Dengan demikian didapatkan

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{n-s}{m} \right\rceil &= \left\lceil \frac{m \cdot k - s}{m} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{m(k-1) + m - s}{m} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{m(k-1)}{m} + \frac{m-s}{m} \right\rceil \\ &= \left\lceil k - 1 + \frac{m-s}{m} \right\rceil . \end{aligned}$$

   Karena $s \in \{0, 1, 2, ..., m\}$ maka $\frac{m-s}{m} = 0$ untuk $s = m$ dan $0 < \frac{m-s}{m} \leq 1$ untuk $0 \leq s \leq m-1$ sehingga didapatkan

$$\left\lceil \frac{n-s}{m} \right\rceil = \begin{cases} k & \text{jika } 0 \leq s \leq m-1 \\ k-1 & \text{jika } s = m \end{cases}$$

2. $n \equiv p$ (mod m) dengan $1 \leq p < m$

   $n \equiv p$ (mod m) artinya $m|n-p$, sehingga terdapat k tak negatif sedemikian $n - p = m \cdot k$ yang mengakibatkan $n = m \cdot k + p$ dan $k = \frac{n-p}{m}$. Dengan demikian didapatkan

$$\left\lceil \frac{n-s}{m} \right\rceil = \left\lceil \frac{m \cdot k + p - s}{m} \right\rceil = \left\lceil \frac{mk}{m} + \frac{p-s}{m} \right\rceil = \begin{cases} k+1 & \text{jika } 1 \leq p-s \leq m \\ k & \text{jika } -m < p-s \leq 0 \end{cases}$$

atau

$$\left\lceil \frac{n-s}{m} \right\rceil = \begin{cases} k+1 & \text{jika } s+1 \leq p \leq s+m \\ k & \text{jika } s-m < p \leq s \end{cases} = \begin{cases} k+1 & \text{jika } p-m \leq s \leq p-1 \\ k & \text{jika } p \leq s < m+p \end{cases}.$$

Karena $1 \leq p < m$ dan $s \in \{0, 1, ..., m\}$ maka

$$\left\lceil \frac{n-s}{m} \right\rceil = \begin{cases} k+1 & \text{jika } s+1 \leq p \leq m-1 \\ k & \text{jika } 1 < p \leq s \end{cases} = \begin{cases} k+1 & \text{jika } 0 \leq s \leq p-1 \\ k & \text{jika } p \leq s < m+1 \end{cases}.$$

BAB III
METODA PENELITIAN

Pada bagian ini diuraikan beberapa metode penelitian yang akan digunakan atau dikerjakan untuk mencapai tujuan penelitian.

1. Pemahaman konsep dan studi literatur

   Pada tahap ini dilakukan pemahaman konsep dan studi literatur dari berbagai sumber mengenai himpunan dominasi dan bilangan dominasi pada graf-graf sederhana serta graf-graf hasil operasi, khususnya operasi korona dan operasi *comb*.

2. Observasi

   - Mengkonstruksi graf hasil operasi korona dan operasi *comb* antara graf Lintasan, Lingkaran, dan Bintang.
   - Menentukan himpunan dominasi jarak satu dari graf hasil operasi korona dan operasi *comb* antara graf Lintasan, Lingkaran, dan Bintang.
   - Menentukan himpunan dominasi jarak dua minimum dari graf Lintasan, Lingkaran, dan Bintang serta graf hasil operasi korona dan operasi *comb* dari kombinasi ketiga graf tersebut.
   - Menentukan hipotesis bilangan dominasi berdasarkan penentuan himpunan dominasi.
   - Membuktikan hipotesis bilangan dominasi dari masing-masing graf.
   - Menentukan relasi antara bilangan dominasi jarak satu dan dua dari masing-masing graf.

3. Evaluasi

   Pada tahap ini dilakukan evaluasi terhadap analisa yang telah dikerjakan pada tahap observasi, sehingga dapat diperoleh suatu simpulan.

4. Diseminasi hasil penelitian

   Tahap diseminasi hasil penelitian meliputi presentasi pada seminar dan publikasi *paper* dalam prosiding atau jurnal baik nasional maupun internasional.

5. Penyusunan laporan

   Laporan penelitian ditulis dalam sebuah tesis dengan sistematika penulisan yang telah ditentukan, yang meliputi: bab 1. pendahuluan, bab 2. kajian pustaka dan dasar teori, bab 3. metoda penelitian, bab 4. hasil dan pembahasan, serta bab 5. simpulan dan saran.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas bilangan dominasi jarak dua pada graf Lintasan P_n, graf Lingkaran C_n, dan graf Bintang S_n. Bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi korona dapat ditentukan untuk sebarang dua graf $G_m \odot H_n$. Sedangkan untuk yang jarak dua dapat ditentukan pada graf Lintasan dan graf Lingkaran yang dioperasikan dengan sebarang graf, yaitu $P_m \odot G_n$ serta $C_n \odot H_m$. Sedangkan, bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua pada graf hasil operasi *comb* juga dapat ditentukan antara lain meliputi graf $P_m \triangleright P_n, P_m \triangleright C_n, P_m \triangleright S_n, C_n \triangleright P_m, C_n \triangleright C_m$ dan $C_n \triangleright S_m$. Selanjutnya, relasi atau perbandingan antara bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua pada suatu graf juga akan dibahas.

4.1 Bilangan Dominasi Jarak Satu dari Graf Hasil Operasi Korona

Seperti pada Tabel 2.2, Mursyidah dan Rahmawati (2014) menunjukkan bahwa bilangan dominasi jarak satu dari graf hasil operasi korona antara Lintasan dan Lingkaran adalah $\gamma(P_m \odot C_n) = m$, sedangkan bilangan dominasi jarak satu dari graf hasil operasi korona antara Lingkaran dan Lintasan yaitu $\gamma(C_n \odot P_m) = n$ dengan n merupakan order dari graf Lingkaran. Go dan Canoy (2011) telah menunjukkan bilangan dominasi pada graf hasil operasi korona. Berikut ini akan ditunjukkan bukti yang berbeda untuk bilangan dominasi jarak satu pada graf $G_m \odot H_n$ dengan G_m dan H_n merupakan sebarang graf terhubung.

Teorema 4.1. *Diberikan dua graf terhubung G_m dan H_n dengan masing-masing ordernya m dan n dengan $m, n \geq 1$, maka bilangan dominasi jarak satu dari graf hasil operasi korona $G_m \odot H_n$ adalah $\gamma(G_m \odot H_n) = m$.*

Bukti: Misalkan v_i adalah simpul-simpul pada graf G_m dan $u_{i,j}$ adalah simpul-simpul pada graf H_n yang terhubung dengan simpul v_i dengan $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$, maka $V(G_m \odot H_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \cup \{u_{i,j}\}$. Berdasarkan definisi dari operasi korona, $\forall v_i, u_{i,j} \in V(G_m \odot H_n), d(v_i, u_{i,j}) = 1$. Karena G_m dan H_n adalah graf terhubung maka batas minimal dan maksimal dari derajat simpul v_i dan $u_{i,j}$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$2 \leq deg(v_i) \leq n + m - 1 \text{ dan } 1 \leq deg(u_{i,j}) \leq n.$$

Dengan demikian, simpul v_i memiliki derajat yang lebih besar dari simpul $u_{i,j}$. Sehingga simpul v_i akan menjangkau lebih banyak simpul dari pada simpul $u_{i,j}$. Oleh karena itu, S akan minimal jika diambil dari simpul-simpul $V(G)$. Misalkan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, maka v_i untuk $i = 1, 2, \ldots, m$ dapat mendominasi semua simpul H_i. Dengan demikian, terdapat sedikitnya m simpul pada graf $G_m \odot H_n$ yang merupakan elemen himpunan dominasi jarak satu. Sehingga dapat dituliskan $|S| \leq m$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $|S| \geq m$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $|S| \leq m - 1$ dan $v_m \notin S$ dengan $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}\}$. Maka $\forall u_{m,j} \in H_m$ dengan $j = 1, 2, \ldots, n$ $d(v_m, u_{m,j}) = 1$ dan $d(S, v_m) \geq 1$ mengakibatkan $d(S, u_{m,j}) \geq 2$, sehingga dapat dikatakan bahwa $\forall u_{m,j} \in H_m$, $u_{m,j}$ tidak dapat didominasi oleh S. Oleh karena itu $|S| \nleq m - 1$, sehingga $|S| \geq m$. Karena $|S| \leq m$ dan $|S| \geq m$, terbukti bahwa $|S| = \gamma(G_m \odot H_n) = m$. □

Dari Teorema 4.1 dapat ditentukan bilangan dominasi jarak satu pada graf-graf khusus seperti berikut ini.

Akibat 4.1. *Bilangan dominasi jarak satu pada graf lintasan yang dikoronakan dengan graf lintasan, lingkaran, dan graf bintang adalah order dari graf lintasan, yaitu* $\gamma(P_m \odot P_n) = \gamma(P_m \odot C_n) = \gamma(P_m \odot S_n) = m$.

Akibat 4.2. *Bilangan dominasi jarak satu pada graf lingkaran yang dikoronakan dengan graf lintasan, lingkaran, dan graf bintang adalah order dari graf lingkaran, yaitu* $\gamma(C_n \odot P_m) = \gamma(C_n \odot C_m) = \gamma(C_n \odot S_m) = n$.

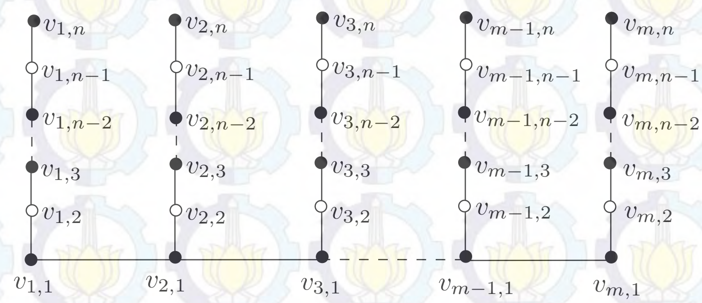
4.2 Bilangan Dominasi Jarak Satu dari Graf Hasil Operasi *Comb*

Dalam subbab ini dijelaskan bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi *comb*. Berbeda dengan bilangan dominasi graf hasil operasi korona, bilangan dominasi jarak satu graf hasil operasi *comb* tidak dapat digeneralisasi untuk sebarang dua graf. Hal ini dikarenakan nilai bilangan dominasi pada masing-masing graf hasil operasi *comb* pasti berbeda, yaitu tergantung pada graf yang dioperasikan dan simpul yang dilekatkan.

Dalam Teorema 4.2 berikut ini ditunjukkan bilangan dominasi jarak satu pada operasi *comb* dua graf Lintasan P_m dan P_n dengan melekatkan salah satu simpul ujung P_n pada masing-masing simpul P_m. Graf $P_m \triangleright P_n$ dapat dilihat pada Gambar 4.1. Simpul-simpul yang berwarna putih merupakan simpul elemen himpunan dominasi.

Teorema 4.2. *Diberikan dua buah graf lintasan P_m dan P_n dengan masing-masing ordernya m dan n untuk $m, n \geq 2$. Maka bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi comb $P_m \triangleright P_n$ adalah*

$$\gamma(P_m \triangleright P_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{3} \rceil & \textit{jika } n \equiv 0 \textit{ (mod 3) dan } n \equiv 2 \textit{ (mod 3)} \\ m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil & \textit{jika } n \equiv 1 \textit{ (mod 3)} \end{cases}$$



Gambar 4.1: Graf $P_m \triangleright P_n$ untuk $n \equiv 0$ (mod 3) dengan Simpul-Simpul Warna Putih Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Jarak Satu

Bukti: Misalkan $V(P_m \triangleright P_n) = \{V_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ dan $|P_m \triangleright P_n| = mn$. Untuk menunjukkan banyak simpul minimal yang menjadi elemen himpunan dominasi jarak satu pada graf $P_m \triangleright P_n$, maka untuk masing-masing nilai n akan dibagi menjadi dua kasus. Kasus pertama jika simpul-simpul S merupakan elemen simpul P_m dan P_n, sedangkan kasus kedua jika S hanya diambil dari simpul-simpul P_n.

1. $n \equiv 0$ (mod 3)

   Kasus 1: $S \in V(P_m) \cup V(P_n)$

   Ambil simpul-simpul P_m sebagai elemen himpunan dominasi jarak satu, yaitu simpul-simpul dengan derajat sama dengan 3, dengan asumsi simpul yang berderajat tinggi dapat mendominasi lebih banyak simpul. Sehingga untuk setiap $v_{i,1}$ dan $deg(v_{i,1}) = 3$, maka $v_{i,1}$ dapat menjangkau maksimal 4 simpul, diantaranya $v_{i,1}, v_{i-1,1}, v_{i+1,1}$ dan $v_{i,2}$. Karena $v_{i,1}$ dengan $1 \leq i \leq m$ merupakan Lintasan dengan m simpul, sehingga sesuai Goddard dan Henning (2006) maka bilangan dominasi jarak satu pada P_m adalah $\gamma(P_m) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$. Simpul-simpul P_n yang belum terdominasi merupakan simpul-simpul pada $\lceil \frac{m}{3} \rceil$ kali graf Lintasan P_{n-2} dan $m - \lceil \frac{m}{3} \rceil$ kali graf Lintasan P_{n-1}. Dengan demikian dapat ditentukan bahwa $\gamma(P_{n-1}) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$ dan $\gamma(P_{n-2}) = \lceil \frac{n-2}{3} \rceil$. Karena $n \in Z^+$ dan $n \equiv 0$ (mod 3), maka dapat ditulis bahwa $\gamma(P_{n-1}) = \gamma(P_{n-2}) = \frac{n}{3}$. Sehingga banyak himpunan dominasi jarak satu pada $P_m \triangleright P_n$ untuk kasus pertama adalah

$$\gamma(P_m \triangleright P_n) \leq \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \left(\frac{n}{3} \right) + \left(m - \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \right) \left(\frac{n}{3} \right) + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil = \frac{mn}{3} + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil.$$

Kasus 2: $S \in V(P_n)$

Karena graf $P_m \triangleright P_n$ diperoleh dengan melekatkan salah satu simpul ujung P_n pada setiap simpul P_m, maka dapat dikatakan bahwa graf $P_m \triangleright P_n$ merupakan graf yang terdiri dari m kali Lintasan P_n. Karena $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ dan $n \equiv 0$ (mod 3), maka dapat ditulis bahwa $\gamma(P_n) = \frac{n}{3}$, sehingga

$$\begin{aligned} \gamma(P_m \triangleright P_n) &\leq m(\gamma(P_n)) \\ &= \frac{mn}{3}. \end{aligned}$$

Dari kasus 1 dan 2 dapat dilihat bahwa $\frac{mn}{3} \leq \frac{mn}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$, maka bilangan dominasi pada $P_m \triangleright P_n$ lebih minimal jika dipilih simpul-simpul elemen S pada $V(P_n)$. Dengan demikian, diambil batas atas bilangan dominasi jarak satu pada $P_m \triangleright P_n$ yaitu $\gamma(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{mn}{3}$.

Selanjutnya untuk menunjukkan apakah $\frac{mn}{3}$ merupakan bilangan dominasi yang minimum, dimisalkan $\gamma(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{mn}{3} - 1$. Karena setiap simpul pada S maksimal dapat mendominasi 3 simpul dan $n \equiv 0$ (mod 3) , maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah

$$\left(\frac{mn}{3} - 1 \right) 3 = mn - 3 < mn.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul atau order pada $P_m \triangleright P_n$, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sebagai contoh perhatikan Gambar 4.1, tanpa mengurangi perumuman jika $v_{i,2}$ bukan elemen dari S maka simpul $v_{i,3}, v_{i,2}$, dan $v_{i,1}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen S. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma(P_m \triangleright P_n) \nleq \frac{mn}{3} - 1$ dan $\frac{mn}{3}$ merupakan bilangan dominasi minimum pada $P_m \triangleright P_n$. Sehingga terbukti bahwa $\gamma(P_m \triangleright P_n) = \frac{mn}{3}$.

2. $n \equiv 1 \pmod 3$

Kasus 1: $S \in V(P_m) \cup V(P_n)$

Sama seperti pembuktian sebelumnya, jika simpul-simpul P_m diambil sebagai simpul elemen S, yaitu simpul-simpul dengan derajat sama dengan 3, maka $\gamma(P_m) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$ dan banyak simpul maksimal yang dapat didominasi oleh $\lceil \frac{m}{3} \rceil$ simpul adalah $4\lceil \frac{m}{3} \rceil$ simpul. Simpul-simpul P_n yang belum terdominasi merupakan simpul-simpul pada $\lceil \frac{m}{3} \rceil$ kali graf Lintasan P_{n-2} dan $m - \lceil \frac{m}{3} \rceil$ kali graf Lintasan P_{n-1}. Sehingga, dapat ditentukan bahwa $\gamma(P_{n-1}) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$ dan $\gamma(P_{n-2}) = \lceil \frac{n-2}{3} \rceil$. Karena $n \in Z^+$ dan $n \equiv 1 \pmod 3$, maka dapat ditulis bahwa $\gamma(P_{n-1}) = \gamma(P_{n-2}) = \frac{n-1}{3}$. Sehingga banyak himpunan dominasi jarak satu pada $P_m \triangleright P_n$ jika $S \in V(P_m) \cup V(P_n)$ adalah

$$\begin{aligned} \gamma(P_m \triangleright P_n) &\leq \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \left(\frac{n-1}{3} \right) + \left(m - \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \right) \left(\frac{n-1}{3} \right) + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \\ &= \frac{m(n-1)}{3} + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil. \end{aligned}$$

Kasus 2: $S \in V(P_n)$

Karena $n \equiv 1 \pmod 3$ dan $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ maka dapat ditulis bahwa $\gamma(P_n) = \frac{n+2}{3}$. Sehingga,

$$\begin{aligned} \gamma(P_m \triangleright P_n) &\leq m(\gamma(P_n)) \\ &= \frac{m(n+2)}{3}. \end{aligned}$$

Dari kasus 1 dan 2 dapat dilihat bahwa $\frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil \leq \frac{m(n+2)}{3}$. Dengan demikian, batas atas minimal bilangan dominasi jarak satu pada $P_m \triangleright P_n$ yang diambil adalah $\gamma(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$.

Untuk menunjukkan batas bawah, terlebih dahulu akan dijelaskan banyaknya simpul maksimal yang dapat didominasi oleh masing-masing simpul seperti berikut ini.

(i.) Untuk $S \in P_m$

Karena satu simpul S pada P_m maksimal dapat mendominasi 4 simpul, maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah $4\lceil \frac{m}{3} \rceil$.

(ii.) Untuk $S \in P_{n-1}$

Karena satu simpul S pada P_{n-1} maksimal dapat mendominasi 3 simpul dan $n \equiv 1 \pmod 3$, maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah

$3\left(m-\lceil\frac{m}{3}\rceil\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)$.

(iii.) Untuk $S \in P_{n-2}$

Karena satu simpul maksimal dapat mendominasi 3 simpul dan $|P_{n-2}| = n-2$ mengakibatkan $n \equiv 2$ (mod 3), maka untuk setiap P_{n-2} terdapat $n-4$ simpul yang masing-masing mendominasi 3 simpul dan satu simpul mendominasi 2 simpul. Sehingga banyak simpul yang dapat didominasi adalah $3\left(\lceil\frac{m}{3}\rceil\left(\frac{n-4}{3}\right)\right)+2\left(\lceil\frac{m}{3}\rceil\cdot 1\right)$.

Berikutnya untuk menunjukkan $\frac{m(n-1)}{3}+\lceil\frac{m}{3}\rceil$ adalah bilangan dominasi yang paling minimum dimisalkan $\gamma(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-1)}{3}+\lceil\frac{m}{3}\rceil-1$ dan diasumsikan simpul yang berkurang merupakan simpul anggota $V(P_m)$. Sehingga dari (i.) sampai (iii.) banyak simpul maksimal yang dapat didominasi yaitu

$$4\left(\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil-1\right)+3\left(m-\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)+3\left(\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil\left(\frac{n-4}{3}\right)\right)+2\left(\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil\cdot 1\right)$$

$$= mn-m+2\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil-4 < mn.$$

Jadi, jika diambil sebarang simpul $v_{i,1}$ pada P_m maka kemungkinan simpul yang tidak dapat didominasi oleh simpul manapun elemen S adalah simpul $v_{i,1}$ dan simpul-simpul yang berjarak satu dari $v_{i,1}$ yaitu $v_{i-1,1}, v_{i,2}, v_{i+1,1}$. Karena banyaknya simpul yang terdominasi lebih kecil dari banyaknya simpul pada $P_m \triangleright P_n$, maka $\gamma(P_m \triangleright P_n) \nleq \frac{m(n-1)}{3}+\lceil\frac{m}{3}\rceil-1$. Sehingga terbukti bahwa $\gamma(P_m \triangleright P_n) = \frac{m(n-1)}{3}+\lceil\frac{m}{3}\rceil$.

3. $n \equiv 2$ (mod 3)

Kasus 1: $S \in V(P_m) \cup V(P_n)$

Untuk $n \equiv 2$ (mod 3) pada kasus pertama juga diambil simpul-simpul P_m yang berderajat 3 sebagai elemen himpunan dominasi jarak satu. Karena $\gamma(P_m) = \lceil\frac{m}{3}\rceil$ dan simpul-simpul P_n yang belum terdominasi merupakan simpul-simpul pada $\lceil\frac{m}{3}\rceil$ kali graf Lintasan P_{n-2} dan $m-\lceil\frac{m}{3}\rceil$ kali graf Lintasan P_{n-1} dengan $\gamma(P_{n-1}) = \lceil\frac{n-1}{3}\rceil$ dan $\gamma(P_{n-2}) = \lceil\frac{n-2}{3}\rceil$. Karena $n \in Z^+$ dan $n \equiv 2$ (mod 3), maka dapat ditulis bahwa $\gamma(P_{n-1}) = \frac{n+1}{3}$ dan $\gamma(P_{n-2}) = \frac{n-2}{3}$. Oleh karena itu, banyak simpul S pada $P_m \triangleright P_n$ adalah

$$\begin{aligned}\gamma(P_m \triangleright P_n) &\leq \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil\left(\frac{n-2}{3}\right)+\left(m-\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil\right)\left(\frac{n+1}{3}\right)+\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil \\ &= \frac{m(n+1)}{3}.\end{aligned}$$

Kasus 2: $S \in V(P_n)$

Sama seperti kasus 2 pada $n \equiv 0$ (mod 3) dan $n \equiv 1$ (mod 3), maka $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ dan dapat dituliskan $\gamma(P_n) = \frac{n+1}{3}$. Sehingga bilangan dominasi jarak satu pada $P_m \triangleright P_n$ adalah

$$\begin{aligned}\gamma(P_m \triangleright P_n) &\leq m(\gamma(P_n)) \\ &= \frac{m(n+1)}{3}.\end{aligned}$$

Baik kasus 1 maupun kasus 2 menunjukkan nilai batas atas minimal yang sama, yaitu $\gamma(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n+1)}{3}$, dengan S dapat diambil dari simpul-simpul elemen P_n. Hal ini mengakibatkan pada setiap P_n terdapat $\frac{n-2}{3}$ simpul yang masing-masing dapat medominasi 3 simpul dan satu buah simpul yang mendominasi 2 simpul, karena $n \equiv 2$ (mod 3). Sehingga untuk m buah P_n pada $P_m \triangleright P_n$, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $3\left(m\left(\frac{n-2}{3}\right)\right) + 2(m \cdot 1)$.

Andaikan $\gamma(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n+1)}{3} - 1$, misalkan diambil sebuah simpul pada P_n yang seharusnya dapat mendominasi maksimal 3 simpul sedemikian bukan elemen S. Maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah

$$3\left(m\left(\frac{n-2}{3} - 1\right)\right) + 2(m \cdot 1) = mn - 3 < mn.$$

Jika diambil sebarang simpul pada $P_{i,n}$ misalkan $v_{i,n-1}$ bukan elemen S, maka setiap simpul S kemungkinan tidak dapat mendominasi simpul-simpul $v_{i,n}$,$v_{i,n-1}$ dan $v_{i,n-2}$. Pernyataan di atas juga menunjukkan bahwa banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyaknya simpul pada $P_m \triangleright P_n$. Sehingga $\gamma(P_m \triangleright P_n) \nleq \frac{m(n+1)}{3} - 1$ dan terbukti bahwa $\gamma(P_m \triangleright P_n) = \frac{m(n+1)}{3}$.

Pada pembuktian di atas telah ditunjukkan bahwa bilangan dominasi untuk $n \equiv 0$ (mod 3) dan $n \equiv 2$ (mod 3) masing masing $\gamma(P_m \triangleright P_n) = \frac{mn}{3}$ dan $\gamma(P_m \triangleright P_n) = \frac{m(n+1)}{3}$. Kedua pernyataan tersebut dapat digabung sedemikian $\gamma(P_m \triangleright P_n) = m\lceil \frac{n}{3} \rceil$. Sedangkan untuk $n \equiv 1$ (mod 3), $\gamma(P_m \triangleright P_n) = \frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil = m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil$. $\square$

Graf selanjutnya yang akan dicari bilangan dominasi jarak satunya adalah graf $P_m \triangleright C_n$. Graf $P_m \triangleright C_n$ pasti membentuk graf yang isomorfis walaupun diambil sebarang simpul dari graf C_n untuk dilekatkan pada graf P_m. Graf $P_m \triangleright C_n$ dapat dilihat pada Gambar 4.2.

Teorema 4.3. *Diberikan graf lintasan P_m dan graf lingkaran C_n dengan masing-masing ordernya m dan n untuk $m \geq 2, n \geq 3$. Maka bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi comb $P_m \triangleright C_n$ adalah*

$$\gamma(P_m \triangleright C_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{3} \rceil & \textit{jika } n \equiv 0 \textit{ (mod 3) dan } n \equiv 2 \textit{ (mod 3)} \\ m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil & \textit{jika } n \equiv 1 \textit{ (mod 3)} \end{cases}$$

Bukti: Misalkan $V(P_m \triangleright C_n) = \{V_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ dan $|P_m \triangleright C_n| = mn$. Untuk menunjukkan banyak simpul minimal yang menjadi elemen himpunan dominasi jarak satu pada graf $P_m \triangleright C_n$, maka untuk masing-masing nilai n akan dibagi menjadi dua kasus. Kasus pertama jika simpul-simpul S merupakan elemen simpul P_m dan C_n, sedangkan kasus kedua jika S hanya diambil dari simpul-simpul C_n.

1. $n \equiv 0$ (mod 3)

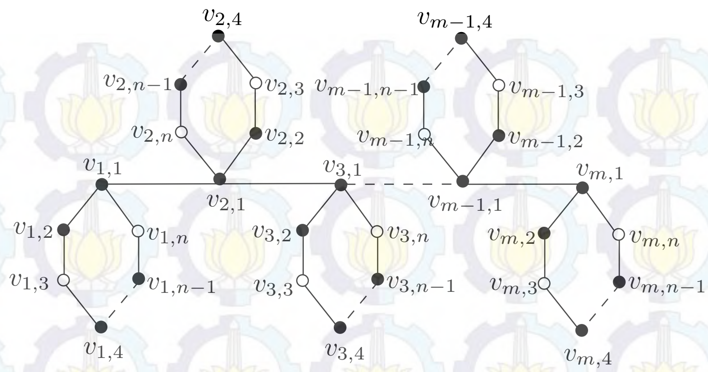
   Kasus 1: $S \in V(P_m) \cup V(C_n)$

   Sama seperti Teorema sebelumnya karena $\gamma(P_m) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$, maka ambil $\lceil \frac{m}{3} \rceil$ simpul P_m yang berderajat 4 sebagai elemen himpunan dominasi jarak satu. Sehingga untuk setiap $v_{i,1}$ dan $deg(v_{i,1}) = 4$, maka $v_{i,1}$ dapat menjangkau maksimal 5 simpul, diantaranya $v_{i,1}, v_{i-1,1}, v_{i+1,1}, v_{i,2}$ dan $v_{i,n}$ seperti yang ditunjukkan Gambar 4.2. Simpul-simpul C_n yang belum terdominasi merupakan simpul-simpul pada $\lceil \frac{m}{3} \rceil$ kali graf Lingkaran C_{n-3} dan $m - \lceil \frac{m}{3} \rceil$ kali graf Lingkaran C_{n-1}. Dengan demikian, dapat ditentukan bahwa $\gamma(C_{n-1}) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$ dan $\gamma(C_{n-3}) = \lceil \frac{n-3}{3} \rceil$. Karena $n \in Z^+$ dan $n \equiv 0$ (mod 3), maka dapat ditulis bahwa $\gamma(C_{n-1}) = \frac{n}{3}$ dan $\gamma(C_{n-3}) = \frac{n-3}{3}$. Sehingga banyak himpunan dominasi jarak satu pada $P_m \triangleright C_n$ adalah

   $$\gamma(P_m \triangleright C_n) \leq \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \left(\frac{n-3}{3} \right) + \left(m - \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \right) \left(\frac{n}{3} \right) + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil = \frac{mn}{3}.$$

   Kasus 2: $S \in V(C_n)$

   Karena graf $P_m \triangleright C_n$ diperoleh dengan melekatkan salah satu simpul ujung C_n pada setiap simpul P_m, maka dapat dikatakan bahwa graf $P_m \triangleright C_n$ merupakan



Gambar 4.2: Graf $P_m \triangleright C_n$ untuk $n \equiv 0$ (mod 3) dengan Simpul-Simpul Warna Putih Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Jarak Satu

graf yang terdiri dari m kali Lingkaran C_n. Karena $\gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ dengan $n \equiv 0$ (mod 3) mengakibatkan $\gamma(C_n) = \frac{n}{3}$, maka

$$\begin{aligned} \gamma(P_m \triangleright C_n) &\leq m(\gamma(C_n)) \\ &= \frac{mn}{3}. \end{aligned}$$

Baik kasus 1 maupun kasus 2 menunjukkan bahwa $\gamma(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{mn}{3}$, sehingga simpul-simpul elemen S dapat diambil dari $V(C_n)$ atau pun $S \in V(P_m) \cup V(C_n)$. Misalkan S diambil dari $V(C_n)$ seperti pada kasus 2. Karena $n \equiv 0$ (mod 3), maka setiap simpul maksimal dapat mendominasi 3 simpul.

Untuk membuktikan apakah $\frac{mn}{3}$ merupakan bilangan dominasi yang minimum, dimisalkan $\gamma(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{mn}{3} - 1$. Sehingga banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah

$$\left(\frac{mn}{3} - 1\right) 3 = mn - 3 < mn.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul atau order pada $P_m \triangleright C_n$, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sebagai contoh perhatikan Gambar 4.2, tanpa mengurangi perumuman jika $v_{m,n}$ bukan elemen dari S maka simpul $v_{m,1}, v_{m,n},$ dan $v_{m,n-1}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen S. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma(P_m \triangleright C_n) \not\leq \frac{mn}{3} - 1$ dan $\frac{mn}{3}$ merupakan bilangan dominasi minimum pada $P_m \triangleright C_n$. Sehingga terbukti bahwa $\gamma(P_m \triangleright C_n) = \frac{mn}{3}$.

2. $n \equiv 1 \pmod 3$

Kasus 1: $S \in V(P_m) \cup V(C_n)$

Sama seperti pembuktian sebelumnya, $\gamma(P_m) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$ diambil sebagai simpul elemen S dan banyak simpul maksimal yang dapat didominasi oleh $\lceil \frac{m}{3} \rceil$ simpul adalah $5\lceil \frac{m}{3} \rceil$ simpul, karena satu simpul S pada P_m dapat mendominasi maksimal 5 simpul. Simpul-simpul C_n yang belum terdominasi merupakan simpul-simpul pada $\lceil \frac{m}{3} \rceil$ kali graf Lingkaran C_{n-3} dan $m - \lceil \frac{m}{3} \rceil$ kali graf Lingkaran C_{n-1}. Karena $\gamma(C_{n-3}) = \lceil \frac{n-3}{3} \rceil$ dan $\gamma(C_{n-1}) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$. Sehingga dapat ditulis bahwa $\gamma(C_{n-1}) = \frac{n-1}{3}$ dan $\gamma(C_{n-3}) = \frac{n-1}{3}$, karena $n \in Z^+$ dan $n \equiv 1 \pmod 3$. Dengan demikian, banyak himpunan dominasi jarak satu pada $P_m \triangleright C_n$ jika $S \in V(P_m) \cup V(C_n)$ adalah

$$\begin{aligned} \gamma(P_m \triangleright C_n) &\leq \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \left(\frac{n-1}{3} \right) + \left(m - \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \right) \left(\frac{n-1}{3} \right) + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \\ &= \frac{m(n-1)}{3} + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil . \end{aligned}$$

Kasus 2: $S \in V(C_n)$

Sama seperti kasus 2 untuk $n \equiv 0 \pmod 3$, maka $\gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ dapat dulis $\gamma(C_n) = \frac{n+2}{3}$, sehingga

$$\begin{aligned} \gamma(P_m \triangleright C_n) &\leq m(\gamma(C_n)) \\ &= \frac{m(n+2)}{3}. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, batas atas minimal bilangan dominasi jarak satu pada $P_m \triangleright C_n$ yang diambil adalah $\gamma(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$. Sehingga simpul-simpul S diambil dari simpul-simpul $V(P_m) \cup V(C_n)$.

Banyaknya simpul maksimal yang dapat didominasi oleh masing-masing simpul adalah sebagai berikut.

(i.) Untuk $S \in P_m$

Karena satu simpul S pada P_m maksimal dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah $5\lceil \frac{m}{3} \rceil$.

(ii.) Untuk $S \in C_{n-1}$

Karena satu simpul S pada C_{n-1} maksimal dapat mendominasi 3 simpul dan $n \equiv 1 \pmod 3$, maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah $3\left(m - \lceil \frac{m}{3} \rceil\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)$.

(iii.) Untuk $S \in C_{n-3}$

Karena satu simpul maksimal dapat mendominasi 3 simpul dan $|C_{n-3}| = n-3$ mengakibatkan $n \equiv 1$ (mod 3), maka untuk setiap C_{n-3} terdapat $n-4$ simpul yang masing-masing mendominasi 3 simpul dan satu simpul mendominasi 1 simpul. Sehingga banyak simpul yang dapat didominasi adalah $3\left(\lceil \frac{m}{3} \rceil \left(\frac{n-4}{3}\right)\right) + 2\left(\lceil \frac{m}{3} \rceil \cdot 1\right)$.

Andaikan $\frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$ bukan bilangan dominasi yang minimum, misalkan $\gamma(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1$ dan diasumsikan simpul yang berkurang merupakan simpul anggota $V(P_m)$. Sehingga banyak simpul maksimal yang dapat didominasi sesuai (i.) sampai (iii.) adalah

$$4\left(\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - 1\right) + 3\left(m - \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil\right)\left(\frac{n-1}{3}\right) + 3\left(\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \left(\frac{n-4}{3}\right)\right) + 2\left(\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \cdot 1\right)$$

$$= mn - m + 2\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - 4 < mn.$$

Jadi, jika diambil sebarang simpul $v_{i,1}$ pada P_m maka kemungkinan simpul yang tidak didominasi oleh simpul manapun elemen S adalah simpul $v_{i,1}$ dan simpul-simpul yang berjarak satu dari $v_{i,1}$ yaitu $v_{i-1,1}, v_{i,2}, v_{i,n}, v_{i+1,1}$. Karena banyaknya simpul yang terdominasi lebih kecil dari banyaknya simpul pada $P_m \triangleright C_n$, maka $\gamma(P_m \triangleright C_n) \nleq \frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1$. Sehingga terbukti bahwa $\gamma(P_m \triangleright C_n) = \frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$.

3. $n \equiv 2$ (mod 3)

Kasus 1: $S \in V(P_m) \cup V(C_n)$

Untuk $n \equiv 2$ (mod 3) pada kasus pertama juga diambil simpul-simpul P_m yang berderajat 3 sebagai elemen himpunan dominasi jarak satu. Karena $\gamma = \lceil \frac{m}{3} \rceil$ dan simpul-simpul C_n yang belum terdominasi terdiri dari $\lceil \frac{m}{3} \rceil$ kali C_{n-3} dan $m - \lceil \frac{m}{3} \rceil$ kali C_{n-1} dengan $\gamma(C_{n-1}) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$ dan $\gamma(C_{n-3}) = \lceil \frac{n-3}{3} \rceil$. Karena $n \in Z^+$ dan $n \equiv 2$ (mod 3), maka dapat ditulis bahwa $\gamma(C_{n-1}) = \frac{n+1}{3}$ dan $\gamma(C_{n-3}) = \frac{n-2}{3}$. Oleh karena itu, banyak simpul S pada $P_m \triangleright C_n$ adalah

$$\begin{aligned}\gamma(P_m \triangleright C_n) &\leq \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \left(\frac{n-2}{3}\right) + \left(m - \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil\right)\left(\frac{n+1}{3}\right) + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \\ &= \frac{m(n+1)}{3}.\end{aligned}$$

Kasus 2: $S \in V(C_n)$

Sama seperti kasus 2 pada $n \equiv 0$ (mod 3) dan $n \equiv 1$ (mod 3), maka $\gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ mengakibatkan $\gamma(C_n) = \frac{n+1}{3}$, karena $n \in Z^+$ dan $S \in V(P_m) \cup V(C_n)$. Dengan demikian, bilangan dominasi jarak satu pada $P_m \triangleright C_n$ adalah

$$\begin{aligned} \gamma(P_m \triangleright C_n) &\leq m(\gamma(C_n)) \\ &= \frac{m(n+1)}{3}. \end{aligned}$$

Dari kasus 1 dan 2, dapat dilihat bahwa $\gamma(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{m(n+1)}{3}$, yaitu S dapat diambil dari simpul-simpul elemen C_n maupun $C_n \cup P_m$. Misalkan S diambil seperti pada kasus 2, hal ini mengakibatkan pada setiap C_n terdapat $\frac{n-2}{3}$ simpul yang masing-masing dapat mendominasi 3 simpul dan satu buah simpul yang mendominasi 2 simpul, karena $n \equiv 2$ (mod 3). Sehingga jika terdapat m buah C_n, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $3\left(m\left(\frac{n-2}{3}\right)\right) + 2(m \cdot 1)$.

Andaikan $\gamma(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{m(n+1)}{3} - 1$, misalkan diambil sebuah simpul yang seharusnya dapat mendominasi maksimal 3 simpul sedemikian bukan elemen S. Maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah

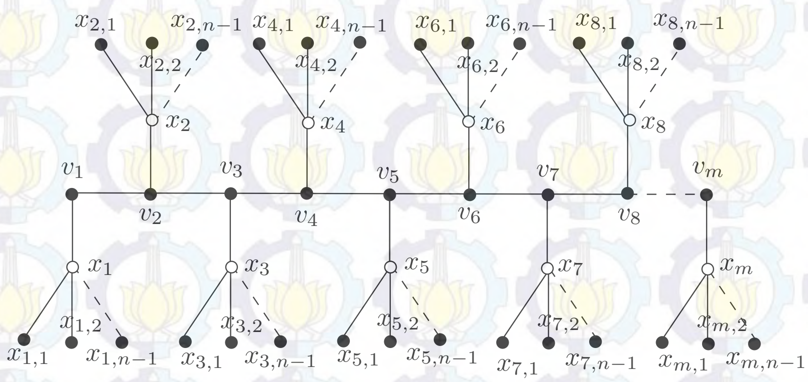
$$3\left(m\left(\frac{n-2}{3} - 1\right)\right) + 2(m \cdot 1) = mn - 3 < mn.$$

Jika diambil sebarang simpul pada $C_{i,n}$ misalkan $v_{i,n-1}$ bukan elemen S, maka setiap simpul S kemungkinan tidak dapat mendominasi simpul-simpul $v_{i,n}$,$v_{i,n-1}$ dan $v_{i,n-2}$. Pernyataan di atas juga menunjukkan bahwa banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyaknya simpul pada $P_m \triangleright C_n$. Sehingga $\gamma(P_m \triangleright C_n) \nleq \frac{m(n+1)}{3} - 1$ dan terbukti bahwa $\gamma(P_m \triangleright C_n) = \frac{m(n+1)}{3}$.

Berdasarkan ketiga pembuktian di atas diketahui bahwa $\gamma(P_m \triangleright C_n) = \frac{mn}{3}$ untuk $n \equiv 0$ (mod 3) dan $\gamma(P_m \triangleright C_n) = \frac{m(n+1)}{3}$ untuk $n \equiv 2$ (mod 3). Bilangan dominasi pada kedua nilai n tersebut dapat digabung sedemikian $\gamma(P_m \triangleright C_n) = m\lceil \frac{n}{3} \rceil$. Sedangkan $\gamma(P_m \triangleright C_n) = \frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$ untuk $n \equiv 1$ (mod 3) dapat ditulis $\gamma(P_m \triangleright C_n) = m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil$. $\square$

Teorema berikutnya menunjukkan bilangan dominasi jarak satu pada graf $P_m \triangleright S_n$. Pada graf tersebut, simpul graf bintang yang dilekatkan pada Lintasan adalah salah satu *pendant* dari graf Bintang, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.3. Sedangkan simpul-simpul yang berwarna putih menunjukkan simpul-simpul elemen himpunan dominasi jarak satu.

Teorema 4.4. *Diberikan graf lintasan P_m dan graf bintang S_n dengan masing-masing ordernya m dan n untuk $m \geq 2, n \geq 3$. Maka bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi comb $P_m \triangleright S_n$ adalah $\gamma(P_m \triangleright S_n) = m$.*



Gambar 4.3: Graf $P_m \triangleright S_n$ dengan Simpul Pusat S_n Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Jarak Satu

Bukti: Misalkan $V(P_m) = \{v_i | 1 \leq i \leq m\}$ dan $V(S_n) = \{x, x_j | 1 \leq j \leq n\}$. Karena salah satu *pendant* dari graf S_n dilekatkan pada P_m, maka dapat dituliskan himpunan simpul $V(P_m \triangleright S_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \cup \{x_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n-1\}$ dan banyak simpul pada graf $P_m \triangleright S_n$ adalah $m(n+1)$. Banyak simpul elemen himpunan dominasi pada suatu graf akan minimum jika diambil simpul-simpul yang berderajat maksimum. Karena derajat terbesar dari $P_m \triangleright S_n$ merupakan $deg(x_i) = n$, maka ambil simpul x_i sebagai simpul anggota S. Maka setiap simpul x_i dapat mendominasi $n+1$ simpul, karena untuk setiap $v_i, x_i, x_{i,j} \in V(P_m \triangleright S_n), d(x_i, v_i) = d(x_i, x_{i,j}) = 1$. Karena terdapat m simpul yang berderajat n, maka simpul yang terdominasi maksimal sebanyak $m(n+1)$. Sehingga dapat dikatakan bahwa bilangan dominasi pada $P_m \triangleright S_n$ adalah $\gamma(P_m \triangleright S_n) \leq m$.

Andaikan $\gamma(P_m \triangleright S_n) \leq m-1$, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $(m-1)(n+1)$. Karena $(m-1)(n+1) \leq (m)(n+1)$, maka pastilah terdapat beberapa simpul $P_m \triangleright S_n$ yang tidak dapat didominasi oleh S. Hal ini menunjukkan bahwa $|S| \nleq m-1$. Dengan demikian, m adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi pada $P_m \triangleright S_n$, sehingga $\gamma(P_m \triangleright S_n) = m$. $\square$

Dalam Teorema 4.4, graf Bintang S_n yang dioperasikan dengan graf Lintasan P_m dibatasi untuk $n \geq 3$. Hal ini dikarenakan graf Bintang dengan satu simpul daun jika dioperasikan menggunakan operasi *comb* dengan graf Lintasan P_m maka akan isomorfis dengan graf $P_m \odot G_1$, yaitu graf Lintasan P_m yang dikoronakan dengan graf yang terdiri dari satu simpul atau graf trivial. Oleh karena itu, bilangan dominasi jarak satunya dapat dilihat pada Teorema 4.1. Sedangkan untuk graf Bintang S_2 yang dioperasikan menggunakan operasi *comb* dengan ketentuan yang sama yaitu salah satu simpul *pendant* yang dilekatkan pada simpul-simpul P_m, maka graf tersebut isomorfis dengan graf $P_m \triangleright P_3$ seperti pada Teorema 4.2.

Teorema 4.5. *Diberikan graf lingkaran C_n dan graf lintasan P_m dengan masing-masing ordernya n dan m untuk $n \geq 3, m \geq 2$. Maka bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi comb $C_n \triangleright P_m$ adalah*

$$\gamma(C_n \triangleright P_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{3} \rceil & \textit{jika } m \equiv 0 \textit{ (mod 3) dan } m \equiv 2 \textit{ (mod 3)} \\ n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \textit{jika } m \equiv 1 \textit{ (mod 3)} \end{cases}$$

Bukti: Misalkan $V(C_n \triangleright P_m) = \{V_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan $|C_n \triangleright P_m| = nm$. Sama seperti pembuktian-pembuktian sebelumnya, himpunan dominasi pada graf $C_n \triangleright P_m$ dapat berupa simpul-simpul pada P_m dengan tanpa simpul pada C_n atau pun gabungan keduanya. Sehingga untuk menunjukkan banyak simpul minimal yang menjadi elemen himpunan dominasi jarak satu pada graf $C_n \triangleright P_m$, maka untuk masing-masing nilai m akan dibagi menjadi dua kasus. Kasus pertama jika simpul-simpul S merupakan elemen simpul C_n dan P_m, sedangkan kasus kedua jika S hanya diambil dari simpul-simpul P_m.

1. $m \equiv 0$ (mod 3)
   Kasus 1: $S \in V(C_n) \cup V(P_m)$
   Ambil simpul-simpul $S \in V(C_n)$, karena graf Lingkaran C_n merupakan graf reguler 2, dan setiap simpul C_n pada graf $C_n \triangleright P_m$ terhubung dengan simpul ujung P_m, maka untuk setiap $v_{i,1} \in C_n$ $deg(v_{i,1}) = 3$. Berdasarkan Goddard dan Henning (2006) maka bilangan dominasi jarak satu pada C_n adalah $\gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Sehingga untuk setiap $v_{i,1} \in S$, $v_{i,1}$ dapat menjangkau maksimal 4 simpul, diantaranya $v_{i,1}, v_{i-1,1}, v_{i+1,1}$ dan $v_{i,2}$. Simpul-simpul P_m yang belum terdominasi merupakan simpul-simpul pada $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ kali graf Lintasan P_{m-2} dan $n - \lceil \frac{n}{3} \rceil$ kali graf Lintasan P_{m-1}. Dengan demikian

dapat ditentukan bahwa $\gamma(P_{m-1}) = \lceil \frac{m-1}{3} \rceil$ dan $\gamma(P_{m-2}) = \lceil \frac{m-2}{3} \rceil$. Karena $m \in Z^+$ dan $m \equiv 0$ (mod 3), maka dapat ditulis bahwa $\gamma(P_{m-1}) = \frac{m}{3}$ dan $\gamma(P_{m-2}) = \frac{m}{3}$. Sehingga banyak himpunan dominasi jarak satu pada $C_n \triangleright P_m$ adalah

$$\gamma(C_n \triangleright P_m) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \left(\frac{m}{3} \right) + \left(n - \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \right) \left(\frac{m}{3} \right) + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil = \frac{nm}{3} + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

Kasus 2: $S \in V(P_m)$

Karena graf $C_n \triangleright P_m$ diperoleh dengan melekatkan salah satu simpul ujung P_m pada setiap simpul C_n, maka dapat dikatakan bahwa graf $C_n \triangleright P_m$ merupakan graf yang terdiri dari n kali Lintasan P_m. Karena $\gamma(P_m) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$ dan $m \in Z^+$ dengan $m \equiv 0$ (mod 3), maka dapat dituliskan bahwa $\gamma(P_m) = \frac{m}{3}$

$$\begin{aligned} \gamma(C_n \triangleright P_m) &\leq n(\gamma(P_m)) \\ &= \frac{nm}{3}. \end{aligned}$$

Dari kasus 1 dan 2 dapat dilihat bahwa $\frac{nm}{3} \leq \frac{nm}{3} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$, maka bilangan dominasi pada $C_n \triangleright P_m$ lebih minimal jika dipilih simpul-simpul elemen S pada $V(P_m)$. Dengan demikian, diambil batas atas bilangan dominasi jarak satu pada $C_n \triangleright P_m$ yaitu $\gamma(C_n \triangleright P_m) \leq \frac{nm}{3}$.

Untuk mengetahui apakah $\frac{nm}{3}$ merupakan bilangan dominasi yang minimum, dimisalkan $\gamma(C_n \triangleright P_m) \leq \frac{nm}{3} - 1$. Karena setiap simpul pada S maksimal dapat mendominasi 3 simpul dan $m \equiv 0$ (mod 3) , maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah

$$\left(\frac{nm}{3} - 1 \right) 3 = nm - 3 < nm.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul atau order pada $C_n \triangleright P_m$, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sebagai contoh misalkan $v_{i,2}$ bukan elemen dari S maka simpul $v_{i,3}, v_{i,2}$, dan $v_{i,1}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen S. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma(C_n \triangleright P_m) \nleq \frac{nm}{3} - 1$ dan $\frac{nm}{3}$ merupakan bilangan dominasi minimum pada $C_n \triangleright P_m$. Sehingga terbukti bahwa $\gamma(C_n \triangleright P_m) = \frac{nm}{3}$.

2. $n \equiv 1$ (mod 3)

Kasus 1: $S \in V(C_n) \cup V(P_m)$

Sama seperti pembuktian sebelumnya, jika simpul-simpul C_n diambil sebagai simpul elemen S, yaitu simpul-simpul dengan derajat sama dengan 3 dan $\gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi oleh $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ simpul adalah $4\lceil \frac{n}{3} \rceil$ simpul. Simpul-simpul P_m yang belum terdominasi merupakan simpul-simpul pada $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ kali graf Lintasan P_{m-2} dan $n - \lceil \frac{n}{3} \rceil$ kali graf Lintasan P_{m-1}. Sehingga, dapat ditentukan bahwa $\gamma(P_{m-1}) = \lceil \frac{m-1}{3} \rceil$ dan $\gamma(P_{m-2}) = \lceil \frac{m-2}{3} \rceil$. Karena $m \in Z^+$ dan $m \equiv 1$ (mod 3), maka dapat ditulis bahwa $\gamma(P_{m-1}) = \gamma(P_{m-2}) = \frac{m-1}{3}$. Dengan demikian, banyak himpunan dominasi jarak satu pada $C_n \triangleright P_m$ jika $S \in V(C_n) \cup V(P_m)$ adalah

$$\begin{aligned} \gamma(C_n \triangleright P_m) &\leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \left(\frac{m-1}{3} \right) + \left(n - \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \right) \left(\frac{m-1}{3} \right) + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \\ &= \frac{n(m-1)}{3} + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil . \end{aligned}$$

Kasus 2: $S \in V(P_m)$

Karena $m \in Z^+$ dengan $m \equiv 1$ (mod 3) maka $\gamma(P_m) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$ dapat ditulis $\gamma(P_m) = \frac{m+2}{3}$. Graf $C_n \triangleright P_m$ merupakan graf yang terdiri dari n buah Lintasan P_m, sehingga

$$\begin{aligned} \gamma(C_n \triangleright P_m) &\leq n(\gamma(P_m)) \\ &= \frac{n(m+2)}{3}. \end{aligned}$$

Dari kasus 1 dan 2 dapat dilihat bahwa $\frac{n(m-1)}{3} + \lceil \frac{n}{3} \rceil \leq \frac{n(m+2)}{3}$. Dengan demikian, batas atas minimal bilangan dominasi jarak satu pada $P_m \triangleright P_n$ yang diambil adalah $\gamma(C_n \triangleright P_m) \leq \frac{n(m-1)}{3} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Untuk menunjukkan batas bawah, terlebih dahulu akan dijelaskan banyaknya simpul maksimal yang dapat didominasi oleh masing-masing simpul seperti berikut ini.

(i.) Untuk $S \in C_n$

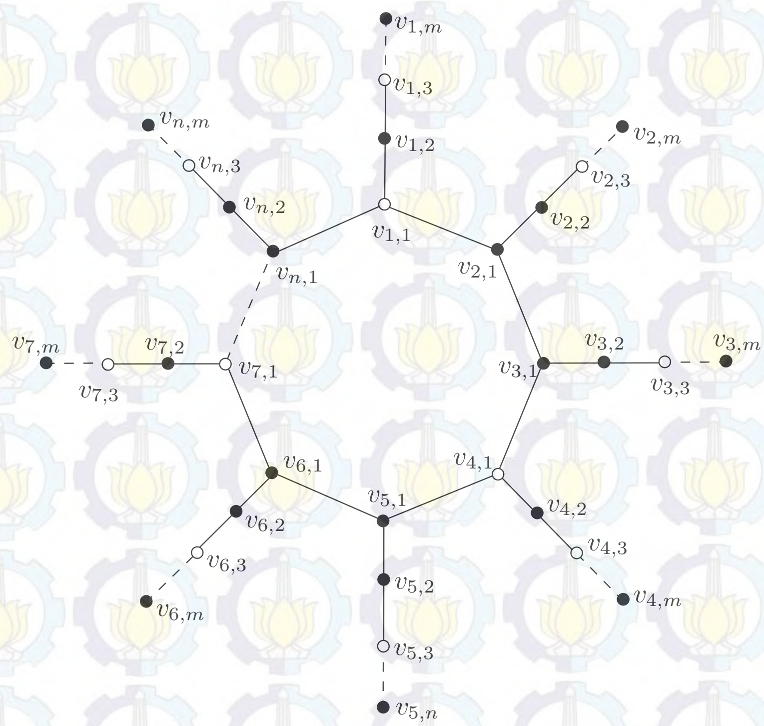
Karena satu simpul S pada C_n maksimal dapat mendominasi 4 simpul, maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah $4(\lceil \frac{n}{3} \rceil)$.

(ii.) Untuk $S \in P_{m-1}$

Karena satu simpul S pada P_{m-1} maksimal dapat mendominasi 3 simpul dan $m \equiv 1 \pmod 3$, maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah $3\left(n - \lceil \frac{n}{3} \rceil\right)\left(\frac{m-1}{3}\right)$.

(iii.) Untuk $S \in P_{m-2}$

Karena satu simpul maksimal dapat mendominasi 3 simpul dan $|P_{m-2}| = m-2$ mengakibatkan $n \equiv 2 \pmod 3$, maka untuk setiap P_{m-2} terdapat $m-4$ simpul yang masing-masing mendominasi 3 simpul dan satu simpul mendominasi 2 simpul. Sehingga banyak simpul yang dapat didominasi adalah $3\left(\lceil \frac{n}{3} \rceil \left(\frac{m-4}{3}\right)\right) + 2\left(\lceil \frac{n}{3} \rceil \cdot 1\right)$.



Gambar 4.4: Graf $C_n \triangleright P_m$ untuk $n \equiv 1 \pmod 3$ dengan Simpul-Simpul Warna Putih Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Jarak Satu

Berikutnya untuk menunjukkan $\frac{n(m-1)}{3} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$ adalah bilangan dominasi yang paling minimum dimisalkan $\gamma(C_n \triangleright P_m) \leq \frac{n(m-1)}{3} + \lceil \frac{n}{3} \rceil - 1$. Andaikan simpul yang berkurang merupakan simpul anggota $V(C_n)$. Sehingga dari (i.) sampai (iii.) banyak simpul maksimal yang dapat didominasi yaitu

$$4\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1\right) + 3\left(n - \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right)\left(\frac{m-1}{3}\right) + 3\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \left(\frac{m-4}{3}\right)\right) + 2\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \cdot 1\right)$$

$$= nm - n + 2\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 4 < nm.$$

Karena banyaknya simpul yang terdominasi lebih kecil dari banyaknya simpul pada $C_n \triangleright P_m$, maka $\gamma(C_n \triangleright P_m) \nleq \frac{n(m-1)}{3} + \lceil \frac{n}{3} \rceil - 1$. Sehingga terbukti bahwa $\gamma(C_n \triangleright P_m) = \frac{n(m-1)}{3} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Perhatikan Gambar 4.4, jika diambil sebarang simpul $v_{i,1}$ pada C_n maka kemungkinan simpul yang tidak dapat didominasi oleh simpul manapun elemen S adalah simpul $v_{i,1}$ dan simpul-simpul yang berjarak satu dari $v_{i,1}$ yaitu $v_{i-1,1}, v_{i,2}, v_{i+1,1}$.

3. $m \equiv 2$ (mod 3)

Kasus 1: Jika $S \in V(C_n) \cup V(P_m)$

Untuk $m \equiv 2$ (mod 3) pada kasus pertama juga diambil simpul-simpul C_n yang berderajat 3 sebagai elemen himpunan dominasi jarak satu. Karena $\gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ dan simpul-simpul P_m yang belum terdominasi merupakan simpul-simpul pada $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ kali graf Lintasan P_{m-2} dan $n - \lceil \frac{n}{3} \rceil$ kali graf Lintasan P_{m-1} dengan $\gamma(P_{m-1}) = \lceil \frac{m-1}{3} \rceil$ dan $\gamma(P_{m-2}) = \lceil \frac{m-2}{3} \rceil$. Karena $m \in Z^+$ dan $m \equiv 2$ (mod 3), maka dapat ditulis bahwa $\gamma(P_{m-1}) = \frac{m+1}{3}$ dan $\gamma(P_{m-2}) = \frac{m-2}{3}$. Dengan demikian, banyak simpul S pada $C_n \triangleright P_m$ adalah

$$\begin{aligned} \gamma(C_n \triangleright P_m) &\leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \left(\frac{m-2}{3} \right) + \left(n - \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \right) \left(\frac{m+1}{3} \right) + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \\ &= \frac{n(m+1)}{3}. \end{aligned}$$

Kasus 2: $S \in V(P_m)$

Untuk setiap Lintasan P_m diketahui bahwa $\gamma(P_m) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$. Karena $m \in Z^+$ dan $m \equiv 2$ (mod 3), maka dapat ditulis bahwa $\gamma(P_m) = \frac{m+1}{3}$. sehingga bilangan dominasi jarak satu pada $C_n \triangleright P_m$ dapat dinyatakan

$$\begin{aligned} \gamma(C_n \triangleright P_m) &\leq n(\gamma(P_m)) \\ &= \frac{n(m+1)}{3}. \end{aligned}$$

Dari kasus 1 dan 2 dapat diambil batas atas minimal banyaknya S pada $C_n \triangleright P_m$ yaitu $\gamma(C_n \triangleright P_m) \leq \frac{n(m+1)}{3}$. S dapat diambil dari simpul-simpul elemen P_m. Hal ini mengakibatkan pada setiap P_m terdapat $\frac{m-2}{3}$ simpul yang masing-masing dapat medominasi 3 simpul dan satu buah simpul yang mendominasi 2 simpul, karena $m \equiv 2$ (mod 3). Karena terdapat n buah P_m pada $C_n \triangleright P_m$, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $3\left(\frac{n(m-2)}{3}\right) +$

$2(n \cdot 1)$. Jika $\gamma(C_n \triangleright P_m) \nleq \frac{n(m+1)}{3}$, misalkan $\gamma(C_n \triangleright P_m) \leq \frac{n(m+1)}{3} - 1$ dan salah satu simpul pada $V(C_n)$ bukan lagi elemen S. Sehingga banyak simpul maksimal yang dapat didominasi yaitu

$$3\left(\frac{n(m-2)}{3}\right) + 2(n \cdot 1) = nm - 3 < nm.$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyaknya simpul pada $C_n \triangleright P_m$, maka $\gamma(C_n \triangleright P_m) \nleq \frac{n(m+1)}{3} - 1$. Sehingga terbukti bahwa $\gamma(C_n \triangleright P_m) = \frac{n(m+1)}{3}$.

Dalam pembuktian di atas telah ditunjukkan bahwa bilangan dominasi untuk $m \equiv 0 \pmod 3$ dan $m \equiv 2 \pmod 3$ masing-masing $\gamma(C_n \triangleright P_m) = \frac{nm}{3}$ dan $\gamma(C_n \triangleright P_m) = \frac{n(m+1)}{3}$. Kedua pernyataan tersebut dapat digabung sedemikian $\gamma(C_n \triangleright P_m) = n\lceil\frac{m}{3}\rceil$, serta $\gamma(P_m \triangleright P_n) = \frac{n(m-1)}{3} + \lceil\frac{n}{3}\rceil = n\lfloor\frac{m}{3}\rfloor + \lceil\frac{n}{3}\rceil$ untuk $m \equiv 1 \pmod 3$. $\square$

Teorema 4.6. *Diberikan dua buah graf lingkaran C_n dan C_m dengan masing-masing ordernya n dan m untuk $n, m \geq 3$. Maka bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi comb $C_n \triangleright C_m$ adalah*

$$\gamma(C_n \triangleright C_m) = \begin{cases} n\lceil\frac{m}{3}\rceil & \text{jika } m \equiv 0 \text{ (mod 3)}, m \equiv 2 \text{ (mod 3)} \\ n\lfloor\frac{m}{3}\rfloor + \lceil\frac{n}{3}\rceil & \text{jika } m \equiv 1 \text{ (mod 3)} \end{cases}$$

Bukti: Misalkan $V(C_n \triangleright C_m) = \{V_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan $|C_n \triangleright C_m| = nm$. Graf $C_n \triangleright C_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.5. Untuk menunjukkan banyak simpul minimal yang menjadi elemen himpunan dominasi jarak satu pada graf $C_n \triangleright C_m$, maka untuk masing-masing nilai m akan dibagi menjadi dua kasus. Kasus pertama jika simpul-simpul S merupakan elemen simpul C_n dan C_m, sedangkan kasus kedua jika S hanya diambil dari simpul-simpul C_m.

1. $m \equiv 0 \pmod 3$

   Kasus 1: $S \in V(C_n) \cup V(C_m)$

   Karena $\gamma(C_n) = \lceil\frac{n}{3}\rceil$, maka ambil $\lceil\frac{n}{3}\rceil$ simpul C_n yang berderajat 4 sebagai elemen himpunan dominasi jarak satu. Sehingga untuk setiap $v_{i,1}$ dan $deg(v_{i,1}) = 4$, maka $v_{i,1}$ dapat menjangkau maksimal 5 simpul, diantaranya $v_{i,1}, v_{i-1,1}, v_{i+1,1}, v_{i,2}$ dan $v_{i,n}$. Simpul-simpul C_m yang belum terdominasi merupakan simpul-simpul pada $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ kali pada graf Lingkaran C_{m-3} dan $n - \lceil \frac{n}{3} \rceil$ kali graf Lingkaran C_{m-1}. Dengan demikian, dapat ditentukan bahwa $\gamma(C_{m-1}) = \lceil \frac{m-1}{3} \rceil$ dan $\gamma(C_{m-3}) = \lceil \frac{m-3}{3} \rceil$. Karena $m \in Z^+$ dan $m \equiv 0$ (mod 3), maka dapat ditulis bahwa $\gamma(C_{m-1}) = \frac{m}{3}$ dan $\gamma(C_{m-3}) = \frac{m-3}{3}$. Sehingga banyak himpunan dominasi jarak satu pada $C_n \triangleright C_m$ untuk kasus pertama adalah

$$\gamma(C_n \triangleright C_m) \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \left(\frac{m-3}{3} \right) + \left(n - \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \right) \left(\frac{m}{3} \right) + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil = \frac{nm}{3}.$$

Kasus 2: $S \in V(C_m)$

Karena graf $C_n \triangleright C_m$ diperoleh dengan melekatkan salah satu simpul ujung C_m pada setiap simpul C_n, maka dapat dikatakan bahwa graf $C_n \triangleright C_m$ merupakan graf yang terdiri dari n kali Lingkaran C_m. Karena $\gamma(C_m) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$ dengan $m \in Z^+$ dan $m \equiv 0$ (mod 3), maka $\gamma(C_m) = \frac{m}{3}$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} \gamma(C_n \triangleright C_m) &\leq n(\gamma(C_m)) \\ &= \frac{nm}{3}. \end{aligned}$$

Baik kasus 1 maupun kasus 2 menunjukkan bahwa $\gamma(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{nm}{3}$, sehingga simpul-simpul elemen S dapat diambil dari $V(C_m)$ atau pun $S \in V(C_n) \cup V(C_m)$. Misalkan S diambil dari $V(C_m)$ seperti pada kasus 2. Karena $m \equiv 0$ (mod 3), maka setiap simpul maksimal dapat mendominasi 3 simpul. Untuk membuktikan apakah $\frac{nm}{3}$ merupakan bilangan dominasi yang minimum, dimisalkan $\gamma(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{nm}{3} - 1$. Sehingga banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah

$$\left(\frac{nm}{3} - 1 \right) 3 = nm - 3 < mn.$$

Karena banyak simpul yang terdominasi kurang dari banyak simpul atau order pada $C_n \triangleright C_m$, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma(C_n \triangleright C_m) \nleq \frac{nm}{3} - 1$ dan $\frac{nm}{3}$ merupakan bilangan dominasi minimum pada $C_n \triangleright C_m$. Sehingga terbukti bahwa $\gamma(C_n \triangleright C_m) = \frac{nm}{3}$. Sebagai contoh perhatikan Gambar 4.5, jika $v_{n,1}$ bukan elemen dari S maka simpul $v_{n,1}, v_{n,2}, v_{n,m}, v_{n-1,1}$ dan $v_{1,1}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen S.

2. $n \equiv 1 \pmod 3$

Kasus 1: $S \in V(C_n) \cup V(C_m)$

Sama seperti pembuktian sebelumnya, $\gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ diambil sebagai simpul elemen S dan banyak simpul maksimal yang dapat didominasi oleh $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ simpul adalah $5\lceil \frac{n}{3} \rceil$ simpul. Simpul-simpul C_n yang belum terdominasi merupakan simpul-simpul pada $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ kali graf Lingkaran C_{m-3} dan $n - \lceil \frac{n}{3} \rceil$ kali graf Lingkaran C_{m-1}. Karena $\gamma(C_{m-3}) = \lceil \frac{m-3}{3} \rceil$ dan $\gamma(C_{m-1}) = \lceil \frac{m-1}{3} \rceil$. Karena $m \in Z^+$ dan $m \equiv 1 \pmod 3$, maka dapat ditulis bahwa $\gamma(C_{m-1}) = \gamma(C_{m-3}) = \frac{m-1}{3}$. Sehingga banyak himpunan dominasi jarak satu pada $C_n \triangleright C_m$ jika $S \in V(C_n) \cup V(C_m)$ adalah

$$\begin{aligned} \gamma(C_n \triangleright C_m) &\leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \left(\frac{m-1}{3} \right) + \left(n - \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \right) \left(\frac{m-1}{3} \right) + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \\ &= \frac{n(m-1)}{3} + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil . \end{aligned}$$

Kasus 2: $S \in V(C_m)$

Sama seperti kasus 2 untuk $m \equiv 0 \pmod 3$, maka $\gamma(C_m) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$. Karena $m \in Z^+$ dan $m \equiv 1 \pmod 3$, sehingga bilangan dominasi jarak satu pada setiap C_m adalah $\gamma(C_m) = \frac{m+2}{3}$. Dengan demikian, bilangan dominasi jarak satu pada $C_n \triangleright C_m$ atau n buah graf C_m adalah

$$\begin{aligned} \gamma(C_n \triangleright C_m) &\leq n(\gamma(C_m)) \\ &= \frac{n(m+2)}{3}. \end{aligned}$$

Dari kasus 1 dan 2 dapat dilihat bahwa $\frac{n(m-1)}{3} + \lceil \frac{n}{3} \rceil \leq \frac{n(m+2)}{3}$. Dengan demikian, diambil batas atas minimal bilangan dominasi jarak satu pada $C_n \triangleright C_m$ yaitu $\gamma(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{n(m-1)}{3} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$, sehingga simpul-simpul S diambil dari simpul-simpul $V(C_n) \cup V(C_m)$. Banyaknya simpul maksimal yang dapat didominasi oleh masing-masing simpul adalah sebagai berikut.

(i.) Untuk $S \in C_n$

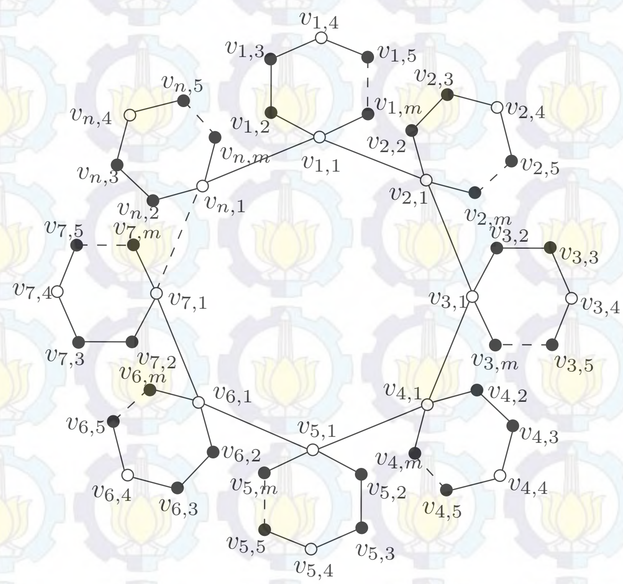
Karena satu simpul S pada C_n maksimal dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah $5\lceil \frac{n}{3} \rceil$.

(ii.) Untuk $S \in C_{m-1}$

Karena satu simpul S pada C_{m-1} maksimal dapat mendominasi 3 simpul dan $m \equiv 1 \pmod 3$, maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah $3\left(n-\lceil\frac{n}{3}\rceil\right)\left(\frac{m-1}{3}\right)$.

(iii.) Untuk $S \in C_{m-3}$

Karena satu simpul maksimal dapat mendominasi 3 simpul dan $|C_{m-3}| = m-3$ mengakibatkan $m \equiv 1$ (mod 3), maka untuk setiap C_{m-3} terdapat $m-4$ simpul yang masing-masing mendominasi 3 simpul dan satu simpul mendominasi 1 simpul. Sehingga banyak simpul yang dapat didominasi adalah $3\left(\lceil\frac{n}{3}\rceil\left(\frac{n-4}{3}\right)\right)+1\left(\lceil\frac{n}{3}\rceil\cdot 1\right)$.



Gambar 4.5: Graf $C_n \triangleright C_m$ untuk $m \equiv 0$ (mod 3) dengan Simpul-Simpul Warna Putih Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Jarak Satu

Andaikan $\frac{n(m-1)}{3}+\lceil\frac{n}{3}\rceil$ bukan bilangan dominasi yang minimum. Misalkan $\gamma(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{n(m-1)}{3}+\lceil\frac{n}{3}\rceil - 1$ dan simpul yang berkurang diambil dari simpul anggota $V(C_n)$. Sehingga banyak simpul maksimal yang dapat didominasi sesuai (i.) sampai (iii.) adalah

$$4\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)+3\left(n-\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil\right)\left(\frac{m-1}{3}\right)+3\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil\left(\frac{m-4}{3}\right)\right)+2\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil\cdot 1\right)$$

$$= nm-n+2\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-4 < nm.$$

Karena banyaknya simpul yang terdominasi lebih kecil dari banyaknya simpul pada $C_n \triangleright C_m$, maka $\gamma(C_n \triangleright C_m) \not\leq \frac{n(m-1)}{3}+\lceil\frac{n}{3}\rceil-1$. Sehingga terbukti bahwa $\gamma(C_n \triangleright C_m) = \frac{n(m-1)}{3}+\lceil\frac{n}{3}\rceil$.

3. $m \equiv 2 \pmod 3$.

Kasus 1: $S \in V(C_n) \cup V(C_m)$

Untuk $m \equiv 2 \pmod 3$ pada kasus pertama juga diambil simpul-simpul C_n yang berderajat 3 sebagai elemen himpunan dominasi jarak satu. Karena $\gamma = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ dan simpul-simpul C_m yang belum terdominasi terdiri dari $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ kali C_{m-3} dan $n - \lceil \frac{n}{3} \rceil$ kali C_{m-1} dengan $\gamma(C_{m-1}) = \lceil \frac{m-1}{3} \rceil$ dan $\gamma(C_{m-3}) = \lceil \frac{m-3}{3} \rceil$. Karena $m \in Z^+$ dan $m \equiv 2 \pmod 3$, maka dapat ditulis bahwa $\gamma(C_{m-1}) = \frac{m+1}{3}$ dan $\gamma(C_{m-3}) = \frac{m-2}{3}$. Dengan demikian, banyak simpul S pada $C_n \triangleright C_m$ adalah

$$\begin{aligned}\gamma(C_n \triangleright C_n) &\leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \left(\frac{m-2}{3} \right) + \left(n - \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \right) \left(\frac{m+1}{3} \right) + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \\ &= \frac{n(m+1)}{3}.\end{aligned}$$

Kasus 2: $S \in V(C_m)$

Karena $\gamma(C_m) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$ dan $m \in Z^+$ dengan $m \equiv 2 \pmod 3$, sehingga bilangan dominasi jarak satu pada setiap C_m dapat ditulis $\gamma(C_m) = \frac{m+1}{3}$. Oleh karena itu, bilangan dominasi jarak satu pada graf $C_n \triangleright C_m$ adalah

$$\begin{aligned}\gamma(C_n \triangleright C_m) &\leq n(\gamma(C_m)) \\ &= \frac{n(m+1)}{3}.\end{aligned}$$

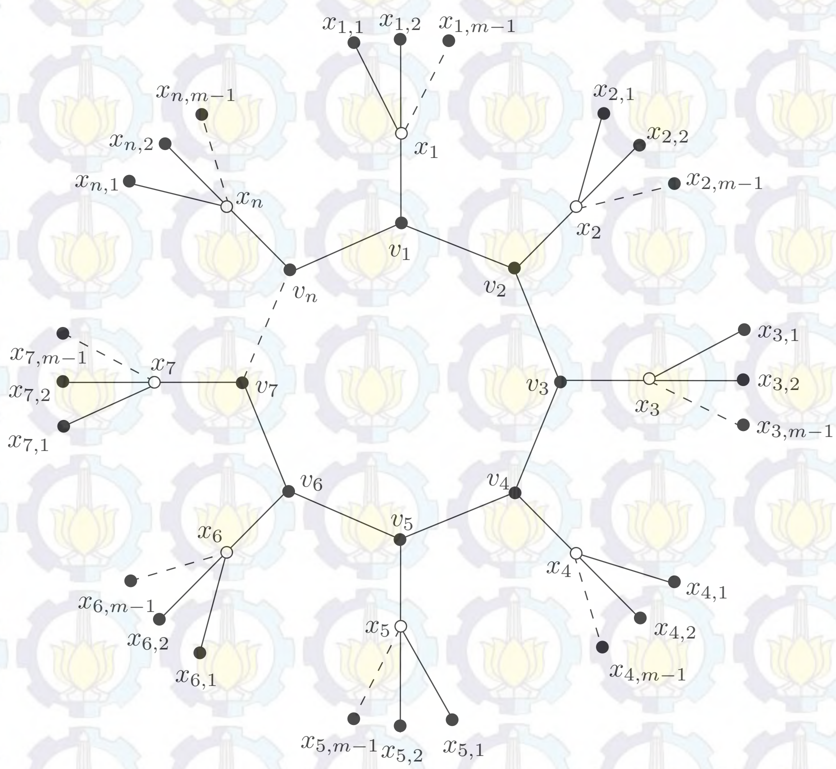
Dari kasus 1 dan 2, dapat dilihat bahwa $\gamma(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{n(m+1)}{3}$, yaitu S dapat diambil dari simpul-simpul elemen $V(C_m)$ maupun $V(C_m) \cup V(C_n)$. Misalkan S diambil seperti pada kasus 2, hal ini mengakibatkan pada setiap C_m terdapat $\frac{m-2}{3}$ simpul yang masing-masing dapat medominasi 3 simpul dan satu buah simpul yang mendominasi 2 simpul, karena $m \equiv 2 \pmod 3$. Sehingga jika terdapat n buah C_m, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $3 \left(n \left(\frac{m-2}{3} \right) \right) + 2(n \cdot 1)$.

Jika $\frac{n(m+1)}{3}$ bukan bilangan dominasi yang minimum, dan andaikan $\gamma(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{n(m+1)}{3} - 1$. Sehingga banyak simpul maksimal yang dapat didominasi yaitu

$$3\left(n\left(\frac{m-2}{3}\right) - 1\right) + 2(n \cdot 1) = nm - 3 < nm$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyaknya simpul pada $C_n \triangleright C_m$, maka tidak benar bahwa $\gamma(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{n(m+1)}{3} - 1$. Sehingga terbukti bahwa $\gamma(C_n \triangleright C_m) = \frac{n(m+1)}{3}$.

Ketiga pembuktian di atas menunjukkan bahwa $\gamma(C_n \triangleright C_m) = \frac{nm}{3}$ untuk $m \equiv 0$ (mod 3) dan $\gamma(C_n \triangleright C_m) = \frac{n(m+1)}{3}$ untuk $m \equiv 2$ (mod 3). Bilangan dominasi pada kedua nilai m tersebut dapat digabung sedemikian $\gamma(C_n \triangleright C_m) = n\lceil \frac{m}{3} \rceil$. Sedangkan $\gamma(C_n \triangleright C_m) = \frac{n(m-1)}{3} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$ untuk $m \equiv 1$ (mod 3) dapat ditulis $\gamma(C_n \triangleright C_m) = n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil$. $\square$



Gambar 4.6: Graf $C_n \triangleright S_m$ dengan Simpul Pusat S_m Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Jarak Satu

Teorema 4.7. *Diberikan graf lingkaran C_n dan graf bintang S_m dengan masing-masing ordernya n dan m untuk $n, m \geq 3$. Maka bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi comb $C_n \triangleright S_m$ adalah $\gamma(C_n \triangleright S_m) = n$.*

Bukti: Misalkan $V(C_n) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ dan $V(S_m) = \{x, x_j | 1 \leq j \leq m\}$. Sama seperti graf $P_m \triangleright S_n$ pada Teorema 4.4, karena salah satu *pendant* dari graf S_m dilekatkan pada C_n, sehingga himpunan simpul $V(C_n \triangleright S_m) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cup \{x_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1\}$ dengan $|C_n \triangleright S_m| = n(m+1)$.

Simpul dengan derajat maksimum pada graf $C_n \triangleright S_m$ juga merupakan simpul pusat dari graf bintang S_m, yaitu $deg(x_i) = m$. Ambil simpul x_i dengan derajat m sebagai simpul anggota S. Untuk setiap $v_i, x_i, x_{i,j} \in V(C_n \triangleright S_m), d(x_i, v_i) = d(x_i, x_{i,j}) = 1$, maka x_i dapat mendominasi $m + 1$ simpul. Karena $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, maka banyak simpul yang terdominasi maksimal $n(m + 1)$. Dengan demikian, $|S| = \gamma(C_n \triangleright S_m) \leq n$.

Andaikan $\gamma(C_n \triangleright S_m) \leq n - 1$, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $(n - 1)(m + 1)$. Karena $(n - 1)(m + 1) \leq n(m + 1)$, maka pastilah terdapat beberapa simpul $C_n \triangleright S_m$ yang tidak dapat didominasi oleh S. Oleh karena itu, $|S| \nleq n - 1$. Dengan demikian, n adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi pada $C_n \triangleright S_m$, maka $|S| = \gamma(C_n \triangleright S_m) = n$. □

Graf $C_n \triangleright S_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.6 dengan simpul yang berwarna putih adalah simpul elemen himpunan dominasi jarak satu.

Sebagaimana dalam Teorema 4.4, graf Bintang S_n pada Teorema 4.7 juga dibatasi untuk untuk $n \geq 3$. Karena $C_n \triangleright S_1$ isomorfis dengan $C_n \odot G_1$ dan $C_n \triangleright S_2$ isomorfis dengan $C_n \triangleright P_3$. Sehingga bilangan dominasi jarak satu pada $C_n \triangleright S_n$ untuk $n = 1$ dan $n = 2$ sudah termasuk dalam Teorema 4.1 dan Teorema 4.5.

4.3 Bilangan Dominasi Jarak Dua

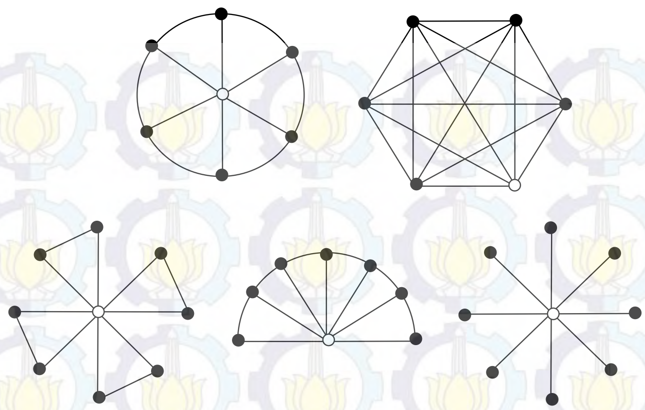
4.3.1 Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf G dengan $diam(G) \leq 2$

Pada bagian ini akan ditunjukkan beberapa observasi mengenai bilangan dominasi jarak dua dari suatu graf dengan diameter maksimal sama dengan dua.

Observasi 4.1. *Jika sebuah graf G yang mempunyai diameter kurang dari atau sama dengan dua, yaitu $diam(G) \leq 2$, maka bilangan dominasi jarak dua dari graf G adalah $\gamma_2(G) = 1$.*

Sesuai definisi diameter graf G yang merupakan jarak terpanjang diantara sebarang dua simpul pada G, maka jika diambil sebarang simpul $v_i \in V(G)$ sebagai simpul elemen himpunan dominasi jarak dua $S_2(G)$ berakibat $d(v_i, V(G)) \leq 2$. Hal ini memenuhi definisi bilangan dominasi jarak dua, sehingga $\gamma_2(G) = 1$.

Contoh graf-graf dengan diameter kurang dari atau sama dengan dua diantaranya graf Lengkap (*Complete*) K_n, graf Roda (*Wheel*) W_n, graf Kipas (*Fan*) F_n, graf Persahabatan (*Friendship*) W_2^m, dan graf Bintang (*Star*) S_n seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.7. Simpul-simpul yang berwarna putih pada graf-graf tersebut merupakan simpul elemen himpunan dominasi jarak dua.



Gambar 4.7: Graf-Graf dengan Himpunan Dominasi Jarak Dua sama dengan Satu

Observasi 4.2. *G_m dan H_n adalah graf terhubung dengan masing-masing ordernya m dan n. Jika diameter dari graf G adalah satu maka $\gamma_2(G_m \odot H_n) = 1$.*

Karena graf G_m dan H_n dioperasikan menggunakan operasi korona, maka $\forall v_i \in G_m$ dan $v_{i,j} \in H_i$ berakibat $d(v_i, v_{i,j}) = 1$. Jika diambil sebarang simpul $v_k \in V(G_m)$ dengan $v_k \neq v_i$ sebagai simpul elemen himpunan dominasi jarak dua berakibat $d(v_k, v_i) = 1$, karena diameter graf G_m sama dengan 1. Sedangkan $d(v_k, v_{i,j}) = d(v_k, v_i) + d(v_i, v_{i,j}) = 2$ atau dengan kata lain suatu simpul pada graf G memiliki jarak maksimal 2 terhadap semua simpul pada graf $G_m \odot H_n$, sehingga $\gamma_2(G_m \odot H_n) = 1$.

Graf dengan diameter sama dengan satu misalnya graf Lengkap (*Complete*) K_n. Sehingga graf K_n jika dikoronakan dengan sebarang graf H maka bilangan dominasi jarak dua pada graf tersebut sama dengan satu $\gamma_2(K_n \odot H) = 1$

4.3.2 Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Lintasan P_m dan Lingkaran C_n

Pada Tabel 2.1 disebutkan bahwa bilangan dominasi jarak satu pada graf Lintasan dan Lingkaran masing-masing $\gamma(P_m) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$ dan $\gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Berikut ini akan ditunjukkan bilangan dominasi jarak dua pada graf Lintasan dan Lingkaran.

Teorema 4.8. *Graf lintasan dengan m simpul P_m, untuk $m \geq 2$ mempunyai bilangan dominasi jarak dua $\gamma_2(P_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil$.*

Bukti: Banyak simpul pada graf Lintasan P_m adalah $|P_m| = m$. Karena derajat maksimal dari simpul-simpul pada P_m adalah 2, maka satu simpul dapat mendominasi maksimal 5 simpul dengan jarak kurang dari atau sama dengan

2. Dengan demikian jumlah simpul minimal yang dapat mendominasi m simpul adalah $\lceil \frac{m}{5} \rceil$. Jadi, $\gamma_2(P_m) \geq \lceil \frac{m}{5} \rceil$.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa $\lceil \frac{m}{5} \rceil$ adalah banyak simpul minimal yang dapat mendominasi semua simpul graf P_m. Andaikan $\gamma_2(P_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil - 1$, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi sampai jarak dua adalah $5(\lceil \frac{m}{5} \rceil - 1) \leq 5(\frac{m+4}{5} - 1) = m - 1$. Sehingga maksimal hanya $m-1$ simpul yang dapat didominasi, maka pastilah terdapat minimal satu simpul P_m yang tidak dapat didominasi. Oleh karena itu, $|S_2| = \gamma_2(P_m) \neq \lceil \frac{m}{5} \rceil - 1$.

Karena $\lceil \frac{m}{5} \rceil$ adalah jumlah simpul minimal yang dapat mendominasi semua simpul pada P_m, maka $\gamma_2(P_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil$. $\square$

Gambar 4.8: Simpul Putih pada Graf Lintasan P_m merupakan Contoh Simpul Himpunan Elemen Dominasi Jarak Dua

Teorema 4.9. *Graf lingkaran dengan n simpul C_n, untuk $n \geq 3$ mempunyai bilangan dominasi jarak dua $\gamma_2(C_n) = \lceil \frac{n}{5} \rceil$.*

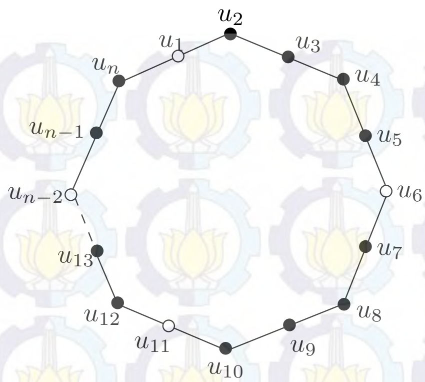
Bukti: Lingkaran merupakan graf reguler 2. Sehingga untuk setiap u_i elemen $V(C_n)$, $deg(u_i) = 2$. Karena untuk setiap u anggota S_2, u dapat mendominasi maksimal 5 simpul dengan jarak kurang atau sama dengan dua dan $|C_n| = n$, maka $|S_2| \geq \lceil \frac{n}{5} \rceil$.

Andaikan $\gamma_2(C_n) = \lceil \frac{n}{5} \rceil - 1$ untuk mengetahui apakah $\lceil \frac{n}{5} \rceil$ merupakan banyak simpul minimal yang dapat mendominasi semua simpul graf C_n. Maka jumlah simpul maksimal yang dapat didominasi sampai jarak dua adalah $5(\lceil \frac{n}{5} \rceil - 1) \leq 5(\frac{n+4}{5} - 1) = n - 1$. Sehingga maksimal hanya $n - 1$ simpul yang dapat didominasi oleh S_2, maka pastilah terdapat minimal satu simpul C_n yang tidak dapat didominasi. Oleh karena itu, $|s_2| = \gamma_2(C_n) \neq \lceil \frac{n}{5} \rceil - 1$.

Dengan demikian, $\lceil \frac{n}{5} \rceil$ adalah jumlah simpul minimal yang dapat mendominasi semua simpul pada C_n, maka $\gamma_2(C_n) = \lceil \frac{n}{5} \rceil$. $\square$

4.3.3 Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi Korona

Berbeda dengan bilangan dominasi jarak satu seperti pada subbab 4.1, untuk bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi korona tidak dapat digeneralisasi untuk sebarang dua graf. Sehingga dalam bagian ini ditunjukkan dua



Gambar 4.9: Simpul Putih pada Graf Lingkaran C_n merupakan Contoh Simpul Himpunan Elemen Dominasi Jarak Dua

teorema, yaitu untuk bilangan dominasi jarak dua pada graf Lintasan P_m yang dikoronakan dengan sebarang graf G_n serta graf Lingkaran C_n yang dikoronakan dengan sebarang graf H_m.

Teorema 4.10. *Diberikan graf lintasan P_m dan sebarang graf G_n dengan masing-masing ordernya m dan n untuk $m \geq 2$ dan $n \geq 1$. Maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi korona $P_m \odot G_n$ adalah $\gamma_2(P_m \odot G_n) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$.*

Bukti: Misalkan $V(P_m \odot G_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \cup \{v_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$, maka $|P_m \odot G_n| = mn + m$. Kasus-kasus berikut ini menunjukkan tiga kemungkinan simpul-simpul elemen himpunan dominasi jarak dua yang minimum pada graf $P_m \odot G_n$.

Kasus 1: $S_2 \in V(G_i)$

Untuk setiap $v_{i,j}$ elemen $V(G_i)$, $v_{i,j}$ maksimal dapat mendominasi $n + 3$ simpul. Sehingga banyak simpul elemen himpunan dominasi jarak dua maksimal $\frac{mn+m}{n+3}$, maka $|S_2| \leq \frac{mn+m}{n+3}$.

Kasus 2: $S_2 \in V(P_m)$

Untuk setiap v_i elemen $V(P_m)$, v_i maksimal dapat mendominasi $3n + 5$ simpul. Sehingga banyak simpul elemen himpunan dominasi jarak dua maksimal $\frac{mn+m}{3n+5}$, maka $|S_2| \leq \frac{mn+m}{3n+5}$.

Kasus 3: $S_2 \in V(G_i) \cup V(P_m)$

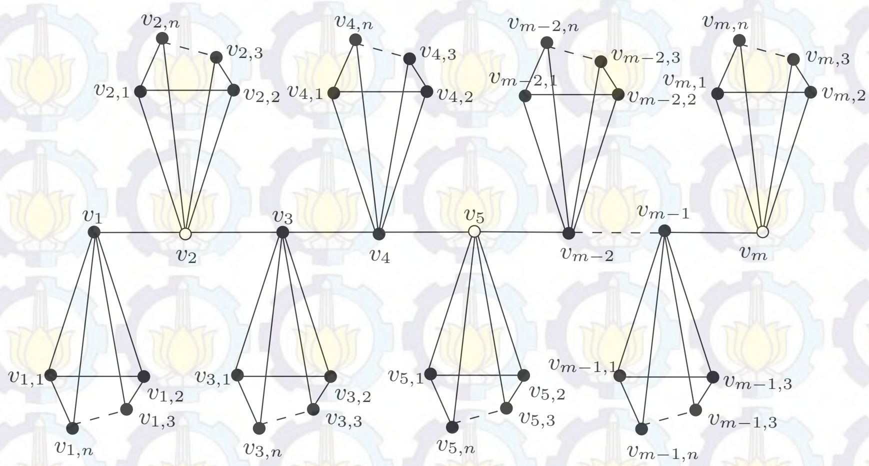
Untuk setiap v_i elemen $V(P_m)$ dan $v_{i,j}$ elemen $V(G_i)$, maka dua simpul maksimal dapat mendominasi $(n + 3) + (3n + 5)$ simpul. Sehingga $|S_2| \leq \frac{2(mn+m)}{(n+3)+(3n+5)} = \frac{mn+m}{n+4}$.

Dari kasus 1 sampai 3 dapat dilihat bahwa $\frac{mn+m}{3n+5} \leq \frac{mn+m}{n+4} \leq \frac{mn+m}{n+3}$, maka diambil batas atas yang terkecil yaitu simpul-simpul S_2 elemen dari simpul-simpul graf Lintasan P_m. Karena $\frac{mn+m}{3n+5} = \frac{m(n+1)}{3(n+1)+2} < \frac{m(n+1)}{3(n+1)} = \frac{m}{3}$, maka interval atau jarak setiap simpul elemen S_2 ke simpul elemen S_2 yang lain sama dengan 3. Karena $|S_2|$ harus bilangan bulat dan jarak setiap simpul elemen S_2 pada $V(P_m)$ sama dengan 3 maka jumlah simpul minimal yang dapat mendominasi simpul-simpul $V(P_m \odot G_n)$ adalah $\lceil \frac{m}{3} \rceil$. Sehingga $\gamma_2(P_m \odot G_n) \geq \lceil \frac{m}{3} \rceil$

Andaikan $|S_2| = \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1$, untuk menunjukkan apakah $\lceil \frac{m}{3} \rceil$ merupakan bilangan dominasi yang paling minimum. Maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi oleh S_2 adalah

$$\left(\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - 1\right)(3n+3) \leq \left(\frac{m+2}{3} - 1\right)(3n+3) = mn + m - n - 1 < mn + m.$$

Dengan demikian, tidak semua simpul $P_m \odot G_n$ dapat didominasi. Oleh karena itu, $|S_2| \neq \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1$ dan $\lceil \frac{m}{3} \rceil$ merupakan bilangan dominasi minimum pada graf $P_m \odot G_n$. Maka terbukti bahwa $\gamma_2(P_m \odot G_n) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$. □



Gambar 4.10: Graf $P_m \odot C_n$ untuk $m \equiv 2$ (mod 3) dengan Simpul-Simpul Warna Putih Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Jarak Dua

Berdasarkan pembuktian pada Teorema 4.10 maka dapat ditentukan banyaknya himpunan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi korona antara graf Lintasan dengan graf Lintasan, graf Lintasan dengan graf Lingkaran serta graf Lintasan dengan graf Bintang seperti pada Akibat 4.3 berikut ini. Gambar 4.10 menunjukkan contoh simpul-simpul elemen himpunan dominasi pada graf $P_m \odot C_n$.

Akibat 4.3. *Bilangan dominasi jarak dua pada graf lintasan yang dikoronakan dengan graf lintasan, lingkaran, dan graf bintang adalah* $\gamma_2(P_m \odot P_n) = \gamma_2(P_m \odot C_n) = \gamma_2(P_m \odot S_n) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$.

Teorema 4.11. *Diberikan graf lingkaran* C_n *dan sebarang graf* H_m *dengan masing-masing ordernya* n *dan* m *untuk* $n \geq 3$ *dan* $m \geq 1$. *Maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi korona* $C_n \odot H_m$ *adalah* $\gamma_2(C_n \odot H_m) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Bukti: Misalkan $V(C_n \odot H_m) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \cup \{u_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$, maka $|C_n \odot H_m| = nm + n$. Kasus-kasus berikut ini menunjukkan tiga kemungkinan simpul-simpul elemen himpunan dominasi jarak dua yang minimum pada graf $C_n \odot H_m$.

Kasus 1: $S_2 \in V(H_i)$

Untuk setiap $u_{i,j}$ elemen $V(H_i)$, $u_{i,j}$ maksimal dapat mendominasi $m + 3$ simpul. Sehingga banyak simpul elemen himpunan dominasi jarak dua maksimal $\frac{nm+n}{m+3}$, maka $|S_2| \leq \frac{nm+n}{m+3}$.

Kasus 2: $S_2 \in V(C_n)$

Untuk setiap u_i elemen $V(C_n)$, u_i maksimal dapat mendominasi $3m + 5$ simpul. Sehingga banyak simpul elemen himpunan dominasi jarak dua maksimal $\frac{nm+n}{3m+5}$, maka $|S_2| \leq \frac{nm+n}{3m+5}$.

Kasus 3: $S_2 \in V(H_i) \cup V(C_n)$

Untuk setiap u_i elemen $V(C_n)$ dan $u_{i,j}$ elemen $V(H_i)$, maka dua simpul maksimal dapat mendominasi $(m + 3) + (3m + 5)$ simpul. Sehingga $|S_2| \leq \frac{2(nm+n)}{(m+3)+(3m+5)} = \frac{nm+n}{m+4}$.

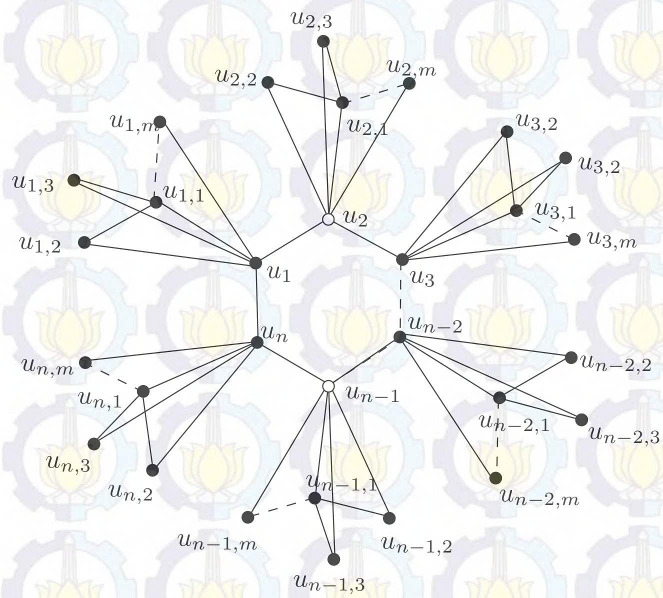
Dari kasus 1 sampai 3 dapat dilihat bahwa $\frac{nm+n}{3m+5} \leq \frac{nm+n}{m+4} \leq \frac{nm+n}{m+3}$, sehingga dapat diambil batas atas yang terkecil yaitu simpul S_2 elemen dari simpul-simpul graf Lingkaran C_n. Karena $\frac{nm+n}{3m+5} = \frac{n(m+1)}{3(m+1)+2} < \frac{n(m+1)}{3(m+1)} = \frac{n}{3}$, maka interval atau jarak setiap simpul elemen S_2 ke simpul elemen S_2 yang lain sama dengan 3. Karena $|S_2|$ harus bilangan bulat dan jarak setiap simpul elemen S_2 pada $V(C_n)$ sama dengan 3 maka jumlah simpul minimal yang dapat mendominasi simpul-simpul $V(C_n \odot H_m)$ adalah $\lceil \frac{n}{3} \rceil$, maka $\gamma_2(C_n \odot H_m) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Oleh karena itu, untuk menunjukkan apakah $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ merupakan bilangan dominasi yang paling minimum, yaitu dengan memisalkan $|S_2| = \lceil \frac{n}{3} \rceil - 1$. Maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi oleh S_2 adalah

$$\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1\right)(3m+3) \leq \left(\frac{n+2}{3} - 1\right)(3m+3) = nm + n - m - 1 < nm + n.$$

Sehingga tidak semua simpul $C_n \odot H_m$ dapat didominasi. Oleh karena itu, $|S_2| \neq \lceil \frac{n}{3} \rceil - 1$ dan $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ merupakan bilangan dominasi minimum pada graf $C_n \odot H_m$. Maka $\gamma_2(C_n \odot H_m) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. $\square$

Sebagaimana Teorema 4.10, dari Teorema 4.11 juga dapat dituliskan sebuah akibat mengenai bilangan dominasi jarak dua untuk graf hasil operasi korona seperti berikut ini.



Gambar 4.11: Graf $C_n \odot S_m$ untuk $m \equiv 2$ (mod 3) dengan Simpul-Simpul Warna Putih Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Jarak Dua

Akibat 4.4. *Bilangan dominasi jarak dua pada graf lingkaran yang dikoronakan dengan graf lintasan, lingkaran, dan graf bintang adalah* $\gamma_2(C_n \odot P_m) = \gamma_2(C_n \odot C_m) = \gamma_2(C_n \odot S_m) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Contoh graf hasil operasi korona antara graf Lingkaran C_n dan sebarang graf G dapat dilihat pada Gambar 4.11. Pada gambar tersebut graf Lingkaran C_n dioperasikan dengan graf Bintang S_m.

4.3.4 Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi Comb

Bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi *comb* juga ditentukan pada enam graf khusus seperti pada subbab 4.2, antara lain graf $P_m \triangleright P_n, P_m \triangleright C_n, P_m \triangleright S_n, C_n \triangleright P_m, C_n \triangleright P_m$, dan $C_n \triangleright S_m$. Penentuan simpul-simpul yang dilekatkan pada masing-masing graf juga sama seperti yang jarak satu.

Teorema 4.12. *Diberikan dua buah graf lintasan P_m dan P_n dengan masing-masing ordernya m dan n untuk $m, n \geq 2$. Maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi comb $P_m \triangleright P_n$ adalah*

$$\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{5} \rceil & \textit{jika } n \equiv 0 \textit{ (mod 5)}, n \equiv 3 \textit{ (mod 5)}, n \equiv 4 \textit{ (mod 5)} \\ m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{5} \rceil & \textit{jika } n \equiv 1 \textit{ (mod 5)} \\ m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil & \textit{jika } n \equiv 2 \textit{ (mod 5)} \end{cases}$$

Bukti: Misalkan $V(P_m \triangleright P_n) = \{V_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ dan $|P_m \triangleright P_n| = mn$. Graf $P_m \triangleright P_n$ dapat dilihat pada Gambar 4.12. Berdasarkan definisi operasi *comb*, maka simpul ujung P_n yang melekat pada graf P_m dapat dikatakan sebagai simpul-simpul P_n atau pun simpul-simpul P_m. Oleh karena itu, untuk menunjukkan banyak simpul minimal yang menjadi elemen himpunan dominasi jarak dua pada graf $P_m \triangleright P_n$, maka untuk masing-masing nilai n akan dibagi menjadi dua kasus. Kasus pertama jika simpul-simpul S hanya diambil dari simpul-simpul P_n, sedangkan kasus kedua jika S_2 diambil dari $V(P_n) \cup V(P_m)$ dengan ketentuan simpul S_2 diambil terlebih dahulu dari $V(P_n)$sebanyak kelipatan 5, karena satu simpul elemen S_2 pada P_n dapat mendominasi maksimal 5 simpul. Kemudian dilanjutkan pada simpul-simpul $V(P_n)$ yang terhubung atau memiliki jarak terkecil dengan $V(P_m)$ yang belum terdominasi.

1. $n \equiv 0$ (mod 5)

   Kasus 1: $S_2 \in V(P_n)$

   Menurut Teorema 4.8 $\gamma_2(P_n) = \lceil \frac{n}{5} \rceil$, karena $n \equiv 0$ (mod 5) dan $n \in Z^+$ maka bilangan dominasi jarak dua pada setiap $P_{i,n}$ adalah $\gamma_2(P_n) = \lceil \frac{n}{5} \rceil$ yang nilanya adalah $\gamma_2(P_n) = \frac{n}{5}$. Karena terdapat m buah P_n pada graf $P_m \triangleright P_n$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright P_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq m(\gamma_2(P_m \triangleright P_n)) = \frac{mn}{5}$.

   Kasus 2: $S_2 \in V(P_n) \cup V(P_m)$

   Karena $n \equiv 0$ (mod 5), maka dari kasus pertama semua simpul sudah dapat didominasi dengan jarak maksimal dua.

   Oleh karena itu, batas atas minimal yang diambil dari bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright P_n$ adalah

$$\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{mn}{5}.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $\frac{mn}{5}$ merupakan bilangan dominasi yang minimum pada graf $P_m \triangleright P_n$. Andaikan $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{mn}{5} - 1$. Karena setiap simpul elemen S_2 maksimal dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul yang dapat didominasi jika $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{mn}{5} - 1$ adalah

$$5\left(\frac{mn}{5} - 1\right) = mn - 5 < mn.$$

Dengan demikian, $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \nleq \frac{mn}{5} - 1$, karena terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga terbukti bahwa $\frac{mn}{5}$ adalah bilangan dominasi jarak dua yang minimal pada graf $P_m \triangleright P_n$, maka $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = \frac{mn}{5}$.

2. $n \equiv 1$ (mod 5)

   Kasus 1: $S_2 \in V(P_n)$

   Untuk setiap $P_{i,n}$, bilangan dominasi jarak dua pada P_n adalah $\gamma_2(P_n) = \lceil \frac{n}{5} \rceil$, karena $n \equiv 1$ (mod 5) dan $n \in Z^+$, maka $\gamma(P_n) = \frac{n+4}{5}$. Karena terdapat m buah P_n pada graf $P_m \triangleright P_n$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright P_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq m(\gamma_2(P_n)) = \frac{m(n+4)}{5}$.

   Kasus 2: $S_2 \in V(P_n) \cup V(P_m)$

   Karena $n \equiv 1$ (mod 5), maka terlebih dahulu ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada P_{n-1}. Sebagaimana Teorema 4.8, $\gamma_2(P_{n-1}) = \lceil \frac{n-1}{5} \rceil$. Karena $m \in Z^+$ dengan $m \equiv 1$ (mod 3), maka $\gamma_2(P_{n-1}) = \frac{n-1}{5}$. Sehingga untuk m buah P_{n-1} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $\frac{m(n-1)}{5}$. Sedangkan satu simpul pada P_n yang belum terdominasi yang juga merupakan simpul-simpul $V(P_m)$ memiliki bilangan dominasi $\lceil \frac{m}{5} \rceil$. Dengan demikian bilangan dominasi pada graf $P_m \triangleright P_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil$.

   Dari kasus 1 dan 2 tersebut dapat dilihat bahwa $\frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil \leq \frac{m(n+4)}{5}$, sehingga diambil batas yang minimal untuk bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright P_n$, yaitu $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil$.

   Andaikan $\frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil$ bukan bilangan dominasi yang minimal, misalkan $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil - 1$. Karena setiap simpul maksimal dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $(\frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil - 1)5$, karena $m \in Z^+$ dan $m \equiv 0$ (mod 5), maka $\lceil \frac{m}{5} \rceil = \frac{m}{5}$. Sehingga

$$\left(\frac{m(n-1)}{5} + \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil - 1\right)5 = \left(\frac{m(n-1)}{5} + \frac{m}{5} - 1\right)5 = mn - 5 < mn.$$

Dengan demikian, simpul yang terdominasi kurang dari order pada graf $P_m \triangleright P_n$, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \nleq \frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil - 1$ dan terbukti bahwa $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = \frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil$ adalah bilangan dominasi jarak dua yang minimal.

3. $n \equiv 2$ (mod 5)

   Kasus 1: $S_2 \in V(P_m)$

   Untuk setiap $P_{i,n}$, bilangan dominasi jarak dua pada P_n adalah $\gamma_2(P_n) = \lceil \frac{n}{5} \rceil$, karena $n \in Z^+$ dan $n \equiv 2$ (mod 5), maka $\gamma_2(P_n) = \frac{n+3}{5}$. Karena terdapat m buah P_n pada graf $P_m \triangleright P_n$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright P_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq m(\gamma_2(P_n)) = \frac{m(n+3)}{5}$.

   Kasus 2: $S_2 \in V(P_n) \cup V(P_m)$

   Karena $n \equiv 2$ (mod 5), maka terlebih dahulu ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada P_{n-2}. Sebagaimana pada pembuktian-pembuktian sebelumnya, maka $\gamma_2(P_{n-2}) = \frac{n-2}{5}$. Sehingga untuk m buah P_{n-2} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $\frac{m(n-2)}{5}$. Sedangkan dua simpul pada setiap P_n yang belum terdominasi salah satunya merupakan simpul $V(P_m)$. Sehingga himpunan simpul yang belum terdominasi sama dengan graf P_m yang masing-masing simpulnya terhubung dengan sebuah simpul. Setiap simpul yang belum terdominasi tersebut isomorfis dengan graf $P_m \odot G_1$, G_1 adalah trivial yang hanya memiliki satu simpul. Sehingga menurut Teorema 4.10, $\gamma_2(P_m \odot G_1) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$. Dengan demikian bilangan dominasi pada graf $P_m \triangleright P_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$.

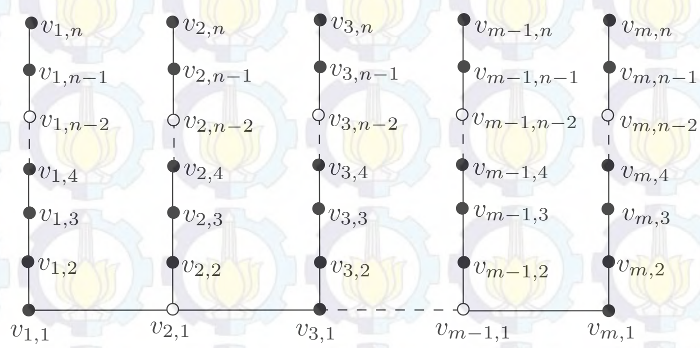
   Dua kemungkinan batas atas minimal bilangan dominasi jarak dua pada kasus 1 dan 2 menunjukkan $\frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil \leq \frac{m(n+3)}{5}$, sehingga diambil batas minimal untuk bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright P_n$, yaitu $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$.

   Misalkan $\frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$ bukan bilangan dominasi yang minimal. Andaikan $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1$. Karena setiap simpul maksimal dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $(\frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1)5$.

$$\left(\frac{m(n-2)}{5} + \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil - 1\right)5 \;<\; \left(\frac{m(n-2)}{5} + \left(\frac{m}{3}+1\right) - 1\right)5$$
$$= mn - 2m + \frac{5m}{3}.$$

Karena $mn - 2m + \frac{5m}{3} < mn$, sehingga terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \nleq \frac{m(n-2)}{5} + \lceil\frac{m}{3}\rceil - 1$ dan terbukti bahwa $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-2)}{5} + \lceil\frac{m}{3}\rceil$.

Sebagai contoh, perhatikan Gambar 4.12. Jika $v_{m,n-2}$ bukan elemen S_2, maka $v_{m,n}, v_{m,n-1}, v_{m,n-2}, , v_{m,n-3}$ dan $v_{m,n-4}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun elemen S_2.



Gambar 4.12: Graf $P_m \triangleright P_n$ untuk $n \equiv 2 \pmod 5$ dengan Simpul-Simpul Warna Putih Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Jarak Dua

4. $n \equiv 3$ (mod 5)

   Kasus 1: $S_2 \in V(P_n)$

   Untuk setiap $P_{i,n}$, bilangan dominasi jarak dua pada P_n adalah $\gamma_2(P_n) = \lceil\frac{n}{5}\rceil$, karena $n \equiv 3$ (mod 5) dan $n \in Z^+$, maka $\gamma_2(P_n) = \frac{n+2}{5}$. Karena terdapat m buah P_n pada graf $P_m \triangleright P_n$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright P_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq m(\gamma_2(P_n)) = \frac{m(n+2)}{5}$.

   Kasus 2: $S_2 \in V(P_n) \cup V(P_m)$

   Karena $n \equiv 3$ (mod 5), maka terlebih ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada P_{n-3}. Sama seperti pembuktian sebelumnya, maka $\gamma_2(P_{n-3}) = \frac{n-3}{5}$. Sehingga untuk m buah P_{n-3} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $\frac{m(n-3)}{5}$. Sedangkan tiga simpul pada setiap P_n yang belum terdominasi salah satunya merupakan simpul-simpul $V(P_m)$. Sehingga himpunan simpul yang belum terdominasi sama dengan m buah graf P_3 dengan salah satu simpul ujungnya terhubung dan membentuk Lintasan P_m. Karena jarak terjauh untuk setiap simpul P_m pada simpul P_n yang belum terdominasi sama dengan 2, maka setiap simpul P_m diambil sebagai elemen S_2, sehingga kedua simpul P_n tersebut dapat didominasi. Dengan demikian bilangan dominasi jarak dua pada graf $P_m \triangleright P_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-3)}{5} + m$.

Karena $\frac{m(n+2)}{5} = \frac{m(n-3)}{5} + m$, sehingga kasus 1 dan 2 menunjukkan bilangan dominasi jarak dua minimal yang sama. Sehingga $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-3)}{5} + m$.

Selanjutnya, misalkan $\frac{m(n-3)}{5} + m$ bukan bilangan dominasi yang minimal. Andaikan $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-3)}{5} + m - 1$, karena setiap simpul dari $\frac{m(n-3)}{5}$ simpul dapat mendominasi maksimal 5 simpul dan setiap simpul dari m simpul dapat mendominasi 3 simpul. Maka jika diambil sebuah simpul dari $\frac{m(n-3)}{5}$ simpul bukan menjadi elemen S_2 pada P_n mengakibatkan banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah

$$\left(\frac{m(n-3)}{5} - 1\right)5 + m \cdot 3 = mn - 5 < mn.$$

Dengan demikian terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi, karena jumlah simpul maksimal yang dapat didominasi kurang dari banyaknya simpul pada $P_m \triangleright P_n$. Sehingga $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \nleq \frac{m(n-3)}{5} + m - 1$ dan terbukti bahwa $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = \frac{m(n-3)}{5} + m$ atau $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = \frac{m(n+2)}{5}$.

5. $n \equiv 4$ (mod 5)

Kasus 1: $S_2 \in V(P_n)$

Untuk setiap $P_{i,n}$, bilangan dominasi jarak dua pada P_n adalah $\gamma_2(P_n) = \lceil \frac{n}{5} \rceil$, karena $n \equiv 4$ (mod 5) dan $n \in Z^+$, maka $\gamma_2(P_n) = \frac{n+1}{5}$. Karena terdapat m buah P_n pada graf $P_m \triangleright P_n$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright P_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq m(\gamma_2(P_n)) = \frac{m(n+1)}{5}$.

Kasus 2: $S_2 \in V(P_n) \cup V(P_m)$

Karena $n \equiv 4$ (mod 5), maka pertama kali ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada P_{n-4}. Sama seperti pembuktian sebelumnya, maka $\gamma_2(P_{n-4}) = \frac{n-4}{5}$. Sehingga untuk m buah P_{n-4} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $\frac{m(n-4)}{5}$. Sedangkan 4 simpul pada setiap P_n yang belum terdominasi salah satunya merupakan simpul-simpul $V(P_m)$. Sehingga himpunan simpul yang belum terdominasi terdiri dari m buah graf P_4 dengan salah satu simpul ujungnya terhubung membentuk Lintasan P_m, Karena jarak terjauh untuk setiap simpul P_m pada simpul P_n yang belum terdominasi sama dengan 3, maka jika diambil simpul P_m sebagai elemen S_2 mengakibatkan banyaknya himpunan dominasi yang dibutuhkan untuk menjangkau simpul-simpul yang belum terdominasi tidak akan minimum, karena simpul yang dibutuhkan pasti lebih dari m simpul. Sehingga untuk kasus ini minimal diambil satu simpul untuk masing-masing P_4 dan bukan $v_{i,1}$ atau pun $v_{i,4}$, karena $d(v_{i,1}, v_{i,4}) = 3$. Dengan demikian dibutuhkan minimal m simpul dengan masing-masing simpul dapat mendominasi 4 simpul, yaitu $v_{i,2}$ atau $v_{i,3}$. Karena $i = 1, 2, \ldots, m$, maka bilangan dominasi jarak dua pada graf $P_m \triangleright P_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-4)}{5} + m = \frac{m(n+1)}{5}$.

Kasus 1 dan 2 menunjukkan bilangan dominasi jarak dua minimal yang sama. Sehingga kita dapat mengambil batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright P_n$ yaitu $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-4)}{5} + m$.

Andaikan $\frac{m(n-4)}{5} + m$ bukan bilangan dominasi jarak dua yang minimal. Misalkan $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-4)}{5} + m - 1$, yaitu dengan mengambil sebarang satu simpul pada P_n sedemikian tidak lagi menjadi elemen S_2. Hal ini mengakibatkan banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah

$$\left(\frac{m(n-4)}{5} - 1\right) 5 + m \cdot 4 = mn - 5 < mn.$$

Dengan demikian terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-4)}{5} + m - 1$ dan terbukti bahwa $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = \frac{m(n-4)}{5} + m$ atau $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = \frac{m(n+1)}{5}$.

Masing-masing nilai n pada kelima pembuktian di atas menunjukkan bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright P_n$ berbeda-beda. Untuk $n \equiv 0$ (mod 5), $n \equiv 3$ (mod 5), dan $n \equiv 4$ (mod 5) dapat disimpulkan bahwa $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = m\lceil \frac{n}{5} \rceil$. Untuk $n \equiv 1$ (mod 5), $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{5} \rceil$, sedangkan untuk $n \equiv 2$ (mod 5), $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil$. $\square$

Teorema 4.13. *Diberikan graf lintasan P_m dan graf lingkaran C_n dengan masing-masing ordernya m dan n untuk $m \geq 2, n \geq 3$. Maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi comb $P_m \triangleright C_n$ adalah*

$$\gamma_2(P_m \triangleright C_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{5} \rceil & \textit{jika } n \equiv 0 \textit{ (mod 5)}, n \equiv 4 \textit{ (mod 5)} \\ m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{5} \rceil & \textit{jika } n \equiv 1 \textit{ (mod 5)} \\ m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil & \textit{jika } n \equiv 2 \textit{ (mod 5)}, n \equiv 3 \textit{ (mod 5)} \end{cases}$$

Bukti: Andaikan $V(P_m \triangleright C_n) = \{V_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ dan $|P_m \triangleright C_n| = mn$. Graf $P_m \triangleright C_n$ dapat dilihat pada Gambar 4.13. Berdasarkan definisi operasi *comb*, maka simpul ujung C_n yang melekat pada graf P_m dapat dikatakan sebagai simpul-simpul C_n atau pun simpul-simpul P_m. Oleh karena itu, untuk menunjukkan banyak simpul minimal yang menjadi elemen himpunan dominasi jarak satu pada graf $P_m \triangleright C_n$, maka untuk masing-masing nilai n akan dibagi menjadi dua kasus. Kasus pertama jika simpul-simpul S_2 hanya diambil dari simpul-simpul C_n, sedangkan kasus kedua jika S_2 diambil dari $V(C_n) \cup V(P_m)$ dengan ketentuan simpul S_2 diambil terlebih dahulu dari $V(C_n)$ sebanyak kelipatan 5, karena satu simpul elemen S_2 pada C_n dapat mendominasi maksimal 5 simpul. Kemudian dilanjutkan pada simpul-simpul $V(P_m)$ yang terhubung atau memiliki jarak terkecil dengan $V(C_n)$ yang belum terdominasi.

1. $n \equiv 0$ (mod 5)

   Karena $n \equiv 0$ (mod 5), maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright C_n$ dapat ditentukan jika diambil $S_2 \in V(C_n)$. Berdasarkan Teorema 4.9 $\gamma_2(C_n) = \lceil \frac{n}{5} \rceil$. Karena $n \equiv 0$ (mod 5) dan $n \in Z^+$ maka bilangan dominasi jarak dua pada setiap $C_{i,n}$ adalah $\gamma_2(C_n) = \frac{n}{5}$. Karena terdapat m buah C_n pada graf $P_m \triangleright C_n$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright C_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq m(\gamma_2(C_n)) = \frac{mn}{5}$.

   Untuk menunjukkan apakah $\frac{mn}{5}$ merupakan bilangan dominasi yang minimum pada graf $P_m \triangleright C_n$, misalkan $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{mn}{5} - 1$. Karena setiap simpul elemen S_2 maksimal dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul yang dapat didominasi jika $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{mn}{5} - 1$ adalah

   $$5\left(\frac{mn}{5} - 1\right) = mn - 5 < mn.$$

   Sehingga $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \nleq \frac{mn}{5} - 1$, karena terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Maka terbukti bahwa $\frac{mn}{5}$ adalah bilangan dominasi jarak dua yang minimal pada graf $P_m \triangleright C_n$. Oleh karena itu, $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) = \frac{mn}{5}$.

2. $n \equiv 1$ (mod 5)

   Kasus 1: $S_2 \in V(P_n)$

   Untuk setiap $C_{i,n}$, bilangan dominasi jarak dua pada C_n adalah $\gamma_2(C_n) = \lceil \frac{n}{5} \rceil$, karena $n \equiv 1$ (mod 5) dan $n \in Z^+$, maka $\gamma_2(C_n) = \frac{n+4}{5}$. Karena terdapat m buah C_n pada graf $P_m \triangleright C_n$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright C_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq m(\gamma_2(C_n)) = \frac{m(n+4)}{5}$.

   Kasus 2: $S_2 \in V(C_n) \cup V(P_m)$

   Karena $n \equiv 1$ (mod 5), maka terlebih dahulu ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada C_{n-1}. Sebagaimana Teorema 4.9, $\gamma_2(C_{n-1}) = \lceil \frac{n-1}{5} \rceil$. Karena $n \equiv 1$ (mod 5) dan $n \in Z^+$, maka $\gamma_2(C_{n-1}) = \frac{n-1}{5}$. Sehingga untuk m buah C_{n-1} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $\frac{m(n-1)}{5}$. Sedangkan satu simpul pada C_n yang belum terdominasi yang juga merupakan simpul-simpul $V(P_m)$ memiliki bilangan dominasi $\lceil \frac{m}{5} \rceil$. Dengan demikian bilangan dominasi pada graf $P_m \triangleright C_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil$.

   Kasus 1 dan 2 menunjukkan bahwa $\frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil \leq \frac{m(n+4)}{5}$, sehingga diambil batas yang minimal untuk bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright C_n$, yaitu $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil$.

   Andaikan $\frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil$ bukan bilangan dominasi yang minimal, misalkan $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil - 1$, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah

   $$\left(\frac{m(n-1)}{5} + \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil - 1 \right) 5 = mn - 5 < mn.$$

   Karena simpul yang dapat didominasi kurang dari $|P_m \triangleright C_n|$, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \not\leq \frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil - 1$ dan terbukti bahwa $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) = \frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil$.

3. $n \equiv 2$ (mod 5)

   Kasus 1: $S_2 \in V(P_n)$

   Untuk setiap $C_{i,n}$, bilangan dominasi jarak dua pada C_n adalah $\gamma_2(C_n) = \lceil \frac{n}{5} \rceil$. Karena $n \equiv 2$ (mod 5) dan $n \in Z^+$, maka $\gamma_2(C_n) = \frac{n+3}{5}$. Karena terdapat m buah C_n pada graf $P_m \triangleright C_n$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright C_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq m(\gamma_2(C_n)) = \frac{m(n+3)}{5}$.

Kasus 2: $S_2 \in V(C_n) \cup V(P_m)$

Seperti pada pembuktian-pembuktian sebelumnya, maka $\gamma_2(C_{n-2}) = \lceil \frac{n-2}{5} \rceil$. Karena $n \equiv 2 \pmod 5$ dan $n \in Z^+$, maka $\gamma_2(C_{n-2}) = \frac{n-2}{5}$. Sehingga untuk m buah C_{n-2} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $\frac{m(n-2)}{5}$. Sedangkan dua simpul pada setiap C_n yang belum terdominasi salah satunya merupakan simpul $V(P_m)$. Sehingga himpunan simpul yang belum terdominasi sama dengan graf P_m yang masing-masing simpulnya terhubung dengan sebuah simpul. Simpul-simpul tersebut isomorfis dengan graf $P_m \odot G_1$, sehingga menurut Teorema 4.10, $\gamma_2(P_m \odot G_1) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$. Dengan demikian bilangan dominasi pada graf $P_m \triangleright C_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$.

Kedua kasus di atas menunjukkan $\frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil \leq \frac{m(n+3)}{5}$, sehingga diambil batas yang minimal untuk bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright C_n$, yaitu $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$.

Jika $\frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$ bukan bilangan dominasi yang minimal, misalkan $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1$. Karena setiap simpul maksimal dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $(\frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1)5$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{m(n-2)}{5} + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - 1\right)5 &< \left(\frac{m(n-2)}{5} + \left(\frac{m}{3} + 1\right) - 1\right)5 \\ &= mn - 2m + \frac{5m}{3}.\end{aligned}$$

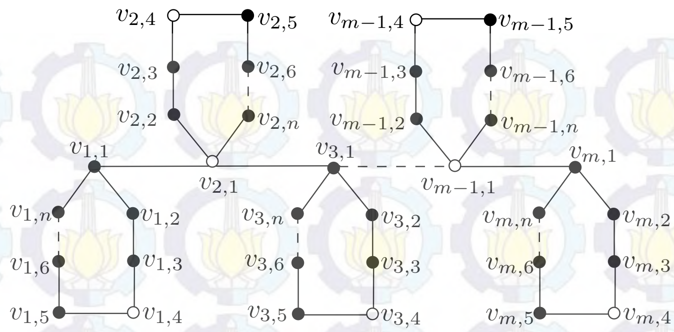
Karena $mn - 2m + \frac{5m}{3} < mn$, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \nleq \frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1$ dan terbukti bahwa $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) = \frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$.

Pada Gambar 4.13 ditunjukkan contoh bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright C_n$ untuk $n \equiv 2 \pmod 5$. Jika pada gambar tersebut $v_{m,4}$ tidak diambil sebagai elemen S_2 maka simpul-simpul yang tidak dapat didominasi oleh simpul manapun elemen S_2 antara lian $v_{m,2}, v_{m,3}, v_{m,4}, v_{m,5}$ dan $v_{m,6}$.

4. $n \equiv 3$ (mod 5)

   Kasus 1: $S_2 \in V(C_n)$

   Untuk setiap $C_{i,n}$, bilangan dominasi jarak dua pada C_n adalah $\gamma_2(C_n) = \lceil \frac{n}{5} \rceil$. Karena $n \equiv 3 \pmod 5$ dan $n \in Z^+$, maka $\gamma_2(C_n) = \frac{n+2}{5}$. Karena terdapat



Gambar 4.13: Graf $P_m \triangleright C_n$ untuk $n \equiv 2$ (mod 5) dengan Simpul-Simpul Warna Putih Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Jarak Dua

m buah C_n pada graf $P_m \triangleright C_n$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright C_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq m(\gamma_2(C_n)) = \frac{m(n+2)}{5}$.

Kasus 2: $S_2 \in V(C_n) \cup V(P_m)$

Karena $n \equiv 3$ (mod 5), maka terlebih dahulu ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada C_{n-3}. Sama seperti pembuktian sebelumnya, maka $\gamma_2(C_{n-3}) = \frac{n-3}{5}$. Sehingga untuk m buah C_{n-3} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $\frac{m(n-3)}{5}$. Sedangkan tiga simpul pada setiap C_n yang belum terdominasi salah satunya merupakan simpul-simpul $V(P_m)$. Karena derajat tertinggi $V(P_m) = 4$, dan dua tetangganya merupakan simpul-simpul pada Ci, n, maka dua simpul pada C_n yang belum terdominasi selain simpul $V(P_m)$ diambil yang jaraknya satu ke setiap $V(P_m)$. Sehingga himpunan simpul yang belum terdominasi isomorfis dengan graf $P_m \odot G_2$, G_2 pada graf ini merupakan dua simpul yang tidak terhubung yang dikoronakan dengan lintasan P_m. Sehingga berdasarkan Teorema 4.10 simpul-simpul tersebut memiliki bilangan dominasi sama dengan $\lceil \frac{m}{3} \rceil$. Dengan demikian bilangan dominasi jarak dua pada graf $P_m \triangleright C_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{m(n-3)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$.

Karena $\frac{m(n-3)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil \leq \frac{m(n+2)}{5}$ maka diambil batas atas yang minimum, yaitu bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright C_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{m(n-3)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$.

Selanjutnya, jika $\leq \frac{m(n-3)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$ bukan bilangan dominasi yang minimal, misalkan $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{m(n-3)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1$. Karena setiap simpul elemen S_2 pada C_n maksimal dapat mendominasi 5 simpul dan setiap simpul S_2 pada P_m dapat mendominasi maksimal 9 simpul, maka jika diambil sebuah simpul pada P_m sedemikian bukan elemen S_2, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $(\frac{m(n-3)}{5} -)5 + (\lceil \frac{m}{3} \rceil - 1)9$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{m(n-3)}{5} - 1\right)5 + \left(\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil - 1\right)9 &< \left(\frac{m(n-3)}{5} - 1\right)5 + \left(\frac{m}{3} + 1 - 1\right)9 \\ &= mn - 3m + 3m \\ &= mn.\end{aligned}$$

Karena simpul yang dapat didominasi kurang dari order pada $P_m \triangleright C_n$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Oleh karena itu, $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{m(n-3)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1$ dan terbukti bahwa $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) = \frac{m(n-3)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$.

5. $n \equiv 4$ (mod 5)

Kasus 1: $S \in V(C_n)$

Untuk setiap $C_{i,n}$, bilangan dominasi jarak dua pada C_n adalah $\gamma_2(C_n) = \lceil \frac{n}{5} \rceil$. Karena $n \equiv 4$ (mod 5) dan $n \in Z^+$, maka $\gamma_2(C_n) = \frac{n+1}{5}$. Karena terdapat m buah C_n pada graf $P_m \triangleright C_n$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright C_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq m(\gamma_2(C_n)) = \frac{m(n+1)}{5}$.

Kasus 2: $S \in V(C_n) \cup V(P_m)$

Karena $n \equiv 4$ (mod 5), maka terlebih dahulu ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada C_{n-4}. Sama seperti pembuktian sebelumnya, maka $\gamma_2(C_{n-4}) = \frac{n-4}{5}$. Sehingga untuk m buah C_{n-4} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $\frac{m(n-4)}{5}$. Sedangkan empat simpul pada setiap C_n yang belum terdominasi salah satunya merupakan simpul-simpul $V(P_m)$. Karena derajat tertinggi $V(P_m) = 4$, dan dua tetangganya merupakan simpul-simpul pada $C_{i,n}$, maka sebuah simpul pada C_n yang belum terdominasi selain simpul $V(P_m)$ dan dua simpul yang bertetangga dengan $V(P_m)$ adalah simpul dengan jarak ke $V(P_m)$ sama dengan dua. Sehingga semua simpul pada $V(P_m)$ diambil sebagai elemen S_2 dengan asumsi setiap simpul tersebut dapat mendominasi 4 simpul. Dengan demikian bilangan dominasi jarak dua pada graf $P_m \triangleright C_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{m(n-4)}{5} + m$.

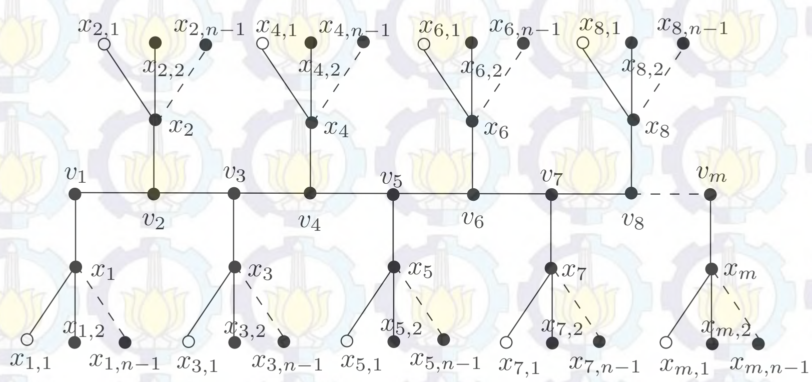
Kasus 1 dan 2 menunjukkan bilangan dominasi jarak dua minimal yang sama. Sehingga batas atas minimal bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright C_n$ yaitu $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{n-4}{5}m$.

Andaikan $\frac{m(n-4)}{5} + m$ bukan bilangan dominasi jarak dua yang minimal. Misalkan $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{m(n-3)}{5} + m - 1$, yaitu mengaambil sebarang satu simpul pada C_n sedemikian tidak lagi menjadi elemen S_2. Hal ini mengakibatkan banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah

$$\left(\frac{m(n-4)}{5} - 1\right) 5 + m \cdot 4 = mn - 5 < mn.$$

Dengan demikian terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi oleh S_2 karena banyak simpul yang dapat didominasi lebi kecil dari $|P_m \triangleright C_n|$. Sehingga tidak benar bahwa $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) \leq \frac{m(n-4)}{5} + m - 1$ dan terbukti bahwa $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) = \frac{m(n-4)}{5} + m$ atau $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) = \frac{m(n+1)}{5}$.

Kelima pembuktian untuk masing-masing nilai n di atas menunjukkan bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright C_n$ yang berbeda-beda. Akan tetapi beberapa bilangan dominasi dengan nilai n tertentu dapat direduksi, misalnya untuk $n \equiv 0$ (mod 5) dan $n \equiv 4$ (mod 5) dapat disimpulkan bahwa $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) = m\lceil \frac{n}{5} \rceil$, untuk $n \equiv 1$ (mod 5), $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) = m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{5} \rceil$, sedangkan untuk $n \equiv 2$ (mod 5) dan $n \equiv 3$ (mod 5), $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) = m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil$. $\square$



Gambar 4.14: Graf $P_m \triangleright S_n$ dengan Simpul *Pendant* S_n Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Jarak Dua

Teorema 4.14. *Diberikan graf lintasan P_m dan graf bintang S_n dengan masing-masing ordernya m dan n untuk $m \geq 2, n \geq 3$. Maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi comb $P_m \triangleright S_n$ adalah $\gamma_2(P_m \triangleright S_n) = m$.*

Bukti: Diketahui bahwa graf $P_m \triangleright S_n$ diperoleh dengan melekatkan salah satu simpul *pendat* dari masing-masing graf S_n kopian ke-i pada setiap simpul graf

P_m seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.14. Sehingga dapat disimpulkan bahwa banyak simpul graf $P_m \triangleright S_n$ sama dengan m kali simpul graf S_n, yaitu $m(n+1)$. Berdasarkan Observasi 4.1 diketahui bahwa $\gamma_2(S_n) = 1$, karena terdapat m kopi graf S_n pada $P_m \triangleright S_n$, maka maksimal terdapat m simpul elemen himpunan dominasi jarak dua. Sehingga dapat dituliskan bahwa $|S_2| = \gamma_2(P_m \triangleright S_n) \leq m$.

Andaikan $|S_2| \leq m-1$, hal ini berarti terdapat S_n kopian ke-i yang semua simpulnya bukan elemen himpunan dominasi. Seperti yang diketahui bahwa graf Bintang S_n memiliki diameter sama dengan 2. Sehingga pastilah terdapat v_i elemen S_n sedemikian $d(v_i, S_2) > 2$. Dengan demikian $|S_2| \nleq m-1$, sehingga m adalah bilangan dominasi jarak dua minimum pada graf $P_m \triangleright S_n$. Oleh karena itu terbukti bahwa $|S_2| = \gamma_2(P_m \triangleright S_n) = m$. $\square$

Teorema 4.15. *Diberikan graf lingkaran C_n dan graf lintasan P_m dengan masing-masing ordernya n dan m untuk $n \geq 3, m \geq 2$. Maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi comb $C_n \triangleright P_m$ adalah*

$$\gamma_2(C_n \triangleright P_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{5} \rceil & \textit{jika } m \equiv 0 \textit{ (mod 5)}, m \equiv 3 \textit{ (mod 5)}, m \equiv 4 \textit{ (mod 5)} \\ n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{5} \rceil & \textit{jika } m \equiv 1 \textit{ (mod 5)} \\ n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \textit{jika } m \equiv 2 \textit{ (mod 5)} \end{cases}$$

Bukti: Misalkan $V(C_n \triangleright P_m) = \{V_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan $|C_n \triangleright P_m| = nm$. Graf $C_n \triangleright P_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.15. Berdasarkan definisi operasi *comb*, maka simpul ujung P_m yang melekat pada graf C_n dapat dikatakan sebagai simpul-simpul P_m atau pun simpul-simpul C_n. Oleh karena itu, untuk menunjukkan banyak simpul minimal yang menjadi elemen himpunan dominasi jarak satu pada graf $C_n \triangleright P_m$, akan ditunjukkan sepeti pembuktian-pembuktian pada Teorema 4.12. Untuk masing-masing nilai m akan dibagi menjadi dua kasus. Kasus pertama jika simpul-simpul S_2 hanya diambil dari simpul-simpul P_m, sedangkan kasus kedua jika S_2 diambil daril $V(P_m) \cup V(C_n)$ dengan ketentuan simpul S_2 diambil terlebih dahulu dari $V(P_m)$ sebanyak kelipatan 5, karena satu simpul elemen S_2 pada P_m dapat mendominasi maksimal 5 simpul. Kemudian dilanjutkan pada simpul-simpul $V(P_m)$ yang terhubung atau memiliki jarak terkecil dengan $V(C_n)$ yang belum terdominasi.

1. $m \equiv 0 \pmod 5$

Sama seperti bilangan dominasi jarak dua $P_m \triangleright P_n$ dan $P_m \triangleright C_n$ untuk, batas atas minimal dapat ditentukan hanya dengan mengambil $S_2 \in V(P_m)$. Menurut Teorema 4.8 $\gamma_2(P_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil$, karena $m \equiv 0 \pmod 5$ maka bilangan dominasi jarak dua pada setiap $P_{i,m}$ adalah $\gamma_2(P_m) = \frac{m}{5}$. Karena terdapat n buah P_m pada graf $C_n \triangleright P_m$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $C_n \triangleright P_m$ adalah $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \leq n(\gamma_2(P_m)) = \frac{nm}{5}$. Selanjutnya hanya akan dibuktikan apakah $\frac{nm}{5}$ merupakan bilangan dominasi yang minimum pada graf $C_n \triangleright P_m$. Andaikan $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \leq \frac{nm}{5} - 1$. Karena setiap simpul elemen S_2 maksimal dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul yang dapat didominasi jika $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \leq \frac{nm}{5} - 1$ adalah

$$5\left(\frac{nm}{5} - 1\right) = nm - 5 < nm.$$

Dengan demikian, $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \nleq \frac{nm}{5} - 1$, karena terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga terbukti bahwa $\frac{nm}{5}$ adalah bilangan dominasi jarak dua yang minimal pada graf $C_n \triangleright P_m$, maka $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) = \frac{nm}{5}$.

2. $m \equiv 1 \pmod 5$

Kasus 1: $S_2 \in V(P_m)$

Untuk setiap $P_{i,m}$, bilangan dominasi jarak dua pada P_m adalah $\gamma_2(P_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil$, karena $m \equiv 1 \pmod 5$ dan $m \in Z^+$, maka $\gamma_2(P_m) = \frac{m+4}{5}$. Pada graf $C_n \triangleright P_m$ terdapat n buah P_m, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $C_n \triangleright P_m$ adalah $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \leq n(\gamma_2(P_m)) = \frac{n(m+4)}{5}$.

Kasus 2: $S_2 \in V(P_m) \cup V(C_n)$

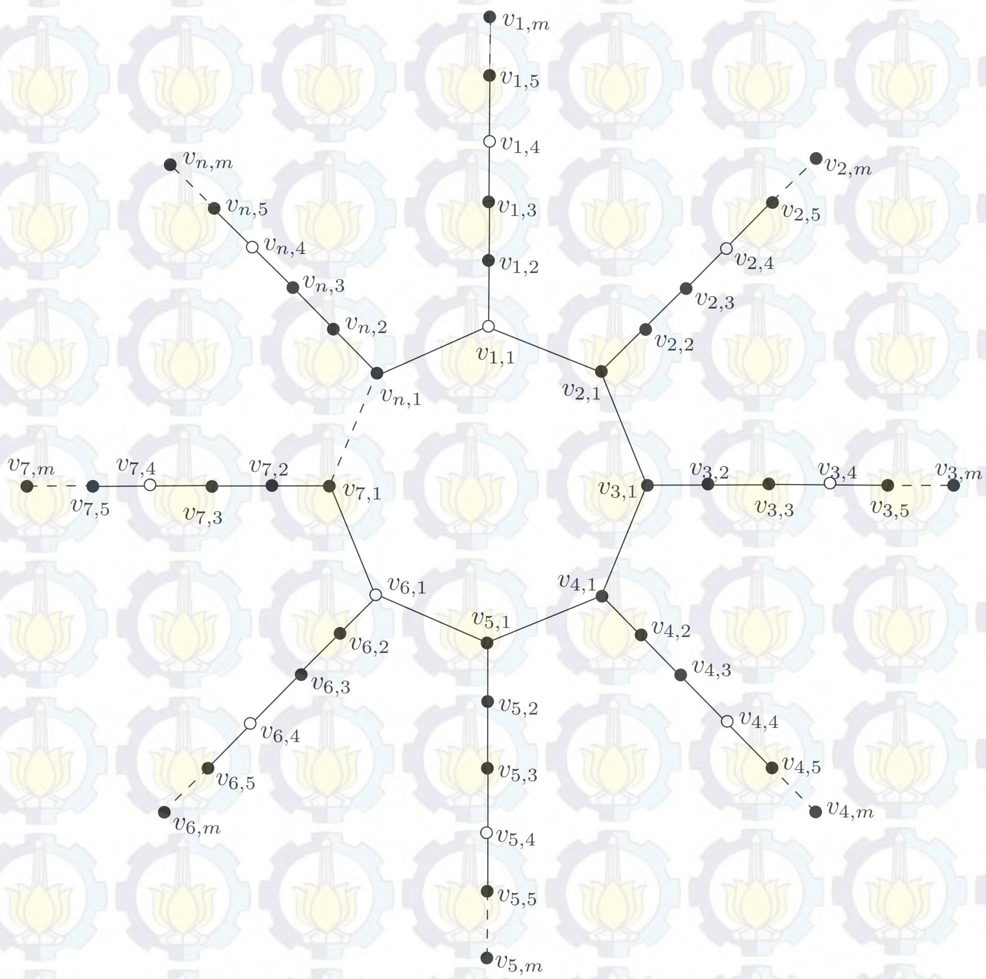
Karena $m \equiv 1 \pmod 5$, maka terlebih dahulu ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada P_{m-1}. sebagaimana Teorema 4.8, $\gamma_2(P_{m-1}) = \frac{m-1}{5}$. Sehingga untuk n buah P_{m-1} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $\frac{n(m-1)}{5}$. Sedangkan satu simpul pada P_m yang belum terdominasi yang juga merupalan simpul-simpul $V(C_n)$ memiliki bilangan dominasi $\lceil \frac{n}{5} \rceil$. Dengan demikian bilangan dominasi pada graf $C_n \triangleright P_m$ adalah $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \leq \frac{n(m-1)}{5} + \lceil \frac{n}{5} \rceil$.

Dari kasus 1 dan 2 tersebut dapat dilihat bahwa $\frac{n(m-1)}{5} + \lceil \frac{n}{5} \rceil \leq \frac{n(m+4)}{5}$, sehingga diambil batas yang minimal untuk bilangan dominasi jarak dua pada $C_n \triangleright P_m$, yaitu $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \leq \frac{n(m-1)}{5} + \lceil \frac{n}{5} \rceil$.

Andaikan $\frac{n(m-1)}{5}+\lceil\frac{n}{5}\rceil$ bukan bilangan dominasi yang minimal, kita misalkan $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \leq \frac{n(m-1)}{5}+\lceil\frac{n}{5}\rceil-1$. Karena setiap simpul maksimal dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $(\frac{n(m-1)}{5}+\lceil\frac{n}{5}\rceil-1)5$, karena $n \in Z^+$ dan $n \equiv 0$ (mod 5), maka $\lceil\frac{n}{5}\rceil=\frac{n}{5}$. Sehingga

$$\left(\frac{n(m-1)}{5}+\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-1\right)5=\left(\frac{n(m-1)}{5}+\frac{n}{5}-1\right)5=nm-5<nm.$$

Karena simpul yang terdominasi kurang dari order pada graf $C_n \triangleright P_m$, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \nleq \frac{n(m-1)}{5}+\lceil\frac{n}{5}\rceil-1$ dan terbukti bahwa $\gamma_2(C_n \triangleright P_m)=\frac{n(m-1)}{5}+\lceil\frac{n}{5}\rceil$.



Gambar 4.15: Graf $C_n \triangleright P_m$ untuk $m \equiv 1$ (mod 5) dengan Simpul-Simpul Warna Putih Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Jarak Dua

Gambar 4.15 menunjukkan contoh bilangan dominasi jarak dua pada $C_n \triangleright P_m$ untuk $m \equiv 1 \pmod 5$. Jika diambil sebarang $v_{i,m-2}$ bukan elemen S_2 maka simpul $v_{i,m}, v_{i,m-1}, v_{i,m-2}, v_{i,m-3}$ dan $v_{i,m-4}$ tidak dapat didominasi oleh semua simpul pada S_2.

3. $m \equiv 2 \pmod 5$

Kasus 1: $S_2 \in V(P_m)$

Untuk setiap $P_{i,m}$, bilangan dominasi jarak dua pada P_m adalah $\gamma_2(P_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil$. Karena $m \equiv 2 \pmod 5$ dan $m \in Z^+$, maka $\gamma_2(P_m) = \frac{m+3}{5}$. Karena terdapat n buah P_m pada graf $C_n \triangleright P_m$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $C_n \triangleright P_m$ adalah $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \leq n(\gamma_2(P_m)) = \frac{n(m+3)}{5}$.

Kasus 2: $S_2 \in V(P_m) \cup V(C_n)$

Karena $m \equiv 2 \pmod 5$, maka terlebih dahulu ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada P_{m-2}. Sebagaimana pada pembuktian-pembuktian sebelumnya, maka $\gamma_2(P_{m-2}) = \frac{m-2}{5}$. Sehingga untuk n buah P_{m-2} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $\frac{n(m-2)}{5}$. Sedangkan dua simpul pada setiap P_m yang belum terdominasi salah satunya merupakan simpul $V(C_n)$. Sehingga himpunan simpul yang belum terdominasi sama dengan graf C_n yang masing-masing simpulnya terhubung dengan sebuah simpul. Simpul-simpul tersebut isomorfis dengan graf $C_n \odot G_1$, G_1 adalah graf trivial yang terdiri dari satu simpul. Sehingga menurut Teorema 4.11, $\gamma_2(C_n \odot G_1) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Dengan demikian bilangan dominasi pada graf $C_n \triangleright P_m$ adalah $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \leq \frac{n(m-2)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Dua kemungkinan batas atas bilangan dominasi jarak dua pada kasus 1 dan 2 menunjukkan $\frac{n(m-2)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil \leq \frac{n(m+3)}{5}$, sehingga diambil batas yang minimal untuk bilangan dominasi jarak dua pada $C_n \triangleright P_m$, yaitu $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \leq \frac{n(m-2)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Kemudian dimisalkan $\frac{n(m-2)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$ bukan bilangan dominasi yang minimal. Andaikan $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \leq \frac{n(m-2)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil - 1$. Karena setiap simpul maksimal dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $(\frac{n(m-2)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil - 1)5$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{n(m-2)}{5} + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1\right)5 &< \left(\frac{n(m-2)}{5} + \left(\frac{n}{3} + 1\right) - 1\right)5 \\ &= nm - 2n + \frac{5n}{3}.\end{aligned}$$

Karena $nm - 2n + \frac{5n}{3} < nm$, sehingga terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \nleq \frac{n(m-2)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil - 1$ dan terbukti bahwa $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) = \frac{n(m-2)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

4. $m \equiv 3$ (mod 5)

   Kasus 1: $S_2 \in V(P_m)$

   Untuk setiap $P_{i,m}$, bilangan dominasi jarak dua pada P_m adalah $\gamma_2(P_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil$, karena $m \equiv 3 \pmod 5$ dan $m \in Z^+$, maka $\gamma_2(P_m) = \frac{m+2}{5}$. Karena terdapat n buah P_m pada graf $C_n \triangleright P_m$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $C_n \triangleright P_m$ adalah $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \leq n(\gamma_2(P_m)) = \frac{n(m+2)}{5}$.

   Kasus 2: $S_2 \in V(P_m) \cup V(C_n)$

   Karena $m \equiv 3 \pmod 5$, maka terlebih dahulu ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada P_{m-3}. Sama seperti pembuktian sebelumnya, maka $\gamma_2(P_{m-3}) = \frac{m-3}{5}$. Sehingga untuk n buah P_{m-3} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $\frac{n(m-3)}{5}$. Sedangkan tiga simpul pada setiap P_m yang belum terdominasi salah satunya merupakan simpul-simpul $V(C_n)$. Sehingga himpunan simpul yang belum terdominasi sama dengan n buah graf P_3 dengan salah satu simpul ujungnya terhubung membentuk Lingkaran C_n. Karena jarak terjauh untuk setiap simpul C_n pada simpul P_m yang belum terdominasi sama dengan 2, maka setiap simpul C_n diambil sebagai elemen S_2, sehingga kedua simpul P_m tersebut dapat didominasi. Dengan demikian bilangan dominasi jarak dua pada graf $C_n \triangleright P_m$ adalah $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \leq \frac{n(m-3)}{5} + n$.

   Karena $\frac{n(m+2)}{5} = \frac{n(m-3)}{5} + n$, sehingga kasus 1 dan 2 menunjukkan bilangan dominasi jarak dua minimal yang sama. Sehingga $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \leq \frac{n(m-3)}{5} + n$.

   Selanjutnya, misalkan $\frac{n(m-3)}{5} + n$ bukan bilangan dominasi yang minimal. Andaikan $\frac{n(m-3)}{5} + n - 1$, karena setiap simpul dari $\frac{n(m-3)}{5}$ simpul dapat mendominasi maksimal 5 simpul dan setiap simpul dari n simpul dapat mendominasi 3 simpul, maka diambil sebuah simpul dari $\frac{n(m-3)}{5}$ simpul, yaitu simpul elemen S_2 pada P_m mengakibatkan banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah

$$\left(\frac{n(m-3)}{5} - 1\right)5 + n \cdot 3 = nm - 5 < nm.$$

   Dengan demikian terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi.

Sehingga $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \leq \frac{n(m-3)}{5} + n - 1$ dan terbukti bahwa $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) = \frac{n(m-3)}{5} + n$ atau $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) = \frac{n(m+2)}{5}$.

5. $m \equiv 4$ (mod 5)

Kasus 1: $S \in V(P_m)$

Untuk setiap $P_{i,m}$, bilangan dominasi jarak dua pada P_m adalah $\gamma_2(P_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil$. Karena $m \equiv 4$ (mod 5) dan $m \in Z^+$, maka $\gamma_2(P_m) = \frac{m+1}{5}$. Karena terdapat n buah P_m pada graf $C_n \triangleright P_m$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $C_n \triangleright P_m$ adalah $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \leq n(\gamma_2(P_m)) = \frac{n(m+1)}{5}$.

Kasus 2: $S \in V(P_m) \cup V(C_n)$

Karena $m \equiv 3$ (mod 5), maka terlebih dahulu ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada P_{m-4}. Sama seperti pembuktian sebelumnya, maka $\gamma_2(P_{m-4}) = \frac{m-4}{5}$. Sehingga untuk n buah P_{m-4} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $\frac{n(m-4)}{5}$. Sedangkan tiga simpul pada setiap P_m yang belum terdominasi salah satunya merupakan simpul-simpul $V(C_n)$. Sehingga himpunan simpul yang belum terdominasi terdiri dari n buah graf P_4 dengan salah satu simpul ujungnya terhubung. Karena jarak terjauh untuk setiap simpul C_n pada simpul P_m yang belum terdominasi sama dengan 3, maka jika diambil simpul C_n sebagai elemen S_2 mengakibatkan banyaknya himpunan dominasi yang dibutuhkan untuk menjangkau simpul-simpul yang belum terdominasi tidak akan minimum, karena akan dibutuhkan lebih dari n simpul untuk menjangkau simpul-simpul yang belum terdominasi tersebut. Sehingga untuk kasus ini minimal diambil satu simpul untuk masing-masing P_4 dan bukan $v_{i,1}$ atau pun $v_{i,4}$, karena $d(v_{i,1}, v_{i,4}) = 3$. Dengan demikian dibutuhkan minimal n simpul dengan masing-masing simpul dapat mendominasi 4 simpul, simpul yang dapat diambil sebagai elemen S_2 yaitu simpul $v_{i,2}$ atau $v_{i,3}$. Sehingga bilangan dominasi jarak dua pada graf $C_n \triangleright P_m$ adalah $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \leq \frac{n(m-4)}{5} + n$.

Kasus 1 dan 2 menunjukkan bilangan dominasi jarak dua minimal yang sama. Sehingga batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \triangleright P_n$ yaitu $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{n(m-4)}{5}n$.

Andaikan $\frac{n(m-4)}{5} + n$ bukan bilangan dominasi jarak dua yang minimal. Misalkan $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{n(m-4)}{5} + n - 1$ dengan mengambil sebarang satu simpul pada P_m sedemikian tidak lagi menjadi elemen S_2. Hal ini mengakibatkan banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah

$$\left(\frac{n(m-4)}{5}-1\right)5+n\cdot 4=nm-5<nm.$$

Dengan demikian terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) \leq \frac{n(m-4)}{5}+n-1$ dan terbukti bahwa $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) = \frac{n(m-4)}{5}+n$ atau $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) = \frac{n(m+1)}{5}$.

Dari kelima pembuktian di atas terbukti bahwa bilangan dominasi jarak dua pada $C_n \triangleright P_m$ untuk $m \equiv 0$ (mod 5), $m \equiv 3$ (mod 5), dan $m \equiv 4$ (mod 5) dapat disimpulkan bahwa $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) = n\lceil \frac{m}{5} \rceil$. Untuk $m \equiv 1$ (mod 5), $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) = n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{5} \rceil$, sedangkan untuk $m \equiv 2$ (mod 5), $\gamma_2(C_n \triangleright P_m) = n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil$. $\square$

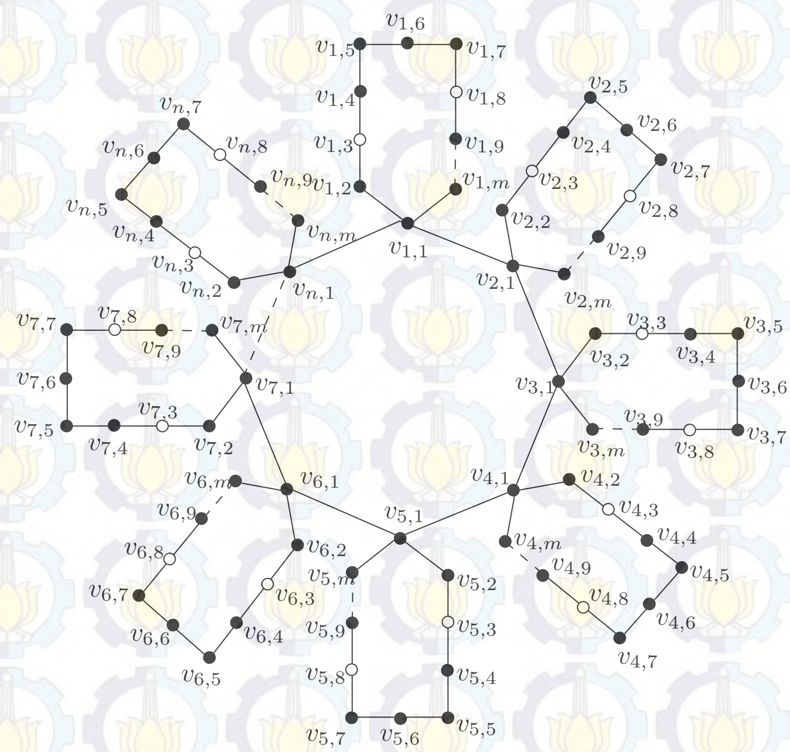
Teorema 4.16. *Diberikan dua buah graf lingkaran C_n dan C_m dengan masing-masing ordernya n dan m untuk $n, m \geq 3$. Maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi comb $C_n \triangleright C_m$ adalah*

$$\gamma_2(C_n \triangleright C_m) = \begin{cases} \frac{nm}{5} & \textit{jika } m \equiv 0 \textit{ (mod 5)}, m \equiv 4 \textit{ (mod 5)} \\ n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{5} \rceil & \textit{jika } m \equiv 1 \textit{ (mod 5)} \\ n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \textit{jika } m \equiv 2 \textit{ (mod 5)}, m \equiv 3 \textit{ (mod 5)} \end{cases}$$

Bukti: Misalkan $V(C_n \triangleright C_m) = \{V_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan $|C_n \triangleright C_m| = nm$. Graf $C_n \triangleright C_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.16. Berdasarkan definisi operasi *comb*, maka simpul ujung C_m yang melekat pada graf C_n dapat dikatakan sebagai simpul-simpul C_n atau pun simpul-simpul C_m. Oleh karena itu, untuk menunjukkan banyak simpul minimal yang menjadi elemen himpunan dominasi jarak satu pada graf $C_n \triangleright C_m$, maka untuk masing-masing nilai m akan dibagi menjadi dua kasus. Kasus pertama jika simpul-simpul S_2 hanya diambil dari simpul-simpul C_m, sedangkan kasus kedua jika S_2 diambil dari $V(C_m) \cup V(C_n)$ dengan ketentuan simpul S_2 diambil terlebih dahulu dari $V(C_m)$ sebanyak kelipatan 5, karena satu simpul elemen S_2 pada C_m dapat mendominasi maksimal 5 simpul. Kemudian dilanjutkan pada simpul-simpul $V(C_n)$ yang terhubung atau memiliki jarak terkecil dengan $V(C_m)$ yang belum terdominasi.

1. $m \equiv 0$ (mod 5)

   Ambil $S_2 \in V(C_m)$, karena $m \in Z^+$ dengan $m \equiv 0$ (mod 5) dan $\gamma_2(C_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil$, maka bilangan dominasi jarak dua pada setiap $C_{i,m}$ adalah $\gamma_2(C_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil$ dan dapat ditulis $\gamma_2(C_m) = \frac{m}{5}$. Karena terdapat n buah C_m pada graf $C_n \triangleright C_m$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $C_n \triangleright C_m$ adalah $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \leq n(\gamma_2(C_m)) = \frac{nm}{5}$.



Gambar 4.16: Graf $C_n \triangleright C_m$ untuk $m \equiv 0$ (mod 5) dengan Simpul-Simpul Warna Putih Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Jarak Dua

   Untuk menunjukkan apakah $\frac{nm}{5}$ merupakan bilangan dominasi yang minimum pada graf $C_n \triangleright C_m$, dimisalkan $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{nm}{5} - 1$. Karena setiap simpul elemen S_2 dapat mendominasi maksimal 5 simpul, maka banyak simpul yang dapat didominasi jika $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{mn}{5} - 1$ adalah

$$5\left(\frac{nm}{5} - 1\right) = nm - 5 < nm.$$

   Order dari graf $C_n \triangleright C_m$ lebih besar dari banyak simpul yang dapat didominasi. Hal ini menunjukkan $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \nleq \frac{nm}{5} - 1$, sehingga terbukti bahwa $\frac{nm}{5}$ adalah bilangan dominasi jarak dua yang minimal pada graf $C_n \triangleright C_m$. Oleh karena itu, $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) = \frac{nm}{5}$.

Simpul-simpul yang berwarna putih pada Gambar 4.16 merupakan contoh simpul-simpul elemen S_2 pada $C_n \triangleright C_m$ untuk $m \equiv 0 \pmod 5$. Jika sebarang simpul $v_{i,m-2}$ tidak termasuk simpul-simpul elemen S_2, maka simpul-simpul yang tidak didominasi oleh simpul manapun elemen S_2 adalah simpul $v_{i,m-4}, v_{i,m-3}, v_{i,m-2}, v_{i,m-1}$ dan $v_{i,m}$.

2. $m \equiv 1 \pmod 5$

Kasus 1: $S_2 \in V(C_m)$

Untuk setiap $C_{i,m}$, bilangan dominasi jarak dua pada C_m adalah $\gamma_2(C_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil$. Karena $m \equiv 1 \pmod 5$ dan $m \in Z^+$, maka $\gamma_2(C_m) = \frac{m+4}{5}$. Karena terdapat n buah C_m pada graf $C_n \triangleright C_m$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $C_n \triangleright C_m$ adalah $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \leq n(\gamma_2(C_m)) = \frac{n(m+4)}{5}$.

Kasus 2: $S_2 \in V(C_m) \cup V(C_n)$

Sebagaimana Teorema 4.9, maka $\gamma_2(C_{m-1}) = \lceil \frac{m-1}{5} \rceil$ dan dapat ditulis $\gamma_2(C_{m-1}) = \frac{m-1}{5}$, karena $m \equiv 1 \pmod 5$ dan $m \in Z^+$. Sehingga untuk n buah C_{m-1} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $\frac{n(m-1)}{5}$. Sedangkan satu simpul pada C_m yang belum terdominasi yang juga merupakan simpul-simpul $V(C_n)$ memiliki bilangan dominasi $\lceil \frac{n}{5} \rceil$. Dengan demikian bilangan dominasi pada graf $C_n \triangleright C_m$ adalah $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{n(m-1)}{5} + \lceil \frac{n}{5} \rceil$.

Kasus 1 dan 2 menunjukkan bahwa $\frac{n(m-1)}{5} + \lceil \frac{n}{5} \rceil \leq \frac{n(m+4)}{5}$, sehingga diambil batas atas yang minimal untuk bilangan dominasi jarak dua pada $C_n \triangleright C_m$, yaitu $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{n(m-1)}{5} + \lceil \frac{n}{5} \rceil$.

Andaikan $\frac{n(m-1)}{5} + \lceil \frac{n}{5} \rceil$ bukan bilangan dominasi jarak dua yang minimal dan $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{n(m-1)}{5} + \lceil \frac{n}{5} \rceil - 1$. Karena setiap simpul maksimal dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah $(\frac{n(m-1)}{5} + \lceil \frac{n}{5} \rceil - 1)5$, karena $n \in Z^+$ dan $n \equiv 0 \pmod 5$, maka $\lceil \frac{n}{5} \rceil = \frac{n}{5}$. Oleh karena itu,

$$\left(\frac{n(m-1)}{5} + \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - 1\right) 5 = \left(\frac{n(m-1)}{5} + \frac{n}{5} - 1\right) 5 = nm - 5 < nm.$$

Dengan demikian, simpul yang terdominasi kurang dari banyaknya simpul pada $C_n \triangleright C_m$, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \nleq \frac{n(m-1)}{5} + \lceil \frac{n}{5} \rceil - 1$ dan terbukti bahwa $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) = \frac{n(m-1)}{5} + \lceil \frac{n}{5} \rceil$.

3. $m \equiv 2$ (mod 5)

Kasus 1: $S_2 \in V(C_m)$

Untuk setiap $C_{i,m}$, bilangan dominasi jarak dua pada C_m adalah $\gamma_2(C_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil$, karena $m \equiv 2$ (mod 5) dan $m \in Z^+$, maka $\gamma_2(C_m) = \frac{m+3}{5}$. Karena terdapat n buah C_m pada graf $C_n \triangleright C_m$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $C_n \triangleright C_m$ adalah $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \leq n(\gamma_2(C_m)) = \frac{n(m+3)}{5}$.

Kasus 2: $S_2 \in V(C_m) \cup V(C_n)$

Karena $m \equiv 2$ (mod 5), maka terlebih dahulu ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada C_{m-2}. Seperti pada pembuktian-pembuktian sebelumnya, maka $\gamma_2(C_{m-2}) = \lceil \frac{m-2}{5} \rceil$. Karena $m \equiv 2$ (mod 5) dan $m \in Z^+$, maka $\gamma_2(C_{m-2}) = \frac{m-2}{5}$. Sehingga untuk n buah C_{m-2} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $\frac{n(m-2)}{5}$. Sedangkan dua simpul pada setiap C_m yang belum terdominasi salah satunya merupakan simpul $V(C_n)$. Sehingga himpunan simpul yang belum terdominasi sama dengan graf C_n yang masing-masing simpulnya terhubung dengan sebuah simpul. Simpul-simpul tersebut isomorfis dengan graf $C_n \odot G_1$, sehingga menurut Teorema 4.11, $\gamma_2(C_n \odot G_1) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Dengan demikian bilangan dominasi pada graf $C_n \triangleright C_m$ adalah $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{n(m-2)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Kedua kasus di atas menunjukkan $\frac{n(m-2)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil \leq \frac{n(m+3)}{5}$, sehingga diambil batas atas minimal untuk bilangan dominasi jarak dua pada $C_n \triangleright C_m$, yaitu $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{n(m-2)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Selanjutnya, jika dimisalkan $\frac{n(m-2)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$ bukan bilangan dominasi yang minimal. Andaikan $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{n(m-2)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil - 1$. Karena setiap simpul maksimal dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $(\frac{n(m-2)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil - 1)5$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{n(m-2)}{5} + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil - 1\right)5 \quad &< \quad \left(\frac{n(m-2)}{5} + \left(\frac{n}{3} + 1\right) - 1\right)5 \\ &= \quad nm - 2n + \frac{5n}{3}. \end{aligned}$$

Karena $nm - 2n + \frac{5n}{3} < nm$, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \not\leq \frac{n(m-2)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil - 1$ dan terbukti bahwa $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{n(m-2)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

4. $m \equiv 3$ (mod 5)

Kasus 1: $S_2 \in V(C_m)$

Untuk setiap $C_{i,m}$, bilangan dominasi jarak dua pada C_m adalah $\gamma_2(C_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil$, karena $m \equiv 3$ (mod 5) dan $m \in Z^+$, maka $\gamma_2(C_m) = \frac{m+2}{5}$. Karena terdapat n buah C_m pada graf $C_n \rhd C_m$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $C_n \rhd C_m$ adalah $\gamma_2(C_n \rhd C_m) \leq n(\gamma_2(C_m)) = \frac{n(m+2)}{5}$.

Kasus 2: $S_2 \in V(C_m) \cup V(C_n)$

Karena $m \equiv 3$ (mod 5), maka terlebih dahulu ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada C_{m-3}. Sama seperti pembuktian sebelumnya, maka $\gamma_2(C_{m-3}) = \lceil \frac{m-3}{5} \rceil$. Karena $m \equiv 3$ (mod 5) dan $m \in Z^+$, maka $\gamma_2(C_{m-3}) = \frac{m-3}{5}$. Sehingga untuk n buah C_{m-3} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $\frac{n(m-3)}{5}$. Sedangkan tiga simpul pada setiap C_m yang belum terdominasi salah satunya merupakan simpul-simpul $V(C_n)$. Karena derajat $V(C_n) \geq 4$, dan dua tetangganya merupakan simpul-simpul pada Ci, m, maka dua simpul pada C_m yang belum terdominasi selain simpul $V(C_n)$ diambil yang jaraknya satu ke setiap $V(C_n)$. Sehingga himpunan simpul yang belum terdominasi isomorfis dengan graf $C_n \odot G_2$, G_2 pada graf ini merupakan dua simpul tidak terhubung yang dikoronakan dengan graf lingkaran C_n. Sehingga berdasarkan Teorema 4.11 simpul-simpul tersebut memiliki bilangan dominasi sama dengan $\lceil \frac{n}{3} \rceil$. Dengan demikian bilangan dominasi jarak dua pada graf $C_n \rhd C_m$ adalah $\gamma_2(C_n \rhd C_m) \leq \frac{n(m-3)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Karena $\frac{n(m-3)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil \leq \frac{n(m+2)}{5}$ maka diambil batas atas yang minimum, yaitu bilangan dominasi jarak dua pada $C_n \rhd C_m$ adalah $\gamma_2(C_n \rhd C_m) \leq \frac{n(m-3)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

Selanjutnya, jika $\leq \frac{n(m-3)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$ bukan bilangan dominasi yang minimal, misalkan $\gamma_2(C_n \rhd C_m) \leq \frac{n(m-3)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil - 1$. Karena setiap simpul elemen S_2 pada C_m maksimal dapat mendominasi 5 simpul dan setiap simpul S_2 pada C_n dapat mendominasi maksimal 9 simpul, maka jika diambil sebuah simpul dari $\frac{n(m-3)}{5}$ simpul yang bukan elemen S_2, yaitu simpul elemen S_2 pada C_n mengakibatkan banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $(\frac{n(m-3)}{5} -)5 + (\lceil \frac{n}{3} \rceil - 1)9$.

$$\left(\frac{n(m-3)}{5}-1\right)5+\left(\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil-1\right)9 \;<\; \left(\frac{n(m-3)}{5}-1\right)5+\left(\frac{n}{3}+1-1\right)9$$
$$= nm-3n+3n$$
$$= nm.$$

Karena simpul yang dapat didominasi kurang dari order pada $C_n \triangleright C_m$, sehingga dapat disimpulkan bahwa terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Oleh karena itu, $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{n(m-3)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil - 1$ dan terbukti bahwa $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) = \frac{n(m-3)}{5} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

5. $m \equiv 4$ (mod 5)

Kasus 1: $S_2 \in V(C_m)$

Untuk setiap $C_{i,m}$, bilangan dominasi jarak dua pada C_m adalah $\gamma_2(C_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil$, karena $m \equiv 4$ (mod 5) dan $m \in Z^+$, maka $\gamma_2(C_m) = \frac{m+1}{5}$. Karena terdapat n buah C_m pada graf $C_n \triangleright C_m$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $C_n \triangleright C_m$ adalah $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \leq n(\gamma_2(C_m)) = \frac{n(m+1)}{5}$.

Kasus 2: $S_2 \in V(C_m) \cup V(C_n)$

Karena $m \equiv 4$ (mod 5), maka terlebih dahulu ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada C_{m-4}. Sama seperti pembuktian sebelumnya, maka $\gamma_2(C_{m-4}) = \frac{m-4}{5}$. Sehingga untuk m buah C_{m-4} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $\frac{n(m-4)}{5}$. Sedangkan empat simpul pada setiap C_m yang belum terdominasi salah satunya merupakan simpul-simpul $V(C_n)$. Karena derajat $V(C_n) \geq 4$, dan dua tetangganya merupakan simpul-simpul pada $C_{i,m}$, maka sebuah simpul pada C_m yang belum terdominasi selain simpul $V(C_n)$ dan dua simpul yang bertetangga dengan $V(C_n)$ adalah simpul dengan jarak ke $V(C_n)$ sama dengan dua. Sehingga ambil semua simpul pada $V(C_n)$ sebagai elemen S_2 dan setiap simpul tersebut dapat mendominasi 4 simpul. Dengan demikian bilangan dominasi jarak dua pada graf $C_n \triangleright C_m$ adalah $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{n(m-4)}{5} + n$.

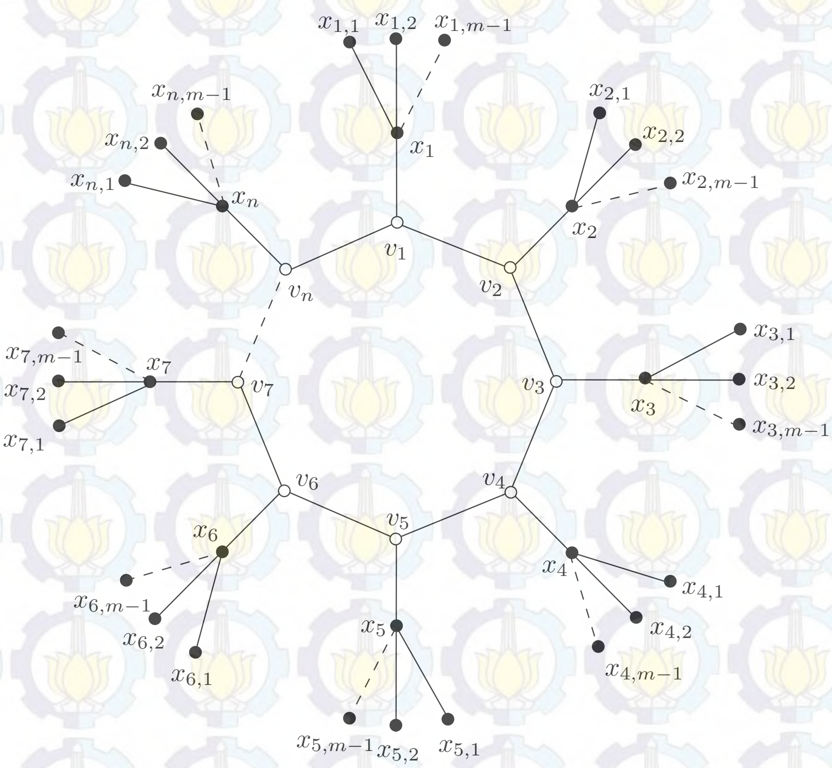
Kasus 1 dan 2 menunjukkan bilangan dominasi jarak dua minimal yang sama. Sehingga kita dapat mengambil batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $C_n \triangleright C_m$ yaitu $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{n(m-4)}{5} + n$.

Andaikan $\frac{n(m-4)}{5} + n$ bukan bilangan dominasi jarak dua yang minimal. Misalkan $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \leq \frac{n(m-4)}{5} + n - 1$, dengan mengambil sebarang satu simpul pada C_m sedemikian tidak lagi menjadi elemen S_2. Hal ini mengakibatkan banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah

$$\left(\frac{n(m-4)}{5}-1\right)5+n\cdot 4=nm-5<nm.$$

Dengan demikian terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) \nleq \frac{n(m-4)}{5}+n-1$ dan terbukti bahwa $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) = \frac{n(m-4)}{5}+n$ atau $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) = \frac{n(m+1)}{5}$.

Kelima pembuktian untuk masing-masing nilai n di atas menunjukkan bilangan dominasi jarak dua pada $C_n \triangleright C_m$ yang berbeda-beda. Akan tetapi beberapa bilangan dominasi dengan nilai n tertentu dapat direduksi, misalnya untuk $m \equiv 0$ (mod 5) dan $m \equiv 4$ (mod 5) dapat disimpulkan bahwa $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) = n\lceil \frac{m}{5} \rceil$, untuk $m \equiv 1$ (mod 5), $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) = n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{5} \rceil$, sedangkan untuk $m \equiv 2$ (mod 5) dan $m \equiv 3$ (mod 5), $\gamma_2(C_n \triangleright C_m) = n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil$. $\square$



Gambar 4.17: Graf $C_n \triangleright S_m$ dengan Simpul C_n Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Jarak Dua

Teorema 4.17. *Diberikan graf lingkaran C_n dan graf bintang S_m dengan masing-masing ordernya n dan m untuk $n, m \geq 3$. Maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi comb $C_n \triangleright S_m$ adalah $\gamma_2(C_n \triangleright S_m) = n$.*

Bukti: Graf $C_n \triangleright S_m$ adalah graf yang diperoleh dengan melekatkan salah satu simpul *pendat* dari masing-masing graf S_m kopian ke-i pada setiap simpul graf C_n sepeti yang ditunjukkan Gambar 4.17. Maka $|C_n \triangleright S_m| = n(m+1)$. Berdasarkan Observasi 4.1 diketahui bahwa $\gamma_2(S_m) = 1$. Karena terdapat n kopi graf S_m pada $C_n \triangleright S_m$, maka maksimal terdapat n simpul elemen himpunan dominasi jarak dua. Sehingga dapat dituliskan bahwa $|S_2| = \gamma_2(C_n \triangleright S_m) \leq n$.

Andaikan $\gamma_2(C_n \triangleright S_m) \leq n-1$, maka terdapat S_m kopian ke-i yang semua simpulnya bukan elemen himpunan dominasi jarak dua. Seperti yang diketahui bahwa graf Bintang S_m memiliki diameter sama dengan 2. Sehingga pastilah terdapat v_i elemen S_m sedemikian $d(v_i, S_2) > 2$. Oleh karena itu, $|S_2| \nleq n-1$, sehingga n adalah bilangan dominasi jarak dua minimum pada graf $C_n \triangleright S_m$. Dengan demikian terbukti bahwa $|S_2| = \gamma_2(C_n \triangleright S_m) = n$. $\square$

Contoh Himpunan dominasi minimum pada graf $C_n \triangleright S_m$ dapat dilihat pada Gambar 4.17. Pada gambar tersebut simpul-simpul S_2 diambil dari simpul-simpul $V(C_n)$.

4.4 Perbandingan Bilangan Dominasi Jarak Satu dan Jarak Dua

Berdasarkan hasil yang diperoleh pada subbab 4.1 sampai 4.3, dapat dituliskan kembali hasil mengenai bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua untuk masing-masing graf baik graf khusus maupun graf hasil operasi seperti pada Tabel 4.1 dan Tabel 4.2.

Dari kedua tabel tersebut dapat dilihat bahwa secara umum tidak dapat disimpulkan perbandingan antara bilangan dominasi jarak satu dengan bilangan dominasi jarak dua pada suatu graf. Bahkan untuk graf yang sama juga tidak dapat ditentukan perbandingan yang spesifik untuk nilai bilangan dominasi jarak satu dan jarak duanya. Sebagai contoh, menurut Goddard dan Henning (2006) graf Lintasan P_m memiliki bilangan dominasi jarak satu yaitu $\gamma = \lceil \frac{m}{3} \rceil$, pada penelitian ini diketahui bilangan dominasi jarak dua pada graf Lintasan P_m adalah $\gamma_2(P_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil$.

Sedangkan graf Bintang seperti yang diketahui memiliki bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua yang sama yaitu $\gamma(S_n) = \gamma_2(S_n) = 1$. Begitu juga untuk graf hasil operasi, graf hasil operasi *comb* antara graf Lintasan dengan graf Bintang memiliki bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua yang sama. Akan tetapi tidak berlaku untuk $P_m \triangleright P_n$ dan $P_m \triangleright C_n$ serta graf yang lainnya. Beberapa hal yang dapat diamati seperti pada Observasi 4.1 dan Observasi 4.2 yang menyebabkan tidak adanya perbandingan secara umum antara bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua pada suatu graf seperti berikut ini.

Tabel 4.1: Ringkasan Bilangan Dominasi Jarak Satu pada Graf Hasil Operasi

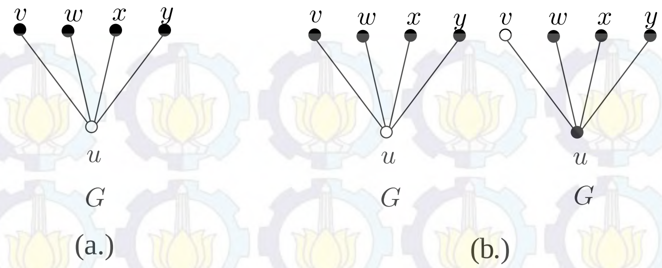
No.	**Graf**	**Bilangan Dominasi Jarak Satu**
1.	$G_m \odot H_n$	$\gamma(G_m \odot H_n) = m$
2.	$P_m \triangleright P_n$	$\gamma(P_m \triangleright P_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 0 \text{ (mod 3) dan } n \equiv 2 \text{ (mod 3)} \\ m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 1 \text{ (mod 3)} \end{cases}$
3.	$P_m \triangleright C_n$	$\gamma(P_m \triangleright C_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 0 \text{ (mod 3) dan } n \equiv 2 \text{ (mod 3)} \\ m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 1 \text{ (mod 3)} \end{cases}$
4.	$P_m \triangleright S_n$	$\gamma(P_m \triangleright S_n) = m$
5.	$C_n \triangleright P_m$	$\gamma(C_n \triangleright P_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 0 \text{ (mod 3) dan } m \equiv 2 \text{ (mod 3)} \\ n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 1 \text{ (mod 3)} \end{cases}$
6.	$C_n \triangleright C_m$	$\gamma(C_n \triangleright C_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 0 \text{ (mod 3), } m \equiv 2 \text{ (mod 3)} \\ n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 1 \text{ (mod 3)} \end{cases}$
7.	$C_n \triangleright S_m$	$\gamma(C_n \triangleright S_m) = n$

1. Jarak dan pemilihan simpul

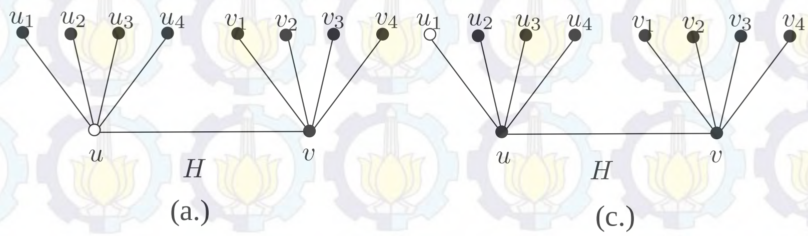
   Jarak sangat berkaitan dengan definisi bilangan dominasi jarak satu dan bilangan dominasi jarak dua. Perbedaan definisi bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua hanya terletak pada jarak simpul yang merupakan elemen himpunan dominasi ke setiap simpul graf. Untuk bilangan dominasi jarak dua, jarak setiap simpul pada suatu graf ke simpul-simpul S_2 kurang dari atau sama dengan dua. Sehingga terdapat kemungkinan jika bilangan dominasi jarak dua pada suatu graf sama dengan bilangan dominasi jarak satunya. Oleh karena itu, sebarang simpul dalam suatu graf dapat dipilih sebagai elemen S maupun S_2 asalkan dapat menjangkau semua simpul dengan jarak sama dengan satu untuk S_1 dan jarak maksimal sama dengan dua untuk S_2. Gambar 4.18 (a.) merupakan contoh simpul elemen himpunan dominasi jarak satu yaitu $\gamma(G) = 1$ dengan $S = \{u\}$, sedangkan Gambar 4.18 (b.) menunjukkan contoh simpul elemen himpunan dominasi jarak dua yang dapat diambil dari u atau simpul v dengan $\gamma_2(G) = 1$. Karena meskipun jika diambil v sebagai elemen S_2, $d(v, V(G)) \leq 2$ sehingga tetap memenuhi definisi bilangan dominasi jarak dua.

Tabel 4.2: Ringkasan Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Sederhana dan graf Hasil Operasi

No.	**Graf**	**Bilangan Dominasi Jarak Dua**
1.	P_m	$\gamma_2(P_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil$
2.	C_n	$\gamma_2(C_n) = \lceil \frac{n}{5} \rceil$
3.	$P_m \odot G_n$	$\gamma_2(P_m \odot G_n) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$
4.	$C_n \odot H_m$	$\gamma_2(C_n \odot H_m) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$
5.	$P_m \triangleright P_n$	$\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{jika } n \equiv 0 \text{ (mod 5)}, n \equiv 3 \text{ (mod 5)} \\ & n \equiv 4 \text{ (mod 5)} \\ m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{5} \rceil & \text{jika } n \equiv 1 \text{ (mod 5)} \\ m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 2 \text{ (mod 5)} \end{cases}$
6.	$P_m \triangleright C_n$	$\gamma_2(P_m \triangleright C_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{jika } n \equiv 0 \text{ (mod 5)}, n \equiv 4 \text{ (mod 5)} \\ m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{5} \rceil & \text{jika } n \equiv 1 \text{ (mod 5)} \\ m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 2 \text{ (mod 5)}, n \equiv 3 \text{ (mod 5)} \end{cases}$
7.	$P_m \triangleright S_n$	$\gamma_2(P_m \triangleright S_n) = m$
5.	$C_n \triangleright P_m$	$\gamma_2(C_n \triangleright P_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{5} \rceil & \text{jika } m \equiv 0 \text{ (mod 5)}, m \equiv 3 \text{ (mod 5)}, \\ & n \equiv 4 \text{ (mod 5)} \\ n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{jika } m \equiv 1 \text{ (mod 5)} \\ n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 2 \text{ (mod 5)} \end{cases}$
8.	$C_n \triangleright C_m$	$\gamma_2(C_n \triangleright C_m) = \begin{cases} \frac{nm}{5} & \text{jika } m \equiv 0 \text{ (mod 5)}, m \equiv 4 \text{ (mod 5)} \\ n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{jika } m \equiv 1 \text{ (mod 5)} \\ n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 2 \text{ (mod 5)}, m \equiv 3 \text{ (mod 5)} \end{cases}$
9.	$C_n \triangleright S_m$	$\gamma_2(C_n \triangleright S_m) = n$



Gambar 4.18: Graf dengan Bilangan Dominasi Jarak Satu dan Jarak Dua yang Sama dan Pemilihan Simpul Elemen Himpunan Dominasi yang Beragam



Gambar 4.19: Graf dengan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Terletak pada Simpul dengan Derajat Terbesar

2. Derajat (*degree*)

   Derajat setiap simpul juga merupakan salah satu hal yang perlu dipertimbangkan dalam pemilihan simpul himpunan dominasi pada suatu graf. Simpul dengan derajat maksimal diasumsikan dapat menjangkau lebih banyak simpul dari pada simpul dengan derajat yang minimal. Sebagai ilustrasi dapat dilihat pada Gambar 4.19, graf H pada gambar tersebut merupakan graf dengan $\gamma_2(H) = 1$. Simpul elemen S_2 dapat diambil dari simpul u atau simpul v yaitu simpul dengan derajat terbesar. Sedangkan jika simpul S_2 diambil dari simpul dengan derajat yang minimal misalkan u_1, maka $\gamma_2(H) \neq 1$ karena v_1, v_2, v_3, v_4 tidak akan dapat terdominasi oleh u_1. Akan tetapi hal ini tidak selalu menjamin bahwa simpul dengan derajat minimal tidak dapat diambil sebagai elemen himpunan dominasi. Misalnya pada Gambar 4.20 yaitu graf Lintasan P_4, bilangan dominasi jarak satu pada Lintasan P_4 adalah $\gamma(P_4) = 2$, baik pada Gambar 4.20 (a.) maupun Gambar 4.20 (b.) menunjukkan simpul elemen himpunan dominasi jarak satu merupakan dua simpul yang berwarna putih. Akan tetapi pada gambar yang pertama diambil simpul-simpul ujung yaitu simpul dengan derajat sama dengan satu, sedangkan untuk gambar yang kedua salah satu simpul elemen S diambil dari simpul dalam P_4 yaitu simpul dengan derajat sama dengan dua. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa derajat maksimal terkadang mempengaruhi pemilihan himpunan dominasi pada suatu graf. Sehingga bilangan dominasi baik jarak satu maupun jarak dua pada suatu graf tergantung pada karakter graf masing-masing.

Gambar 4.20: Graf dengan Pemilihan Simpul Elemen Himpunan Dominasi yang Beragam

BAB V
SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian mengenai bilangan dominasi jarak satu dan dua, baik pada graf sederhana maupun graf hasil operasi diperoleh hasil sebagai berikut.

1. Graf Lintasan, Lingkaran, dan Bintang memiliki bilangan dominasi jarak dua berturut-turut $\gamma_2(P_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil$, $\gamma_2(C_n) = \lceil \frac{n}{5} \rceil$, dan $\gamma_2(S_n) = 1$.

2. Graf Lintasan, Lingkaran, dan Bintang yang dikoronakan memiliki bilangan dominasi jarak satu $\gamma(P_m \odot P_n) = \gamma(P_m \odot C_n) = \gamma(P_m \odot S_n) = m$ serta $\gamma(C_n \odot P_m) = \gamma(C_n \odot C_m) = \gamma(C_n \odot S_m) = n$.

3. Graf Lintasan, Lingkaran, dan Bintang yang dikoronakan memiliki bilangan dominasi jarak dua $\gamma_2(P_m \odot P_n) = \gamma_2(P_m \odot C_n) = \gamma_2(P_m \odot S_n) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$ serta $\gamma_2(C_n \odot P_m) = \gamma_2(C_n \odot C_m) = \gamma_2(C_n \odot S_m) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$.

4. Bilangan dominasi jarak satu dan dua pada graf hasil operasi *comb* antara graf Lintasan dan Bintang adalah $\gamma(P_m \triangleright S_n) = \gamma_2(P_m \triangleright S_n) = m$

5. Bilangan dominasi jarak satu dan dua pada graf hasil operasi *comb* antara graf Lingkaran dan Bintang adalah $\gamma(C_n \triangleright S_m) = \gamma_2(C_n \triangleright S_m) = n$

6. Bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi *comb* antara graf Lintasan dan Lingkaran antara lain:

   a. $\gamma(P_m \triangleright P_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 0 \text{ (mod 3) dan } n \equiv 2 \text{ (mod 3)} \\ m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 1 \text{ (mod 3)} \end{cases}$

   b. $\gamma(P_m \triangleright C_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 0 \text{ (mod 3) dan } n \equiv 2 \text{ (mod 3)} \\ m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 1 \text{ (mod 3)} \end{cases}$

   c. $\gamma(C_n \triangleright P_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 0 \text{ (mod 3) dan } m \equiv 2 \text{ (mod 3)} \\ n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 1 \text{ (mod 3)} \end{cases}$

   d. $\gamma(C_n \triangleright C_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 0 \text{ (mod 3), } m \equiv 2 \text{ (mod 3)} \\ n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 1 \text{ (mod 3)} \end{cases}$

7. Bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi *comb* antara graf Lintasan dan Lingkaran antara lain:

a. $$\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{jika } n \equiv 0 \text{ (mod 5)}, n \equiv 3 \text{ (mod 5)}, \\ & n \equiv 4 \text{ (mod 5)} \\ m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{5} \rceil & \text{jika } n \equiv 1 \text{ (mod 5)} \\ m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 2 \text{ (mod 5)} \end{cases}$$

b. $$\gamma_2(P_m \triangleright C_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{jika } n \equiv 0 \text{ (mod 5)}, n \equiv 4 \text{ (mod 5)} \\ m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{5} \rceil & \text{jika } n \equiv 1 \text{ (mod 5)} \\ m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 2 \text{ (mod 5)}, n \equiv 3 \text{ (mod 5)} \end{cases}$$

c. $$\gamma_2(C_n \triangleright P_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{5} \rceil & \text{jika } m \equiv 0 \text{ (mod 5)}, m \equiv 3 \text{ (mod 5)}, \\ & n \equiv 4 \text{ (mod 5)} \\ n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{jika } m \equiv 1 \text{ (mod 5)} \\ n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 2 \text{ (mod 5)} \end{cases}$$

d. $$\gamma_2(C_n \triangleright C_m) = \begin{cases} \frac{nm}{5} & \text{jika } m \equiv 0 \text{ (mod 5)}, m \equiv 4 \text{ (mod 5)} \\ n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{jika } m \equiv 1 \text{ (mod 5)} \\ n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 2 \text{ (mod 5)}, m \equiv 3 \text{ (mod 5)} \end{cases}$$

8. Bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua pada suatu graf tidak memiliki relasi atau perbandingan secara umum. Hal ini dikarenakan oleh beberapa faktor, seperti jarak antar simpul, pemilihan simpul elemen himpunan dominasi, derajat setiap simpul, diameter dan sebagainya.

5.2 Saran

Pada penelitian ini bilangan dominasi yang diperoleh dari graf hasil operasi *comb* masih sebatas satu cara pelekatan simpul. Oleh karena itu, bagi para peneliti yang ingin melanjutkan penelitian tentang bilangan dominasi pada graf disarankan untuk mencari bilangan dominasi pada graf hasil operasi *comb* dengan aturan pelekatan simpul secara umum dengan graf-graf yang lebih beragam atau dapat menggunakan jenis operasi yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, G. dan Lesniak, L., (1996), *Graphs and Digraph*, 3^{rd} edition, Chapman & Hall/CRC, 2-6 Boundaru Row, London SE1 8HN, UK.

Go, C. dan Canoy S., (2011), "Domination in The Corona and Join of Graphs" *International Mathematical Forum*, Vol.6, No.16, hal.763-771. Artikel ini didapat dari: `http://www.m-hikari.com/imf-2011/13-16-2011/goIMF13-16-2011.pdf`

Goddard, W., Henning, M.A. (2006), "Independent Domination in Graphs: *A Survey and Recent Results*", University of Johannesburg, South Africa. Artikel ini didapat dari: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X13000083.`

Gravier, S. (2002), "Total Domination Number of Grid Graph" *Discrete Applied Mathematics*, No.121, hal.119-128. Artikel ini didapat dari: `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X01002979.`

Gross, J. dan Yellen J., (2006), *Graph Theory and Its Applications*, Chapman & Hall/CRC, FL 33487-2742 Boca Raton, London.

Harary, F., Frucht, R. (1970), "On The Corona Of Two Graphs", *Aequationes Mathematicae*, hal.322-325. Buku ini dapat diakses di: `http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/44326/10_2;jsessionid=CC20C7EA64AB7E09F041C3B7265465C8?sequence=1.`

Haynes, W. Teresa. (1996), *Fundamental of Dominations in Graphs*, New York: Marcel Dekker, Inc. Buku ini dapat diakses di: `http://www.amazon.com/Fundamentals-Domination-Chapman-Applied-Mathematics/dp/0824700333.`

Klavžar, S. (1995), "Dominating Cartesian Product of Cycles", *Discrete Applied Mathematics*, No.59, hal.129-136. Artikel ini didapat dari: `http://www.`

sciencedirect.com/science/article/pii/0166218X93E0167W.

Mursyidah, H., Rahmawati, S. (2014), ”Dominating Number dari Graf Hasil Operasi Korona Graf Lintasan dengan Graf Sikel dan sebaliknya”, Tidak Dipublikasikan, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Saputro, S. W., Mardiana, N., dan Purwasi, I.A. (2013), ”The Metric Dimension of Comb Product Graph’, *Graph Theory Conference in Honor of Egawa 60th Birthday*. Artikel ini didapat dari: http://www.rs.tus.ac.jp/egawa_60th_birthday/abstract/contributed_talk/Suhadi_Wido_Saputro.pdf.

Slamin, (2009), *Desain Jaringan: Pendekatan Teori Graf*, Jember University Press, Jember.

Snyder, K. (2011), *c-’Dominating Sets for Families of Graphs*, University of Mary Washington. Artikel ini didapat dari: http://cas.umw.edu/dean/files/2011/10/KelsieSnyderMetamorphosis.pdf.

Subiono, (2015), *Aljabar: Sebagai suatu Fondasi Matematika* Versi 1.0.0, Modul Mata Kuliah Aljabar.

BIOGRAFI PENULIS

Penulis bernama Reni Umilasari, lahir di Jember, 28 Juli 1991, merupakan putri terakhir dari dua bersaudara. Penulis menempuh pendidikan formal di SDN Balung Kulon 5 (1997-2003), SMPN 1 Balung (2003-2006) dan SMAN Ambulu (2006-2009). Setelah lulus dari SMA penulis melanjutkan studi ke Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember melalui jalur SNMPTN 2009 hingga akhirnya dinyatakan lulus pada bulan Februari 2013 dan mendapat predikat *Cum Laude*. Kemudian penulis melanjutkan studi magister di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dengan menerima Beasiswa Program Pascasarjana Dalam Negeri (BPPDN) DIKTI sebagai calon dosen pada tahun 2013. Bidang minat yang ditekuni penulis selama studi baik S1 maupun S2 adalah Teori Graf. Untuk kritik dan saran yang berhubungan dengan tesis ini, penulis dapat dihubungi melalui e-mail: reni.umilasari@gmail.com