



TESIS - TL142308

**ANALISA KONDUKSI PANAS DUA DIMENSI
PADA *FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS*
(FGMs) MENGGUNAKAN METODE ELEMEN
HINGGA (FEM)**

REZZA RUZUQI
NRP. 02511550010002

DOSEN PEMBIMBING
Mas Irfan P. Hidayat, S.T., M.Sc., Ph.D.
Dr. Widyastuti, S.Si., M.Si.

PROGRAM STUDI MAGISTER
JURUSAN TEKNIK MATERIAL DAN METALURGI
FAKULTAS TEKNOLOGI INDUSTRI
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018



TESIS - TL142308

**ANALISA KONDUKSI PANAS DUA DIMENSI
PADA *FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS*
(FGMs) MENGGUNAKAN METODE ELEMEN
HINGGA (FEM)**

REZZA RUZUQI
NRP. 02511550010002

DOSEN PEMBIMBING
Mas Irfan P. Hidayat, S.T., M.Sc., Ph.D.
Dr. Widyastuti, S.Si., M.Si.

PROGRAM STUDI MAGISTER
JURUSAN TEKNIK MATERIAL DAN METALURGI
FAKULTAS TEKNOLOGI INDUSTRI
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2018

**LEMBAR PENGESAHAN
TESIS**

**Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Teknik**

di

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:

Rezza Ruzuqi

NRP 02511550010002

Tanggal Ujian : 10 Januari 2018

Periode Wisuda : Maret 2018

Disetujui oleh:

1. Mas Irfan P. Hidayat, S.T., M.T., Ph.D.

NIP. 197610272003121001

(Pembimbing I)

2. Dr. Widyastuti, S.Si., M.Si.

NIP. 197906202006042001

(Pembimbing II)

3. Dr. Agung Purniawan, S.T., M.Sc.

NIP. 197605282002121003

(Penguji)

4. Sigit Tri Wicaksono, S.Si., M.Si., Ph.D.

NIP 197801132002121003

(Penguji)

5. Lukman Noerochim, S.T., M.Sc.Eng., Ph.D.

NIP. 197703132003121001

(Penguji)



Dekan Fakultas Teknologi Industri – ITS

Dr. Bambang Lelono Widjiantoro, S.T., M.T.

NIP. 196905071995121001

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

Analisa Konduksi Panas Dua Dimensi pada *Functionally Graded Materials* (FGMs) Menggunakan Metode Elemen Hingga (FEM)

Nama mahasiswa : Rezza Ruzuqi
NRP : 02511550010002
Pembimbing : Mas Irfan P. H., S.T., M.Sc., Ph.D.

ABSTRAK

Seiring dengan kemajuan dunia industri, seperti industri penerbangan, kesehatan, kimia, elektronik, dan lain sebagainya, kebutuhan akan material komposit semakin meningkat untuk memenuhi permintaan pasar. Hal tersebut dikarenakan material komposit memiliki rasio beban dan berat yang tinggi dan ketahanan fatik yang baik. Namun demikian, keperluan terhadap material yang memiliki sifat-sifat ketahanan terhadap temperatur tinggi, ketahanan terhadap oksidasi juga meningkat. *Functionally Graded Materials* (FGMs) adalah kelas material maju dari material komposit yang memiliki sifat material yang bervariasi dari satu titik ke titik lainnya. Sifat tersebut terbentuk dari dua atau lebih fase konstituen dengan gradasi dan sifat material khusus. Pada penelitian ini akan dilakukan analisis dua dimensi konduksi panas dalam FGMs menggunakan Metode Elemen Hingga (FEM). Tiga model gradasi sifat FGMs diteliti dalam studi yaitu Polinomial, Eksponensial dan Trigonometri. Respon temperatur dari FGMs dengan menggunakan ketiga model gradasi tersebut dibandingkan dan dianalisa. Distribusi temperatur optimum tiga model yang dibangun dengan perangkat lunak ANSYS.

Jika ditinjau dari variasi FGMs yang digunakan untuk permasalahan konduksi panas, variasi trigonometri dihasilkan hasil yang baik. Misalkan pada geometri silinder berlubang, nilai temperatur rata-rata yang didapat sebesar $T = 30,3447^{\circ}C$. Pada geometri persegi sebesar $T = 46,0835^{\circ}C$. Dan pada geometri rumit sebesar $T = 25,2129^{\circ}C$. Kemudian jika ditinjau dari performa, pada geometri silinder berlubang variasi kuadratik dengan jumlah nodal 1379, didapatkan waktu pengerjaan selama 434,6 s. Pada geometri silinder berlubang variasi eksponensial, waktu pengerjaan selama 435 s. Dan pada geometri silinder berlubang variasi trigonometri, waktu pengerjaan selama 444 s. Pada geometri persegi, didapatkan waktu pengerjaan yang rata-rata sama yakni selama 37 s. Dan pada geometri rumit didapatkan waktu pengerjaan yang rata-rata sama juga yakni selama 35 s. Dan yang terakhir jika ditinjau dari efisiensi, hasil dari FEM sangat mendekati hasil dari metode analitik. Misalkan pada geometri silinder berlubang variasi kuadratik dengan jumlah nodal 761, didapatkan rata-rata nilai error sebesar 0,0019. Pada geometri silinder berlubang variasi kuadratik dengan jumlah nodal 883, rata-rata nilai error sebesar 0,0013. Dan pada geometri silinder berlubang variasi kuadratik dengan jumlah nodal 1379, rata-rata nilai error sebesar 0,0012.

Kata kunci: FGMs, Konduksi Panas, Metode Elemen Hingga (FEM), ANSYS.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

Analysis of Two Dimensional Heat Conduction in Functionally Graded Materials (FGMs) Using Finite Element Methods (FEM)

Name : Rezza Ruzuqi
NRP : 02511550010002
Lecture Advisor : Mas Irfan P. H., S.T., M.Sc., Ph.D.

ABSTRACT

Along with the progress of the industrial world, such as aviation industry, healthcare, chemical, electronics, etc., the need for composite materials is increasing to meet market demand. This is because composite materials have a high load and weight ratio and good fatigue resistance. However, the need for materials with high temperature resistance properties, resistance to oxidation also increases. Functionally Graded Materials (FGMs) are advanced material classes of composite materials that have material properties that vary from one point to another. These properties are formed from two or more constituent phases with gradations and special material properties. In this research will be conducted two-dimensional analysis of heat conduction in FGMs using Finite Element Method (FEM). Three models of gradation of FGMs properties were studied in the study of Polynomial, Exponential and Trigonometry. The temperature response of FGMs using the three gradation models is compared and analyzed. The optimum temperature distribution of three models built with ANSYS software.

When viewed from the variations of FGMs used for heat conduction problems, trigonometric variations yielded good results. Suppose that in the cylinder geometry of the hole, the average temperature value obtained for $T = 30,3447^{\circ}C$. On a square geometry of $T = 46,0835^{\circ}C$. And on the complicated geometry of $T = 25,2129^{\circ}C$. Then, in terms of performance, the cylindrical geometry of quadratic variation with the number of nodal 1379, obtained the processing time for 434.6 s. In hollow cylindrical geometry of exponential variation, the processing time is 435 s. And on the cylinder geometry of the variation of trigonometry, the working time is 444 s. In rectangular geometry, the average working time is reached for 37 s. And in the complex geometry obtained the average workmanship time is also equal for 35 s. And finally, in terms of efficiency, the results of FEM are very close to the results of the analytic method. Suppose that in the cylindrical geometry of quadratic variation with the number of nodal 761, obtained an average error value of 0.0019. In the cylindrical geometry of quadratic variation with the numeral number 883, the average error value is 0.0013. And on the cylindrical geometry of quadratic variation with the numeral number 1379, the average error value is 0.0012.

Keywords: FGMs, Heat Conduction, Finite Element Methods (FEM), ANSYS.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil' alamin penulis ucapkan syukur kehadiran Allah SWT atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan naskah tesis ini dengan judul :

“ANALISA KONDUKSI PANAS DUA DIMENSI PADA *FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS* (FGMs) MENGGUNAKAN METODE *ELEMEN HINGGA* (FEM)”

Naskah tesis ini disusun untuk memenuhi syarat untuk memperoleh gelar Master Teknik (MT) Jurusan Teknik Material dan Metalurgi Fakultas Teknologi Industri Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya.

Penulisan naskah tesis ini dapat terlaksana dengan baik atas bantuan, bimbingan dan saran dari semua pihak serta segenap keluarga besar Teknik Material dan Metalurgi FTI-ITS. Penulis juga mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Allah SWT yang selalu memberikan rahmat dan hidayahnya serta banyak kemudahan dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
2. Solawat serta salam kami haturkan kepada Nabi Besar Muhammad SAW atas bimbingan jalan yang lurus yaitu DINUL ISLAM
3. Ibu **Machmudah** dan Bapak **Sutarman, S.H** selaku orang tua. Dan seluruh keluarga besar atas segala doa, dukungan moral maupun material, pengertian dan cinta yang telah diberikan selama ini.
4. Bapak **Mas Irfan P. Hidayat, S.T., M.Sc. Ph.D.** sebagai dosen pembimbing tesis yang dengan sabar mengarahkan dan membimbing dalam menyelesaikan naskah tesis. Terima kasih atas segala dukungan baik secara moral dan segala ilmu yang diberikan.
5. Ibu **Dr. Widyastuti, S.Si., M.Si.** sebagai dosen pembimbing tesis yang dengan sabar mengarahkan dan membimbing dalam menyelesaikan naskah tesis. Terima kasih atas segala dukungan baik secara moral dan segala ilmu yang diberikan.

6. Bapak **Dr. Sigit Tri W, S.Si, M.Si.** dan Bapak **Dr. Lukman Noerochim, S.T, M.Sc.Eng, Ph.D.** sebagai tim dosen penguji sidang tesis atas kepercayaannya bagi penulis untuk meneruskan pendidikan secara mandiri.
7. Bapak **Dr. Agung Purniawan, S.T, M.Sc.** selaku dosen wali atas bimbingan kepada penulis dalam hal akademik maupun non akademik semasa perkuliahan.
8. Saudara senasib seperjuangan **Victor Daniel Waas, S.T.** sebagai teman tukar pikiran.
9. Saudari **Febry Anggriani, S.E.** sebagai teman yang telah menemani dalam proses penyusunan proposal tesis ini.
10. Saudari **Sofiani Afifah Hariyanto** sebagai teman yang telah menemani dalam proses penyusunan proposal tesis ini.
10. Seluruh karyawan Teknik Material dan Metalurgi FTI-ITS, saya mengucapkan terima kasih atas bantuan yang telah diberikan.
11. Segenap pihak yang telah membantu terselesaikannya tesis ini yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa penyusunan tesis ini masih jauh dari kesempurnaan, untuk itu kritik dan saran yang membangun dari berbagai pihak sangat diharapkan. Semoga tulisan ini dapat memberi manfaat. Amin

Surabaya, Januari 2018

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xix
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Lingkup Penelitian	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Batasan Masalah	3
1.6 Manfaat Penelitian	3
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI	
2.1 Perpindahan Panas	5
2.1.1 Perpindahan Panas pada Functionally Graded Materials (FGMs)	5
2.1.2 Persamaan Perpindahan Panas Transien	16
2.2 Metode Elemen Hingga (FEM) untuk Masalah Perpindahan Panas secara Konduksi	18
2.3 Teknologi proses fabrikasi FGMs	24
BAB 3 METODE PENELITIAN	27
3.1 Tempat dan Waktu Penelitian	27
3.2 Peralatan	27
3.3 Eksperimental Desain dan Diagram Alir Penelitian	27
3.4 Prosedur Penelitian	29
3.4.1 Konduksi Panas pada FGMs	29
3.4.2 Metode Finite Element (FE)	29
3.4.3 Metode Analitik	30
3.4.4 Model Gradasi Sifat FGMs	30
3.4.5 Model Geometri	30
3.4.6 Variasi Jumlah Nodal	32
3.4.7 Analisa Perbandingan Akurasi dan Efisiensi	32
3.4.8 Pembahasan dan Kesimpulan	33
BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN	35
4.1 Konduksi Panas Pada FGMs	35
4.2 FGMs Silinder Berlubang	37
4.2.1 FGMs Silinder Berlubang Variasi Polinomial	38

4.2.2 FGMs Silinder Berlubang Variasi Eksponensial	45
4.2.3 FGMs Silinder Berlubang Variasi Trigonometri	52
4.3 FGMs Persegi	60
4.3.1 FGMs Persegi Variasi Polinomial	62
4.3.2 FGMs Persegi Variasi Eksponensial	69
4.3.3 FGMs Persegi Variasi Trigonometri	76
4.4 FGMs Geometri Rumit	83
4.4.1 FGMs Geometri Rumit Variasi Polinomial	84
4.4.2 FGMs Geometri Rumit Variasi Eksponensial	88
4.4.3 FGMs Geometri Rumit Variasi Trigonometri	92
BAB 5 Kesimpulan dan Saran	97
5.1 Kesimpulan	97
5.2 Saran	98
DAFTAR PUSTAKA	99
Lampiran	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Diagram hubungan proses produksi untuk meningkatkan mutu produk	2
Gambar 2.1	Skema yang menggambarkan sebuah fungsi material dalam struktur yang berbeda a) material homogen, b) komposit dan c) FGMs (El-Wazery dan El-Desouky, 2015)	5
Gambar 2.2	Sebuah FGMs partikulat dengan fraksi volume fase konstituen dinilai dalam satu arah vertikal (Yin, dkk, 2004)	7
Gambar 2.3	Mikro struktur skeletal material FGMs (Vel dan Batra, 2002)	8
Gambar 2.4	Columnar FGMs: TBC diproses oleh berkas elektron fisik uap deposisi teknik ($ZrO_2-Y_2O_3$ dengan gradasi porositas) (Kaysser dan Ilschner, 1995)	9
Gambar 2.5	Diskritisasi menggunakan NMM dan FEM: (a) diskritisasi NMM dan (b) mesh FEM (Zhang, dkk, 2017)	16
Gambar 2.6	Sebuah gambar perpindahan panas (Ensiklopedia inggris, 2011) .	17
Gambar 2.7	Distribusi temperatur pada silinder homogen berlubang (Wang, dkk, 2005)	20
Gambar 2.8	Distribusi temperatur pada silinder non-homogen berlubang (Wang, dkk, 2005)	21
Gambar 2.9	Tampilan CAD dari cangkir teh dengan menunjukkan efek dari ketebalan yang berbeda	26
Gambar 3.1	Diagram alir penelitian	28
Gambar 3.2	FGMs persegi: geometri dan kondisi batas	31
Gambar 3.3	FGMs silinder berlubang dan kondisi batas	31
Gambar 3.4	Geometri rumit dan kondisi batas	32
Gambar 4.1	Konduktivitas termal $K(x)$ (W/m^0C) untuk FGMs polinomial, eksponensial dan trigonometri	36
Gambar 4.2	Distribusi nodal untuk permasalahan konduksi panas pada kasus FGMs silinder berlubang dengan variasi jumlah nodal a) 761, b) 883 dan c) 1379	38
Gambar 4.3	Plot kontur dari temperatur dari FGMs silinder berlubang variasi polinomial dengan jumlah nodal a) 761, b) 883 dan c) 1379	42
Gambar 4.4	Grafik temperatur terhadap time step pada beberapa titik koordinat (x,y) yang berbeda untuk variasi jumlah nodal 1379	42
Gambar 4.5	Perbandingan temperatur FEM dengan Metode Analitik	43
Gambar 4.6	Plot kontur dari temperatur dari FGMs silinder berlubang variasi eksponensial dengan jumlah nodal a) 761, b) 883 dan c) 1379	48
Gambar 4.7	Grafik temperatur terhadap time step pada beberapa titik koordinat (x,y) yang berbeda untuk jumlah nodal 761	49
Gambar 4.8	Grafik temperatur terhadap time step pada beberapa titik koordinat (x,y) yang berbeda untuk jumlah nodal 883	49
Gambar 4.9	Grafik temperatur terhadap time step pada beberapa titik koordinat (x,y) yang berbeda untuk jumlah nodal 1379	50
Gambar 4.10	Grafik temperatur terhadap jari-jari (r) pada titik koordinat yang berbeda untuk jumlah nodal 761	51

Gambar 4.11	Grafik temperatur terhadap jari-jari (r) pada titik koordinat yang berbeda untuk jumlah nodal 883	51
Gambar 4.12	Grafik temperatur terhadap jari-jari (r) pada titik koordinat yang berbeda untuk jumlah nodal 1379	52
Gambar 4.13	Plot kontur dari temperatur dari FGMs silinder berlubang variasi trigonometri dengan jumlah nodal a) 761, b) 883 dan c) 1379 ...	56
Gambar 4.14	Grafik temperatur terhadap time step pada beberapa titik koordinat (x,y) yang berbeda untuk jumlah nodal 761	57
Gambar 4.15	Grafik temperatur terhadap time step pada beberapa titik koordinat (x,y) yang berbeda untuk jumlah nodal 883	57
Gambar 4.16	Grafik temperatur terhadap time step pada beberapa titik koordinat (x,y) yang berbeda untuk jumlah nodal 1379	58
Gambar 4.17	Grafik temperatur terhadap jari-jari (r) pada titik koordinat yang berbeda untuk jumlah nodal 761	59
Gambar 4.18	Grafik temperatur terhadap jari-jari (r) pada titik koordinat yang berbeda untuk jumlah nodal 883	59
Gambar 4.19	Grafik temperatur terhadap jari-jari (r) pada titik koordinat yang berbeda untuk jumlah nodal 1379	60
Gambar 4.20	Distribusi nodal untuk permasalahan konduksi panas pada kasus FGMs persegi dengan variasi jumlah nodal a) 279, b) 1037 dan c) 2275	62
Gambar 4.21	Plot kontur dari temperatur dari FGMs persegi variasi polinomial dengan jumlah nodal a) 279, b) 1037 dan c) 2275	65
Gambar 4.22	Grafik temperatur terhadap time step pada titik koordinat x_1 yang berbeda dengan jumlah nodal 279	65
Gambar 4.23	Grafik temperatur terhadap time step pada titik koordinat x_1 yang berbeda dengan jumlah nodal 1037	66
Gambar 4.24	Grafik temperatur terhadap time step pada titik koordinat x_1 yang berbeda dengan jumlah nodal 2275	66
Gambar 4.25	Grafik temperatur terhadap titik koordinat x_1 pada time step yang berbeda dengan jumlah nodal 279	67
Gambar 4.26	Grafik temperatur terhadap titik koordinat x_1 pada time step yang berbeda dengan jumlah nodal 1037	68
Gambar 4.27	Grafik temperatur terhadap titik koordinat x_1 pada time step yang berbeda dengan jumlah nodal 2275	68
Gambar 4.28	Plot kontur dari temperatur dari FGMs persegi variasi eksponensial dengan jumlah nodal a) 279, b) 1037 dan c) 2275	72
Gambar 4.29	Grafik temperatur terhadap time step pada titik koordinat x_1 yang berbeda dengan jumlah nodal 279	72
Gambar 4.30	Grafik temperatur terhadap time step pada titik koordinat x_1 yang berbeda dengan jumlah nodal 1037	73
Gambar 4.31	Grafik temperatur terhadap time step pada titik koordinat x_1 yang berbeda dengan jumlah nodal 2275	73
Gambar 4.32	Grafik temperatur terhadap titik koordinat x_1 pada time step yang berbeda dengan jumlah nodal 279	74
Gambar 4.33	Grafik temperatur terhadap titik koordinat x_1 pada time step yang berbeda dengan jumlah nodal 1037	75

Gambar 4.34	Grafik temperatur terhadap titik koordinat x_1 pada time step yang berbeda dengan jumlah nodal 2275	75
Gambar 4.35	Plot kontur perambatan panas dari FGMs persegi variasi trigonometri dengan jumlah nodal a) 279, b) 1037 dan c) 2275 .	79
Gambar 4.36	Grafik temperatur terhadap time step pada titik koordinat x_1 yang berbeda dengan jumlah nodal 279	79
Gambar 4.37	Grafik temperatur terhadap time step pada titik koordinat x_1 yang berbeda dengan jumlah nodal 1037	80
Gambar 4.38	Grafik temperatur terhadap time step pada titik koordinat x_1 yang berbeda dengan jumlah nodal 2275	80
Gambar 4.39	Grafik temperatur terhadap titik koordinat x_1 pada time step yang berbeda dengan jumlah nodal 279	81
Gambar 4.40	Grafik temperatur terhadap titik koordinat x_1 pada time step yang berbeda dengan jumlah nodal 1037	82
Gambar 4.41	Grafik temperatur terhadap titik koordinat x_1 pada time step yang berbeda dengan jumlah nodal 2275	82
Gambar 4.42	Distribusi nodal untuk permasalahan konduksi panas pada kasus pertama a) 828, b) 1065 dan c) 1329	84
Gambar 4.43	Plot kontur dari temperatur dari FGMs geometri rumit variasi polinomial dengan jumlah nodal a) 6945, b) 828, c) 1065 dan d) 1329	87
Gambar 4.44	Plot kontur dari temperatur dari FGMs geometri rumit variasi eksponensial dengan jumlah nodal a) 6945, b) 828, c) 1065 dan d) 1329	91
Gambar 4.45	Plot kontur dari temperatur dari FGMs geometri rumit variasi trigonometri dengan jumlah nodal a) 6945, b) 828, c) 1065 dan d) 1329	95

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Eksperimental desain	27
Tabel 4.1	Sifat konduktifitas panas FGMs yang digunakan	36
Tabel 4.2	Perbandingan temperatur FEM dengan jumlah nodal 761 dengan Metode Analitik	43
Tabel 4.3	Perbandingan temperatur FEM dengan jumlah nodal 883 dengan Metode Analitik	44
Tabel 4.4	Perbandingan temperatur FEM dengan jumlah nodal 1379 dengan Metode Analitik	44
Tabel 4.5	Perbandingan jumlah nodal terhadap waktu proses pengerjaan (s) ...	45
Tabel 4.6	Perbandingan temperatur pada titik koordinat (x,y) yang sama dengan jumlah nodal berbeda	50
Tabel 4.7	Perbandingan jumlah nodal terhadap waktu proses pengerjaan (s) ...	52
Tabel 4.8	Perbandingan temperatur pada titik koordinat (x,y) yang sama dengan jumlah nodal berbeda	58
Tabel 4.9	Perbandingan jumlah nodal terhadap waktu proses pengerjaan (s) ...	60
Tabel 4.10	Perbandingan temperatur pada titik koordinat x_1 yang sama dengan jumlah nodal berbeda	67
Tabel 4.11	Perbandingan jumlah nodal terhadap waktu proses pengerjaan (s) ...	69
Tabel 4.12	Perbandingan temperatur pada titik koordinat x_1 yang sama dengan jumlah nodal berbeda	74
Tabel 4.13	Perbandingan jumlah nodal terhadap waktu proses pengerjaan (s) ...	76
Tabel 4.14	Perbandingan temperatur pada titik koordinat x_1 yang sama dengan jumlah nodal berbeda	81
Tabel 4.15	Perbandingan jumlah nodal terhadap waktu proses pengerjaan (s) ...	83
Tabel 4.16	Perbandingan temperatur pada titik koordinat x_1 yang sama dengan jumlah nodal berbeda	87
Tabel 4.17	Perbandingan jumlah nodal terhadap waktu proses pengerjaan (s) ...	88
Tabel 4.18	Perbandingan temperatur pada titik koordinat x_1 yang sama dengan jumlah nodal berbeda	91
Tabel 4.19	Perbandingan jumlah nodal terhadap waktu proses pengerjaan (s) ...	92
Tabel 4.20	Perbandingan temperatur pada titik koordinat x_1 yang sama dengan jumlah nodal berbeda	95
Tabel 4.21	Perbandingan jumlah nodal terhadap waktu proses pengerjaan (s) ...	96

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

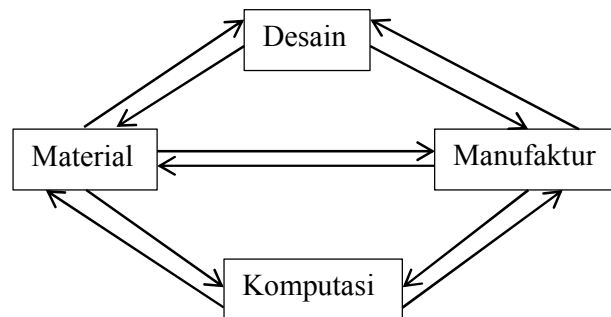
Seiring dengan kemajuan dunia industri, baik industri penerbangan, industri kesehatan, industri kimia, industri elektronik, dan lain sebagainya, kebutuhan akan material komposit semakin meningkat untuk memenuhi permintaan pasar. Hal tersebut karena material komposit memiliki keunggulan dalam berbagai hal terutama bila dilihat dari sifat mekanik yang dimiliki oleh material tersebut, antara lain temperatur yang tinggi, kekerasan yang tinggi, ketahanan terhadap ketahanan terhadap oksidasi dan ketahanan aus yang baik.

Disisi lain, logam telah banyak digunakan dalam dunia industri selama bertahun-tahun karena kekuatan dan ketangguhannya. Namun demikian dalam kondisi temperatur tinggi, kekuatan logam berkurang. Sementara itu, material keramik memiliki karakteristik yang sangat baik dalam hal ketahanan panas. Namun aplikasinya terbatas, karena memiliki ketangguhan yang rendah.

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, muncul sebuah gagasan untuk menggabungkan kedua jenis material tersebut dengan komposisi yang sesuai dengan aplikasinya. Dengan gagasan tersebut, terciptalah sebuah *Functionally Graded Materials* (FGMs). *Functionally Graded Materials* (FGMs) adalah kelas material maju dari material komposit yang memiliki sifat material yang bervariasi dari satu titik ke titik lainnya (Mas Irfan, 2014). Dalam literatur lain, FGMs adalah material yang dalamnya terdapat beberapa sifat fisik partikular yang berubah ditiap dimensi (El-Wazery dan El-Desouky, 2015). Dengan demikian, FGMs memiliki gradient komposisional dari satu komponen ke komponen lainnya. Karakteristik sifat material yang kontinu tersebut menghilangkan masalah-masalah terkait diskontinuitas interface yang lazim dijumpai di material komposit biasa, sehingga FGMs dapat didesain berdasarkan fungsi tertentu yang dikehendaki.

Konsep *Functionally Graded Materials* (FGMs) pertama kali tahun 1987 oleh Nino Minami dan rekan kerjanya selama mengerjakan proyek pesawat ruang

angkasa di *National Aerospace Laboratorium*, Jepang (El-Wazery dan EL-Desouky, 2015). Di mana kombinasi material yang digunakan sebagai penghalang termal mampu menahan temperatur permukaan hingga 2000 K dan gradien temperatur hingga 1000 K. Hal ini dikarenakan di dalam material tersebut terdiri atas material logam dan material keramik. Kombinasi antara material keramik yang tahan panas dan material logam yang memiliki sifat mekanik kuat, menghasilkan FGMs yang tangguh pada lingkungan temperatur tinggi. Jika dibandingkan dengan sebuah material komposit laminat (*Laminated materials*), FGMs memiliki karakteristik sifat material yang kontinu sehingga menghilangkan masalah-masalah terkait diskontinuitas interface yang lazim dijumpai di material komposit laminat.



Gambar 1.1 Diagram hubungan proses produksi untuk meningkatkan mutu produk

Dikarenakan banyak sekali permintaan untuk meningkatkan mutu FGMs, para peneliti melakukan berbagai penelitian di beberapa sisi. Baik dari sisi desain, material, manufaktur dan komputasi, seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 1.1. Dalam penelitian ini, akan ditinjau dari sisi komputasi atau secara numeric. Ada banyak sekali metode numerikal yang digunakan untuk menganalisis konduksi panas pada FGMs, diantaranya adalah *finite difference method* (FDM), *finite element method* (FEM), *boundary element method* (BEM) atau baru-baru ini dikembangkan adalah metode *meshless*, yang mana telah dikembangkan untuk menganalisis masalah konduksi panas karena kompleksitas dari persamaan perintah pada metode *meshless* yang sesuai (Mas Irfan, 2014).

Sebuah prosedur numerikal disampaikan untuk menentukan sebuah distribusi material yang optimal dari *Functionally Graded Materials* (FGMs)

untuk masalah konduksi panas. Sebuah fraksi volume digunakan sebagai desain variable utama dan sifat bahan yang diasumsikan sebagai fungsi temperatur.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah pada penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana analisa konduksi panas dalam *Functionally Graded Materials* (FGMs) dengan Metode Elemen Hingga (FEM)?.
2. Bagaimana performa dan efisiensi Metode Elemen Hingga (FEM) dalam menganalisa konduksi panas pada *Functionally Graded Materials* (FGMs) dibandingkan dengan metode analitik?.

1.3 Lingkup Penelitian

Lingkup penelitian yang digunakan dalam penelitian ini:

1. Analisa perpindahan panas dilakukan pada geometri 2D.
2. Sifat *Functionally Graded Materials* dianggap mengikuti *rule of mixture*.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menganalisa konduksi panas dalam *Functionally Graded Materials* (FGMs) dengan Metode Elemen Hingga (FEM).
2. Menganalisa performa dan efisiensi Metode Elemen Hingga (FEM) dalam menganalisa konduksi panas pada *Functionally Graded Materials* (FGMs) dibandingkan dengan metode analitik.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini, diasumsikan pada kondisi batas temperatur awal yang diberikan *uniform* dan dijaga konstan sehingga tidak terjadi fluktuatif.

1.6 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini, diharapkan diperoleh suatu metode yang dapat digunakan untuk menganalisa konduksi panas pada *Functionally Graded*

Materials (FGMs). Sehingga dapat memberikan pertimbangan pilihan metode guna memperbaiki mutu produk bagi sektor industri, terkait pemilihan material untuk meningkatkan produktivitas sekaligus menekan biaya produksi.

BAB 2

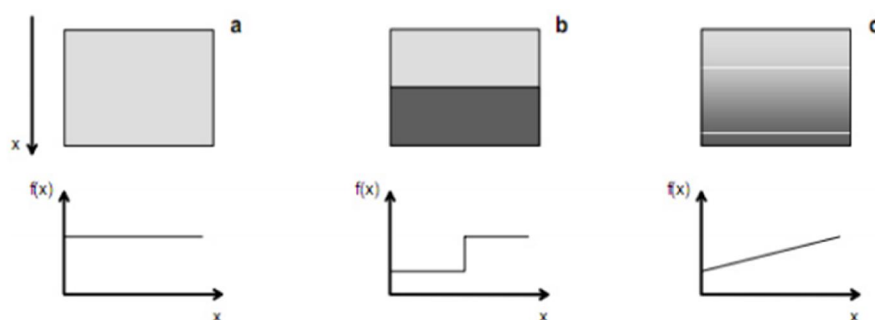
KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI

2.1 Perpindahan Panas

2.1.1 Perpindahan Panas pada *Functionally Graded Materials* (FGMs)

FGMs biasanya dihubungkan dengan material komposit partikulat dimana fraksi volume sebuah partikel bervariasi di satu atau beberapa arah. Salah satu keuntungan variasi monoton dari fraksi volume fase konstituen adalah penghapusan diskontinuitas stres yang sering dijumpai dalam komposit laminar. FGMs juga dapat dikembangkan menggunakan *fiber-reinforced* dengan fraksi volume serat secara konstanta, dengan memperhatikan produksi sifat set optimal atau respon (Birman, 1995; Birman, 1997).

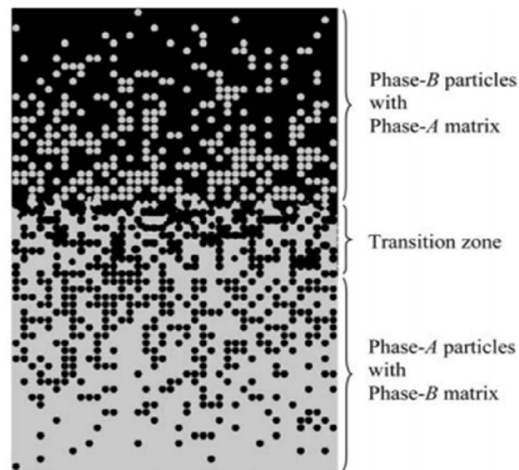
Sifat pada sebagian besar material dapat di deskripsikan oleh sebuah fungsi $f(x)$. Dalam material homogen, fungsi ini konstan seperti pada Gambar 2.1a. Pada kasus komposit dari dua material yang berbeda, fungsi $f(x)$ membentuk sebuah regangan seperti pada Gambar 2.1b. Dalam FGMs, fungsi material ini dapat berupa kontinyu atau kusi-kontinyu. Hal ini berarti bahwa sifat material berubah secara kontinyu atau kusi-kontinyu sepanjang satu arah, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.1c. Dalam banyak kasus FGMs, dapat ditunjukkan sebagai komposisi beberapa lapisan tipis yang saling terhubung (Shanmugavel, dkk, 2012).



Gambar 2.1 Skema yang menggambarkan sebuah fungsi material dalam struktur yang berbeda a) material homogen, b) komposit dan c) FGMs (El-Wazery dan El-Desouky, 2015)

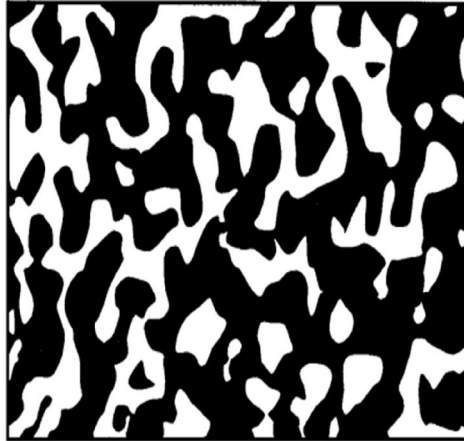
Dalam perkembangannya, FGMs hadir sebagai alat untuk meningkatkan perilaku ketangguhan material komposit bila dibandingkan dengan komposit yang diperkuat secara homogen. Perbaikan ini disebabkan oleh kontribusi berimbang dari daerah yang diperkuat dan tidak diperkuat dalam komposit. Ada tiga fase FGMs (Keramik / Logam, Keramik / Keramik, Logam / Logam). Misalkan untuk logam / keramik FGMs, yang secara komposisi dilihat dari fase keramik ke fase logam. Keramik / logam FGMs dapat dirancang untuk mengurangi tekanan panas dan ketahanan korosi dengan ketangguhan yang tinggi dari kemampuan ikatan keramik / logam tanpa tekanan termal internal yang tinggi (El-Wazery dan El-Desouky, 2015).

Terdapat sebuah model elastis berbasis mikromekanik untuk dua-fase FGMs dengan interaksi lokal berpasangan antar partikel. Sedangkan sifat material yang efektif berubah secara bertahap sepanjang arah gradasi, terdapat dua zona mikrostruktural yang berbeda: zona partikel-matrix dan zona transisi. Di zona partikel-matrix, interaksi berpasangan antara partikel dapat diselesaikan dengan modifikasi metode *Green's function*. Dengan mengintegrasikan interaksi dari semua partikel lain selama representatif pada element volume, bidang elastik homogen diperoleh. Untuk distribusi kekakuan terhadap arah gradasi tersebut berasal. Pada zona transisi, fungsi transisi dibangun untuk membuat bidang elastik homogen yang terus menerus dan terdiferensiasi ke arah gradasi. Dengan demikian material komposit partikulat dimungkinkan sebagai isotropik lokal dan juga bersifat heterogen karena variasi spasial dari fraksi fase volume. Contoh material tersebut ditunjukkan pada Gambar 2.1 (Yin, dkk, 2004) di mana partikel bulat atau hampir bulat yang tertanam di dalam matriks isotropik.



Gambar 2.2 Sebuah FGMs partikulat dengan fraksi volume fase konstituen dinilai dalam satu arah vertikal (Yin, dkk, 2004)

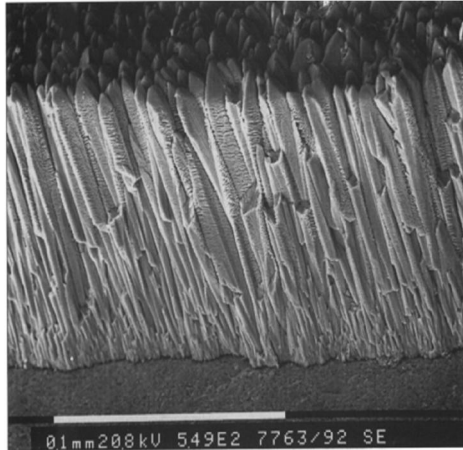
Selain FGMs partikulat dengan fraksi volume fase konstituen dinilai dalam satu arah vertikal. Pada FGMs, fungsi temperatur dan perpindahan yang sesuai mengidentikkan pemenuhan kondisi batas pada tepi yang digunakan untuk mengurangi persamaan diferensial parsial yang mengatur deformasi termomekanis untuk satu set pasangan persamaan diferensial biasa dalam sebuah ketebalan koordinat. Kemudian memecahkannya dengan menggunakan metode deret pangkat. Solusi yang tepat diterapkan untuk kedua pelat tebal dan tipis. Hasilnya, untuk *two-constituent metal-ceramic functionally graded rectangular plates* yang memiliki kekuatan hukum variasi *through-the-thickness* fraksi volume konstituen dengan sifat material yang efektif pada suatu titik, diperkirakan secara tepat oleh Mori-Tanaka atau skema *self-consistent*. Sehingga, sebuah FGMs dapat juga memiliki mikro skeletal seperti digambarkan pada Gambar 2.2 (Vel dan Batra, 2002).



Gambar 2.3 Mikro struktur skeletal material FGMs (Vel dan Batra, 2002)

Selain struktur mikro yang menyerupai komposit partikulat khas seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.1 dan 2.2. FGMs memungkinkan memiliki arsitektur yang berbeda, sehingga menghasilkan perilaku orthotropic. *Thermal-barrier coatings* (TBCs) dapat menurunkan temperatur permukaan komponen logam seperti pada perisai panas mesin bakar, pisau, dan baling-baling dalam *land-based* dan gas aero turbin yang beroperasi dengan temperatur gas buang dan gas asap pada 1300°C. Seperti pada TBCs keramik yang terhubung dengan sebuah komponen mantel ikatan-logam tipis, digunakan untuk melindungi komponen dari korosi panas dan oksidasi. Salah satu jenis ikatan lapisan *single layers* adalah MCrAlY. Guna memperbaiki *lifetime* dari lapisan MCrAlY, interdifusi antara *superalloy* dan ikatan pelapis harus rendah. Sehingga menghindari pemuatan fase γ' . Hal ini membutuhkan koefisiensi interdifusi kecil dan sedikit konsentrasi Al dan Cr pada permukaannya. Sebaliknya, pada permukaan antara ikatan pelapis dan TBCs keramik, konsentrasi unsur oksida pembentuk dalam ikatan pelapis seperti Al dan Cr harus dibuat tinggi. Hal tersebut untuk membuatnya padat dan stabil dengan skala alumina pelindung. Kedua persyaratan yang bertentangan pada konsentrasi elemen dalam mantel obligasi, dapat dipenuhi oleh kadar komposisi seluruh ketebalan lapisan. Dengan kadar kandungan Al, perbaikan yang luar biasa dari siklus *lifetime* pada 1150°C dapat dicapai. Pengaruh beberapa gradien densitas (porositas) dan komposisi kimia pada degradasi *Electron Beam Physical Vapor Deposition* (EBPVD) diproses pada ZrO_2 - Y_2O_3 - HfO_2 TBCs dari mantel

obligasi NiCrAlY dilaporkan oleh Fritscher. Dengan demikian, FGMs orthotropic memiliki struktur mikro pipih dan columnar didapatkan dari masing-masing plasma spray dan berkas elektron fisik uap proses deposisi manufaktur. Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.3 (Kaysser dan Ilschner, 1995).



Gambar 2.4 Columnar FGMs: TBC diproses oleh berkas elektron fisik uap deposisi teknik ($ZrO_2-Y_2O_3$ dengan gradasi porositas) (Kaysser dan Ilschner, 1995)

Telah banyak penelitian di bidang perpindahan panas pada FGMs, hal tersebut terkait dengan aplikasinya yang banyak pada sektor industri. FGMs memiliki sejumlah keunggulan yang membuat FGMs menarik dalam beberapa aplikasi potensial, diantaranya pengurangan potensial bidang dan tekanan melintang yang melalui ketebalan, peningkatan distribusi tegangan sisa, penyempurnaan sifat termal, ketangguhan patah tinggi, dan mengurangi faktor intensitas tegangan.

Saat ini, penelitian perpindahan panas pada material adalah FGMs. Terkait penelitian tersebut, Jin menganalisis solusi dari masalah perpindahan panas transien dalam strip FGMs dengan sifat yang berbeda-beda dalam arah tebal yang permukaannya tiba-tiba didinginkan pada temperatur yang berbeda dengan menggunakan bentuk tertutup solusi asimtotik (Jin, 2002). Kemudian bentuk tertutup solusi asimtotik diperoleh dengan membagi strip menjadi beberapa lapisan homogen. Perpindahan panas transien dalam ketebalan FGMs, dikenakan sumber panas volumetrik seragam juga dipertimbangkan (Ootao dan Tanigawa,

2004) menggunakan perlakuan teori, oleh keduanya distribusi temperatur dan tekanan dapat ditemukan. Masalah perpindahan panas transien untuk strip FGMs dan untuk silinder FGMs panjang tak terhingga, dikenai beban termal stasioner dan termal shock telah diselesaikan dengan metode *Local Boundary Integral* (LBIM) (Sladek, dkk, 2003).

Kemudian pada penelitian lain, Sutradhar dan Paulino mengembangkan metode pendekatan *Boundary Element* (BEM) untuk perpindahan panas secara konduksi transien dalam FGMs yang mengarah ke formulasi batas saja tanpa diskretisasi domain. Gradasi sifat dari FGMs yang digunakan yakni kuadrat, eksponensial, dan trigonometri dari konduktivitas termal dan panas spesifik, masalah non-homogen dapat diubah menjadi masalah difusi homogen standar. Dalam penelitian ini, menggunakan sebuah *Boundary Element* (BE) tiga dimensi. Hasil simulasi numerik BEM menunjukkan sebuah kesetaraan yang sangat baik, dibandingkan dengan solusi analitis dan simulasi FEM. Sebuah inversi numerik dari transformasi Laplace menggunakan algoritma Stehfest, menghasilkan hasil yang akurat (Sutradhar dan Paulino, 2004). Masalah perpindahan panas transien, juga telah diselesaikan dengan menggunakan *Galerkin Boundary Element Method* (GBEM) untuk sejumlah konfigurasi seperti sebuah kubus tiga dimensi FGMs ke *prescribed heat flux regime* dan silinder dengan temperatur permukaan konstan (Chen, dkk, 2002).

Metode *boundary element* (BEM) juga digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dua dimensi konduksi panas steady dalam FGMs oleh Ochiai. Y. Secara umum, konduksi panas homogen dapat dengan mudah diselesaikan dengan menggunakan BEM. Namun, integral domain umumnya diperlukan untuk mengatasi masalah konduksi panas pada bahan gradien fungsional. Permasalahan konduksi panas dua dimensi pada FGMs dimungkinkan dapat dipecahkan tanpa integral domain dengan *triple-reciprocity* BEM. Dengan metode tersebut, distribusi efek domain diinterpolasi oleh persamaan integral. Hasilnya, sebuah konduksi panas steady dalam FGMs telah diselesaikan tanpa sel internal dari *triple-reciprocity* BEM. Distribusi dalam domain diinterpolasi dengan menggunakan fungsi poliharmonik dan persamaan integral batas. Hal ini

menunjukkan bahwa keduanya dimungkinkan untuk mengungkapkan distribusi rumit dengan garis punggung dan distribusi terputus-putus (Ochiai, 2004).

Dengan menggunakan metode BE 'sederhana', permasalahan konduksi panas transient pada FGMs telah diselesaikan oleh Sutradhar, metode tersebut mengarah ke formulasi batas saja tanpa diskritisasi domain. Dengan transformasi variabel sederhana, masalah konduksi panas transien pada bahan bergradasi fungsional untuk tiga kelas variasi material yang berbeda (kuadrat, eksponensial, trigonometri) dapat diubah menjadi masalah difusi homogen. Hasil yang didapat, simulasi numerik BEM menunjukkan kesepakatan yang sangat baik dengan solusi analitis dan simulasi *Finite Element Method* (FEM) (Sutradhar dan Paulino, 2004). Kemudian dalam penelitian Sutradhar yang lain, formulasi Galerkin simetrik dan implementasinya untuk masalah konduksi panas FGMs tiga dimensi. Sebuah fungsi Green dari sebuah permasalahan berlapis, dalam hal ini sebuah konduktivitas termal variasi eksponensial satu koordinat yang digunakan untuk mengembangkan formulasi batas saja tanpa diskritisasi domain. Hasilnya, FGMs fungsi Green dapat ditentukan dan didapatkan formulasi batas saja. Hasil numerik menunjukkan bahwa cukup layak untuk menerapkan FGMs fungsi Green yang rumit (dan turunannya) dalam memperkirakan batas integral standar (Galerkin simetris), dan bahwa hasil yang diperoleh akurat (Sutradhar, dkk, 2005).

Baru-baru ini, penelitian untuk menyelesaikan permasalahan konduksi panas transien dengan sumber panas menggunakan BEM telah dikerjakan oleh Yao. W. Dalam penelitiannya Yao. W. mengkombinasi pendekatan gabungan dari BEM dan *Precise Integration Method* (PIM). Persamaan integral batas dapat diturunkan dengan menggunakan fungsi Green untuk persamaan Laplace, dan sebagai hasilnya, dua integral domain dilibatkan dalam persamaan integral turunan. Pertama, metode integrasi radial digunakan untuk mengubah integral domain menjadi integral batas ekivalen, sehingga sistem persamaan diferensial biasa pada persamaan integral batas dapat diperoleh dengan BEM. Kemudian, metode integrasi yang tepat diadopsi untuk memecahkan sistem persamaan diferensial biasa. Hasil dari tiga contoh numerik yang diberikan, menunjukkan bahwa PIBEM (gabungan dari PIM dengan *Radial Integration Boundary Element Method* (RIBEM)) bisa mendapatkan hasil yang stabil dan akurat untuk beda

waktu besar, sedangkan hanya dalam kasus beda waktu kecil, RIBEM-FD (RIBEM-*Finite Difference*) dapat memperoleh hasil yang akurat (Yao, dkk., 2014).

Penelitian lain tentang perpindahan panas secara konduksi telah dilakukan oleh Abreu. Dalam penelitiannya, sebuah metode untuk solusi numerik dari formulasi batas integral berbasis waktu pada masalah transien yang berdasar pada persamaan panas dalam media homogen dan non-homogen. Untuk media non-homogen, diasumsikan sebagai FGMs yang memiliki variasi spasial spesifik dari sifat materialnya sehingga teknik yang dilakukan oleh (Sutradhar dan Paulino, 2004) dapat digunakan. Dalam sebuah penelitiannya, densitas ρ dianggap konstan dan sifat material K dan $c(\mathbf{x})$ yang masing-masing adalah konduktivitas termal dan spesifik panas harus memiliki variasi terhadap ruang seperti halnya difusi termal κ yang konstan dari suatu material, maka akan diperoleh:

$$\kappa = \frac{K(\mathbf{x})}{\rho c(\mathbf{x})} \equiv \text{konstan dalam } \Omega. \quad (2.1)$$

Dalam makalah ini, dengan mensubstitusikan $K(\mathbf{x}) = \varphi^2(\mathbf{x})$ dan $T(\mathbf{x}, t) = \varphi^{-1}(\mathbf{x})v(\mathbf{x}, t)$ dalam persamaan (2.1) akan didapatkan suatu persamaan:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \kappa \nabla^2 v(\mathbf{x}, t) + \frac{\kappa \nabla^2 \varphi(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})} v(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.2)$$

Dengan $v(\mathbf{x}, t)$ adalah fungsi kecepatan aliran panas dan $\varphi(\mathbf{x})$ adalah fungsi potensial. Dalam sebuah kasus partikular dapat juga disebut pendekatan baru ketika sebuah fungsi K adalah sedemikian hingga akar kuadrat φ memenuhi:

$$\kappa \nabla^2 \varphi(\mathbf{x}) = -\alpha \varphi(\mathbf{x}) \text{ untuk nilai } \alpha \text{ konstan.} \quad (2.3)$$

Karena itu, untuk variasi spasial 1D dalam arah dari koordinat x_1 , fungsi K dapat dinyatakan:

$$\begin{cases} K(x, y) = \bar{K}[c_1 + c_2 x]^2 & \text{jika } \alpha = 0, \\ K(x, y) = \bar{K}[c_1 \exp(\beta x) + c_2 \exp(-\beta x)]^2 & \text{jika } \alpha = -\kappa \beta^2, \\ K(x, y) = \bar{K}[c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)]^2 & \text{jika } \alpha = \kappa \beta^2, \end{cases} \quad (2.4)$$

Dimana \bar{K}, c_1 dan c_2 adalah konstanta sebarang. Hasilnya, saat menghitung pengaruh matriks BEM, algoritma *Fast Fourier Transform* (FFT) dapat digunakan untuk mengurangi jumlah operasi. Untuk mengatasi masalah batas, biaya konvolusi dan penyimpanan implementasinya yang masih tinggi. Sehingga FFT tidak digunakan dalam konvolusi, dan diperlukan penyimpanan lengkap dari

pengaruh matriks. Dan untuk respon numerik pada titik interior, sebuah metode yang dijelaskan masih rendah, dalam hal jumlah operasi dan penyimpanan. Sehingga sebuah konvolusi dapat dihitung dengan menggunakan FFT, dan memori yang dibutuhkan berhubungan dengan matriks elemen hanya untuk satu titik interior, karena perhitungan untuk titik interior yang berbeda benar-benar sendiri (Abreu, dkk, 2013).

Dalam penelitian lain, analisis sensitivitas perpindahan panas secara konduksi, telah dilakukan pada FGMs dengan menggunakan metode langsung dan metode *adjoin*. Lebih tepatnya, metode integrasi waktu yang digunakan untuk memecahkan permasalahan transien. Perpindahan panas secara konduksi *steady state* dan panas transien pada FGMs telah diselesaikan menggunakan kedua metode tersebut. Dalam memodelkan FGMs, keduanya menggunakan FEM. Hasil dari metode numerik menunjukkan bahwa metode langsung dan metode *adjoin* memiliki presisi numerik yang sama dalam menghasilkan sensitivitas. Sebagian besar hasilnya berkorelasi baik dengan solusi eksak atau yang diperoleh dengan FDM (*Finite Difference Method*). (Chen dan Tong, 2004).

Sebuah studi analisis termoelektik FGMs berlapis yang dikenai *thermal shock* transien. Studi tersebut mengembangkan model FE semi analitik asisymmetrik menggunakan teori elastisitas linier tiga dimensi. Sifat material *graded* dalam arah ketebalan menurut *power law*. Hasilnya, pendekatan semi-analitis yang disajikan memberikan solusi yang lebih akurat dan menggunakan sedikit usaha komputasi dibandingkan dengan tiga dimensi FE secara umum yaitu waktu komputasi rendah diperlukan oleh pengurangan mesh tiga dimensi ke dua dimensi, namun masalahnya masih dipecahkan sebagai dimensi tiga dimensi (Santos, dkk, 2008). Setahun kemudian, penelitian tentang dua dimensi perpindahan panas secara konduksi transien pada FG silinder berlubang kembali diadakan yakni oleh Masoud. Pada penelitian ini, perpindahan panas secara konduksi menggunakan *finite length*. Distribusi fraksi volume bahan, geometri dan kondisi batas termal diasumsikan bersifat asisymmetrik namun tidak seragam sepanjang arah aksial. Efek distribusi material dua dimensi pada distribusi temperatur dan waktu respon dipertimbangkan. Hasilnya, untuk pemodelan dan simulasi dari persamaan yang mengatur sebuah FEM *graded* yang telah

digunakan, memiliki beberapa keunggulan FEM konvensional. Berdasarkan hasil yang dicapai, dua dimensi FGMs memiliki potensi kuat untuk merancang dan mengoptimalkan struktur dengan persyaratan multifungsi (Asgari dan Akhlaghi, 2009).

Penelitian lain dalam menyelesaikan perpindahan panas pada FGMs yaitu oleh Babaei. Dalam penelitiannya, FGMs satu dimensi silinder berlubang dikenai konduksi panas transien hiperbolik diselesaikan menggunakan metode analitik domain Laplace. Kecuali waktu relaksasi termal yang seragam, semua sifat material silinder lainnya diasumsikan bervariasi di sepanjang arah radial mengikuti formulasi *power law* dengan eksponen acak yang dikenal sebagai indeks nonhomogeneitas. Hasilnya, kecepatan propagasi gelombang termal sangat bergantung pada indeks nonhomogeneitas. Indeks nonhomogeneitas yang lebih tinggi menyebabkan kecepatan gelombang lebih tinggi. Semakin tinggi indeks nonhomogeneity, semakin tinggi nilai *steady state* dari temperature fluks dan panas (Babaei dan Chen, 2010).

Metode lain terkait penyelesaian permasalahan perpindahan panas secara konduksi yakni metode *meshless*. Salah satu penelitian yang menggunakan metode tersebut oleh Gao (Gao, 2006) dengan menggunakan metode *meshless* BEM untuk masalah konduksi panas isotropik dengan generasi panas dan konduktivitas spasial yang bervariasi. Hasilnya, keuntungan yang berbeda dari pendekatan *meshless* yang disajikan adalah bahwa hal itu memerlukan poin internal yang jauh lebih sedikit daripada skema integrasi sel konvensional untuk memperoleh hasil yang memuaskan.

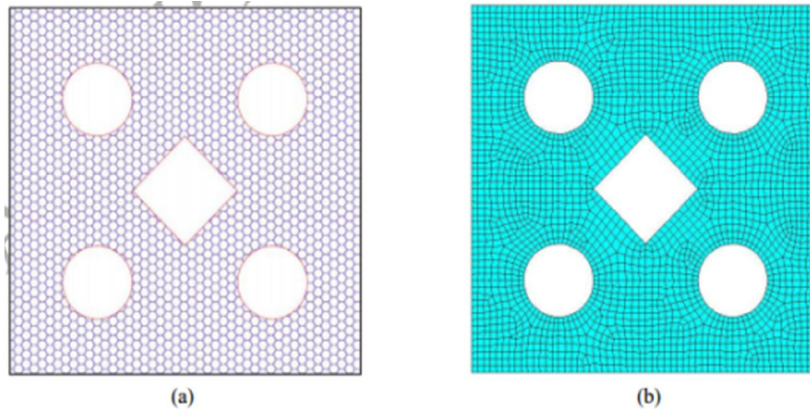
Penelitian lainnya yang dilakukan oleh Zhang. X. Dalam penelitiannya, metode *Element Free Galerkin* (EFG) yang disajikan dengan baik untuk masalah konduksi panas dengan pembangkitan panas dan konduktivitas spasial yang bervariasi. Untuk meningkatkan efisiensi komputasi metode *meshless* berdasarkan formulasi Galerkin lemah, domain nodal efek metode *meshless* diperluas agar memiliki bentuk poligon yang berubah-ubah. Ketika ukuran domain nodal yang berdimensi mendekati 1, titik Gauss kuadrat hanya berkontribusi pada nodal-nodal yang memiliki sel di mana titik Gauss kuadrat berada. Hasilnya metode yang disajikan meningkatkan efisiensi komputasi secara jelas dan menyederhanakan

penerapan kondisi batas esensial metode EFG tradisional. Sementara itu, metode tersebut memiliki akurasi komputasi yang tinggi. Selain itu, metode yang disajikan dapat dengan mudah diterapkan pada masalah geometri yang kompleks (Zhang, dkk, 2013).

Metode *meshless* lain, dalam menyelesaikan permasalahan perpindahan panas secara konduksi pada FGMs yakni menggunakan metode *meshless B-splines*. Metode *meshless B-splines* pertama kali diperkenalkan oleh (Carl De Boor, 1972), untuk menyelesaikan kasus *coincident knots*. Telah banyak penelitian tentang penyelesaian permasalahan perpindahan panas secara konduksi menggunakan metode *meshless B-splines*. Salah satu penelitian yang telah dilakukan adalah oleh Mas Irfan. Dalam penelitiannya, metode *meshless* lokal *B-spline* basis *finite differend* dan aplikasinya untuk dua dimensi permasalahan konduksi panas dengan variasi konduksi termal spasial. Hasilnya, *meshless* lokal *B-spline* basis *finite differend* atau metode lokal B-FD telah berhasil diimplementasikan untuk menyelesaikan permasalahan konduksi panas dua dimensi dengan generasi panas dan konduksi termal bervariasi (Mas Irfan, dkk, 2014).

Baru-baru ini, penelitian tentang permasalahan perpindahan panas secara konduksi pada FGMs telah dilakukan oleh Zhang. Disebabkan oleh penggunaan sistem penutup ganda, yaitu penutup matematis dan penutup fisik, metode *Manifold Numerik* (NMM) mampu memecahkan masalah fisik dengan batas mesh yang tidak konsisten. Pada makalah ini, NMM, dikombinasikan dengan elemen heksagonal *Wachspress*, dikembangkan untuk mengatasi masalah konduksi panas transien dua dimensi. Empat contoh numerik dengan kompleksitas meningkat diujikan, di bawah kondisi batas Dirichlet atau kondisi batas Dirichlet dan Neumann yang beragam. Menggunakan matematika yang terdiri dari elemen matematis heksagonal reguler, diadopsi selama simulasi. Efek dari beberapa parameter utama yaitu, nilai penalti, ukuran elemen dan langkah waktu, pada hasil diselidiki. Bidang termal yang dihitung sesuai dengan solusi referensi yang ada. Hasilnya, untuk masalah perpindahan panas yang terus berlanjut, dibandingkan dengan beberapa metode numerik lain yang diwakili, misalnya FEM, BEM dan metode *meshless*, keuntungan dominan dari pendekatan yang diusulkan terletak

pada diskritisasi, yaitu penutup matematis dapat tidak sesuai dengan keduanya. Batas eksternal dan internal (Gambar 2.4), yang dapat mengurangi biaya meshing di sebagian dan memanfaatkan keakuratan elemen regular dengan baik. Meskipun hanya *hexagons* biasa yang digunakan dalam penelitian ini, semua *convex n-gons* ($n > 4$) dan kombinasi keduanya diterima dari esensi NMM jenis *Wachspress* poligonal (Zhang, dkk, 2017).

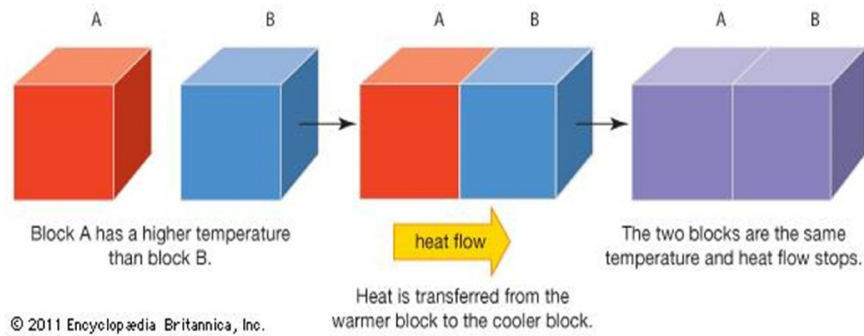


Gambar 2.5 Diskritisasi menggunakan NMM dan FEM: (a) diskritisasi NMM dan (b) mesh FEM (Zhang, dkk, 2017)

2.1.2 Persamaan Perpindahan Panas Transien

Sebuah analisis masalah perpindahan panas sangatlah penting untuk bidang teknik dan ilmu pengetahuan yang banyak ditemukan di berbagai aplikasi teknologi seperti pendingin elektronik, isolasi termal atau konduksi panas dan lain sebagainya.

Perpindahan panas adalah perpindahan dari energi yang terjadi akibat dari gradien temperatur atau perbedaan temperatur. Perbedaan temperatur ini dianggap sebagai kekuatan pendorong yang menyebabkan aliran panas. Perpindahan panas terjadi dengan tiga mekanisme dasar yaitu konduksi, konveksi dan radiasi.



Gambar 2.6 Sebuah gambar perpindahan panas (Ensiklopedia inggris, 2011)

Perpindahan panas secara konduksi adalah perpindahan energi panas dari bagian benda ke bagian benda lainnya atau dari satu benda ke benda lain tanpa adanya perpindahan partikel atau zat. Konduksi panas dapat terjadi pada gas, cair dan padat.

Dengan mempertimbangkan batas domain Ω dengan parameter material konstan, persamaan perpindahan panas dua dimensi secara konduksi dalam media isotropik adalah sebagai berikut: (Yao, 2014)

$$\rho(\mathbf{x})c(\mathbf{x}) \frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial t} = K(\mathbf{x})\nabla^2 T(\mathbf{x},t) + f(\mathbf{x},t) \text{ dalam } \Omega. \quad (2.5)$$

Kondisi batas Dirichet:

$$T = \bar{T} \text{ pada } \Gamma_1, \quad (2.6)$$

Kondisi batas Neumann:

$$K_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y = \bar{q} \text{ pada } \Gamma_2, \quad (2.7)$$

Kondisi batas Robin:

$$K_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y = h(T_f - T) \text{ pada } \Gamma_3, \quad (2.8)$$

dimana $\mathbf{x} = (x, y)$, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ adalah sebuah operator Laplace, $T(\mathbf{x}, t)$ sebagai temperatur pada titik $\mathbf{x} \in \Omega$, t adalah waktu, K adalah konduktivitas termal, $f(\mathbf{x}, t)$ adalah fungsi eksplisit tingkat panas-generasi dari x terhadap waktu t , K_x dan K_y masing-masing konduktivitas panas yang ditentukan oleh arah utama dari tensor konduktivitas x dan y , \bar{T} dan \bar{q} masing-masing adalah temperatur yang ditentukan dan fluks panas diberikan pada batas-batas yang sesuai, n_x dan n_y masing-masing adalah cosinus arah luar pada permukaan batas,

h adalah koefisien transfer konveksi panas, T_f adalah temperatur lingkungan, dan Γ_1 , Γ_2 dan Γ_3 adalah batas dimana Dirichlet, kondisi Neumann dan Robin diterapkan.

Untuk mempermudah, dalam makalah ini menggunakan kondisi batas Dirichlet dan Neumann dengan kondisi awal:

$$T(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = T_0 \text{ dalam } \Omega. \quad (2.9)$$

2.2 Metode Elemen Hingga (FEM) untuk Masalah Perpindahan Panas secara Konduksi

Metode elemen hingga adalah sebuah prosedur numerik yang dapat digunakan untuk mendapatkan sebuah solusi pada sebagian besar permasalahan teknik yang melibatkan analisis stress, perpindahan panas, elektromagnetik dan aliran fluida. Di dalamnya terdapat banyak bentuk kompleks dari permasalahan domain yang dapat diselesaikan dengan mudah.

Penelitian menggunakan metode FE dilakukan oleh Bruch dengan sebuah persamaan konvolusi difusi satu dimensi diformulasikan dengan merepresentasi FE menggunakan pendekatan Galerkin. Fungsi bentuk linier dan elemen segitiga dan persegi dua dimensi dalam ruang dan waktu digunakan untuk memecahkan masalah. Hasilnya dibandingkan dengan solusi FD serta solusi eksak. Hasil FE terbukti lebih cepat dan lebih akurat, tergantung teknik dan masalah yang sedang dipertimbangkan. Metode ini berguna karena mudah diprogram, stabil, konvergen dengan solusi eksak dengan mengurangi ukuran elemen, berlaku untuk banyak masalah lapangan (linier dan non linier), dan tidak memerlukan parameter konstan selama keseluruhan domain solusi (Bruch dan Zyvoloski, 1973).

Kemudian, Bruch juga meneliti tentang perpindahan panas secara konduksi transien linier dan non linier linier dengan menggunakan proses residu bobot FE. Prisma rectangular dalam domain ruang-waktu digunakan sebagai FE. Fungsi bobot sama dengan fungsi bentuk yang menentukan pendekatan variabel dependen. Hasilnya ditemukan stabil, konvergen dengan solusi yang tepat, mudah diprogram, dan komputasi cepat. Hasil yang didapat sesuai untuk beberapa contoh dibandingkan dengan hasil analisis dan numerik. Metode ini fleksibel karena tidak

memerlukan parameter konstan selama keseluruhan domain solusi dan elemen isoparametrik dapat digunakan (Bruch dan Zyvoloski, 1974).

Secara umum, metode elemen hingga (untuk beberapa elemen) dirumuskan sebagai:

$$[\mathbf{K}]\mathbf{T} = \mathbf{f}, \quad (2.10)$$

dengan $[\mathbf{K}]$ adalah kondisi matriks, atau bisa juga dijabarkan sebagai:

$$[\mathbf{K}] = K_{ij} = \int_{\Omega} \left[K_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + K_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Omega, \quad (2.11)$$

Dimana N_i dan N_j masing-masing adalah fungsi shape dari *Moving Least Squares* (MLS) baris i dan kolom j , \mathbf{T} adalah vektor yang menggambarkan perpindahan nodal dan \mathbf{f} adalah vektor yang menggambarkan gaya nodal dan kekuatan eksternal, atau bisa juga dijabarkan sebagai:

$$\mathbf{f} = F_i = \int_{\Omega} Q(x,y)N_i d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{q}N_i d\Gamma. \quad (2.12)$$

Dengan menggunakan persamaan (10), persamaan perpindahan panas dengan menggunakan metode FE, dapat dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{f}, \quad (2.13)$$

Dengan:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho c \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_{\theta}^T \mathbf{B}_{\theta} K d\Omega, \quad (2.15)$$

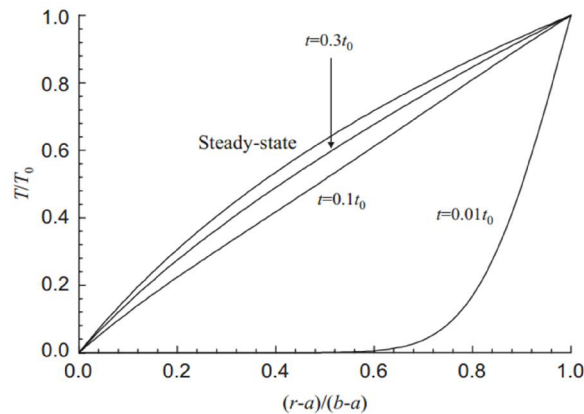
$$\mathbf{f} = - \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \bar{q} d\Gamma + \int_{\Omega} f \mathbf{N}^T d\Omega, \quad (2.16)$$

\mathbf{M} adalah matriks kapasitas, $\dot{\mathbf{T}}$ adalah vektor yang menggambarkan perpindahan nodal terhadap waktu, \mathbf{K} adalah kondisi matriks, \mathbf{T} adalah vektor yang menggambarkan perpindahan nodal, \mathbf{N}^T adalah matriks transpose fungsi shape, \mathbf{B}_{θ} matriks geometri dan \mathbf{f} adalah vektor yang menggambarkan gaya nodal dan kekuatan eksternal.

Banyak sekali penelitian menggunakan analisa numerik metode *Finite Element* untuk permasalahan perpindahan panas, salah satunya seperti yang dilakukan oleh (Wang dan Mai, 2005). Bao-Lin Wang menganalisis perpindahan panas secara konduksi menggunakan metode *Finite Element* pada masing-masing silinder homogen dan silinder non-homogen berlubang. Di dalam penelitiannya,

FE digunakan sebagai diskritisasi ruang satu dimensi. Sedangkan untuk mendapatkan respon perpindahan, digunakan FD atau mode teknik superposisi. Bao-Lin Wang memperkenalkan sebuah metode FE yang sering digunakan dalam analisis numerik perpindahan panas secara konduksi. Untuk penerapannya, Bao-Lin menggunakan aplikasi komputer MATLAB. Hasilnya seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.7 dan 2.8.

Gambar 2.7 menunjukkan distribusi temperatur pada $t = 0.01 \tau_0, 0.1 \tau_0$ dan $0.3 \tau_0$, dimana $\tau_0 = \rho c(b - a)^2 / k$ adalah karakteristik parameter waktu yang juga menunjukkan sebuah solusi *steady-state*. Hasil yang diperoleh dari silinder homogen berlubang, menunjukkan pada solusi berantai menunjukkan hasil yang sangat baik.

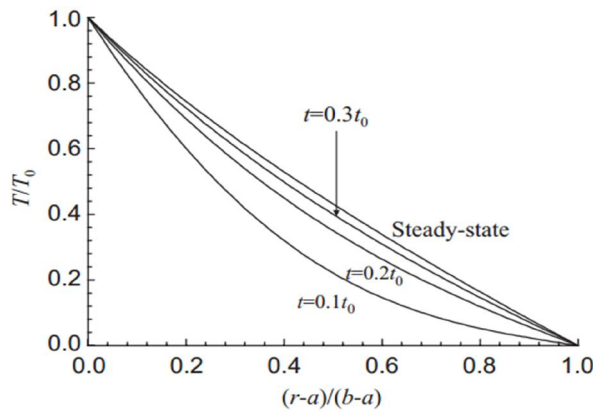


Gambar 2.7 Distribusi temperatur pada silinder homogen berlubang (Wang dan Mai, 2005)

Sedangkan Gambar 2.8 adalah hasil yang diperoleh dari silinder non-homogen berlubang yang menunjukkan hasil yang sama dengan sebuah solusi eksak:

$$T(r) = T_0 \frac{b-r+\ln b-\ln r}{b-a+\ln b-\ln a}, \quad (2.17)$$

dan pada $t = 0.1 \tau_0, 0.2 \tau_0$ dan $0.3 \tau_0$ juga menunjukkan sebuah solusi *steady-state*.



Gambar 2.8 distribusi temperatur pada silinder non-homogen berlubang (Wang dan Mai, 2005)

Di tahun yang sama, penelitian lain tentang permasalahan perpindahan panas secara konduksi transien menggunakan metode FE adalah oleh Bao-Lin Wang. Dalam penelitiannya, metode FE/FD dikembangkan untuk memecahkan masalah temperatur transien bergantung waktu pada FGMs. Metode ini menggunakan ruang diskritisasi ruang hingga untuk mendapatkan sistem persamaan diferensial orde pertama, yang diselesaikan dengan menggunakan skema FD untuk menyelesaikan respons tergantung waktu. Hasilnya, meskipun sifat material pada setiap elemen diberi konstanta, seseorang dapat meningkatkan akurasi perhitungan dengan meningkatkan jumlah elemen (Wang dan Tian, 2005).

Penelitian lain tentang permasalahan perpindahan panas secara konduksi transien menggunakan metode FE adalah oleh Golbahar. Dalam penelitiannya, pengembangan metode FE digabung dengan metode *differential quadrature* (DQ) sebagai alat numerik yang sederhana, akurat dan efisien secara komputasi untuk analisis perpindahan panas transien dua dimensi dari FGMs. Persamaan diferensial yang mengatur diskretisasi dalam arah longitudinal pelat tipis sesuai dengan prinsip FEM. Kemudian, sistem persamaan yang dihasilkan dan kondisi batas terkait diskretisasi dalam arah ketebalan dan dalam *strong form* dengan menggunakan DQM. Formulasi DQ benar-benar memenuhi kondisi batas pada permukaan atas dan bawah pelat tipis. Persamaan diferensial yang dihasilkan kemudian discretized dalam domain temporal menggunakan DQM tambahan. Hasilnya menunjukkan, tingkat konvergensi yang cepat, dan hasilnya sangat

sesuai dengan solusi menggunakan metode lain bahkan dengan jumlah *finite elements* dan titik grid DQ pada semua contoh yang disajikan (Golbahar, dkk, 2008).

Selanjutnya, penelitian tentang permasalahan perpindahan panas transien dilakukan oleh Malekzadeh. P. Dalam penelitiannya, permasalahan perpindahan panas transien pada *Functionally Graded* (FG) silinder berlubang mengalami fluks panas terdistribusi dengan batas luar yang bergerak pada permukaan dalamnya. Sebuah flux panas diasumsikan asisimetric, dan batas luar bergerak sepanjang sumbu silinder. Sifat material diasumsikan bertingkat searah ketebalan. Metode yang terdiri dari FE dan metode kuadratur diferensial digunakan untuk mendiskritisasi persamaan umum dalam domain spasial. Hasilnya, Formulasi *Differential Quadrature* (DQ) benar-benar memenuhi kondisi batas pada permukaan dalam dan luar dari silinder berongga. Sistem persamaan diferensial yang dihasilkan, dipecahkan dalam domain temporal menggunakan skema integrasi waktu *Newmark*. Studi parametrik, dilakukan untuk mempelajari perilaku termal silinder berongga FG yang mengalami fluks panas dengan tepi depan yang bergerak. Dari hasil yang diperoleh, dapat disimpulkan bahwa indeks gradasi material, bilangan *Vernotte*, parameter geometris, dan kecepatan sumber panas berpengaruh signifikan terhadap distribusi temperatur silinder berongga FG (Malekzadeh, dkk, 2013).

Selain dengan menggunakan metode numerik, permasalahan perpindahan panas secara konduksi transien juga dapat diselesaikan menggunakan metode analitik, seperti pada penelitian yang dilakukan oleh Hosseini. Dalam penelitiannya konduksi panas transien pada FG silinder berlubang tipis dapat diselesaikan menggunakan metode analitik. Sifat material dianggap nonlinier dengan distribusi *power law* sepanjang ketebalan. Distribusi temperatur diturunkan secara analitis dengan menggunakan fungsi Bessel. Hasilnya, keakuratan hasil dapat ditingkatkan dengan menggunakan lebih banyak nilai *eigen*. Distribusi temperatur transien pada FG silinder berlubang tipis diperoleh secara analitik dalam *closed form*. Distribusi ini bisa berguna dalam menentukan medan tegangan termal. Optimalisasi konduksi panas dapat diselesaikan dengan formulasi ini (Hosseini, dkk, 2007).

Terdapat sebuah penelitian tentang penggunaan metode analitik yaitu oleh Wang, dengan mencoba sebuah pendekatan efektif yang dikembangkan untuk menganalisis analisis termal transien dalam FG silinder berlubang. Sebuah solusi transien dalam arah radial diperoleh berdasarkan teori pendekatan berlapis. Dalam teknik pemecahannya, solusi transien dibagi menjadi dua bagian: Salah satunya adalah solusi *quasi-static* dan yang lainnya adalah solusi dinamik. Solusi *quasi-static* diperoleh dengan metode *state space* dan solusi dinamik diperoleh dengan metode inisial parameter. Hasilnya, dengan metode tersebut mempermudah dalam menganalisis secara numerik. Solusi tersebut valid untuk analisis termal transien dalam struktur silinder FG dengan pola gradasi acak dan ketebalan yang berubah-ubah (Wang, 2013).

Permasalahan konduksi panas transien pada FG silinder berlubang dengan menggunakan metode analitik yang lain, dilakukan oleh Kaneshjou. Dalam penelitiannya, sebuah implementasi sederhana digunakan untuk menyelesaikan persamaan konduksi panas pada dua dimensi silinder berlubang yang terbuat dari *Functionally Graded Materials* (FGMs) dengan adanya sumber panas yang bergantung waktu. Semua sifat material dianggap bervariasi terus menerus di dalam silinder sepanjang arah radial dengan pola yang berubah-ubah. Solusi transien dapat diperoleh dengan metode *state space* yang diperbesar, dengan solusi tersebut diharapkan mendapatkan hasil dengan mudah, berdasarkan teori aproksimasi laminasi di domain Laplace, dan kemudian hasil yang diperoleh diubah menjadi domain waktu dengan menerapkan inversi transformasi Laplace numerik. Untuk menunjukkan ketahanan matematis dari metode yang disajikan, pengaruh orthotropi dan berbagai ukuran sumber panas bergantung waktu pada temperatur transien juga dipelajari. Hasil yang diperoleh, ditemukan sangat sesuai dengan penelitian lain yang telah diterbitkan (Daneshjou, dkk, 2015).

Dalam penelitian Kaneshjou yang lain, metode analitik digunakan juga untuk menyelesaikan permasalahan konduksi panas. Dalam penelitiannya, Kaneshjou menganalisis konduksi panas non-Fourier dari dua dimensi FG tak terbatas silinder berlubang yang diberi sumber panas bergantung waktu. Dalam penelitian ini, diperkenalkan *Augmented State Space Method* (ASSM) ditambah dengan mempertimbangkan teori pendekatan laminasi. Hasil yang diperoleh,

semua masalah yang telah terpecahkan hanya pada kasus khusus dari kondisi umum untuk permasalahan panas. Akan tetapi, untuk mengenalkan ASSM sebagai alat matematika yang hebat, masalah konduksi panas non-Fourier umum telah dipertimbangkan dan dipecahkan secara analitis (Daneshjou, dkk, 2016).

2.3 Teknologi proses fabrikasi FGMs

Proses fabrikasi merupakan salah satu bidang terpenting dalam penelitian FGMs. Sebagian besar penelitian tentang FGMs telah didedikasikan untuk proses pengolahan dan berbagai macam metode produksi yang telah dikembangkan untuk pemrosesan FGMs. Sebagian besar proses produksi FGMs didasarkan pada variasi metode pengolahan konvensional yang sudah ada. Metode metalurgi serbuk adalah sebuah metode yang mampu mengakomodasi setiap gradasi termasuk laminasi lembaran, dan deposisi uap kimia dan proses pengapungan (Jin, dkk, 2009, Shahrjerdi, dkk, 2011 dan He, dkk, 2009). Secara umum, metode pembentuk yang digunakan meliputi pengecoran sentrifugal (Watanabe, dkk, 2005, Duquea, dkk, 2005 dan Torii, dkk, 2004), slip casting, tape casting (Yeo, dkk, 1998), dan termal spraying (Cannillo, dkk, 2007 dan Belmonte, dkk, 2009).

Pada dewasa seperti sekarang ini, terdapat sebuah teknologi proses fabrikasi FGMs yang sedang dikembangkan yakni *Rapid Prototyping*. Istilah *Rapid Prototyping* (atau RP) digunakan di berbagai industri untuk menggambarkan sebuah proses untuk menciptakan sebuah sistem fabrikasi cepat sebelum akhirnya rilis atau menjadi sebuah produk (Gibson, dkk, 2010). Dengan kata lain, penekanannya adalah pada menciptakan sesuatu dengan cepat dan bahwa outputnya adalah prototipe atau model dasar dari model selanjutnya dan akhirnya produk akhir akan dihasilkan. Konsultan manajemen dan insinyur perangkat lunak menggunakan istilah *Rapid Prototyping* untuk menggambarkan proses pengembangan solusi bisnis dan perangkat lunak dengan cara sederhana yang memungkinkan klien menguji gagasan dan memberikan umpan balik selama proses pengembangan. Dalam konteks pengembangan produk, istilah *rapid prototyping* digunakan secara luas untuk menggambarkan teknologi yang menciptakan prototyp fisik langsung dari data digital. Teks tentang teknologi ini,

pertama kali dikembangkan untuk prototyping, tapi sekarang digunakan untuk lebih banyak tujuan.

Dalam perkembangannya, pengguna teknologi RP menyadari bahwa istilah ini tidak memadai dan tidak secara efektif menggambarkan aplikasi teknologi yang lebih baru. Sehingga, sebuah komite teknis baru yang terbentuk dalam ASTM International sepakat bahwa terminologi baru harus diadopsi. Sementara ini masih dalam perdebatan, baru-baru ini dengan mengadopsi standar konsensus ASTM sekarang menggunakan istilah *Additive Manufacturing* (AM) (Gibson, dkk, 2010).

Prinsip dasar dari teknologi ini adalah bahwa sebuah model, yang pada awalnya dibuat dengan menggunakan sistem *Computer Aided Design* (3D CAD) tiga dimensi, dapat dibuat secara langsung tanpa memerlukan perencanaan proses. Meskipun ini sebenarnya tidak sesederhana kedengarannya, teknologi AM tentu secara signifikan menyederhanakan proses pembuatan objek 3D yang kompleks langsung dari data CAD. Proses manufaktur lainnya memerlukan analisis geometri pada bagian yang rentan dan terperinci untuk menentukan hal-hal seperti urutan di mana fitur yang berbeda dapat dibuat, alat dan proses apa yang harus digunakan, dan perlengkapan tambahan apa yang diperlukan untuk melengkapi bagian ini. Sebaliknya, AM hanya membutuhkan beberapa detail dimensi dasar dan sejumlah kecil pemahaman tentang bagaimana mesin AM bekerja dan bahan yang digunakan (Gibson, dkk, 2010). Kuncinya, bagaimana kerja AM adalah bagian dibuat dengan menambahkan material berlapis; Setiap lapisan adalah penampang tipis dari bagian yang berasal dari data CAD asli. Jelas bahwa setiap fisik, setiap lapisan harus memiliki ketebalan yang terbatas dan begitu bagian yang dihasilkan akan menjadi perkiraan dari data asli, seperti yang digambarkan oleh Gambar 2.9.



Gambar 2.9 Tampilan CAD dari cangkir teh dengan menunjukkan efek dari ketebalan yang berbeda (Gibson, dkk, 2010)

Pada AM melibatkan sejumlah langkah yang beralih dari deskripsi CAD virtual ke bagian resultan fisik. Produk yang berbeda akan melibatkan AM dengan cara yang berbeda dan dengan derajat yang berbeda. Produk kecil dan relatif sederhana hanya menggunakan AM untuk model visualisasi, sementara produk yang lebih besar dan kompleks dengan konten rekayasa yang lebih besar mungkin melibatkan AM dengan berbagai tahap dan iterasi selama proses pengembangan. Selanjutnya, tahap awal proses pengembangan produk mungkin hanya memerlukan komponen yang kasar, karena AM digunakan hanya pada kecepatan di mana sebuah produk dapat dibuat. Pada tahapan proses selanjutnya, bagian-bagian mungkin memerlukan pembersihan dan pengolah yang hati-hati (termasuk pengamplasan, persiapan permukaan dan pengecatan) sebelum digunakan, dengan AM berguna di sini karena kompleksitas bentuk yang dapat dibuat tanpa harus mempertimbangkan peralatan. Kemudian, kita akan menyelidiki secara menyeluruh berbagai tahap proses AM, namun untuk meringkas, kebanyakan proses AM melibatkan setidaknya sampai delapan langkah berikut; konseptualisasi dan CAD, konversi ke STL, transfer dan manipulasi file STL pada mesin AM, penyiapan mesin, membangun, bagian pemindahan dan pembersihan, pasca pengolahan bagian dan Aplikasi (Gibson, dkk, 2010).

BAB 3

METODE PENELITIAN

3.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Rancangan kegiatan penelitian ini akan dilakukan pada bulan juni 2016 sampai dengan desember 2017 dan dilaksanakan di Laboratorium Komputasi Teknik Material dan Metalurgi Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya.

3.2 Peralatan

Komputer ASUS i5 RAM 4GB dan perangkat lunak ANSYS.

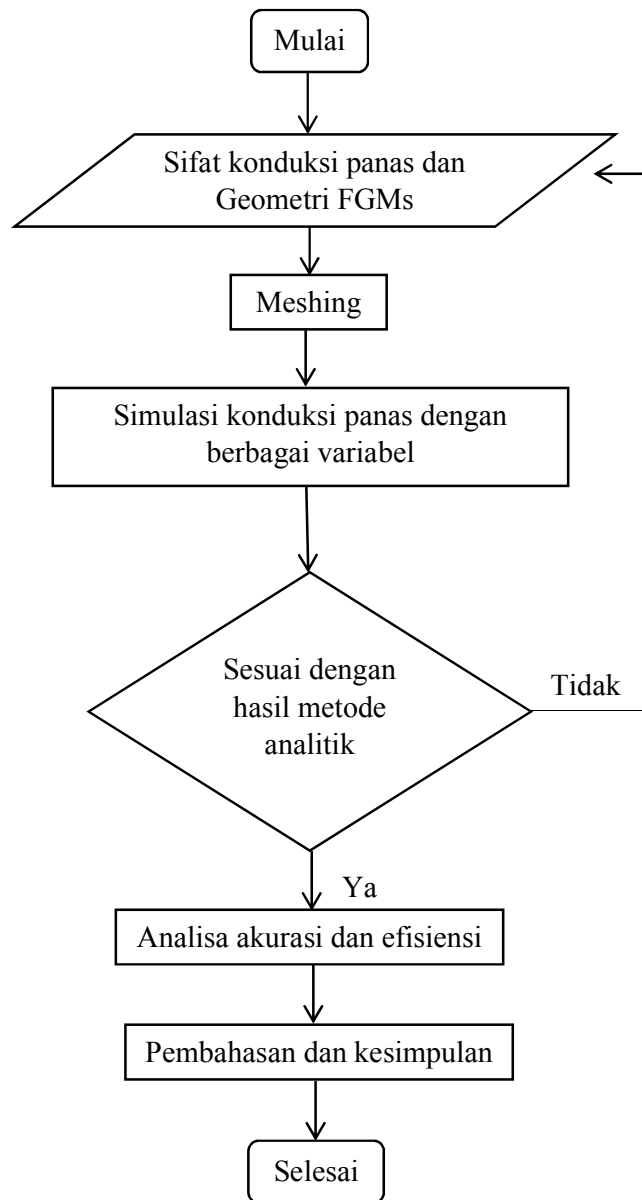
3.3 Eksperimental Desain dan Diagram Alir Penelitian

Eksperimental desain dan diagram alir pada penelitian ini ditunjukkan pada Tabel 3.1 di bawah ini dan Gambar 3.1.

Tabel 3.1 Eksperimental desain

Input					Output 1		
Sifat FGMs	Geometri FGMs	Jumlah nodal					
A	B	C	D	E			
Polynomial	Persegi	279	761	828	A1B1C1	A2B1C1	A3B1C1
Ekspensial	Silinder berlubang	1037	883	1065	A1B1C2	A2B1C2	A3B1C2
Trigonometri	Geometri rumit	2275	1379	1329	A1B1C3	A2B1C3	A3B1C3

Output 2			Output 3		
A1B2D1	A2B2D1	A3B2D1	A1B3E1	A2B3E1	A3B3E1
A1B2D2	A2B2D2	A3B2D2	A1B3E2	A2B3E2	A3B3E2
A1B2D3	A2B2D3	A3B2D3	A1B3E3	A2B3E3	A3B3E3



Gambar 3.1 Diagram alir penelitian

3.4 Prosedur Penelitian

3.4.1 Konduksi Panas pada FGMs

Dalam penelitian ini, persamaan konduksi panas yang digunakan yakni persamaan (2.5) dengan kondisi batas Dirichet dan Neumann.

3.4.2 Metode *Finite Element* (FE)

Dalam penelitian ini, metode numerik yang digunakan adalah metode FE. Karena metode ini adalah salah satu metode yang umum digunakan untuk menganalisis konduksi panas pada beberapa material terutama FGMs.

Dalam penelitian ini penggunaan metode elemen hingga digunakan untuk mendapatkan nilai temperatur dari FGMs dengan sifat material yang digunakan ZrO_2 dan $Ti - 6Al - 4V$ (Tanigawa, dkk, 1997) :

[ZrO_2]:

$$k = 1,71 + 0,21 \times 10^{-3}T + 0,116 \times 10^{-6}T^2 \left(\frac{W}{mK}\right), \quad (3.1)$$

$$c = 274 + 0,795T - 6,19 \times 10^{-4}T^2 + 1,71 \times 10^{-7}T^3 \left(\frac{J}{kgK}\right), \quad (3.2)$$

$$\rho = \frac{3657}{\{(1,0+\alpha(T-300,0))\}^3} \left(\frac{kg}{m^3}\right), \quad (3.3)$$

$$\alpha = 13,31 \times 10^{-6} - 18,9 \times 10^{-9}T + 12,7 \times 10^{-12}T^2 \left(\frac{1}{K}\right), \quad (3.4)$$

$$E = 132,2 - 50,3 \times 10^{-3}T - 31,4 \times 10^{-6}T^2 (GPa), \quad (3.5)$$

$$v = 0,333. \quad (3.6)$$

[$Ti - 6Al - 4V$]:

$$k = 1,1 + 0,017T \left(\frac{W}{mK}\right), \quad (3.7)$$

$$c = 350 + 0,878T - 9,74 \times 10^{-4}T^2 + 4,43 \times 10^{-7}T^3 \left(\frac{J}{kgK}\right), \quad (3.8)$$

$$\rho = \frac{4420,0}{\{(1,0+\alpha(T-300,0))\}^3} \left(\frac{kg}{m^3}\right), \quad (3.9)$$

$$\alpha = 7,43 \times 10^{-6} + 5,56 \times 10^{-9}T - 2,69 \times 10^{-12}T^2 \left(\frac{1}{K}\right), \quad (3.10)$$

$$E = 122,7 - 0,0565T (GPa), \quad (3.11)$$

$$v = 0,289 + 32,0 \times 10^{-6}T. \quad (3.12)$$

3.4.3 Metode Analitik

Dalam penelitian ini, metode analitik digunakan untuk menjadi pembanding dari metode FE. Karena metode ini adalah salah satu metode yang umum digunakan untuk menganalisis konduksi panas pada material FGMs.

3.4.4 Model Gradasi Sifat FGMs

Setelah memasukkan metode-metode yang digunakan, kemudian mencantumkan beberapa model gradasi sifat FGMs antara lain:

Polinomial;

$$\lambda(x) = \lambda_0(1 + \delta x/L)^2, \quad c(x) = c_0(1 + \delta x/L)^2, \quad (3.13)$$

dengan $\lambda(x)$ adalah fungsi polinomial dan $c(x)$ adalah fungsi polinomial panas spesifik.

Trigonometri;

$$\lambda(x) = \lambda_0 \left[a \cos\left(\frac{\delta x}{L}\right) + b \sin\left(\frac{\delta x}{L}\right) \right]^2, \quad c(x) = c_0 \left[a \cos\left(\frac{\delta x}{L}\right) + b \sin\left(\frac{\delta x}{L}\right) \right]^2, \quad (3.14)$$

dengan $\lambda(x)$ adalah fungsi trigonometri dan $c(x)$ adalah fungsi trigonometri panas spesifik.

Eksponensial;

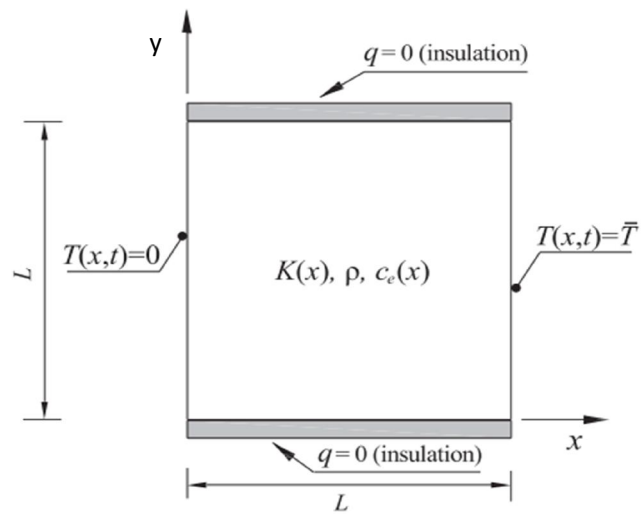
$$\lambda(x) = \lambda_0(ae^{\delta x/L} + be^{\delta x/L})^2, \quad c(x) = c_0(ae^{\delta x/L} + be^{\delta x/L})^2, \quad (3.15)$$

dengan $\lambda(x)$ adalah fungsi eksponensial dan $c(x)$ adalah fungsi eksponensial panas spesifik.

3.4.5 Model Geometri

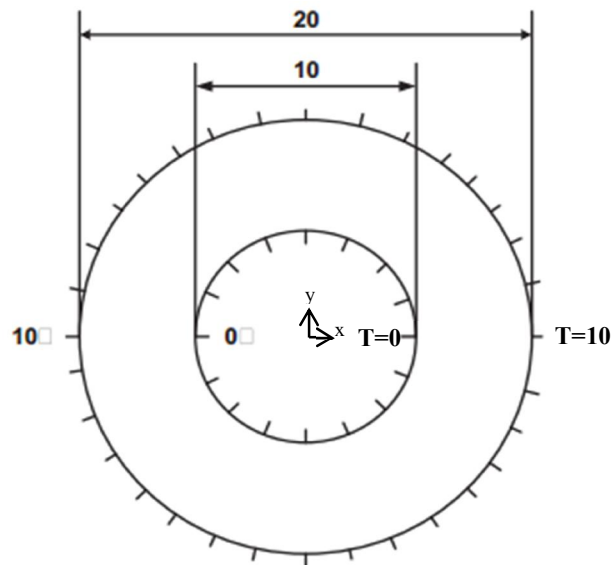
Setelah menentukan model gradasi sifat FGMs, kemudian menentukan model geometri yang biasa digunakan dalam bidang teknik. Diantara lain:

Persegi:



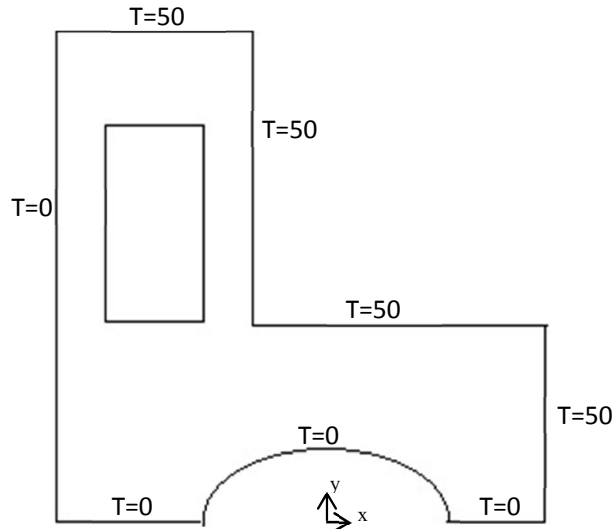
Gambar 3.2 FGMs persegi: geometri dan kondisi batas

Silinder Berlubang:



Gambar 3.3 FGMs silinder berlubang dan kondisi batas

Geometri Rumit:



Gambar 3.4 Geometri rumit dan kondisi batas

3.4.6 Variasi Jumlah Nodal

Setelah menentukan model gradasi sifat FGMs dan model geometri, selanjutnya mulai memvariasi jumlah nodal yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS. Dengan variasi nodal yang semakin meningkat.

3.4.7 Analisa Perbandingan Akurasi dan Efisiensi

Setelah semua tercantumkan, kemudian mencari akurasi dan efisiensi nilai distribusi temperatur empat model tersebut secara 2D yang dibangun dengan perangkat lunak ANSYS. Setelah itu, dibandingkan akurasi dan efisiensi nilai distribusi temperatur yang dihasilkan antara metode *Finite Element* dan metode analitik. (Zhang, dkk, 2017)

$$\Pi(T) = \int_{\Omega} \left[\rho c T \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 - QT \right] d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{q} T d\Gamma, \quad (3.16)$$

$$\Pi^*(T) = \Pi(T) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_T} (T - \bar{T}) \lambda (T - \bar{T}) d\Gamma, \quad (3.17)$$

Dimana λ adalah sebuah pinalti.

Nilai error (E) yang didapatkan, mengikuti persamaan sebagai berikut:

$$E_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{NC} [u(x_i) - \hat{u}(x_i)]^2}{\sum_{i=1}^{NC} u(x_i)^2}}, \quad (3.18)$$

Dimana $u(x_i)$ dan $\hat{u}(x_i)$ masing-masing adalah solusi analitik dan solusi numerik. Dalam hal ini masalah konduksi panas yang tidak menghasilkan solusi analitis, hasil numerik diperoleh dengan menggunakan RBF-DQM atau metode numerik lainnya yang tersedia dalam literatur akan dijadikan patokan. Untuk metode RBF-DQ, fungsi dasar multiquadrik (MQ) berikut yang diberikan oleh (Sarra, 2006) telah digunakan.

$$\phi(r, c) = \sqrt{1 + c^2 r^2}, \quad (3.19)$$

Dimana $\phi(r, c)$ adalah fungsi basis radius, r adalah jarak radius dan c adalah nilai parameter shape yang akan ditentukan.

3.4.8 Pembahasan dan Kesimpulan

Hasil dari analisis 2D yang dibangun dengan perangkat lunak ANSYS, kemudian dibahas untuk didapatkan suatu kesimpulan.

(Halaman ini sengaja dikosongkan)

BAB 4

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Konduksi Panas Pada FGMs

Konduksi panas yaitu sebuah perpindahan panas yang terjadi bila ada gradien suhu dalam medium. Energi diangkut dari temperatur tinggi ke temperatur rendah dimana aktivitas molekuler berdasarkan koordinat Cartesian seperti pada persamaan 5. Dalam masalah perpindahan panas, persamaan yang digunakan mewakili keseimbangan massa, momentum, dan energi untuk medium. Bila memungkinkan metode analitik dari persamaan diferensial yang mengatur tentang pola suatu perpindahan panas harus dicari, karena metode analitik membuat perilaku rinci suatu sistem. Namun, untuk banyak masalah teknik praktis, tidak mungkin mendapatkan solusi eksak untuk persamaan umum karena geometri terlalu rumit atau kondisi batas yang digunakan terlalu rumit.

Kemudian setelah diketahui sifat material yang digunakan yakni pada persamaan 3.1 sampai dengan persamaan 3.12, dalam penelitian ini dengan memvariasikan tiga sifat konduktivitas termal $K(x)$ sepanjang koordinat x_1 ditunjukkan oleh Gambar 4.1, tiga variasi geometri dua dimensi dan tiga variasi jumlah nodal, diharapkan didapatkan sebuah performa dan efisiensi Metode Elemen Hingga (FEM) dalam menganalisa konduksi panas pada *Functionally Graded Materials* (FGMs) dibandingkan dengan metode analitik. Keakurasian nilai yang didapat dalam metode ini akan dibandingkan dengan metode analitik. Hasil dari konduktivitas termal $K(x)$ tersebut sesuai dengan literatur yang digunakan (Abreu, 2013; Sutradhar, 2004), bahwa nilai yang tertinggi didapat dari variasi kuadratik sedangkan nilai yang terendah didapat dari variasi trigonometri. Kemudian untuk penyelesaian perhitungan menggunakan metode elemen hingga, dalam penelitian ini digunakan komputasioanal (Ochia, 2004).

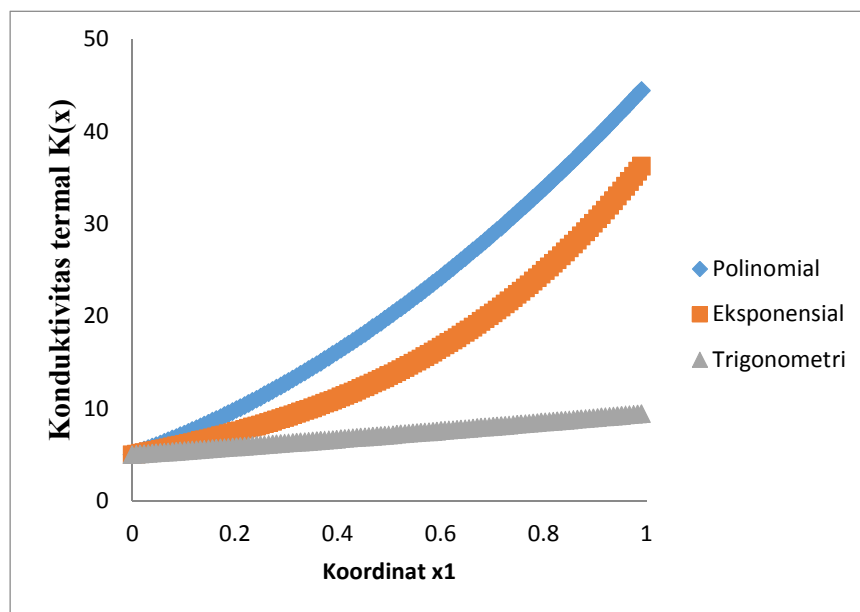
Untuk mendapatkan nilai temperatur dari metode elemen hingga, digunakan perangkat lunak ANSYS dengan jumlah nodal dan elemen yang digunakan secara otomatis ditentukan oleh perangkat lunak tersebut. Sedangkan untuk metode analitik, hasil yang didapat dihitung menggunakan perangkat lunak

MATLAB. Hasil yang didapat dari masing-masing metode kemudian dibandingkan, antara metode elemen hingga dengan metode analitik dan kemudian dihitung nilai kesalahan antara keduanya menggunakan persamaan 19.

Kedua permasalahan konduksi panas tersebut disimulasikan dalam perangkat ASUS dengan OS Windows 8 Pro 64-bit Intel(R) Core(TM) i5-4200U CPU @ 1,60GHz (4 CPUs) RAM 4GB.

Tabel 4.1 Sifat konduktifitas panas FGMs yang digunakan

Variasi	α	κ	\bar{K}	c_1	c_2	β	$K(x)$
Kuadratik	2	5	5	1	2	0	$5(1 + 2x_1)^2$
Eksponensial	-5	5	5	1	0	1	$5 \exp(2x_1)$
Trigonometri	0.2	5	5	1	2	0.2	$5(\cos(0.2x_1) + 2 \sin(0.2x_1))^2$



Gambar 4.1 Konduktivitas termal $K(x)$ (W/m^0C) untuk FGMs polinomial, eksponensial dan trigonometri

4.2 FGMs Silinder Berlubang

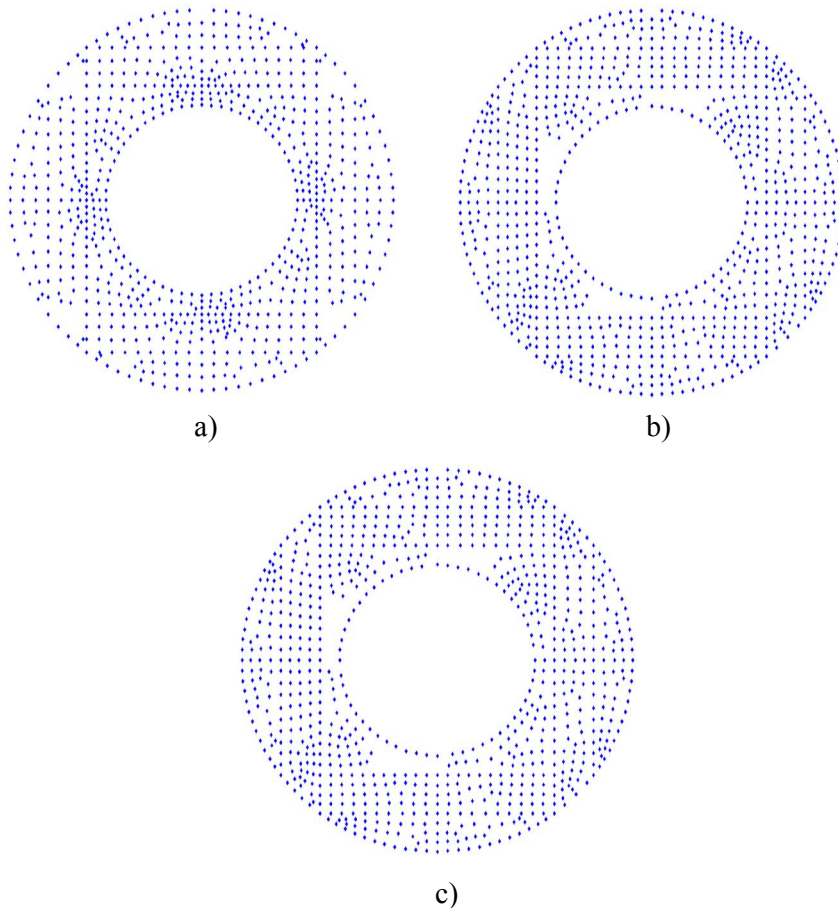
Dalam penelitian ini, contoh geometri dua dimensi pertama yang digunakan yaitu silinder berlubang. Setelah sebelumnya ditentukan nilai konduktivitas termal $K(x)$ yang akan digunakan, setelah itu dilakukan analisis konduksi panas pada silinder berlubang dianggap sebagai FGMs dengan menggunakan FEM. Kemudian distribusi nodal yang digunakan untuk menganalisis konduksi panas pada kasus FGMs silinder berlubang, seperti pada Gambar 4.2 dengan jumlah nodal masing-masing a) 761, b) 883 dan c) 1379 dan skema geometri yang digunakan seperti pada Gambar 3.3.

Kasus pertama yang akan dibahas yaitu tentang konduksi panas pada silinder berlubang variasi polinomial dianggap sebagai FGMs, dalam kasus pertama sebuah konduktivitas termal didefinisikan sebagai $k(r) = Ar + Br^2$, dimana $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ adalah sebuah jarak dari pusat silinder berlubang. Sebuah jari-jari dalam dan luar masing-masing $R_d = 5 \text{ mm}$ dan $R_l = 10 \text{ mm}$, dengan pemberian kondisi batas bagian luar bernilai $T = 10^\circ\text{C}$, sedangkan bagian dalam $T = 0^\circ\text{C}$. Dan interval waktu dari $t_0 = 0$ ke $t_f = 20$. Waktu diskrit yang digunakan konsisten 2048 dengan beda waktu $\Delta t = 0.00977$.

Kemudian pada kasus kedua dalam penelitian ini, konduksi panas pada silinder berlubang variasi eksponensial dianggap sebagai FGMs digunakan. Dalam kasus kedua, sebuah konduktivitas termal didefinisikan sebagai $5 \exp(2x_1)$, dimana x_1 adalah sebuah jarak dari pusat silinder berlubang sepanjang koordinat x_1 . Sebuah jari-jari dalam dan luar masing-masing $R_d = 5 \text{ mm}$ dan $R_l = 10 \text{ mm}$, dengan pemberian kondisi batas bagian luar bernilai $T = 0^\circ\text{C}$, sedangkan bagian dalam $T = 100^\circ\text{C}$. Dan interval waktu dari $t_0 = 0$ ke $t_f = 20$. Waktu diskrit yang digunakan konsisten 2048 dengan beda waktu $\Delta t = 0.00977$.

Dan yang terakhir yaitu pada kasus ketiga dalam penelitian ini, konduksi panas pada silinder berlubang variasi trigonometri dianggap sebagai FGMs digunakan. Dalam kasus pertama ini sebuah konduktivitas termal didefinisikan sebagai $5(\cos(0.2x_1) + 2 \sin(0.2x_1))^2$, dimana x_1 adalah sebuah jarak dari pusat silinder berlubang sepanjang koordinat x_1 . Sebuah jari-jari dalam dan luar

masing-masing $R_d = 5 \text{ mm}$ dan $R_l = 10 \text{ mm}$, dengan pemberian kondisi batas bagian luar bernilai $T = 0^\circ\text{C}$, sedangkan bagian dalam $T = 100^\circ\text{C}$. Dan interval waktu dari $t_0 = 0$ ke $t_f = 20$. Waktu diskrit yang digunakan konsisten 2048 dengan beda waktu $\Delta t = 0.00977$.



Gambar 4.2 Distribusi nodal untuk permasalahan konduksi panas pada kasus FGMs silinder berlubang dengan variasi jumlah nodal a) 761, b) 883 dan c) 1379

4.2.1 FGMs Silinder Berlubang Variasi Polinomial

Seperti yang sudah dijelaskan sebelumnya, kasus pertama yaitu menganalisa konduksi panas pada silinder berlubang variasi polinomial dianggap sebagai FGMs. Gambar 4.3 menunjukkan sebuah plot kontur temperatur FGMs silinder berlubang variasi polinomial dengan jumlah nodal masing-masing 761, 883 dan 1379. Dari gambar tersebut, terlihat sebuah perambatan panas yang

terjadi dari sisi luar ke dalam FGMs silinder berlubang variasi polinomial merambat merata ke semua arah. Jika ditinjau dari kondisi batas yang diberikan, hasil tersebut sesuai dengan kondisi batas dengan pemberian kondisi batas bagian luar bernilai $T = 10^0C$, sedangkan bagian dalam $T = 0^0C$. Dan pola perambatannya terdegradasi merata ke semua arah. Hasil yang didapat sesuai dengan yang ditunjukkan oleh (Ochia, 2004; Zhang, dkk, 2013 dan Mas Irfan, dkk, 2014).

Setelah diketahui pola perambatan temperatur yang terjadi pada FGMs silinder berlubang variasi polinomial. Selanjutnya, dari pola perambatan temperatur yang didapat, untuk FGMs silinder berlubang variasi polinomial didapatkan solusi analitik yaitu pada persamaan 4.1 yang kemudian nilai yang diperoleh dari persamaan tersebut ditunjukkan pada Gambar 4.4. Permasalahan konduksi panas juga telah diselesaikan menggunakan BEM untuk sebuah kasus $A = 1$ dan $B = 1$ (Ochia, 2004). Sebuah permasalahan yang sama juga telah diselesaikan menggunakan FEM dan metode EFG (Element Free Galerkin) (Zhang, dkk, 2013). Sebuah solusi analitik diperoleh sebagai berikut (Ochia, 2004);

$$T(r) = \frac{(T_i - T_o) \left[B \ln \left\{ \frac{(A+Br)R_i}{(A+BR_i)r} + \frac{A(r-R_i)}{R_i r} \right\} \right]}{B \ln \left\{ \frac{(A+BR_i)R_o}{(A+BR_o)R_i} + \frac{A(R_i-R_o)}{R_i R_o} \right\}} + T_i, \quad (4.1)$$

untuk mengetahui nilai yang didapatkan oleh solusi analitik, dilakukan sebuah perhitungan menggunakan perangkat lunak MATLAB. Ada tiga variasi nodal yang digunakan, untuk selanjutnya hasilnya dibandingkan dengan solusi analitik. Diantara ketiga variasi nodal tersebut, pada jumlah nodal berapakah diperoleh nilai yang mendekati solusi analitik. Hasil yang diperoleh seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 4.5. Menurut beberapa literatur, bahwa jika ingin mendapatkan nilai yang sesuai dengan metode analitik, pada metode elemen hingga diberi penambahan jumlah nodal pada sebuah geometri. Semakin banyak jumlah nodal yang diberikan, semakin mendekati nilai yang sesuai dengan metode analitik. Akan tetapi tetap harus diperkirakan, pada kondisi jumlah nodal berapakah yang efisien untuk digunakan mencari nilai temperatur pada FGMs. Dalam gambar tersebut hasil yang diperoleh FEM dengan tiga variasi nodal yang

digunakan, hasil seluruhnya mendekati hasil yang diperoleh solusi analitik atau metode analitik.

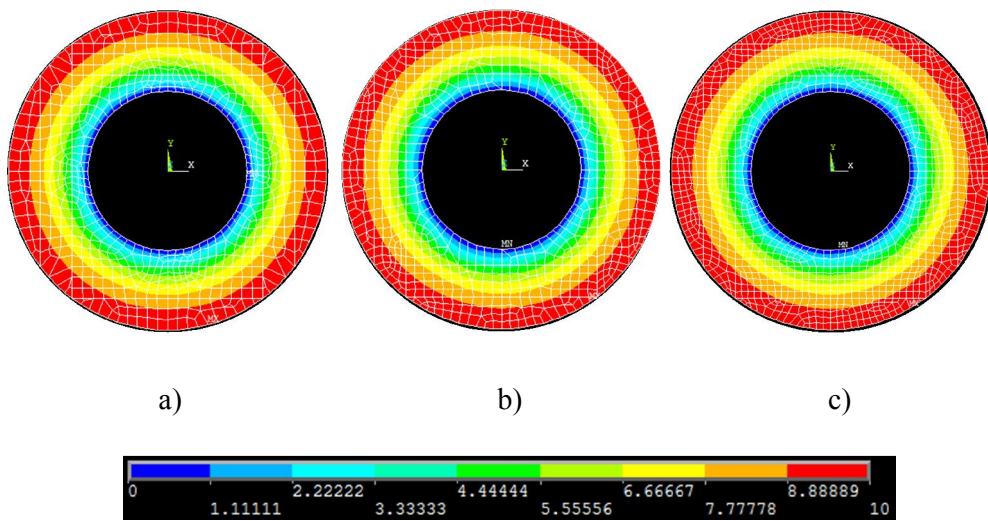
Keseluruhan hasil yang ditunjukkan oleh Gambar 4.5, hampir seluruhnya mendekati metode analitik. Jika ditinjau dari metode yang digunakan, FEM merupakan salah satu metode numerik yang pada dasarnya diperoleh dari metode analitik. Metode numerik adalah sebuah metode yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika, sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan biasa. Dalam hal menentukan hasil, metode numerik selalu berbentuk angka sedangkan untuk metode analitik berupa fungsi matematis. Sehingga dalam metode numerik, solusi yang dihasilkan selalu berupa solusi pendekatan yang terdapat kesalahan atau error. Kesalahan dalam metode numerik adalah kesalahan yang timbul karena adanya proses pendekatan. Sehingga, untuk menghitung nilai dari kesalahan tersebut digunakan persamaan 3.18 yaitu dengan membandingkan hasil yang diperoleh dari FEM dengan solusi analitik.

Kemudian jika ditinjau dari variasi jumlah nodal yang diberikan 761, 883 dan 1379, hampir seluruh hasil yang diperoleh mendekati solusi analitik. Dalam penelitian ini untuk rentang jari-jari yang digunakan 5 mm, kenaikan jari-jari yang dicari nilai efisiensinya sebesar 0,25 mm. Hasil yang diperoleh dari kenaikan tersebut, hampir seluruhnya mendekati solusi analitik. Baik dari variasi jumlah nodal 761, 883 dan 1379. Akan tetapi ada juga nilai kesalahan yang didapat untuk jari-jari 0,25 mm cukup besar, jika dibandingkan dengan pada jari-jari yang lain baik untuk variasi jumlah nodal 761, 883 dan 1379 yakni masing-masing sebesar 0,0278, 0,0642 dan 0,0805.

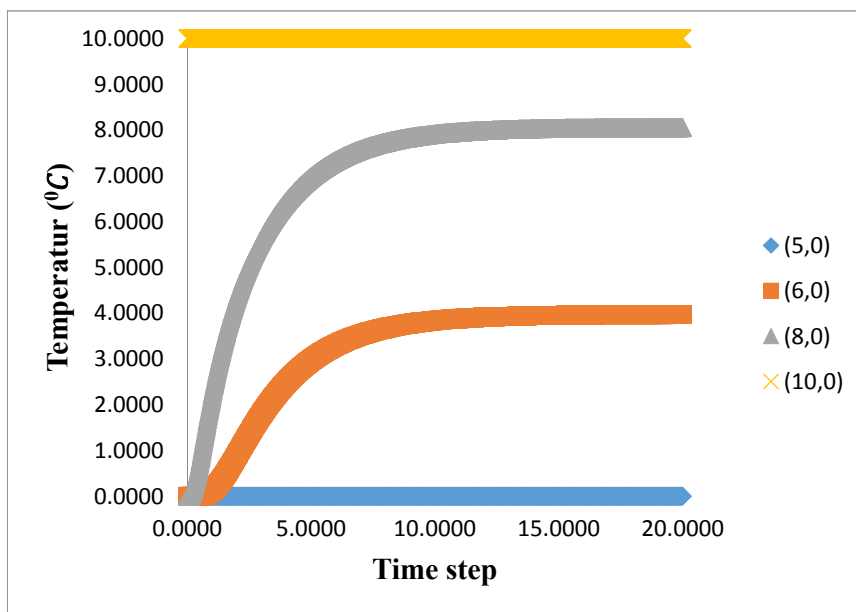
Nilai efisiensi yang didapat, dapat diketahui melalui nilai kesalahan atau error antara FEM dengan solusi analitik yang didapat yang ditunjukkan oleh tabel 4.2, 4.3 dan 4.4. Dalam tabel tersebut nilai kesalahan yang diperoleh antara FEM dengan solusi analitik sangat kecil bahkan tepat seperti pada jarak 1 mm pada jumlah nodal 761 dan 3 mm pada jumlah nodal 883, tetapi ada juga nilai kesalahan yang diperoleh cukup besar seperti yang ditunjukkan oleh jarak 0,25 mm pada semua variasi jumlah nodal. Hasil tersebut dimungkinkan karena proses meshing yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS. Jika diperhatikan secara lebih dekat, pada jarak tersebut area yang terbentuk mesh oleh perangkat lunak

ANSYS sangat luas jika dibandingkan dengan yang lain sepanjang area ukur. Sedangkan untuk area lain yang terbentuk mesh oleh perangkat lunak ANSYS lebih sempit, sehingga nilai yang diperoleh pada jarak tersebut cukup besar jika dibandingkan dengan metode analitik. Secara keseluruhan, hasil diperoleh menggunakan FEM sudah mendekati metode analitik.

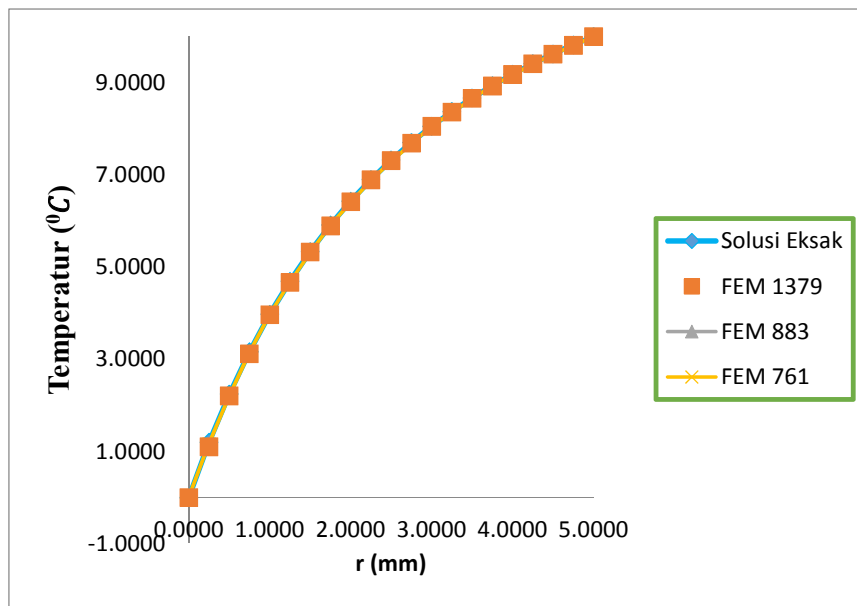
Setelah ditinjau dari nilai kesalahan hitung oleh perangkat lunak ANSYS, kemudian dilakukan tinjauan dari segi performa yang dilakukan oleh perangkat tersebut terhadap silinder berlubang variasi polinomial dianggap sebagai FGMs sehingga didapatkan nilai temperatur dan nilai kesalahan pada variasi jumlah nodal. Hasilnya seperti yang ditunjukkan oleh Tabel 4.5 yaitu masing-masing sebesar 358, 389,6 dan 434,6 pada jumlah nodal masing-masing 761, 883 dan 1379. Dari hasil yang ditunjukkan tersebut, terlihat bahwa semakin banyak jumlah nodal yang diberikan semakin lama waktu proses pengerjaan. Sebaliknya semakin sedikit jumlah nodal yang diberikan, semakin cepat waktu proses pengerjaannya. Akan tetapi jika dikaitkan dengan hasil yang diperoleh oleh ketiganya, pada nilai nodal yang terbanyak didapatkan rata-rata hasil yang mendekati solusi analitik. Terlihat bahwa di beberapa titik yang ditunjukkan, pada jumlah nodal 1379 memiliki rata-rata nilai kesalahan yang kecil dibandingkan dengan jumlah nodal 761 dan 883. Jadi performa yang dilakukan oleh perangkat tersebut terhadap silinder berlubang variasi polinomial dianggap sebagai FGMs untuk menganalisa konduksi panas sangat baik, terutama untuk variasi jumlah nodal 1379.



Gambar 4.3 Plot kontur dari temperatur dari FGMs silinder berlubang variasi polinomial dengan jumlah nodal a) 761, b) 883 dan c) 1379



Gambar 4.4 Grafik temperatur terhadap time step pada beberapa titik koordinat (x, y) yang berbeda untuk variasi jumlah nodal 1379



Gambar 4.5 Perbandingan temperatur FEM dengan Metode Analitik

Tabel 4.2 Perbandingan temperatur FEM dengan jumlah nodal 761 dengan Metode Analitik

Jari-jari (r)	FEM	Metode Analitik	error
0,0000	0,0000	0,0000	inf
0,2500	1,1644	1,1977	0,0278
0,5000	2,2116	2,2438	0,0143
0,7500	3,1466	3,1628	0,0051
1,0000	3,9747	3,9746	0,0000
1,2500	4,6788	4,6952	0,0035
1,5000	5,3146	5,3379	0,0044
1,7500	5,9104	5,9134	0,0005
2,0000	6,4021	6,4308	0,0045
2,2500	6,8833	6,8977	0,0021
2,5000	7,2918	7,3204	0,0039
2,7500	7,6742	7,7045	0,0039
3,0000	8,0567	8,0543	0,0003
3,2500	8,3541	8,3740	0,0024
3,5000	8,6516	8,6668	0,0018
3,7500	8,9291	8,9358	0,0007
4,0000	9,1670	9,1833	0,0018
4,2500	9,4049	9,4117	0,0007
4,5000	9,6131	9,6228	0,0010
4,7500	9,8066	9,8184	0,0012

5,0000	10,0000	10,0000	0,0000
--------	---------	---------	--------

Tabel 4.3 Perbandingan temperatur FEM dengan jumlah nodal 883 dengan Metode Analitik

Jari-jari (r)	FEM	Metode Analitik	error
0,0000	0,0000	0,0000	inf
0,2500	1,1208	1,1977	0,0642
0,5000	2,2415	2,2438	0,0010
0,7500	3,1105	3,1628	0,0165
1,0000	3,9795	3,9746	0,0012
1,2500	4,6546	4,6952	0,0087
1,5000	5,3298	5,3379	0,0015
1,7500	5,8848	5,9134	0,0048
2,0000	6,4151	6,4308	0,0024
2,2500	6,8804	6,8977	0,0025
2,5000	7,3121	7,3204	0,0011
2,7500	7,6887	7,7045	0,0020
3,0000	8,0541	8,0543	0,0000
3,2500	8,3576	8,3740	0,0020
3,5000	8,6612	8,6668	0,0006
3,7500	8,9232	8,9358	0,0014
4,0000	9,1766	9,1833	0,0007
4,2500	9,4049	9,4117	0,0007
4,5000	9,6202	9,6228	0,0003
4,7500	9,8125	9,8184	0,0006
5,0000	10,0000	10,0000	0,0000

Tabel 4.4 Perbandingan temperatur FEM dengan jumlah nodal 1379 dengan Metode Analitik

Jari-jari (r)	FEM	Metode Analitik	error
0,000	0,000	0,000	inf
0,250	1,1013	1,1977	0,0805
0,500	2,2026	2,2438	0,0183
0,750	3,1191	3,1628	0,0138
1,000	3,9695	3,9746	0,0013
1,250	4,6634	4,6952	0,0068
1,500	5,3244	5,3379	0,0025
1,750	5,8933	5,9134	0,0034
2,000	6,4154	6,4308	0,0024

2,250	6,8919	6,8977	0,0008
2,500	7,3118	7,3204	0,0012
2,750	7,6897	7,7045	0,0019
3,000	8,0526	8,0543	0,0002
3,250	8,3623	8,3740	0,0014
3,500	8,6607	8,6668	0,0007
3,750	8,9277	8,9358	0,0009
4,000	9,1775	9,1833	0,0006
4,250	9,4103	9,4117	0,0001
4,500	9,6202	9,6228	0,0003
4,750	9,8131	9,8184	0,0005
5,000	10,0000	10,0000	0,0000

Tabel 4.5 Perbandingan jumlah nodal terhadap waktu proses pengerjaan (s)

Jumlah Nodal	Waktu proses pengerjaan (s)
761	358
883	389,6
1379	434,6

4.2.2 FGMs Silinder Berlubang Variasi Eksponensial

Setelah didapatkan performa dan efisiensi FEM untuk menganalisis konduksi panas silinder berlubang variasi polinomial dianggap sebagai FGMs, selanjutnya kasus yang kedua yaitu menganalisis konduksi panas pada silinder berlubang variasi eksponensial dianggap sebagai FGMs. Gambar 4.6a, 4.6b dan 4.6c menunjukkan sebuah plot kontur FGMs silinder berlubang variasi eksponensial dengan jumlah nodal masing-masing 761, 883 dan 1379. Dari gambar tersebut, terlihat sebuah perambatan panas yang terjadi dari sisi dalam ke luar FGMs silinder berlubang variasi eksponensial. Hasil tersebut sesuai dengan kondisi batas yang diberikan, dengan pemberian kondisi batas bagian luar bernilai $T = 0^{\circ}C$, sedangkan bagian dalam $T = 100^{\circ}C$. Hasil yang diperoleh dari gambar tersebut, terlihat bahwa perambatan panas pada FGMs silinder berlubang variasi eksponensial merambat tidak merata. Pola perambatan panas yang didapat terdegradasi ke arah berlawanan dari sumbu koordinat x_1 .

Setelah diketahui pola perambatan temperatur yang terjadi pada silinder berlubang dianggap FGMs variasi eksponensial. Selanjutnya, dari pola perambatan temperatur yang didapat, untuk FGMs silinder berlubang variasi eksponensial tidak didapatkan solusi analitik. Sehingga hasil yang didapat, nantinya akan dibandingkan dengan metode yang sama dengan memperbanyak jumlah nodal. Seperti yang ditunjukkan oleh gambar 4.6a, 4.6b dan 4.6c, menunjukkan sebuah plot kontur FGMs silinder berlubang variasi eksponensial dengan jumlah nodal masing-masing 761, 883 dan 1379.

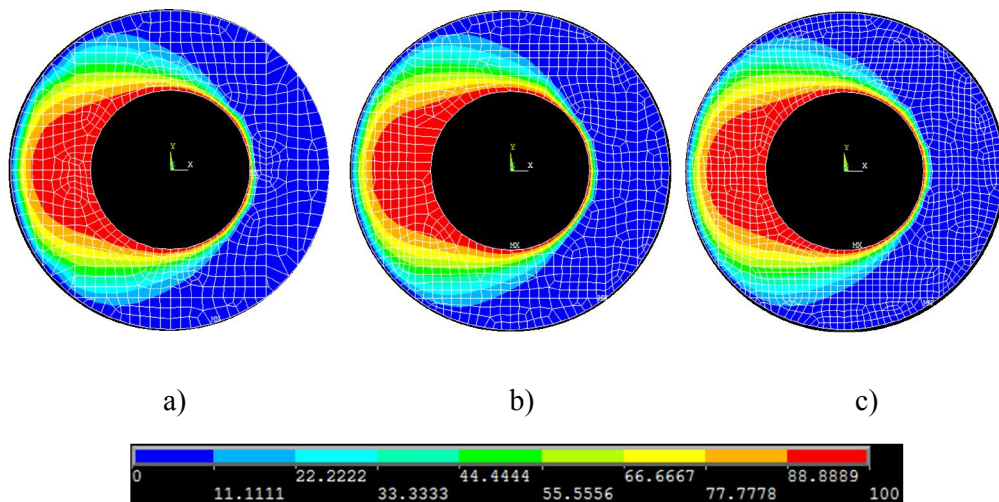
Kemudian untuk menganalisis konduksi panas pada silinder berlubang dianggap FGMs variasi eksponensial, pertama-tama ditinjau dari variasi jumlah nodal yang diberikan. Dari variasi jumlah nodal yang diberikan, didapatkan sebuah variasi nilai temperatur. Dalam Gambar 4.6a, 4.6b dan 4.6c nilai temperatur yang didapatkan ditunjukkan pada Gambar 4.7, 4.8 dan 4.9 dan diperjelas dengan hasil yang ditunjukkan oleh Tabel 4.3, nilai temperatur yang diambil hanya pada kondisi akhir, karena pada kondisi tersebut perambatan temperatur dalam kondisi steady. Hasil yang diperoleh dari ketiga variasi yang diberikan, pada jumlah nodal 883 memiliki nilai temperatur yang sangat tinggi jika dibandingkan dengan yang lain yakni pada koordinat (0,-8) dan (0,8) dengan nilai masing-masing sebesar $9,26747^{\circ}C$ dan $9,4323^{\circ}C$. Hasil tersebut jika ditinjau pada saat dilakukan persebaran nodal dan hasil perhitungan konduktivitas panas yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS di sepanjang titik koordinat tersebut, posisi nodal berada dalam nilai konduktivitas panas yang kecil jika dibandingkan dengan pada variasi jumlah nodal yang lain dengan titik koordinat yang sama. Sehingga nilai temperatur yang didapatkan pada koordinat tersebut tinggi. Sedangkan untuk variasi jumlah nodal 761 dan 1379 nilai temperatur yang didapatkan pada koordinat tersebut masih lebih tinggi jumlah nodal 761 dibandingkan 1379 dengan nilai masing-masing sebesar $8,99331^{\circ}C$ dan $9,14998^{\circ}C$ dibanding $8,98286^{\circ}C$ dan $8,73129^{\circ}C$. Hasil tersebut dapat diperoleh sama halnya yang terjadi pada jumlah nodal 883 yakni jika ditinjau kembali pada saat dilakukan persebaran nodal dan hasil perhitungan konduktivitas panas yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS di sepanjang titik koordinat (0,-8) dan (0,8), posisi nodal berada dalam nilai konduktivitas panas yang kecil jika

dibandingkan dengan titik koordinat yang sama pada jumlah nodal 1379. Sehingga nilai temperatur yang didapatkan pada koordinat tersebut tinggi. Sedangkan persebaran nodal yang didapatkan pada variasi jumlah nodal 1379 berada dalam nilai konduktivitas panas tinggi.

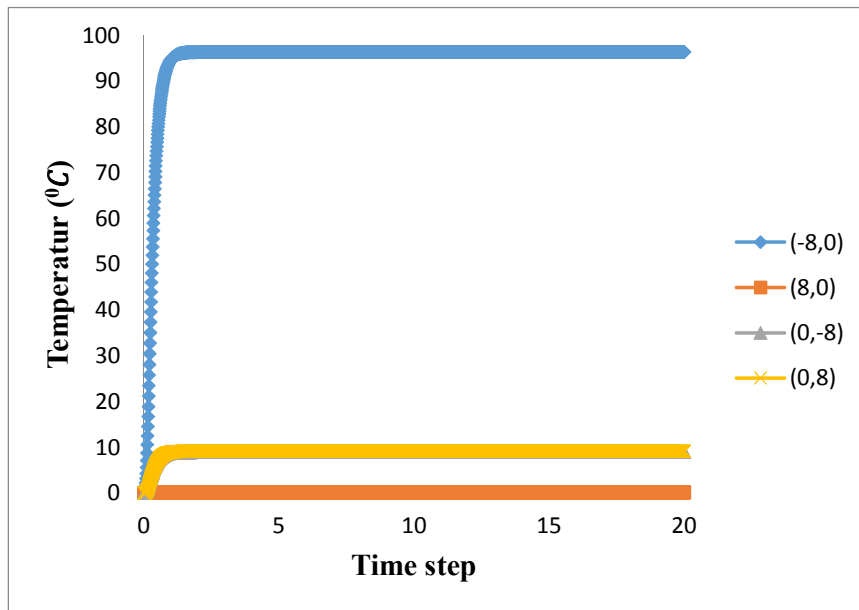
Sedangkan pada koordinat lainnya (-8,0) dan (8,0) untuk variasi nodal 883, nilai temperatur yang diperoleh lebih rendah atau berada di tengah jika ketiga variasi jumlah nodal tersebut dibandingkan. Misalkan pada koordinat (-8,0), nilai temperatur yang diperoleh sebesar 96.3763°C sedangkan pada variasi nodal 761 dan 1379 yang masing-masing bernilai 96.3767°C dan 96.5124°C . Jika ditinjau pada saat dilakukan persebaran nodal dan hasil perhitungan konduktivitas panas yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS di sepanjang titik koordinat tersebut, posisi nodal berada dalam nilai konduktivitas panas yang besar jika dibandingkan dengan titik koordinat sama pada variasi jumlah nodal yang berbeda 761 dan 1379. Sehingga nilai temperatur yang didapatkan pada koordinat tersebut rendah. Dari ketiga nilai yang didapat, terdapat nilai yang hampir mendekati yang hanya terpaut perbedaan nilai pada empat angka di belakang koma pada koordinat tersebut yakni 96.3763°C dan 96.3767°C . Dan pada koordinat (8,0) untuk variasi nodal 883, nilai temperatur yang didapat 0.163739°C . Sedangkan pada variasi nodal 761 dan 1379 dengan koordinat yang sama didapatkan nilai temperatur masing-masing 0.156724°C dan 0.167676°C .

Setelah ditinjau dari persebaran nodal yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS, kemudian dilakukan tinjauan dari segi performa yang dilakukan oleh perangkat tersebut terhadap silinder berlubang dianggap FGMS variasi eksponensial sehingga didapatkan nilai temperatur antar variasi jumlah nodal yang diberikan. Hasilnya seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 4.10, 4.11 dan 4.12 yang menunjukkan grafik temperatur terhadap jari-jari (r) pada titik koordinat yang berbeda untuk variasi jumlah nodal masing-masing 761, 883 dan 1379. Dari gambar tersebut terlihat bahwa semakin banyak jumlah nodal yang diberikan, semakin halus gambar grafik yang terbentuk. Hasil tersebut membuktikan bahwa, performa yang dihasilkan oleh FEM semakin baik untuk menganalisis konduksi panas pada silinder berlubang dianggap FGMS variasi eksponensial.

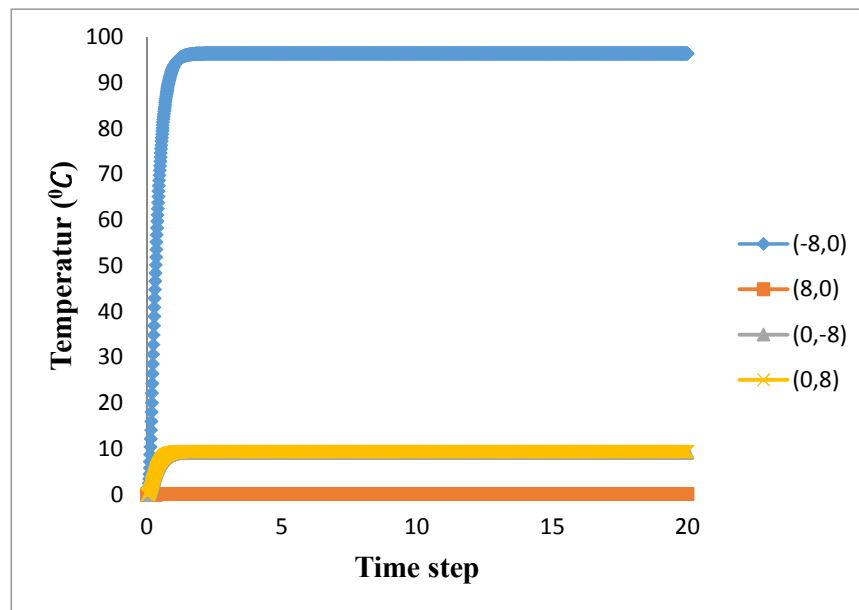
Selanjutnya, setelah ditinjau dari persebaran nodal yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS, kemudian tinjauan performa dapat juga di dapat dari waktu proses pengerjaan yang dilakukan oleh perangkat lunak tersebut terhadap silinder berlubang dianggap FGMs variasi eksponensial sehingga didapatkan nilai temperatur antar variasi jumlah nodal yang diberikan. Hasilnya seperti yang ditunjukkan oleh Tabel 4.7, yaitu masing-masing sebesar 351,5, 378,5 dan 435 pada jumlah nodal masing-masing 761, 883 dan 1379. Dari hasil yang ditunjukkan tersebut, terlihat bahwa semakin banyak jumlah nodal yang diberikan semakin lama waktu proses pengerjaan. Sebaliknya semakin sedikit jumlah nodal yang diberikan, semakin cepat waktu proses pengerjaannya. Akan tetapi jika dikaitkan dengan nilai temperatur rata-rata pada semua koordinat yang ditunjukkan, pada nilai nodal 1379 didapatkan nilai temperatur rata-rata rendah jika dibandingkan dengan ketiga variasi nodal tersebut. Sedangkan untuk variasi jumlah nodal 883, didapatkan nilai rata-rata temperatur tinggi dari semua variasi jumlah nodal yang ditunjukkan.



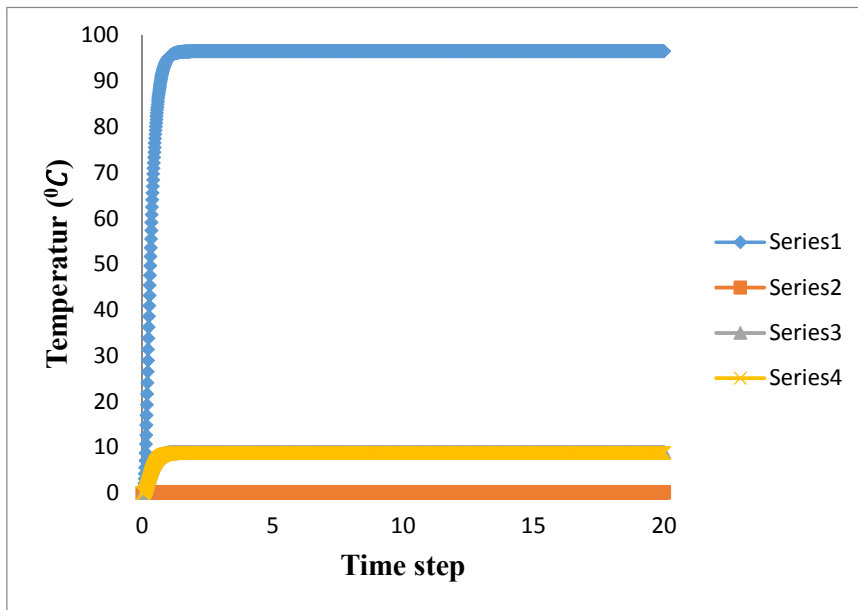
Gambar 4.6 Plot kontur dari temperatur dari FGMs silinder berlubang variasi eksponensial dengan jumlah nodal a) 761, b) 883 dan c) 1379



Gambar 4.7 Grafik temperatur terhadap time step pada beberapa titik koordinat (x, y) yang berbeda untuk jumlah nodal 761



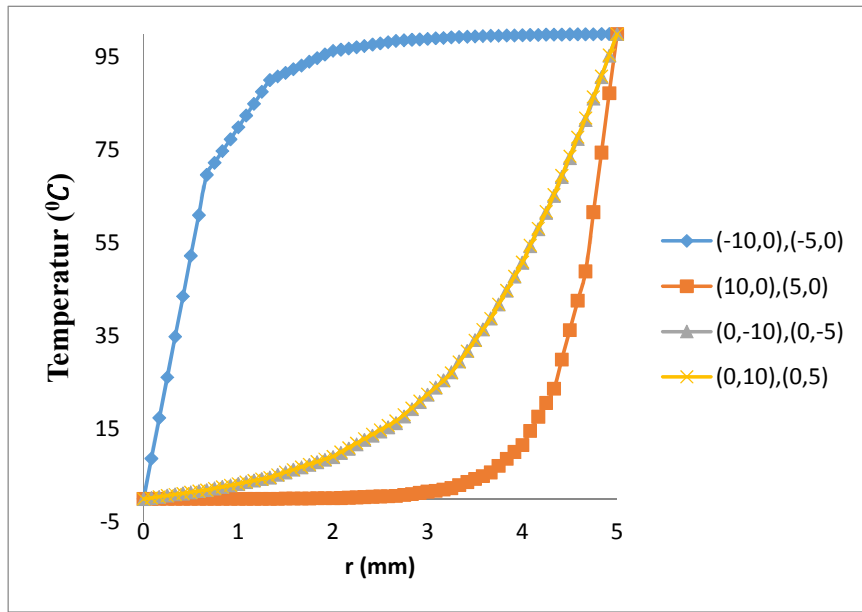
Gambar 4.8 Grafik temperatur terhadap time step pada beberapa titik koordinat (x, y) yang berbeda untuk jumlah nodal 883



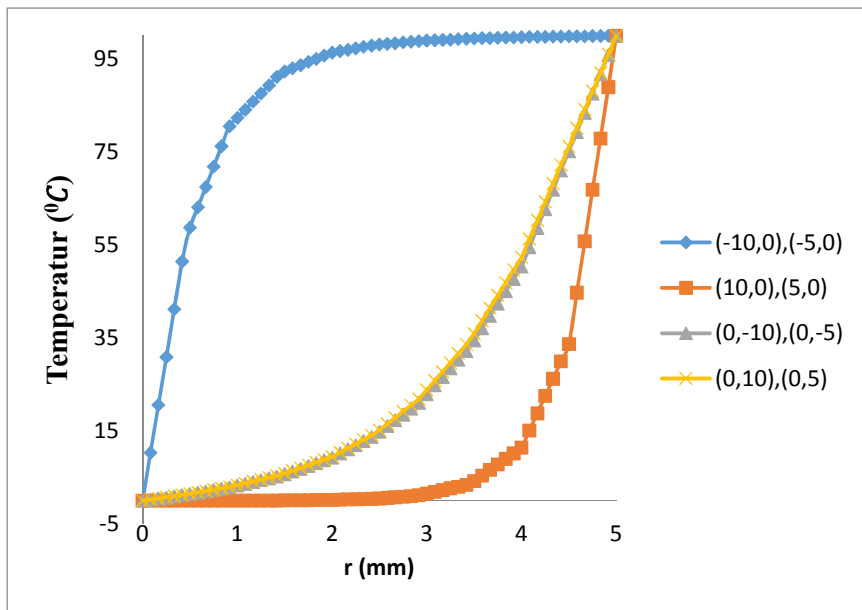
Gambar 4.9 Grafik temperatur terhadap time step pada beberapa titik koordinat (x, y) yang berbeda untuk jumlah nodal 1379

Tabel 4.6 Perbandingan temperatur pada titik koordinat (x, y) yang sama dengan jumlah nodal berbeda

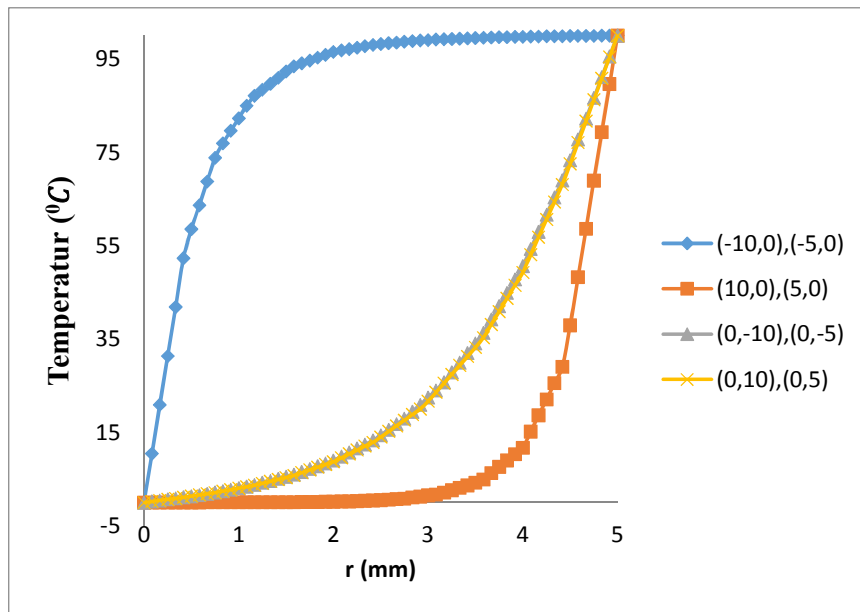
Waktu	Jumlah Nodal	Temperatur $^{\circ}C$			
		Koordinat (-8,0)	Koordinat (8,0)	Koordinat (0,-8)	Koordinat (0,8)
19.999	761	96.3767	0.156724	8.99331	9.14998
	883	96.3763	0.163739	9.26747	9.4323
	1379	96.5124	0.167676	8.98286	8.73129



Gambar 4.10 Grafik temperatur terhadap jari-jari (r) pada titik koordinat yang berbeda untuk jumlah nodal 761



Gambar 4.11 Grafik temperatur terhadap jari-jari (r) pada titik koordinat yang berbeda untuk jumlah nodal 883



Gambar 4.12 Grafik temperatur terhadap jari-jari (r) pada titik koordinat yang berbeda untuk jumlah nodal 1379

Tabel 4.7 Perbandingan jumlah nodal terhadap waktu proses pengerjaan (s)

Jumlah Nodal	Waktu proses pengerjaan (s)
761	351,5
883	378,5
1379	435

4.2.3 FGMs Silinder Berlubang Variasi Trigonometri

Setelah didapatkan performa FEM untuk menganalisis konduksi panas silinder berlubang variasi polinomial dan eksponensial dianggap sebagai FGMs, selanjutnya kasus yang terakhir yaitu menganalisis konduksi panas pada silinder berlubang variasi trigonometri dianggap sebagai FGMs. Gambar 4.13a, 4.13b dan 4.13c menunjukkan sebuah plot kontur FGMs silinder berlubang variasi trigonometri dengan jumlah nodal masing-masing 761, 883 dan 1379. Dari gambar tersebut, terlihat sebuah perambatan panas yang terjadi dari sisi dalam ke luar FGMs silinder berlubang variasi trigonometri. Hasil tersebut sesuai dengan kondisi batas yang diberikan, dengan pemberian kondisi batas bagian luar bernilai

$T = 0^{\circ}C$, sedangkan bagian dalam $T = 100^{\circ}C$. Hasil yang diperoleh dari gambar tersebut, terlihat bahwa perambatan panas pada FGMs silinder berlubang variasi trigonometri merambat tidak merata. Pola perambatan panas yang didapat terdegradasi ke arah sumbu koordinat y dan sumbu koordinat x_1 serta berlawanan sumbu koordinat y .

Setelah diketahui pola perambatan temperatur yang terjadi pada silinder berlubang dianggap FGMs variasi trigonometri. Selanjutnya, dari pola perambatan temperatur yang didapat untuk FGMs silinder berlubang variasi trigonometri tidak didapatkan solusi analitik. Sehingga hasil yang didapat, nantinya akan dibandingkan dengan metode yang sama dengan memperbanyak jumlah nodal. Seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 4.13a, 4.13b dan 4.13c, menunjukkan sebuah plot kontur FGMs silinder berlubang variasi eksponensial dengan jumlah nodal masing-masing 761, 883 dan 1379.

Kemudian untuk menganalisis konduksi panas pada silinder berlubang dianggap FGMs variasi trigonometri, pertama-tama ditinjau dari variasi jumlah nodal yang diberikan. Dari variasi jumlah nodal yang diberikan, didapatkan sebuah variasi nilai temperatur. Dalam Gambar 4.13a, 4.13b dan 4.13c nilai temperatur yang didapatkan ditunjukkan pada Gambar 4.14, 4.15 dan 4.16 dan diperjelas dengan hasil yang ditunjukkan oleh Tabel 4.8, nilai temperatur yang diambil hanya pada kondisi akhir, karena pada kondisi tersebut perambatan temperatur dalam kondisi steady.

Hasil yang diperoleh dari ketiga variasi yang diberikan, pada jumlah nodal 883 memiliki nilai temperatur yang sangat tinggi jika dibandingkan dengan yang lain yakni pada koordinat (0,-8) sebesar $30,9699^{\circ}C$. Sedangkan untuk variasi jumlah nodal 761 dan 1379 nilai temperatur yang didapatkan pada koordinat tersebut masing-masing sebesar $30,8394^{\circ}C$ dan $30,8483^{\circ}C$. Hasil tersebut jika ditinjau pada saat dilakukan persebaran nodal dan hasil perhitungan konduktivitas panas yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS di sepanjang titik koordinat tersebut, posisi nodal berada dalam nilai konduktivitas panas yang kecil jika dibandingkan dengan pada variasi jumlah nodal yang lain dengan titik koordinat yang sama. Sehingga nilai temperatur yang didapatkan pada koordinat tersebut

tinggi. Sedangkan pada koordinat (0,8) pada variasi jumlah nodal 883 yakni sebesar $30.8878^{\circ}C$. Hasil yang diperoleh lebih tinggi dari variasi jumlah nodal 1379 yakni sebesar 30,8342, tetapi masih lebih rendah jika dibandingkan dengan variasi jumlah nodal 761 yakni sebesar 30,8928. Jika ditinjau kembali pada saat dilakukan persebaran nodal dan hasil perhitungan konduktivitas panas yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS di sepanjang titik koordinat (0,8) posisi nodal berada dalam nilai konduktivitas panas yang rendah jika dibandingkan dengan titik koordinat yang sama pada jumlah nodal 1379. Sehingga nilai temperatur yang didapatkan pada koordinat tersebut tinggi. Sedangkan jika dibandingkan dengan titik koordinat yang sama pada jumlah nodal 761, posisi nodal berada dalam nilai konduktivitas panas yang tinggi. Sehingga nilai temperatur yang didapatkan pada koordinat tersebut rendah.

Sedangkan pada koordinat lainnya (-8,0) untuk variasi nodal 883, nilai temperatur yang diperoleh tinggi jika ketiga variasi jumlah nodal tersebut dibandingkan. Pada koordinat (-8,0), nilai temperatur yang diperoleh sebesar $18,6231^{\circ}C$ sedangkan pada variasi nodal 761 dan 1379 yang masing-masing sebesar $18,3392^{\circ}C$ dan $18,3985^{\circ}C$. Jika ditinjau pada saat dilakukan persebaran nodal dan hasil perhitungan konduktivitas panas yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS di sepanjang titik koordinat tersebut, posisi nodal berada dalam nilai konduktivitas panas yang rendah jika dibandingkan dengan titik koordinat sama pada variasi jumlah nodal yang berbeda 761 dan 1379. Sehingga nilai temperatur yang didapatkan pada koordinat tersebut tinggi. Dan untuk variasi jumlah nodal 761 pada titik koordinat (-8,0), nilai temperatur yang didapat lebih rendah jika dibandingkan dengan semua variasi jumlah nodal. Hasil tersebut jika ditinjau kembali pada saat dilakukan persebaran nodal dan hasil perhitungan konduktivitas panas yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS di sepanjang titik koordinat tersebut, posisi nodal berada dalam nilai konduktivitas panas yang tinggi jika dibandingkan dengan titik koordinat sama pada variasi jumlah nodal yang berbeda 883 dan 1379. Sehingga nilai temperatur yang didapatkan pada koordinat tersebut rendah.

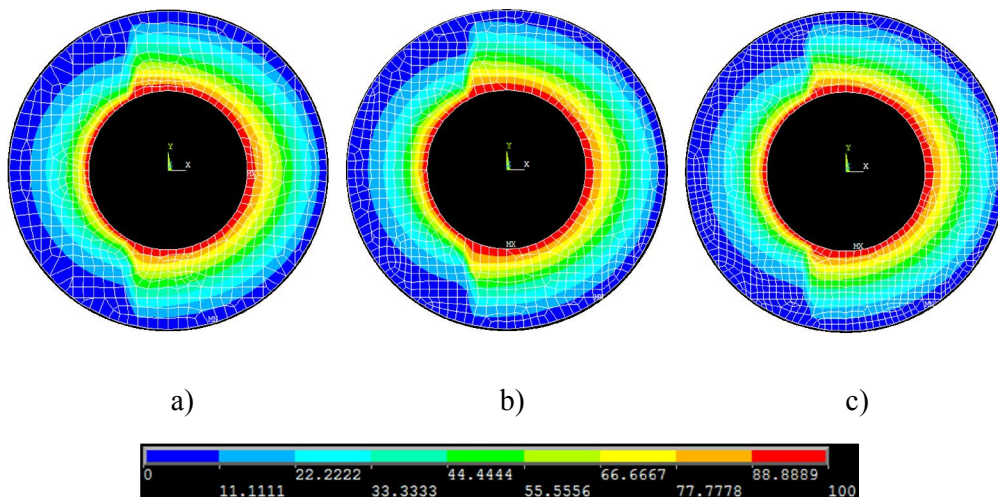
Dan pada koordinat (8,0) untuk variasi nodal 883, nilai temperatur yang didapat $41,2835^{\circ}C$. Sedangkan pada variasi nodal 761 dan 1379 dengan

koordinat yang sama didapatkan nilai temperatur masing-masing sebesar $41,2208^{\circ}C$ dan $41,2978^{\circ}C$. Jika ditinjau pada saat dilakukan persebaran nodal dan hasil perhitungan konduktivitas panas yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS di sepanjang titik koordinat tersebut, posisi nodal berada dalam nilai konduktivitas panas yang rendah jika dibandingkan dengan titik koordinat sama pada variasi jumlah nodal 761. Sehingga nilai temperatur yang didapatkan pada koordinat tersebut tinggi. Sedangkan jika dibandingkan dengan variasi jumlah nodal 1379, nilai konduktivitas panas yang didapat tinggi. Sehingga menghasilkan nilai temperatur rendah. Sedangkan untuk variasi jumlah nodal 761 pada koordinat (8,0), nilai temperatur yang didapat lebih rendah jika dibandingkan dengan kedua variasi jumlah nodal yang lain. Jika ditinjau kembali pada saat dilakukan persebaran nodal dan hasil perhitungan konduktivitas panas yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS di sepanjang titik koordinat (8,0), posisi nodal berada dalam nilai konduktivitas panas yang tinggi jika dibandingkan dengan titik koordinat yang sama pada jumlah nodal 883 dan 1379. Sehingga nilai temperatur yang didapatkan pada koordinat tersebut rendah.

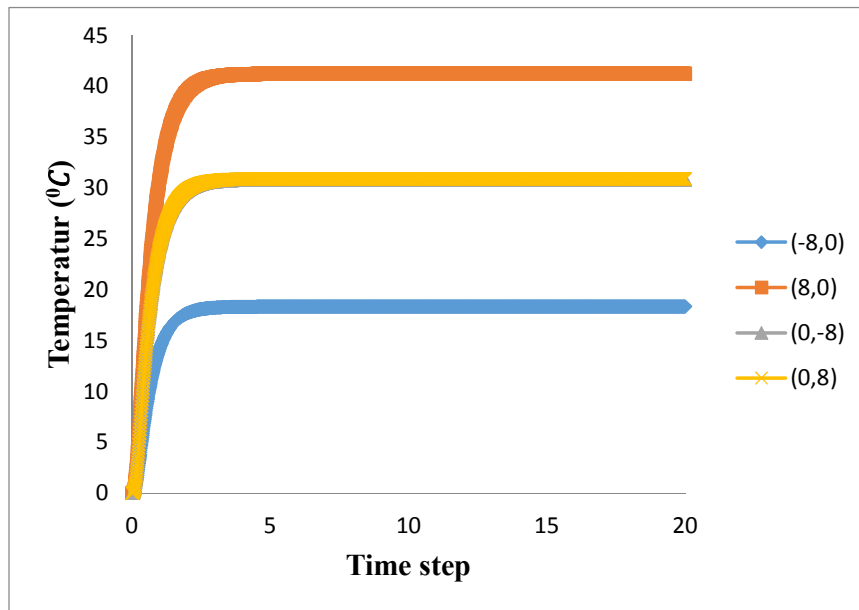
Setelah ditinjau dari persebaran nodal yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS, kemudian dilakukan tinjauan dari segi performa yang dilakukan oleh perangkat tersebut terhadap silinder berlubang dianggap FGMs variasi trigonometri sehingga didapatkan nilai temperatur antar variasi jumlah nodal yang diberikan. Hasilnya seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 4.17, 4.18 dan 4.19 yang menunjukkan grafik temperatur terhadap jari-jari (r) pada titik koordinat yang berbeda untuk variasi jumlah nodal masing-masing 761, 883 dan 1379. Dari gambar tersebut terlihat bahwa semakin banyak jumlah nodal yang diberikan, semakin halus gambar grafik yang terbentuk. Hasil tersebut membuktikan bahwa, performa yang dihasilkan oleh FEM semakin baik untuk menganalisis konduksi panas pada silinder berlubang dianggap FGMs variasi trigonometri.

Selanjutnya, setelah ditinjau dari persebaran nodal yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS, kemudian tinjauan performa dapat juga di dapat dari waktu proses pengerjaan yang dilakukan oleh perangkat lunak tersebut terhadap silinder berlubang dianggap FGMs variasi trigonometri sehingga didapatkan nilai temperatur antar variasi jumlah nodal yang diberikan. Hasilnya seperti yang

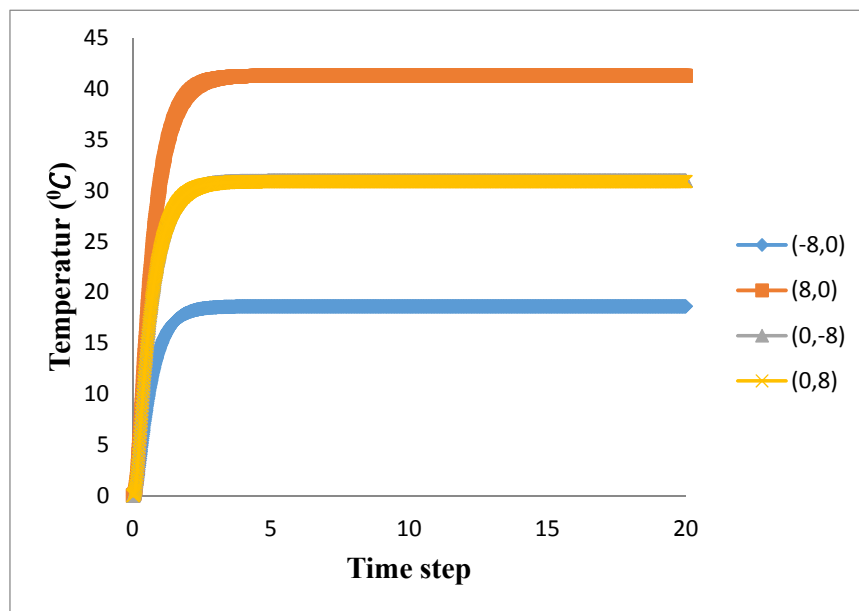
ditunjukkan oleh Tabel 4.9, yaitu masing-masing sebesar 346, 396 dan 444 pada jumlah nodal masing-masing 761, 883 dan 1379. Dari hasil yang ditunjukkan tersebut, terlihat bahwa semakin banyak jumlah nodal yang diberikan semakin lama waktu proses pengerjaan. Sebaliknya semakin sedikit jumlah nodal yang diberikan, semakin cepat waktu proses pengerjaannya. Akan tetapi jika dikaitkan dengan hasil yang diperoleh oleh ketiganya, pada variasi jumlah nodal 1379 didapatkan nilai rata-rata temperatur pada semua koordinat rendah jika dibandingkan dengan variasi jumlah nodal 883. Sedangkan pada variasi jumlah nodal 761, didapatkan nilai rata-rata temperatur yang lebih rendah dari semua variasi jumlah nodal yang diberikan. Jadi untuk silinder berlubang variasi trigonometri dianggap sebagai FGMs, semakin banyak jumlah nodal yang diberikan bukan berarti semakin rendah nilai rata-rata temperatur pada semua koordinat.



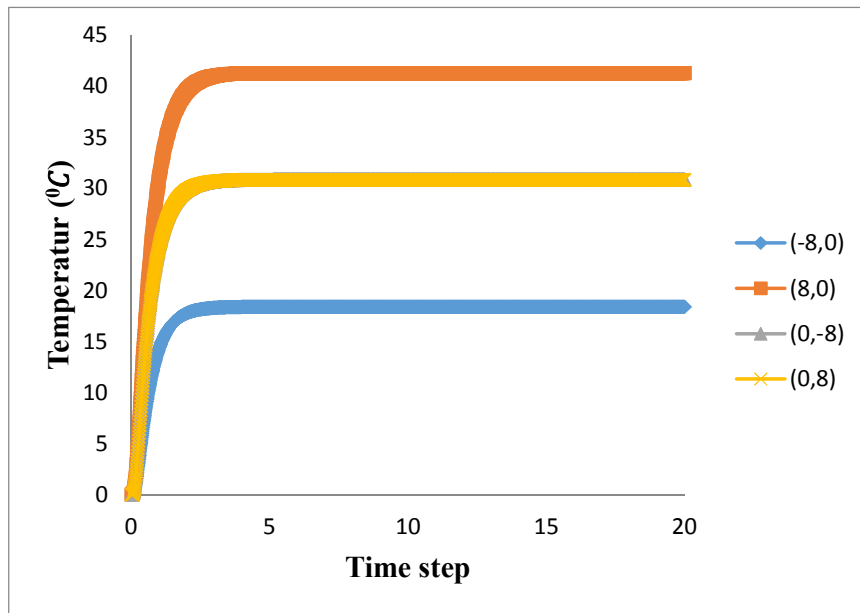
Gambar 4.13 Plot kontur dari temperatur dari FGMs silinder berlubang variasi trigonometri dengan jumlah nodal a) 761, b) 883 dan c) 1379



Gambar 4.14 Grafik temperatur terhadap time step pada beberapa titik koordinat (x, y) yang berbeda untuk jumlah nodal 761



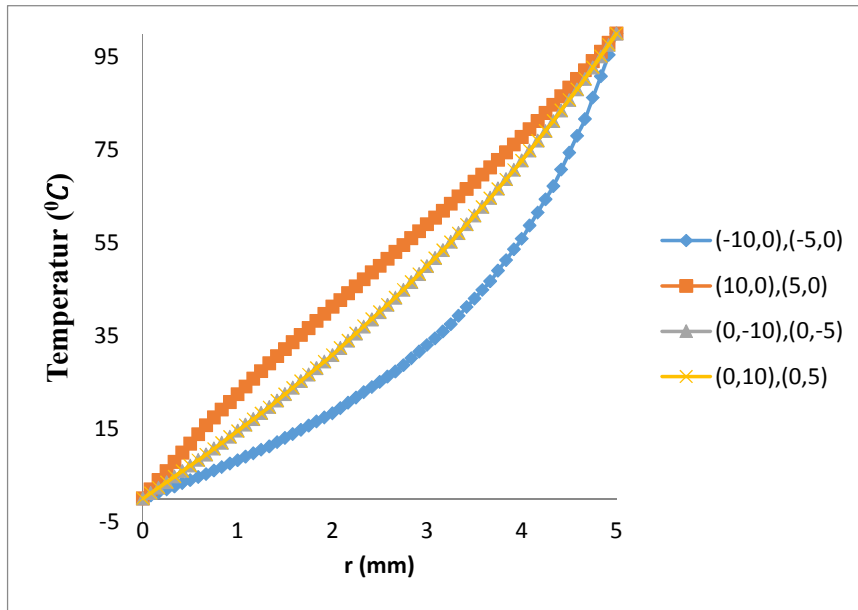
Gambar 4.15 Grafik temperatur terhadap time step pada beberapa titik koordinat (x, y) yang berbeda untuk jumlah nodal 883



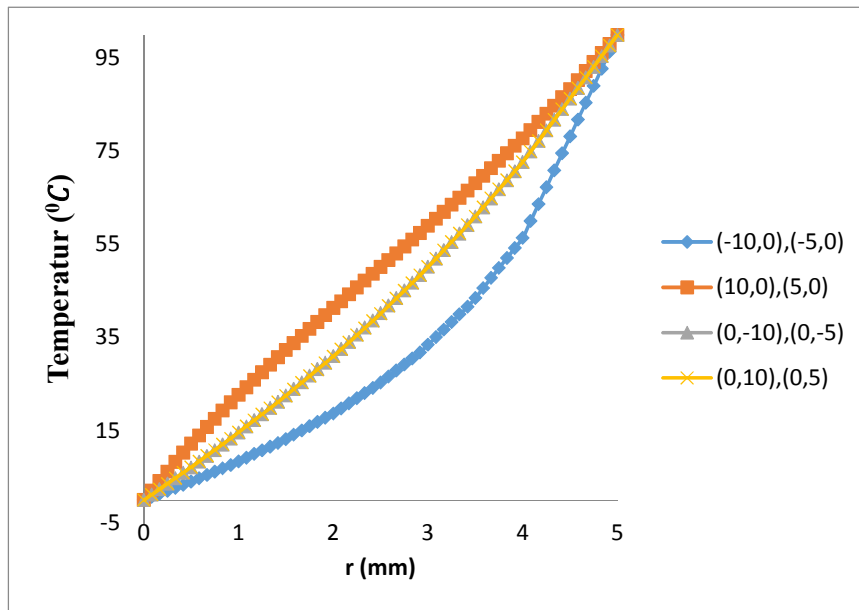
Gambar 4.16 Grafik temperatur terhadap time step pada beberapa titik koordinat (x, y) yang berbeda untuk jumlah nodal 1379

Tabel 4.8 Perbandingan temperatur pada titik koordinat (x, y) yang sama dengan jumlah nodal berbeda

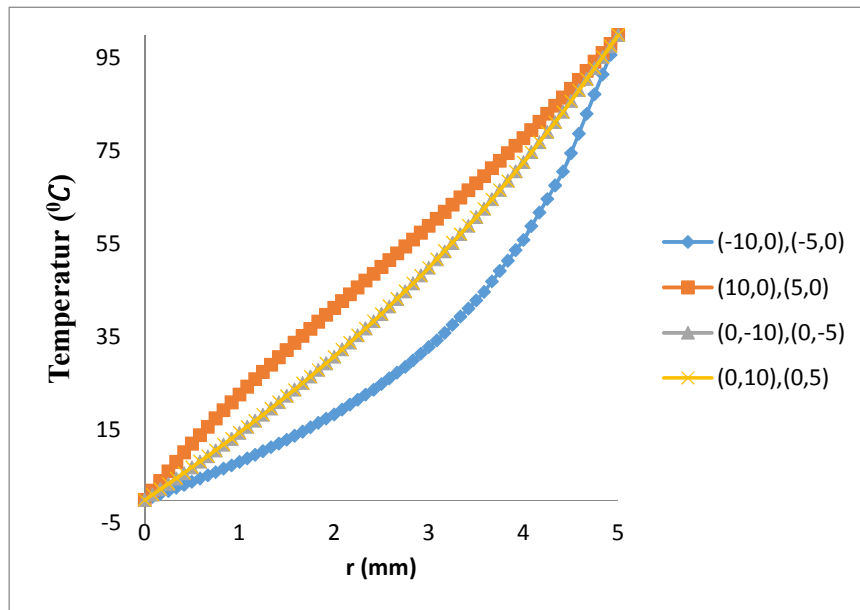
Waktu	Jumlah Nodal	Temperatur $^{\circ}C$			
		Koordinat (-8,0)	Koordinat (8,0)	Koordinat (0,-8)	Koordinat (0,8)
19.999	761	18.3392	41.2208	30.8394	30.8928
	883	18.6231	41.2835	30.9699	30.8878
	1379	18.3985	41.2978	30.8483	30.8342



Gambar 4.17 Grafik temperatur terhadap jari-jari (r) pada titik koordinat yang berbeda untuk jumlah nodal 761



Gambar 4.18 Grafik temperatur terhadap jari-jari (r) pada titik koordinat yang berbeda untuk jumlah nodal 883



Gambar 4.19 Grafik temperatur terhadap jari-jari (r) pada titik koordinat yang berbeda untuk jumlah nodal 1379

Tabel 4.9 Perbandingan jumlah nodal terhadap waktu proses pengerjaan (s)

Jumlah Nodal	Waktu proses pengerjaan (s)
761	346
883	396
1379	444

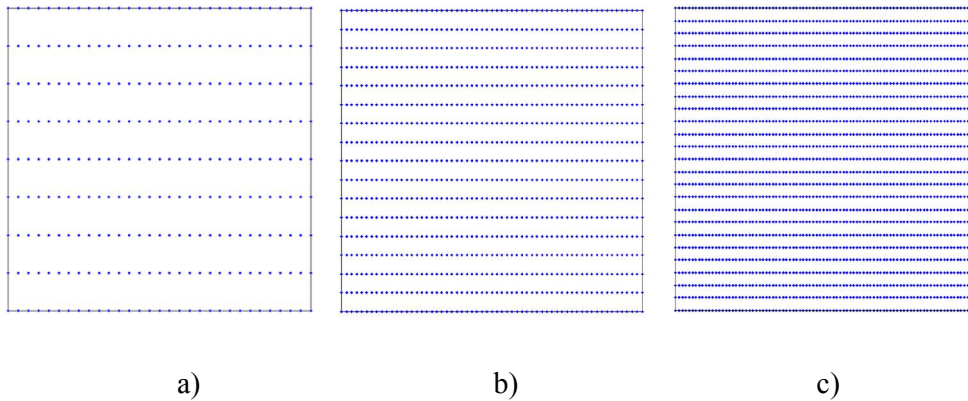
4.3 FGMs Persegi

Setelah dilakukan pembahasan mengenai konduktivitas panas pada silinder berlubang yang dianggap FGMs, selanjutnya akan dilakukan pembahasan tentang konduksi panas pada persegi yang dianggap FGMs. Setelah ditentukan variasi dari konduktivitas termal $K(x)$ yang akan digunakan, kasus pertama yang akan dibahas yaitu tentang konduksi panas pada persegi dianggap sebagai FGMs variasi polinomial dengan distribusi nodal untuk permasalahan konduksi panas pada kasus FGMs persegi seperti pada Gambar 4.20. Dalam kasus pertama, sebuah konduktivitas termal didefinisikan sebagai $k(x) = 5(1 + 2x_1)^2$. Dengan panjang dan lebar persegi tersebut masing-masing sebesar $x_1 = 1 \text{ mm}$ dan

$x_2 = 1 \text{ mm}$. Kondisi batas dan skema geometri yang digunakan seperti pada Gambar 3.2 dengan nilai temperatur $\bar{T} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$. Dan distribusi untuk nodal yang digunakan seperti ditunjukkan pada Gambar 4.20 dengan variasi jumlah nodal a) 279, b) 1037 dan c) 2275. Dan interval waktu dari $t_0 = 0$ ke $t_f = 0.128$. Waktu diskrit yang digunakan konsisten 128 time step $\Delta t = 0.001$.

Pada kasus kedua dalam penelitian ini, konduksi panas pada persegi dianggap sebagai FGMs variasi eksponensial digunakan. Dalam kasus kedua ini, sebuah konduktivitas termal didefinisikan sebagai $5 \exp(2x_1)$. Dengan panjang dan lebar persegi tersebut masing-masing sebesar $x_1 = 1 \text{ mm}$ dan $x_2 = 1 \text{ mm}$. Kondisi batas dan skema geometri yang digunakan seperti pada gambar 3.2 dengan nilai temperatur $\bar{T} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$. Dan untuk distribusi nodal yang digunakan seperti ditunjukkan pada Gambar 4.20 dengan variasi jumlah nodal a) 279, b) 1037 dan c) 2275. Dan interval waktu dari $t_0 = 0$ ke $t_f = 0.128$. Waktu diskrit yang digunakan konsisten 128 time step $\Delta t = 0.001$.

Pada kasus ketiga dalam geometri persegi, konduksi panas pada persegi dianggap sebagai FGMs variasi trigonometri digunakan. Dalam kasus ketiga sebuah konduktivitas termal didefinisikan sebagai $5(\cos(0.2x_1) + 2 \sin(0.2x_1))^2$. Dengan panjang dan lebar persegi tersebut masing-masing sebesar $x_1 = 1 \text{ mm}$ dan $x_2 = 1 \text{ mm}$. Kondisi batas dan skema geometri yang digunakan seperti pada Gambar 3.2 dengan nilai temperatur $\bar{T} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$. Dan untuk distribusi nodal yang digunakan seperti ditunjukkan pada Gambar 4.20 dengan variasi jumlah nodal a) 279, b) 1037 dan c) 2275. Dan interval waktu dari $t_0 = 0$ ke $t_f = 0.128$. Waktu diskrit yang digunakan konsisten 128 time step $\Delta t = 0.001$.



Gambar 4.20 Distribusi nodal untuk permasalahan konduksi panas pada kasus FGMs persegi dengan variasi jumlah nodal a) 279, b) 1037 dan c) 2275

4.3.1 FGMs Persegi Variasi Polinomial

Setelah didapatkan performa dan efisiensi FEM untuk menganalisis konduksi panas silinder berlubang variasi polinomial, eksponensial dan trigonometri dianggap sebagai FGMs, contoh kasus selanjutnya yaitu menganalisis konduksi panas pada persegi dianggap sebagai FGMs. Untuk kasus pertama pada persegi yang dianggap FGMs yakni variasi polinomial. Dengan luas $L \times L$ dengan perambatan panas dan variasi konduktivitas panas sepanjang sumbu x . Bagian atas dan bawah diberi insulasi. Batas kanan dan kiri diberi temperatur konstan masing-masing $\bar{T} = 100 \text{ }^{\circ}\text{C}$ dan $T = 0 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Sebuah konduktivitas termal bervariasi linier sepanjang sumbu x diberikan sebagai $5(1 + 2x_1)^2$. Gambar 4.21a, 4.21b dan 4.21c menunjukkan sebuah plot kontur perambatan panas pada FGMs persegi variasi polinomial dengan jumlah nodal masing-masing 279, 1037 dan 2275 yang dihitung menggunakan perangkat lunak ANSYS. Dari gambar tersebut, terlihat sebuah perambatan panas yang terjadi dari sisi kanan ke kiri FGMs persegi variasi polinomial. Hasil tersebut sesuai dengan kondisi batas yang diberikan, dengan pemberian kondisi batas bagian kanan bernilai $T = 100^{\circ}\text{C}$, sedangkan bagian kiri $T = 0^{\circ}\text{C}$. Hasil yang diperoleh dari gambar tersebut, terlihat bahwa perambatan panas pada FGMs persegi variasi polinomial merambat pada bagian tengah persegi. Pola perambatan panas yang didapat terdegradasi ke arah berlawanan dari sumbu koordinat x_1 .

Setelah diketahui pola perambatan temperatur yang terjadi pada persegi dianggap FGMs variasi polinomial. Selanjutnya dari pola perambatan temperatur yang didapat, untuk FGMs persegi variasi polinomial tidak didapatkan solusi analitik. Sehingga hasil yang didapat, nantinya akan dibandingkan dengan metode yang sama dengan memperbanyak jumlah nodal. Seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 4.21a, 4.21b dan 4.21c, menunjukkan sebuah plot kontur perambatan panas pada FGMs persegi variasi polinomial dengan jumlah nodal masing-masing 279, 1037 dan 2275.

Kemudian untuk menganalisis konduksi panas pada persegi dianggap FGMs variasi polinomial, pertama-tama ditinjau dari variasi jumlah nodal yang diberikan. Dari variasi jumlah nodal yang diberikan, didapatkan sebuah variasi nilai temperatur. Dalam Gambar 4.21a, 4.21b dan 4.21c nilai temperatur yang didapatkan ditunjukkan pada Gambar 4.22, 4.23 dan 4.24 dan diperjelas dengan hasil yang ditunjukkan oleh Tabel 4.10, nilai temperatur yang diambil hanya pada kondisi akhir, karena pada kondisi tersebut perambatan temperatur dalam kondisi steady. Hasil yang diperoleh dari ketiga variasi yang diberikan, pada jumlah nodal 2275 memiliki nilai temperatur yang sangat tinggi jika dibandingkan dengan yang lain 279 dan 1037 yakni pada semua titik koordinat (0,1,0,5), (0,5,0,5) dan (0,7,0,5) untuk variasi nodal 1037 dan 2275. Sedangkan pada titik koordinat (0,0,5) dan (1,0,5) memiliki nilai yang sama pada semua variasi nodal yang diberikan.

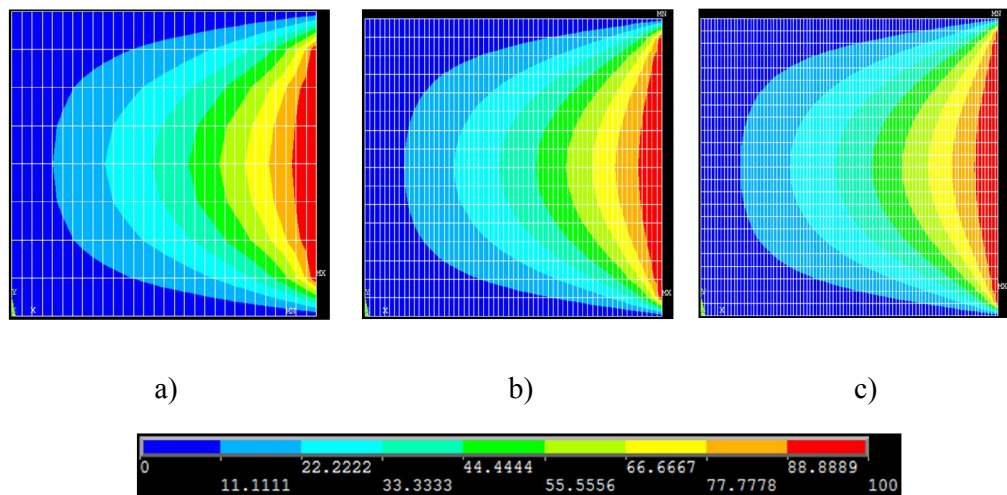
Pada titik koordinat (0,1,0,5) untuk variasi jumlah nodal 2275 memiliki nilai temperatur $T = 8.75736 \text{ }^{\circ}\text{C}$, hasilnya lebih tinggi dibanding dengan variasi jumlah nodal 279 dan 1037 pada titik koordinat yang sama masing-masing sebesar $T = 8.54898 \text{ }^{\circ}\text{C}$ dan $T = 8.72487 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Pada titik koordinat (0,5,0,5) untuk variasi jumlah nodal 2275 memiliki nilai temperatur $T = 37.4261 \text{ }^{\circ}\text{C}$, hasilnya lebih tinggi dibanding dengan variasi jumlah nodal 279 dan 1037 pada titik koordinat yang sama masing-masing sebesar $T = 36.8194 \text{ }^{\circ}\text{C}$ dan $T = 37.3335 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Pada titik koordinat (0,7,0,5) untuk variasi jumlah nodal 2275 memiliki nilai temperatur $T = 58.4307 \text{ }^{\circ}\text{C}$, hasilnya lebih tinggi dibanding dengan variasi jumlah nodal 279 dan 1037 pada titik koordinat yang sama masing-

masing sebesar $T = 57.9674 \text{ }^{\circ}\text{C}$ dan $T = 58.3592 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Sedangkan pada titik koordinat (0,0,5) dan (1,0,5) memiliki nilai yang sama masing-masing $T = 0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ dan $T = 100 \text{ }^{\circ}\text{C}$ pada semua variasi nodal yang diberikan. Dari semua hasil yang diperoleh tersebut jika ditinjau dari variasi jumlah nodal yang diberikan, hasil tersebut sudah sesuai dengan teori yang ada dalam literatur. Dalam sebuah teori semakin banyak variasi nodal yang diberikan, semakin meningkat pula nilai temperatur yang didapat. Namun teori tersebut tidak berlaku untuk titik koordinat (0,0,5) dan (1,0,5) memiliki nilai yang sama masing-masing $T = 0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ dan $T = 100 \text{ }^{\circ}\text{C}$, karena pada titik koordinat tersebut termasuk dalam kondisi batas awal yang diberikan dalam penelitian ini.

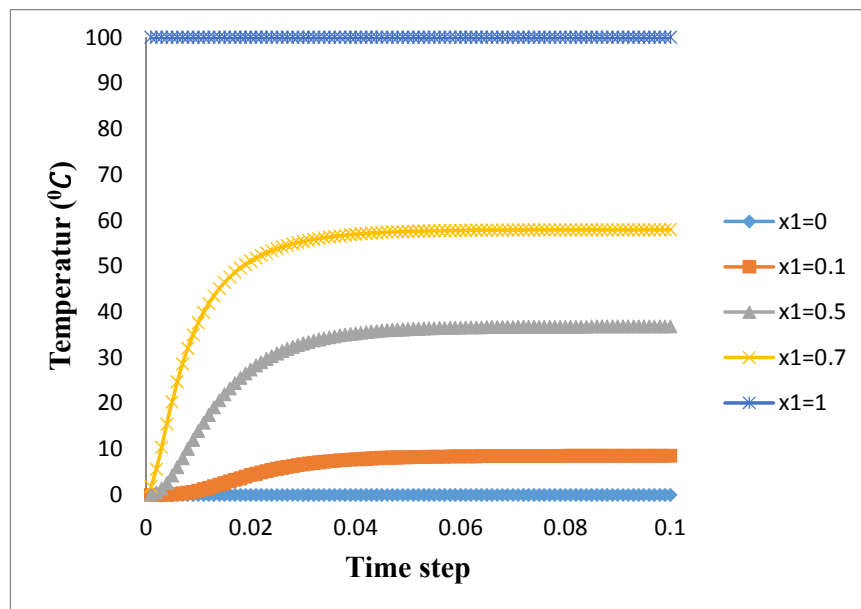
Setelah ditinjau dari persebaran nodal yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS, kemudian dilakukan tinjauan dari segi performa yang dilakukan oleh perangkat tersebut terhadap persegi dianggap FGMs variasi polinomial sehingga didapatkan nilai temperatur antar variasi jumlah nodal yang diberikan. Hasilnya seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 4.25, 4.26 dan 4.27 yang menunjukkan grafik temperatur sepanjang koordinat x_1 pada waktu yang berbeda untuk variasi jumlah nodal masing-masing 279, 1037 dan 2275. Dari gambar tersebut jika ditinjau dari segi variasi jumlah nodal yang diberikan, terlihat bahwa semakin banyak jumlah nodal yang diberikan, semakin halus gambar grafik yang terbentuk. Hasil tersebut membuktikan bahwa, performa yang dihasilkan oleh FEM semakin baik untuk menganalisis konduksi panas pada persegi dianggap FGMs variasi polinomial.

Selanjutnya, setelah ditinjau dari persebaran nodal yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS, kemudian tinjauan performa dapat juga di dapat dari waktu proses pengerjaan yang dilakukan oleh perangkat lunak tersebut terhadap persegi dianggap FGMs variasi polinomial sehingga didapatkan nilai temperatur antar variasi jumlah nodal yang diberikan. Hasilnya seperti yang ditunjukkan oleh Tabel 4.11, yaitu masing-masing sebesar 15, 23 dan 37 pada jumlah nodal masing-masing 279, 1037 dan 2275. Dari hasil yang ditunjukkan tersebut, terlihat bahwa semakin banyak jumlah nodal yang diberikan semakin lama waktu proses pengerjaan. Sebaliknya semakin sedikit jumlah nodal yang diberikan, semakin

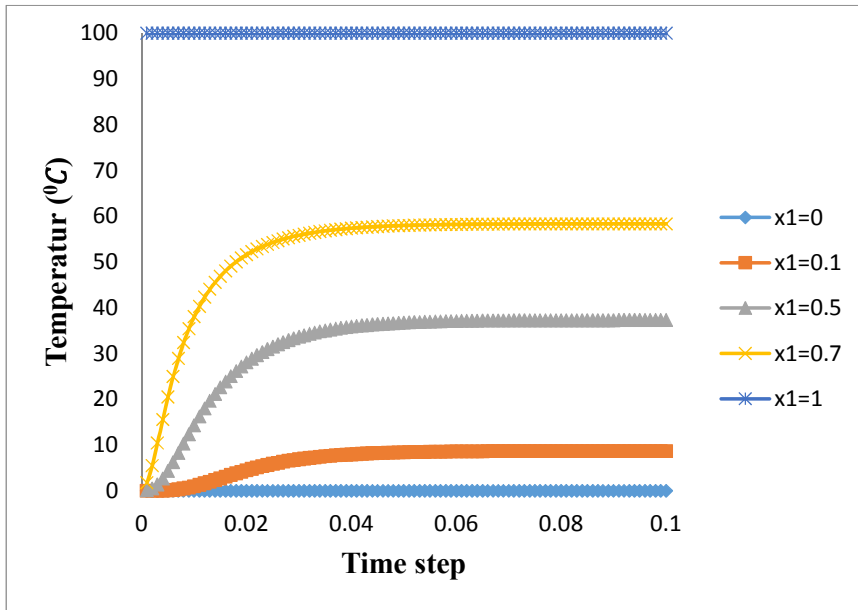
cepat waktu proses pengerjaannya. Akan tetapi jika dikaitkan dengan nilai temperatur rata-rata pada semua koordinat yang ditunjukkan, pada nilai nodal 2275 didapatkan nilai temperatur rata-rata tinggi jika dibandingkan dengan ketiga variasi nodal tersebut. Sedangkan untuk variasi jumlah nodal 279, didapatkan nilai rata-rata temperatur rendah dari semua variasi jumlah nodal yang ditunjukkan.



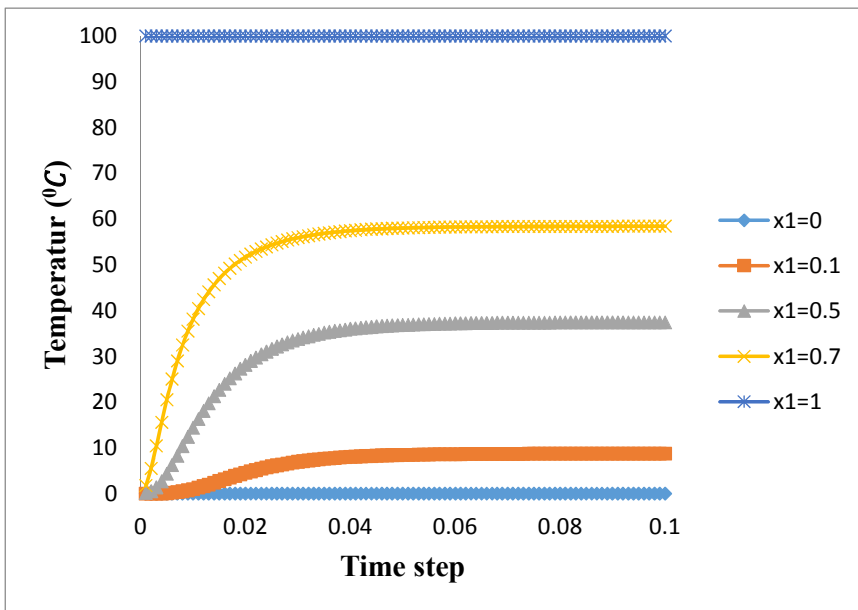
Gambar 4.21 Plot kontur dari temperatur dari FGMs persegi variasi polinomial dengan jumlah nodal a) 279, b) 1037 dan c) 2275



Gambar 4.22 Grafik temperatur terhadap time step pada titik koordinat x_1 yang berbeda dengan jumlah nodal 279



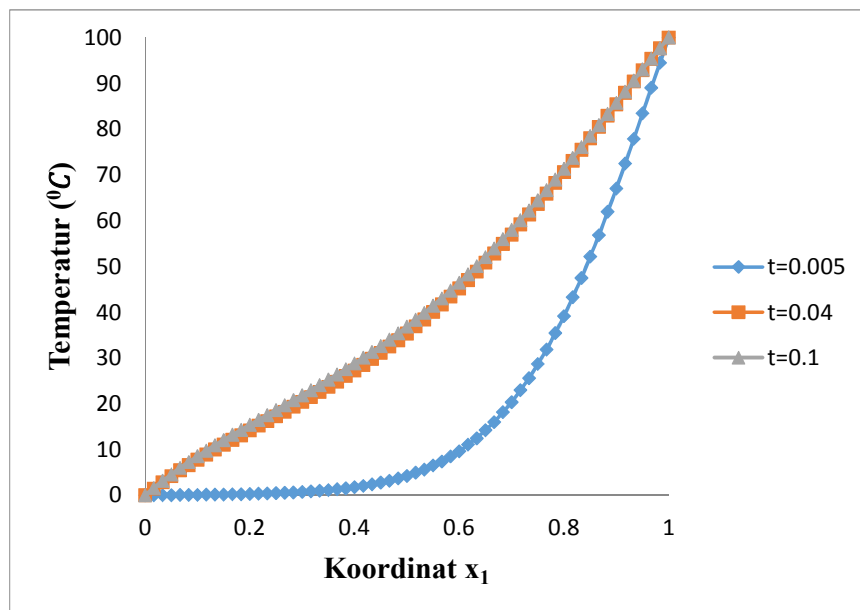
Gambar 4.23 Grafik temperatur terhadap time step pada titik koordinat x_1 yang berbeda dengan jumlah nodal 1037



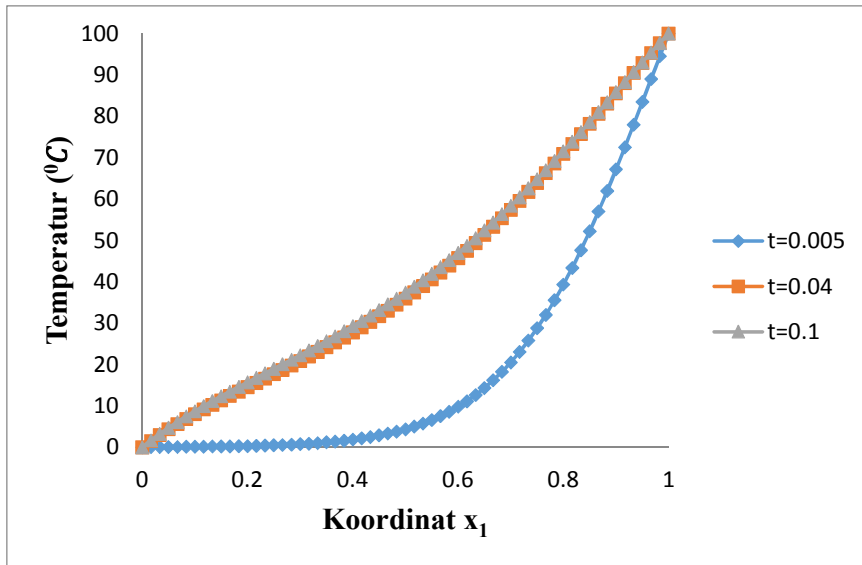
Gambar 4.24 Grafik temperatur terhadap time step pada titik koordinat x_1 yang berbeda dengan jumlah nodal 2275

Tabel 4.10 Perbandingan temperatur pada titik koordinat x_1 yang sama dengan jumlah nodal berbeda

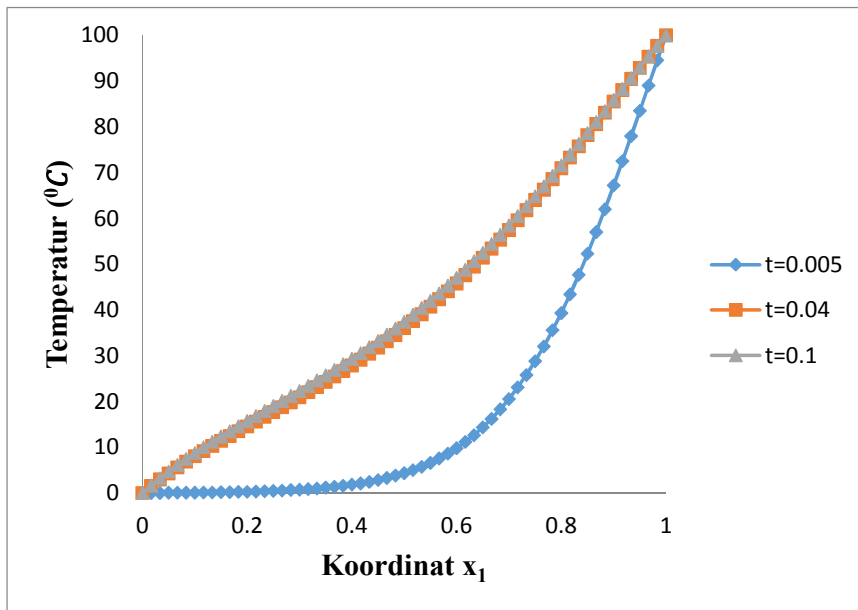
Waktu	Jumlah Nodal	Temperatur $^{\circ}C$				
		Koordinat $x_1 = 0$	Koordinat $x_1 = 0.1$	Koordinat $x_1 = 0.5$	Koordinat $x_1 = 0.7$	Koordinat $x_1 = 1$
0.128	279	0	8.54898	36.8194	57.9674	100
	1037	0	8.72487	37.3335	58.3592	100
	2275	0	8.75736	37.4261	58.4307	100



Gambar 4.25 Grafik temperatur terhadap titik koordinat x_1 pada time step yang berbeda dengan jumlah nodal 279



Gambar 4.26 Grafik temperatur terhadap titik koordinat x_1 pada time step yang berbeda dengan jumlah nodal 1037



Gambar 4.27 Grafik temperatur terhadap titik koordinat x_1 pada time step yang berbeda dengan jumlah nodal 2275

Tabel 4.11 Perbandingan jumlah nodal terhadap waktu proses pengerjaan (s)

Jumlah Nodal	Waktu proses pengerjaan (s)
279	15
1037	23
2275	37

4.3.2 FGMs Persegi Variasi Eksponensial

Setelah didapatkan performa dan efisiensi FEM untuk menganalisis konduksi panas silinder berlubang variasi polinomial, eksponensial dan trigonometri dianggap sebagai FGMs, contoh kasus selanjutnya yaitu menganalisis konduksi panas pada persegi dianggap sebagai FGMs. Untuk kasus kedua pada persegi yang dianggap FGMs yakni variasi eksponensial. Dengan luas $L \times L$ dengan perambatan panas dan variasi konduktivitas panas sepanjang sumbu x . Bagian atas dan bawah diberi insulasi. Batas kanan dan kiri diberi temperatur konstan masing-masing $\bar{T} = 100 \text{ }^{\circ}\text{C}$ dan $T = 0 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Sebuah konduktivitas termal bervariasi linier sepanjang sumbu x diberikan sebagai $5 \exp(2x_1)$. Gambar 4.28a, 4.28b dan 4.28c menunjukkan sebuah plot kontur perambatan panas pada FGMs persegi variasi eksponensial dengan jumlah nodal masing-masing 279, 1037 dan 2275 yang dihitung menggunakan perangkat lunak ANSYS. Dari gambar tersebut, terlihat sebuah perambatan panas yang terjadi dari sisi kanan ke kiri FGMs persegi variasi eksponensial. Hasil tersebut sesuai dengan kondisi batas yang diberikan, dengan pemberian kondisi batas bagian kanan bernilai $T = 100^{\circ}\text{C}$, sedangkan bagian kiri $T = 0^{\circ}\text{C}$. Hasil yang diperoleh dari gambar tersebut, terlihat bahwa perambatan panas pada FGMs persegi variasi eksponensial merambat pada bagian tengah persegi. Pola perambatan panas yang didapat terdegradasi ke arah berlawanan dari sumbu koordinat x_1 .

Setelah diketahui pola perambatan temperatur yang terjadi pada persegi dianggap FGMs variasi eksponensial. Selanjutnya dari pola perambatan temperatur yang didapat, untuk FGMs persegi variasi eksponensial juga tidak didapatkan solusi analitik. Sehingga hasil yang didapat, nantinya akan dibandingkan dengan metode yang sama dengan memperbanyak jumlah nodal.

Seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 4.28a, 4.28b dan 4.28c, menunjukkan sebuah plot kontur perambatan panas pada FGMs persegi variasi eksponensial dengan jumlah nodal masing-masing 279, 1037 dan 2275.

Kemudian untuk menganalisis konduksi panas pada persegi dianggap FGMs variasi eksponensial, pertama-tama ditinjau dari variasi jumlah nodal yang diberikan. Dari variasi jumlah nodal yang diberikan, didapatkan sebuah variasi nilai temperatur. Dalam Gambar 4.28a, 4.28b dan 4.28c nilai temperatur yang didapatkan ditunjukkan pada Gambar 4.29, 4.30 dan 4.31 dan diperjelas dengan hasil yang ditunjukkan oleh Tabel 4.12, nilai temperatur yang diambil hanya pada kondisi akhir, karena pada kondisi tersebut perambatan temperatur dalam kondisi steady. Hasil yang diperoleh dari ketiga variasi yang diberikan, pada jumlah nodal 2275 memiliki nilai temperatur yang sangat tinggi jika dibandingkan dengan yang lain 279 dan 1037 yakni pada semua titik koordinat (0,1,0,5), (0,5,0,5) dan (0,7,0,5) untuk variasi nodal 1037 dan 2275. Sedangkan pada titik koordinat (0,0,5) dan (1,0,5) memiliki nilai yang sama pada semua variasi nodal yang diberikan. Kemudian apabila hasil pada titik koordinat tersebut dibandingkan dengan hasil geometri persegi dianggap FGMs variasi polinomial, pada variasi eksponensial memiliki nilai temperatur yang lebih rendah.

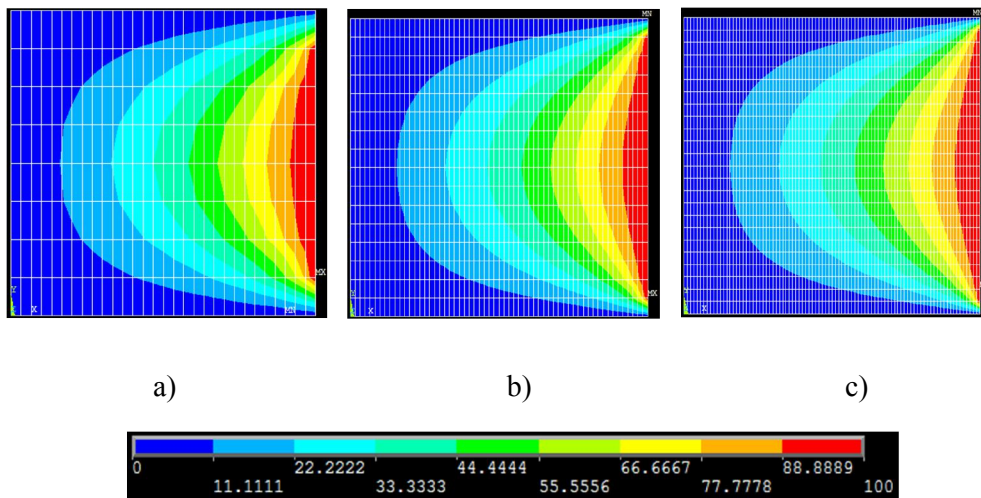
Pada titik koordinat (0,1,0,5) untuk variasi jumlah nodal 2275 memiliki nilai temperatur $T = 7,74951 \text{ }^{\circ}\text{C}$, hasilnya lebih tinggi dibanding dengan variasi jumlah nodal 279 dan 1037 pada titik koordinat yang sama masing-masing sebesar $T = 7,56821 \text{ }^{\circ}\text{C}$ dan $T = 7,72127 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Pada titik koordinat (0,5,0,5) untuk variasi jumlah nodal 2275 memiliki nilai temperatur $T = 38,267 \text{ }^{\circ}\text{C}$, hasilnya lebih tinggi dibanding dengan variasi jumlah nodal 279 dan 1037 pada titik koordinat yang sama masing-masing sebesar $T = 37,6599 \text{ }^{\circ}\text{C}$ dan $T = 38,1745 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Pada titik koordinat (0,7,0,5) untuk variasi jumlah nodal 2275 memiliki nilai temperatur $T = 60,2599 \text{ }^{\circ}\text{C}$, hasilnya lebih tinggi dibanding dengan variasi jumlah nodal 279 dan 1037 pada titik koordinat yang sama masing-masing sebesar $T = 59,8038 \text{ }^{\circ}\text{C}$ dan $T = 60,1896 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Sedangkan pada titik koordinat (0,0,5) dan (1,0,5) memiliki nilai yang sama masing-masing $T = 0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ dan $T = 100 \text{ }^{\circ}\text{C}$ pada semua variasi nodal yang diberikan. Dari semua hasil yang

diperoleh tersebut jika ditinjau dari variasi jumlah nodal yang diberikan, hasil tersebut sudah sesuai dengan teori yang ada dalam literatur. Dalam sebuah teori semakin banyak variasi nodal yang diberikan, semakin meningkat pula nilai temperatur yang didapat. Namun teori tersebut tidak berlaku untuk titik koordinat (0,0,5) dan (1,0,5) memiliki nilai yang sama masing-masing $T = 0^{\circ}C$ dan $T = 100^{\circ}C$, karena pada titik koordinat tersebut termasuk dalam kondisi batas awal yang diberikan dalam penelitian ini.

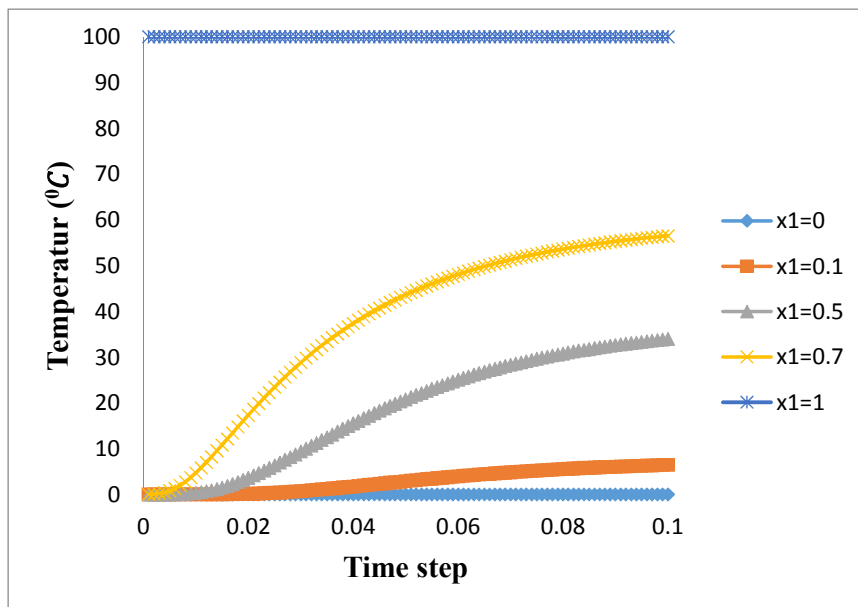
Setelah ditinjau dari persebaran nodal yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS, kemudian dilakukan tinjauan dari segi performa yang dilakukan oleh perangkat tersebut terhadap persegi dianggap FGMs variasi eksponensial sehingga didapatkan nilai temperatur antar variasi jumlah nodal yang diberikan. Hasilnya seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 4.32, 4.33 dan 4.34 yang menunjukkan grafik temperatur sepanjang koordinat x_1 pada waktu yang berbeda untuk variasi jumlah nodal masing-masing 279, 1037 dan 2275. Dari gambar tersebut jika ditinjau dari segi variasi jumlah nodal yang diberikan, terlihat bahwa semakin banyak jumlah nodal yang diberikan, semakin halus gambar grafik yang terbentuk. Hasil tersebut membuktikan bahwa, performa yang dihasilkan oleh FEM semakin baik untuk menganalisis konduksi panas pada persegi dianggap FGMs variasi eksponensial.

Selanjutnya, setelah ditinjau dari persebaran nodal yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS, kemudian tinjauan performa dapat juga di dapat dari waktu proses pengerjaan yang dilakukan oleh perangkat lunak tersebut terhadap persegi dianggap FGMs variasi eksponensial sehingga didapatkan nilai temperatur antar variasi jumlah nodal yang diberikan. Hasilnya seperti yang ditunjukkan oleh Tabel 4.13, yaitu masing-masing sebesar 14, 23 dan 37 pada jumlah nodal masing-masing 279, 1037 dan 2275. Dari hasil yang ditunjukkan tersebut, terlihat bahwa semakin banyak jumlah nodal yang diberikan semakin lama waktu proses pengerjaan. Sebaliknya semakin sedikit jumlah nodal yang diberikan, semakin cepat waktu proses pengerjaannya. Akan tetapi jika dikaitkan dengan nilai temperatur rata-rata pada semua koordinat yang ditunjukkan, pada nilai nodal 2275 didapatkan nilai temperatur rata-rata tinggi jika dibandingkan dengan ketiga

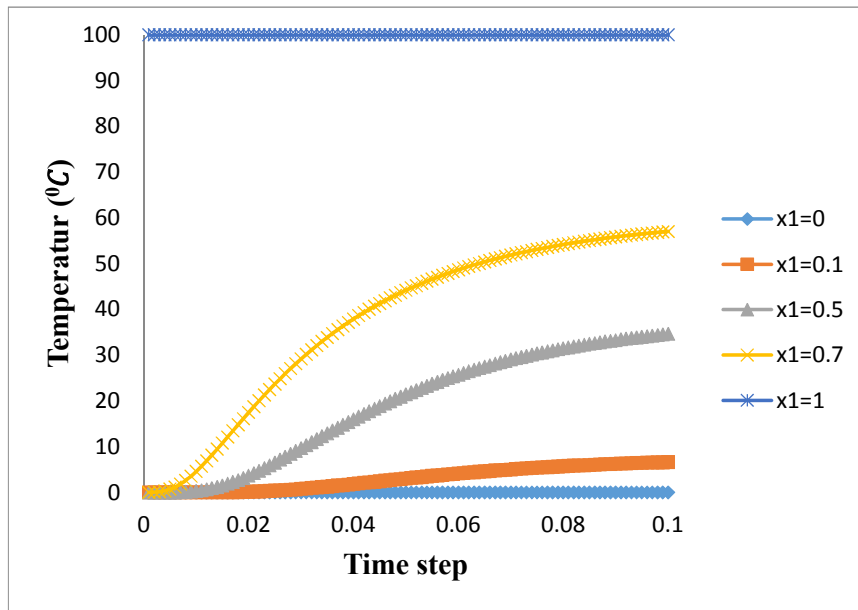
variasi nodal tersebut. Sedangkan untuk variasi jumlah nodal 279, didapatkan nilai rata-rata temperatur rendah dari semua variasi jumlah nodal yang ditunjukkan.



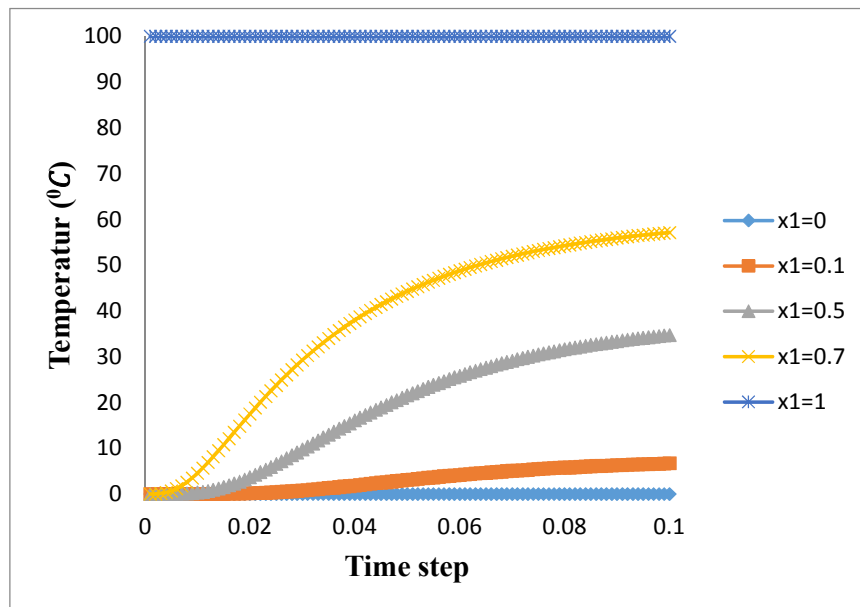
Gambar 4.28 Plot kontur dari temperatur dari FGMs persegi variasi eksponensial dengan jumlah nodal a) 279, b) 1037 dan c) 2275



Gambar 4.29 Grafik temperatur terhadap time step pada titik koordinat x_1 yang berbeda dengan jumlah nodal 279



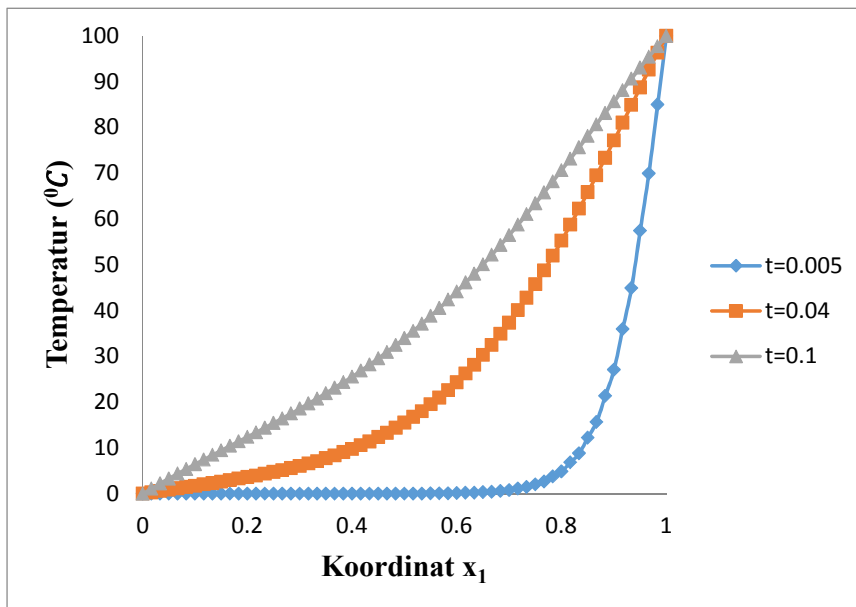
Gambar 4.30 Grafik temperatur terhadap time step pada titik koordinat x_1 yang berbeda dengan jumlah nodal 1037



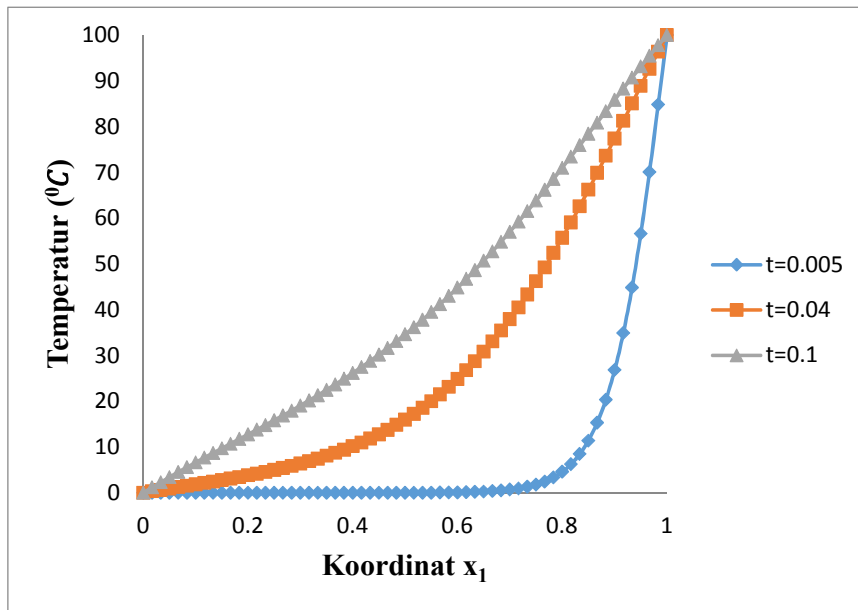
Gambar 4.31 Grafik temperatur terhadap time step pada titik koordinat x_1 yang berbeda dengan jumlah nodal 2275

Tabel 4.12 Perbandingan temperatur pada titik koordinat x_1 yang sama dengan jumlah nodal berbeda

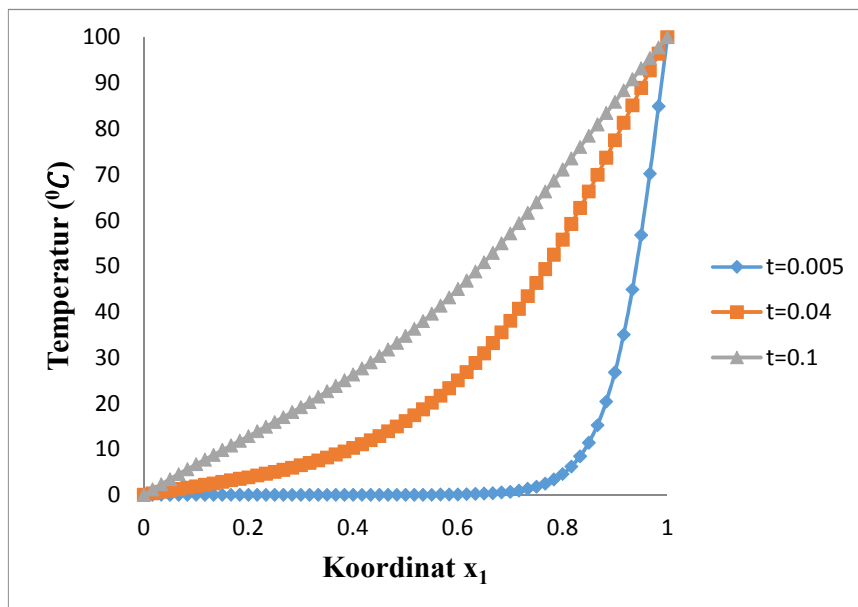
Waktu	Jumlah Nodal	Temperatur $^{\circ}C$				
		Koordinat $x_1 = 0$	Koordinat $x_1 = 0.1$	Koordinat $x_1 = 0.5$	Koordinat $x_1 = 0.7$	Koordinat $x_1 = 1$
0.128	279	0	7.56821	37.6599	59.8038	100
	1037	0	7.72127	38.1745	60.1896	100
	2275	0	7.74951	38.267	60.2599	100



Gambar 4.32 Grafik temperatur terhadap titik koordinat x_1 pada time step yang berbeda dengan jumlah nodal 279



Gambar 4.33 Grafik temperatur terhadap titik koordinat x_1 pada time step yang berbeda dengan jumlah nodal 1037



Gambar 4.34 Grafik temperatur terhadap titik koordinat x_1 pada time step yang berbeda dengan jumlah nodal 2275

Tabel 4.13 Perbandingan jumlah nodal terhadap waktu proses pengerjaan (s)

Jumlah Nodal	Waktu proses pengerjaan (s)
279	14
1037	23
2275	37

4.3.3 FGMs Persegi Variasi Trigonometri

Setelah didapatkan performa dan efisiensi FEM untuk menganalisis konduksi panas silinder berlubang variasi polinomial, eksponensial dan trigonometri dianggap sebagai FGMs, contoh kasus selanjutnya yaitu menganalisis konduksi panas pada persegi dianggap sebagai FGMs. Untuk kasus terakhir pada persegi yang dianggap FGMs yakni variasi trigonometri. Dengan luas $L \times L$ dengan perambatan panas dan variasi konduktivitas panas sepanjang sumbu x . Bagian atas dan bawah diberi insulasi. Batas kanan dan kiri diberi temperatur konstan masing-masing $\bar{T} = 100^{\circ}C$ dan $T = 0^{\circ}C$. Sebuah konduktivitas termal bervariasi linier sepanjang sumbu x diberikan sebagai $5(\cos(0.2x_1) + 2 \sin(0.2x_1))^2$. Gambar 4.35a, 4.35b dan 4.35c menunjukkan sebuah plot kontur perambatan panas pada FGMs persegi variasi trigonometri dengan jumlah nodal masing-masing 279, 1037 dan 2275 yang dihitung menggunakan perangkat lunak ANSYS. Dari gambar tersebut, terlihat sebuah perambatan panas yang terjadi dari sisi kanan ke kiri FGMs persegi variasi trigonometri. Hasil tersebut sesuai dengan kondisi batas yang diberikan, dengan pemberian kondisi batas bagian kanan bernilai $T = 100^{\circ}C$, sedangkan bagian kiri $T = 0^{\circ}C$. Hasil yang diperoleh dari gambar tersebut, terlihat bahwa perambatan panas pada FGMs persegi variasi trigonometri merambat pada bagian tengah persegi. Pola perambatan panas yang didapat terdegradasi ke arah berlawanan dari sumbu koordinat x_1 .

Setelah diketahui pola perambatan temperatur yang terjadi pada persegi dianggap FGMs variasi trigonometri. Selanjutnya dari pola perambatan temperatur yang didapat, untuk FGMs persegi variasi trigonometri juga tidak didapatkan solusi analitik. Sehingga hasil yang didapat, nantinya akan

dibandingkan dengan metode yang sama dengan memperbanyak jumlah nodal. Seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 4.35a, 4.35b dan 4.35c, menunjukkan sebuah plot kontur perambatan panas pada FGMs persegi variasi trigonometri dengan jumlah nodal masing-masing 279, 1037 dan 2275.

Kemudian untuk menganalisis konduksi panas pada persegi dianggap FGMs variasi trigonometri, pertama-tama ditinjau dari variasi jumlah nodal yang diberikan. Dari variasi jumlah nodal yang diberikan, didapatkan sebuah variasi nilai temperatur. Dalam Gambar 4.35a, 4.35b dan 4.35c nilai temperatur yang didapatkan ditunjukkan pada Gambar 4.36, 4.37 dan 4.38 dan diperjelas dengan hasil yang ditunjukkan oleh Tabel 4.14, nilai temperatur yang diambil hanya pada kondisi akhir, karena pada kondisi tersebut perambatan temperatur dalam kondisi steady. Hasil yang diperoleh dari ketiga variasi yang diberikan, pada jumlah nodal 2275 memiliki nilai temperatur yang sangat tinggi jika dibandingkan dengan yang lain 279 dan 1037 yakni pada semua titik koordinat (0,1,0,5), (0,5,0,5) dan (0,7,0,5) untuk variasi nodal 1037 dan 2275. Sedangkan pada titik koordinat (0,0,5) dan (1,0,5) memiliki nilai yang sama pada semua variasi nodal yang diberikan. Kemudian apabila hasil pada titik koordinat tersebut dibandingkan dengan hasil geometri persegi dianggap FGMs variasi polinomial dan eksponensial, pada variasi trigonometri memiliki nilai temperatur yang lebih rendah.

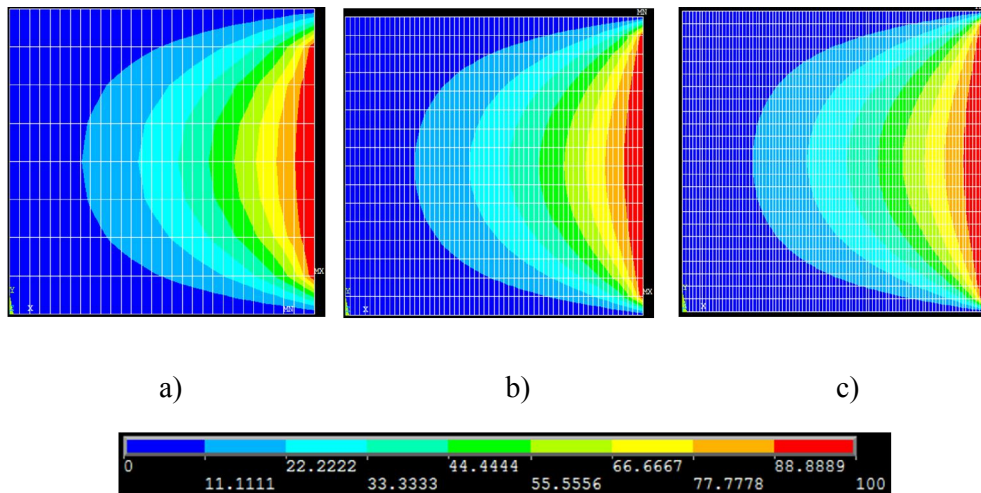
Pada titik koordinat (0,1,0,5) untuk variasi jumlah nodal 2275 memiliki nilai temperatur $T = 4,66051 \text{ } ^\circ\text{C}$, hasilnya lebih tinggi dibanding dengan variasi jumlah nodal 279 dan 1037 pada titik koordinat yang sama masing-masing sebesar $T = 4,55107 \text{ } ^\circ\text{C}$ dan $T = 4,64345 \text{ } ^\circ\text{C}$. Pada titik koordinat (0,5,0,5) untuk variasi jumlah nodal 2275 memiliki nilai temperatur $T = 28,8523 \text{ } ^\circ\text{C}$, hasilnya lebih tinggi dibanding dengan variasi jumlah nodal 279 dan 1037 pada titik koordinat yang sama masing-masing sebesar $T = 28,3866 \text{ } ^\circ\text{C}$ dan $T = 28,7812 \text{ } ^\circ\text{C}$. Pada titik koordinat (0,7,0,5) untuk variasi jumlah nodal 2275 memiliki nilai temperatur $T = 50,8213 \text{ } ^\circ\text{C}$, hasilnya lebih tinggi dibanding dengan variasi jumlah nodal 279 dan 1037 pada titik koordinat yang sama masing-masing sebesar $T = 50,4195 \text{ } ^\circ\text{C}$ dan $T = 50,7593 \text{ } ^\circ\text{C}$. Sedangkan pada titik

koordinat (0,0,5) dan (1,0,5) memiliki nilai yang sama masing-masing $T = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ dan $T = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$ pada semua variasi nodal yang diberikan. Dari semua hasil yang diperoleh tersebut jika ditinjau dari variasi jumlah nodal yang diberikan, hasil tersebut sudah sesuai dengan teori yang ada dalam literatur. Dalam sebuah teori semakin banyak variasi nodal yang diberikan, semakin meningkat pula nilai temperatur yang didapat. Namun teori tersebut tidak berlaku untuk titik koordinat (0,0,5) dan (1,0,5) memiliki nilai yang sama masing-masing $T = 0\text{ }^{\circ}\text{C}$ dan $T = 100\text{ }^{\circ}\text{C}$, karena pada titik koordinat tersebut termasuk dalam kondisi batas awal yang diberikan dalam penelitian ini.

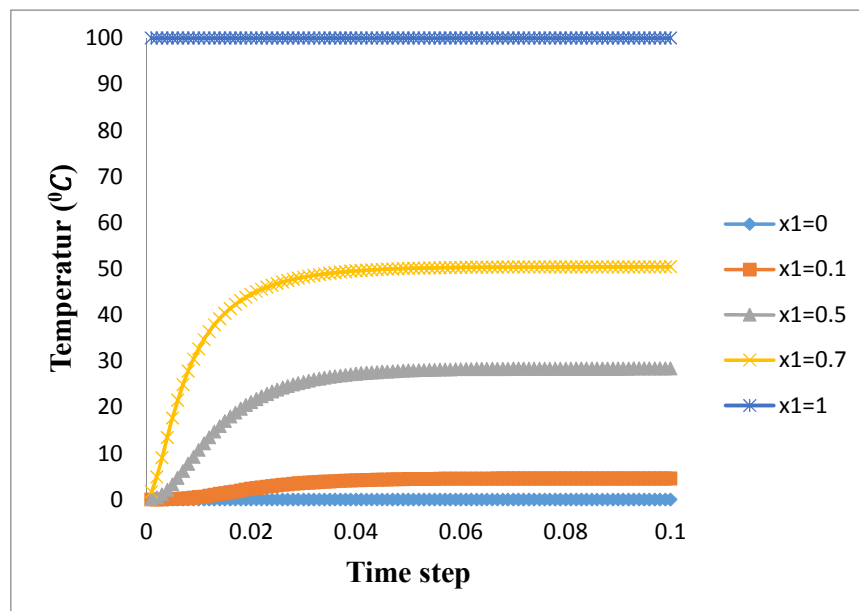
Setelah ditinjau dari persebaran nodal yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS, kemudian dilakukan tinjauan dari segi performa yang dilakukan oleh perangkat tersebut terhadap persegi dianggap FGMs variasi trigonometri sehingga didapatkan nilai temperatur antar variasi jumlah nodal yang diberikan. Hasilnya seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 4.39, 4.40 dan 4.41 yang menunjukkan grafik temperatur sepanjang koordinat x_1 pada waktu yang berbeda untuk variasi jumlah nodal masing-masing 279, 1037 dan 2275. Dari gambar tersebut jika ditinjau dari segi variasi jumlah nodal yang diberikan, terlihat bahwa semakin banyak jumlah nodal yang diberikan, semakin halus gambar grafik yang terbentuk. Hasil tersebut membuktikan bahwa, performa yang dihasilkan oleh FEM semakin baik untuk menganalisis konduksi panas pada persegi dianggap FGMs variasi trigonometri.

Selanjutnya, setelah ditinjau dari persebaran nodal yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS, kemudian tinjauan performa dapat juga di dapat dari waktu proses pengerjaan yang dilakukan oleh perangkat lunak tersebut terhadap persegi dianggap FGMs variasi trigonometri sehingga didapatkan nilai temperatur antar variasi jumlah nodal yang diberikan. Hasilnya seperti yang ditunjukkan oleh Tabel 4.15, yaitu masing-masing sebesar 14, 23 dan 37 pada jumlah nodal masing-masing 279, 1037 dan 2275. Dari hasil yang ditunjukkan tersebut, terlihat bahwa semakin banyak jumlah nodal yang diberikan semakin lama waktu proses pengerjaan. Sebaliknya semakin sedikit jumlah nodal yang diberikan, semakin cepat waktu proses pengerjaannya. Akan tetapi jika dikaitkan dengan nilai

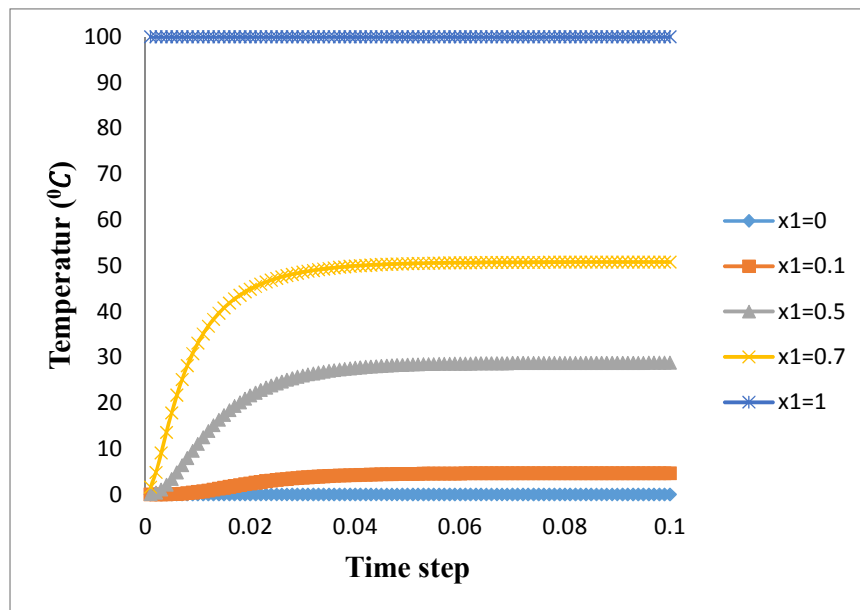
temperatur rata-rata pada semua koordinat yang ditunjukkan, pada nilai nodal 2275 didapatkan nilai temperatur rata-rata tinggi jika dibandingkan dengan ketiga variasi nodal tersebut. Sedangkan untuk variasi jumlah nodal 279, didapatkan nilai rata-rata temperatur rendah dari semua variasi jumlah nodal yang ditunjukkan.



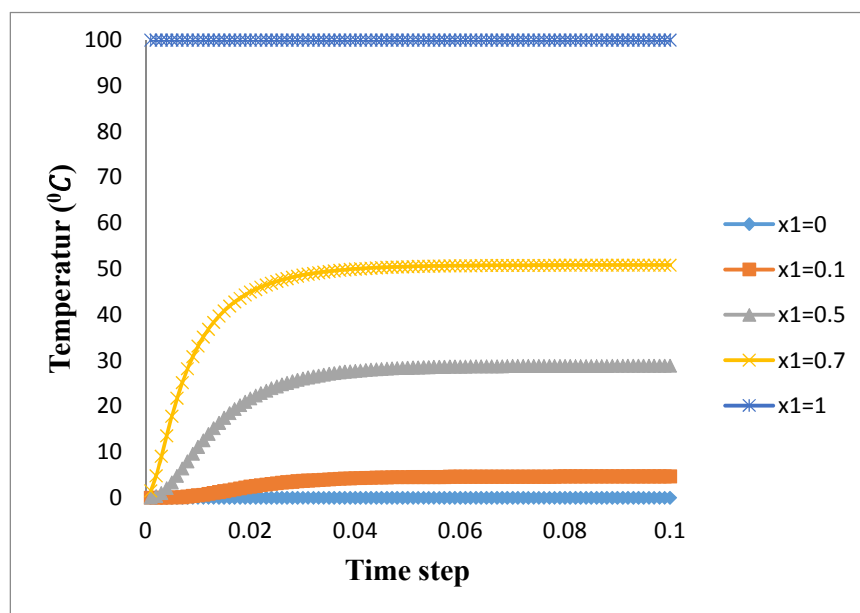
Gambar 4.35 Plot kontur perambatan panas dari FGMs persegi variasi trigonometri dengan jumlah nodal a) 279, b) 1037 dan c) 2275



Gambar 4.36 Grafik temperatur terhadap time step pada titik koordinat x_1 yang berbeda dengan jumlah nodal 279



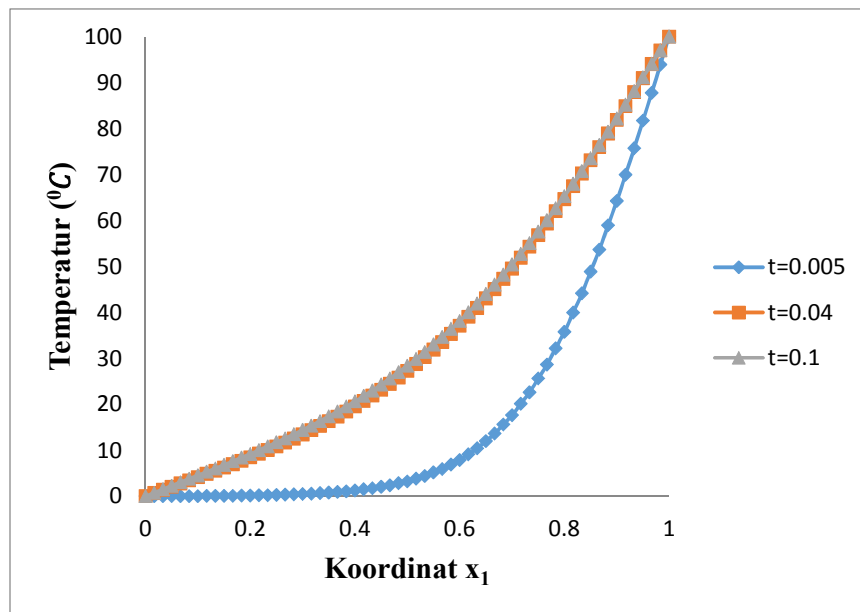
Gambar 4.37 Grafik temperatur terhadap time step pada titik koordinat x_1 yang berbeda dengan jumlah nodal 1037



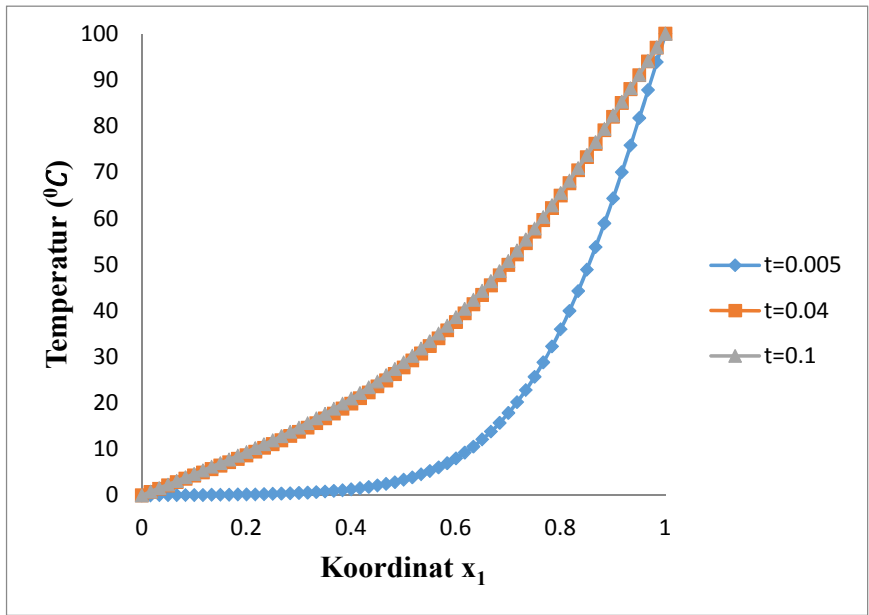
Gambar 4.38 Grafik temperatur terhadap time step pada titik koordinat x_1 yang berbeda dengan jumlah nodal 2275

Tabel 4.14 Perbandingan temperatur pada titik koordinat x_1 yang sama dengan jumlah nodal berbeda

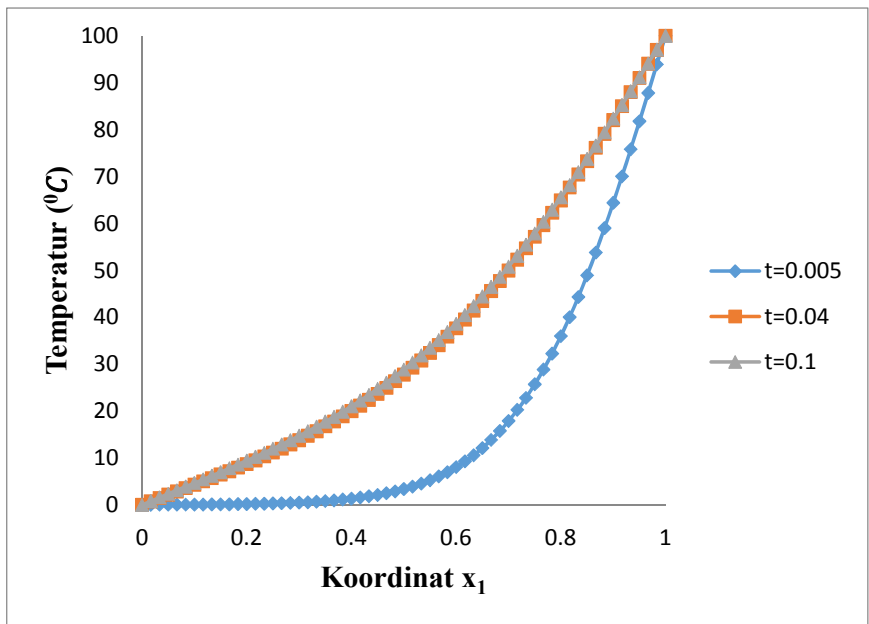
Waktu	Jumlah Nodal	Temperatur $^{\circ}C$				
		Koordinat $x_1 = 0$	Koordinat $x_1 = 0.1$	Koordinat $x_1 = 0.5$	Koordinat $x_1 = 0.7$	Koordinat $x_1 = 1$
0.128	279	0	4.55107	28.3866	50.4195	100
	1037	0	4.64345	28.7812	50.7593	100
	2275	0	4.66051	28.8523	50.8213	100



Gambar 4.39 Grafik temperatur terhadap titik koordinat x_1 pada time step yang berbeda dengan jumlah nodal 279



Gambar 4.40 Grafik temperatur terhadap titik koordinat x_1 pada time step yang berbeda dengan jumlah nodal 1037



Gambar 4.41 Grafik temperatur terhadap titik koordinat x_1 pada time step yang berbeda dengan jumlah nodal 2275

Tabel 4.15 Perbandingan jumlah nodal terhadap waktu proses pengerjaan (s)

Jumlah Nodal	Waktu proses pengerjaan (s)
279	14
1037	23
2275	37

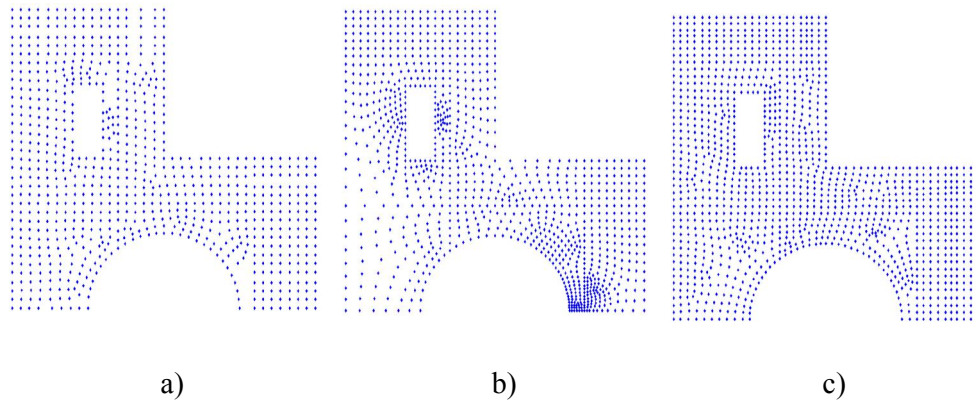
4.4 FGMs Geometri Rumit

Setelah didapatkan hasil dari silinder berlubang dan persegi yang dianggap FGMs, dalam penelitian ini contoh terakhir yang digunakan adalah pada geometri rumit yang dianggap FGMs. Setelah sebelumnya ditentukan nilai dari konduktivitas termal $K(x)$ yang akan digunakan. Kemudian konduksi panas pada geometri rumit dianggap sebagai FGMs dengan distribusi nodal untuk permasalahan konduksi panas pada kasus FGMs geometri rumit seperti pada Gambar 4.42 dengan jumlah nodal masing-masing a) 828, b) 1065 dan c) 1329 dan skema geometri dan kondisi batas yang digunakan seperti pada Gambar 3.4. Dalam kasus pertama, sebuah konduktivitas termal didefinisikan sebagai $k(x) = 5(1 + 2x_1)^2$. Dan interval waktu dari $t_0 = 0$ ke $t_f = 0.128$. Waktu diskrit yang digunakan konsisten 128 time step $\Delta t = 0.001$.

Pada kasus kedua dalam penelitian ini, konduksi panas pada geometri rumit variasi eksponensial dianggap sebagai FGMs digunakan. Dalam kasus kedua ini, sebuah konduktivitas termal didefinisikan sebagai $5 \exp(2x_1)$. Kemudian konduksi panas pada geometri rumit dianggap sebagai FGMs dengan distribusi nodal untuk permasalahan konduksi panas pada kasus FGMs geometri rumit seperti pada Gambar 4.42 dengan jumlah nodal masing-masing a) 828, b) 1065 dan c) 1329 dan skema geometri dan kondisi batas yang digunakan seperti pada Gambar 3.4. Dan interval waktu dari $t_0 = 0$ ke $t_f = 0.128$. Waktu diskrit yang digunakan konsisten 128 time step $\Delta t = 0.001$.

Pada kasus ketiga dalam geometri persegi, konduksi panas pada persegi variasi trigonometri dianggap sebagai FGMs digunakan. Dalam kasus ketiga sebuah konduktivitas termal didefinisikan sebagai $5(\cos(0.2x_1) + 2 \sin(0.2x_1))^2$. Kemudian konduksi panas pada geometri rumit dianggap sebagai FGMs dengan

distribusi nodal untuk permasalahan konduksi panas pada kasus FGMs geometri rumit seperti pada Gambar 4.42 dengan jumlah nodal masing-masing a) 828, b) 1065 dan c) 1329 dan skema geometri dan geometri batas yang digunakan seperti pada Gambar 3.4. Dan interval waktu dari $t_0 = 0$ ke $t_f = 0.128$. Waktu diskrit yang digunakan konsisten 128 time step $\Delta t = 0.001$.



Gambar 4.42 Distribusi nodal untuk permasalahan konduksi panas pada kasus pertama a) 828, b) 1065 dan c) 1329

4.4.1 FGMs Geometri Rumit Variasi Polinomial

Selanjutnya, untuk kasus yang pertama yaitu tentang konduksi panas pada geometri rumit variasi polinomial dianggap sebagai FGMs. Gambar 4.43b, 4.43c dan 4.43d menunjukkan sebuah plot kontur perambatan temperatur FGMs geometri rumit variasi polinomial dengan jumlah nodal masing-masing 828, 1065 dan 1379. Dari gambar tersebut, terlihat sebuah perambatan panas yang terjadi sesuai dengan kondisi batas yang diberikan Gambar 3.4 dengan pemberian kondisi batas bagian luar bernilai $T = 50^{\circ}C$, sedangkan bagian dalam $T = 0^{\circ}C$. Dan pola perambatannya terdegradasi ke arah berlawanan dari sumbu koordinat x_1 .

Setelah diketahui pola perambatan temperatur yang terjadi pada geometri rumit dianggap FGMs variasi polinomial. Selanjutnya, dari pola perambatan temperatur yang didapat, untuk FGMs geometri rumit variasi polinomial tidak didapatkan solusi analitik. Sehingga hasil yang didapat, nantinya akan dibandingkan dengan metode yang sama dengan memperbanyak jumlah nodal.

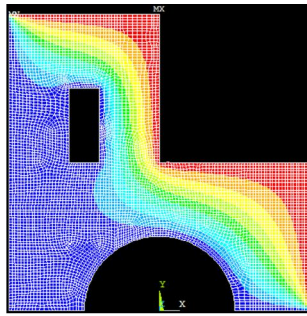
Seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 4.43a, menunjukkan sebuah plot kontur FGMs geometri rumit variasi polinomial dengan jumlah nodal 6945.

Kemudian untuk menganalisis konduksi panas pada geometri rumit dianggap FGMs variasi polinomial, pertama-tama ditinjau dari variasi jumlah nodal yang diberikan. Dari variasi jumlah nodal yang diberikan, didapatkan sebuah variasi nilai temperatur. Dalam Gambar 4.43b, 4.43c dan 4.43d yang diperjelas hasilnya oleh Tabel 4.16 dan nilai temperatur yang diambil hanya pada kondisi akhir, karena pada kondisi tersebut perambatan temperatur dalam kondisi steady. Hasil yang diperoleh dari ketiga variasi yang diberikan, pada jumlah nodal 1379 memiliki nilai temperatur yang mendekati variasi jumlah nodal 6945 pada koordinat $(-0,03,0,17)$ jika dibandingkan dengan yang lain 828 dan 1065 yakni pada titik koordinat yang sama. Sedangkan pada titik koordinat $(-0,03,0,07)$ nilai temperatur pada variasi jumlah nodal 1379 lebih rendah jika dibandingkan dengan kedua variasi nodal yang diberikan 828 dan 1065. Dan yang terakhir pada titik koordinat $(0,06,0,07)$ untuk variasi jumlah nodal 1329 memiliki nilai yang paling tinggi jika dibandingkan dengan kedua variasi nodal tersebut, bahkan nilai temperatur pada variasi jumlah nodal tersebut lebih tinggi dari variasi jumlah nodal 6945.

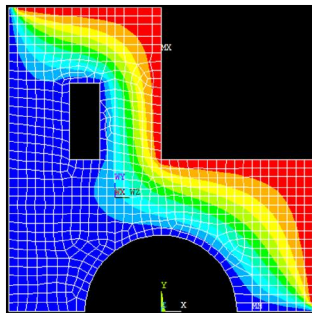
Pada titik koordinat $(-0,03,0,17)$ untuk variasi jumlah nodal 1329 memiliki nilai temperatur $T = 32,8419 \text{ }^{\circ}\text{C}$, hasilnya lebih tinggi dibanding dengan variasi jumlah nodal 828 dan 1065 pada titik koordinat yang sama masing-masing sebesar $T = 32,6860 \text{ }^{\circ}\text{C}$ dan $T = 32,7959 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Hasil dari variasi nodal 1329 mendekati hasil yang diperoleh dari variasi jumlah nodal 6945 yang memiliki nilai temperatur $T = 32,8933 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Pada titik koordinat $(-0,03,0,07)$ untuk variasi jumlah nodal 1329 memiliki nilai temperatur $T = 8,26287 \text{ }^{\circ}\text{C}$, hasilnya lebih rendah dibanding dengan variasi jumlah nodal 828 dan 1065 pada titik koordinat yang sama masing-masing sebesar $T = 8,26533 \text{ }^{\circ}\text{C}$ dan $T = 8,30382 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Sedangkan hasilnya masih lebih tinggi jika dibandingkan dengan hasil yang diperoleh dari variasi jumlah nodal 6945 sebesar $T = 8,25641 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Pada titik koordinat $(0,06,0,07)$ untuk variasi jumlah nodal 1329 memiliki nilai temperatur $T = 36,2103 \text{ }^{\circ}\text{C}$, hasilnya lebih tinggi dibanding dengan semua variasi jumlah

nodal 828, 1065 dan 6945 pada titik koordinat yang sama masing-masing sebesar $T = 36,2073 \text{ }^{\circ}\text{C}$, $T = 36,2036 \text{ }^{\circ}\text{C}$ dan $T = 36,2068 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Dari semua hasil yang diperoleh tersebut jika ditinjau dari variasi jumlah nodal yang diberikan, hasil tersebut sudah sesuai dengan teori yang ada dalam literatur. Dalam sebuah teori semakin banyak variasi nodal yang diberikan, semakin meningkat pula nilai temperatur yang didapat. Namun teori tersebut tidak berlaku untuk kondisi batas awal yang diberikan dalam penelitian ini.

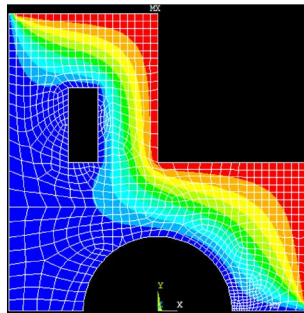
Selanjutnya, setelah ditinjau dari persebaran nodal yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS, kemudian tinjauan performa didapat dari waktu proses pengerjaan yang dilakukan oleh perangkat lunak tersebut terhadap geometri rumit dianggap FGMs variasi polinomial sehingga didapatkan nilai temperatur antar variasi jumlah nodal yang diberikan. Hasilnya seperti yang ditunjukkan oleh Tabel 4.17, yaitu masing-masing sebesar 28, 31, 35 dan 128 pada jumlah nodal masing-masing 828, 1065, 1329 dan 6945. Dari hasil yang ditunjukkan tersebut, terlihat bahwa semakin banyak jumlah nodal yang diberikan semakin lama waktu proses pengerjaan. Sebaliknya semakin sedikit jumlah nodal yang diberikan, semakin cepat waktu proses pengerjaannya. Akan tetapi jika dikaitkan dengan nilai temperatur rata-rata pada semua koordinat yang ditunjukkan, pada nilai nodal 1329 didapatkan nilai temperatur rata-rata mendekati nilai variasi nodal 6945 jika dibandingkan dengan kedua variasi nodal tersebut. Sedangkan untuk variasi jumlah nodal 828, didapatkan nilai rata-rata temperatur rendah dari semua variasi jumlah nodal yang ditunjukkan.



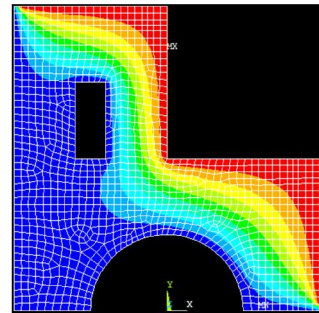
a)



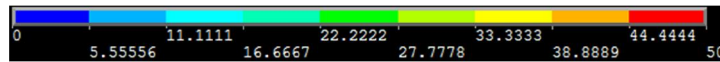
b)



c)



c)



Gambar 4.43 Plot kontur dari temperatur dari FGMs geometri rumit variasi polinomial dengan jumlah nodal a) 6945, b) 828, c) 1065 dan d) 1329

Tabel 4.16 Perbandingan temperatur pada titik koordinat x_1 yang sama dengan jumlah nodal berbeda

Waktu	Jumlah nodal	Temperatur $^{\circ}C$		
		Koordinat (-0,03,0,17)	Koordinat (-0,03,0,07)	Koordinat (0,06,0,07)
0.128	828	32,6860	8,26533	36,2073
	1065	32,7959	8,30382	36,2036
	1329	32,8419	8,26287	36,2103
	6945	32,8933	8,25641	36,2068

Tabel 4.17 Perbandingan jumlah nodal terhadap waktu proses pengerjaan (s)

Jumlah Nodal	Waktu proses pengerjaan (s)
828	28
1065	31
1329	35
6945	128

4.4.2 FGMs Geometri Rumit Variasi Eksponensial

Selanjutnya, untuk kasus yang kedua yaitu tentang konduksi panas pada geometri rumit variasi polinomial dianggap sebagai FGMs. Gambar 4.44b, 4.44c dan 4.44d menunjukkan sebuah plot kontur perambatan temperatur FGMs geometri rumit variasi eksponensial dengan jumlah nodal masing-masing 828, 1065 dan 1379. Dari gambar tersebut, terlihat sebuah perambatan panas yang terjadi sesuai dengan kondisi batas yang diberikan Gambar 3.4 dengan pemberian kondisi batas bagian luar bernilai $T = 50^{\circ}C$, sedangkan bagian dalam $T = 0^{\circ}C$. Dan pola perambatannya terdegradasi ke arah berlawanan dari sumbu koordinat x_1 .

Setelah diketahui pola perambatan temperatur yang terjadi pada geometri rumit dianggap FGMs variasi eksponensial. Selanjutnya, dari pola perambatan temperatur yang didapat, untuk FGMs geometri rumit variasi eksponensial tidak didapatkan solusi analitik. Sehingga hasil yang didapat, nantinya akan dibandingkan dengan metode yang sama dengan memperbanyak jumlah nodal. Seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 4.44a, menunjukkan sebuah plot kontur FGMs geometri rumit variasi eksponensial dengan jumlah nodal 6945.

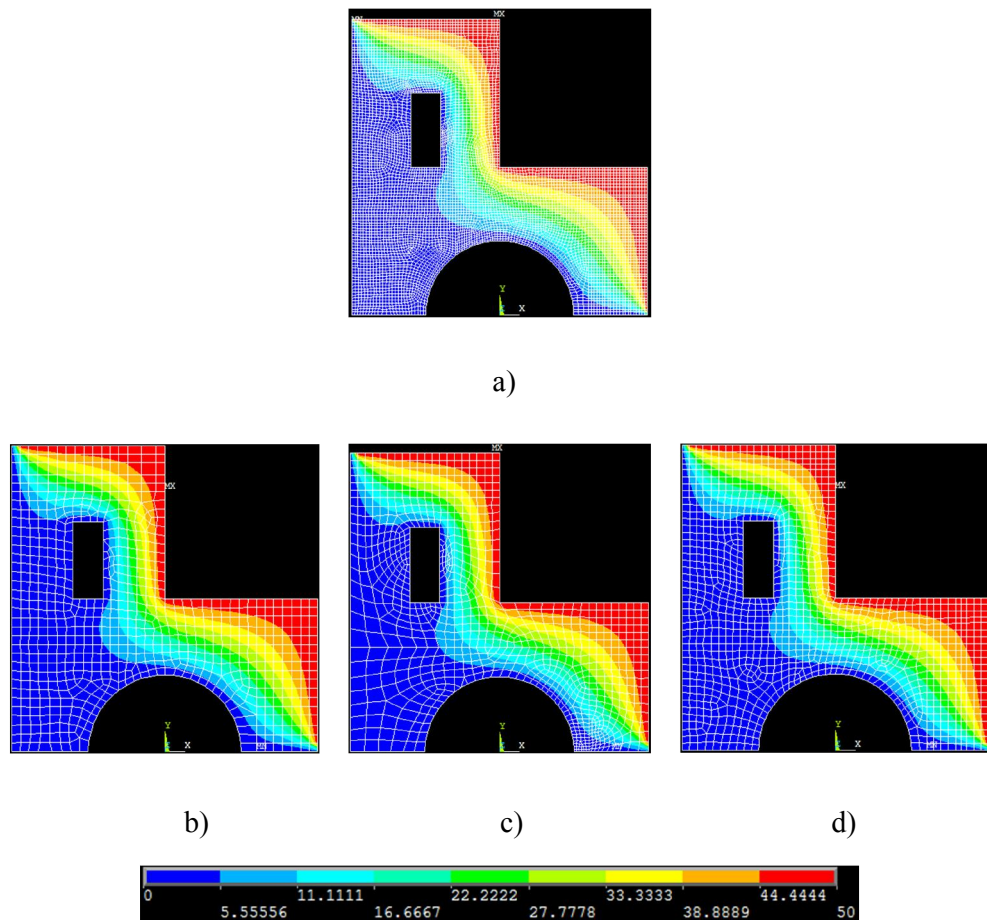
Kemudian untuk menganalisis konduksi panas pada geometri rumit dianggap FGMs variasi eksponensial, pertama-tama ditinjau dari variasi jumlah nodal yang diberikan. Dari variasi jumlah nodal yang diberikan, didapatkan sebuah variasi nilai temperatur. Dalam Gambar 4.44b, 4.44c dan 4.44d yang diperjelas hasilnya oleh Tabel 4.18 dan nilai temperatur yang diambil hanya pada kondisi akhir, karena pada kondisi tersebut perambatan temperatur dalam kondisi steady. Hasil yang diperoleh dari ketiga variasi yang diberikan, pada jumlah nodal

1379 memiliki nilai temperatur yang mendekati variasi jumlah nodal 6945 pada koordinat (-0,03,0,17) jika dibandingkan dengan yang lain 828 dan 1065 yakni pada titik koordinat yang sama. Sedangkan pada titik koordinat (-0,03,0,07) nilai temperatur pada variasi jumlah nodal 1379 lebih rendah jika dibandingkan dengan kedua variasi nodal yang diberikan 828 dan 1065. Dan yang terakhir pada titik koordinat (0,06,0,07) untuk variasi jumlah nodal 1329 memiliki nilai yang paling tinggi jika dibandingkan dengan kedua variasi nodal tersebut, bahkan nilai temperatur pada variasi jumlah nodal tersebut lebih tinggi dari variasi jumlah nodal 6945.

Pada titik koordinat (-0,03,0,17) untuk variasi jumlah nodal 1329 memiliki nilai temperatur $T = 32,4481 \text{ }^{\circ}\text{C}$, hasilnya lebih tinggi dibanding dengan variasi jumlah nodal 828 dan 1065 pada titik koordinat yang sama masing-masing sebesar $T = 32,2981 \text{ }^{\circ}\text{C}$ dan $T = 32,4035 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Hasil dari variasi nodal 1329 mendekati hasil yang diperoleh dari variasi jumlah nodal 6945 yang memiliki nilai temperatur $T = 32,5000 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Pada titik koordinat (-0,03,0,07) untuk variasi jumlah nodal 1329 memiliki nilai temperatur $T = 7,93009 \text{ }^{\circ}\text{C}$, hasilnya lebih rendah dibanding dengan variasi jumlah nodal 828 dan 1065 pada titik koordinat yang sama masing-masing sebesar $T = 7,93352 \text{ }^{\circ}\text{C}$ dan $T = 7,96984 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Sedangkan hasilnya masih lebih tinggi jika dibandingkan dengan hasil yang diperoleh dari variasi jumlah nodal 6945 sebesar $T = 7,92284 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Pada titik koordinat (0,06,0,07) untuk variasi jumlah nodal 1329 memiliki nilai temperatur $T = 35,8933 \text{ }^{\circ}\text{C}$, hasilnya lebih tinggi dibanding dengan semua variasi jumlah nodal 828, 1065 dan 6945 pada titik koordinat yang sama masing-masing sebesar $T = 35,8913 \text{ }^{\circ}\text{C}$, $T = 35,8878 \text{ }^{\circ}\text{C}$ dan $T = 35,8896 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Dari semua hasil yang diperoleh tersebut jika ditinjau dari variasi jumlah nodal yang diberikan, hasil tersebut sudah sesuai dengan teori yang ada dalam literatur. Dalam sebuah teori semakin banyak variasi nodal yang diberikan, semakin meningkat pula nilai temperatur yang didapat. Namun teori tersebut tidak berlaku untuk kondisi batas awal yang diberikan dalam penelitian ini.

Selanjutnya, setelah ditinjau dari persebaran nodal yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS, kemudian tinjauan performa didapat dari waktu proses

pengerjaan yang dilakukan oleh perangkat lunak tersebut terhadap geometri rumit dianggap FGMs variasi polinomial sehingga didapatkan nilai temperatur antar variasi jumlah nodal yang diberikan. Hasilnya seperti yang ditunjukkan oleh Tabel 4.19, yaitu masing-masing sebesar 28, 31, 35 dan 128 pada jumlah nodal masing-masing 828, 1065, 1329 dan 6945. Dari hasil yang ditunjukkan tersebut, terlihat bahwa semakin banyak jumlah nodal yang diberikan semakin lama waktu proses pengerjaan. Sebaliknya semakin sedikit jumlah nodal yang diberikan, semakin cepat waktu proses pengerjaannya. Akan tetapi jika dikaitkan dengan nilai temperatur rata-rata pada semua koordinat yang ditunjukkan, pada nilai nodal 1329 didapatkan nilai temperatur rata-rata mendekati nilai variasi nodal 6945 jika dibandingkan dengan kedua variasi nodal tersebut. Sedangkan untuk variasi jumlah nodal 828, didapatkan nilai rata-rata temperatur rendah dari semua variasi jumlah nodal yang ditunjukkan.



Gambar 4.44 Plot kontur dari temperatur dari FGMs geometri rumit variasi eksponensial dengan jumlah nodal a) 6945, b) 828, c) 1065 dan d) 1329

Tabel 4.18 Perbandingan temperatur pada titik koordinat x_1 yang sama dengan jumlah nodal berbeda

Waktu	Jumlah nodal	Temperatur $^{\circ}C$		
		Koordinat (-0,03,0,17)	Koordinat (-0,03,0,07)	Koordinat (0,06,0,07)
0.128	828	32.2981	7.93352	35.8913
	1065	32.4035	7.96984	35.8878
	1329	32.4481	7.93009	35.8933
	6945	32.5000	7.92284	35.8896

Tabel 4.19 Perbandingan jumlah nodal terhadap waktu proses pengerjaan (s)

Jumlah Nodal	Waktu proses pengerjaan (s)
828	28
1065	31
1329	35
6945	128

4.4.3 FGMs Geometri Rumit Variasi Trigonometri

Selanjutnya, untuk kasus yang terakhir yaitu tentang konduksi panas pada geometri rumit variasi trigonometri dianggap sebagai FGMs. Gambar 4.45b, 4.45c dan 4.45d menunjukkan sebuah plot kontur perambatan temperatur FGMs geometri rumit variasi trigonometri dengan jumlah nodal masing-masing 828, 1065 dan 1379. Dari gambar tersebut, terlihat sebuah perambatan panas yang terjadi sesuai dengan kondisi batas yang diberikan Gambar 3.4 dengan pemberian kondisi batas bagian luar bernilai $T = 50^{\circ}C$, sedangkan bagian dalam $T = 0^{\circ}C$. Dan pola perambatannya terdegradasi ke arah berlawanan dari sumbu koordinat x_1 .

Setelah diketahui pola perambatan temperatur yang terjadi pada geometri rumit dianggap FGMs variasi trigonometri. Selanjutnya, dari pola perambatan temperatur yang didapat, untuk FGMs geometri rumit variasi trigonometri tidak didapatkan solusi analitik. Sehingga hasil yang didapat, nantinya akan dibandingkan dengan metode yang sama dengan memperbanyak jumlah nodal. Seperti yang ditunjukkan oleh Gambar 4.45a, menunjukkan sebuah plot kontur FGMs geometri rumit variasi trigonometri dengan jumlah nodal 6945.

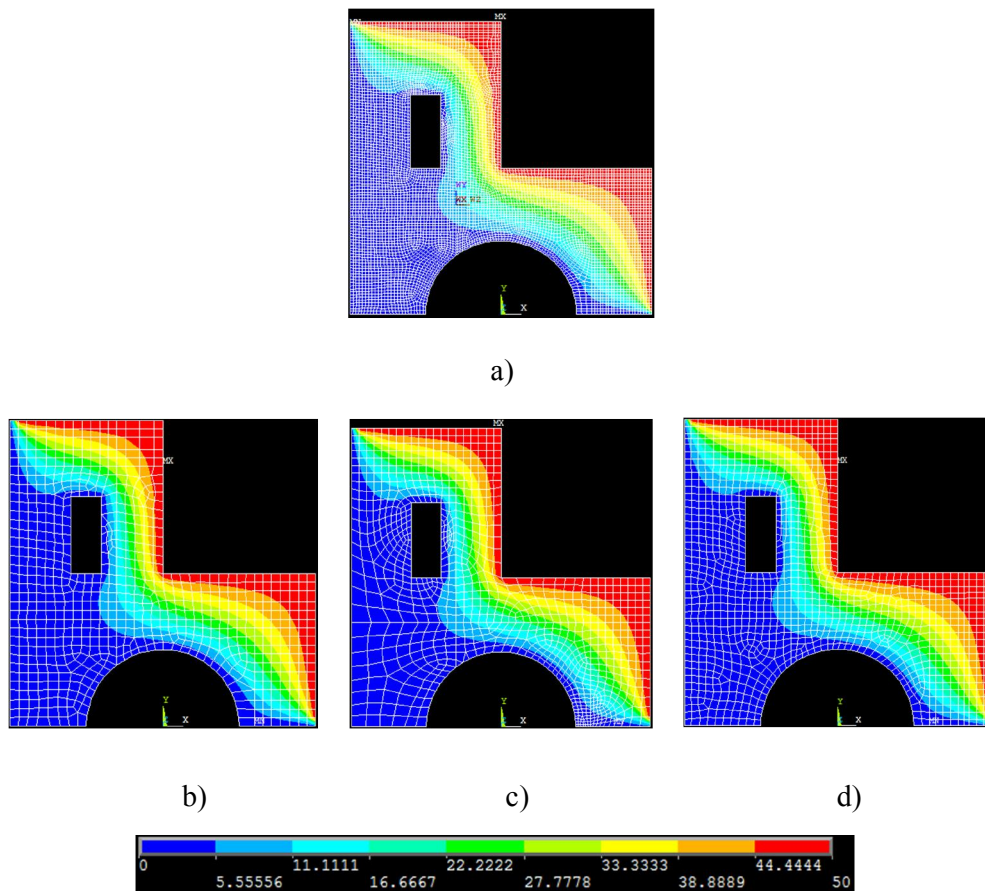
Kemudian untuk menganalisis konduksi panas pada geometri rumit dianggap FGMs variasi trigonometri, pertama-tama ditinjau dari variasi jumlah nodal yang diberikan. Dari variasi jumlah nodal yang diberikan, didapatkan sebuah variasi nilai temperatur. Dalam Gambar 4.45b, 4.45c dan 4.45d yang diperjelas hasilnya oleh Tabel 4.20 dan nilai temperatur yang diambil hanya pada kondisi akhir, karena pada kondisi tersebut perambatan temperatur dalam kondisi steady. Hasil yang diperoleh dari ketiga variasi yang diberikan, pada jumlah nodal

1379 memiliki nilai temperatur yang mendekati variasi jumlah nodal 6945 pada koordinat (-0,03,0,17) jika dibandingkan dengan yang lain 828 dan 1065 yakni pada titik koordinat yang sama. Sedangkan pada titik koordinat (-0,03,0,07) nilai temperatur pada variasi jumlah nodal 1379 lebih rendah jika dibandingkan dengan kedua variasi nodal yang diberikan 828 dan 1065. Dan yang terakhir pada titik koordinat (0,06,0,07) untuk variasi jumlah nodal 1329 memiliki nilai yang paling tinggi jika dibandingkan dengan kedua variasi nodal tersebut, bahkan nilai temperatur pada variasi jumlah nodal tersebut lebih tinggi dari variasi jumlah nodal 6945.

Pada titik koordinat (-0,03,0,17) untuk variasi jumlah nodal 1329 memiliki nilai temperatur $T = 32,2404$ °C, hasilnya lebih tinggi dibanding dengan variasi jumlah nodal 828 dan 1065 pada titik koordinat yang sama masing-masing sebesar $T = 32,0933$ °C dan $T = 32,1966$ °C. Hasil dari variasi nodal 1329 mendekati hasil yang diperoleh dari variasi jumlah nodal 6945 yang memiliki nilai temperatur $T = 32,2925$ °C. Pada titik koordinat (-0,03,0,07) untuk variasi jumlah nodal 1329 memiliki nilai temperatur $T = 7,75118$ °C, hasilnya lebih rendah dibanding dengan variasi jumlah nodal 828 dan 1065 pada titik koordinat yang sama masing-masing sebesar $T = 7,75519$ °C dan $T = 7,79035$ °C. Sedangkan hasilnya masih lebih tinggi jika dibandingkan dengan hasil yang diperoleh dari variasi jumlah nodal 6945 sebesar $T = 7,74349$ °C. Pada titik koordinat (0,06,0,07) untuk variasi jumlah nodal 1329 memiliki nilai temperatur $T = 35,6473$ °C, hasilnya lebih tinggi dibanding dengan semua variasi jumlah nodal 828, 1065 dan 6945 pada titik koordinat yang sama masing-masing sebesar $T = 35,6461$ °C, $T = 35,6428$ °C dan $T = 35,6436$ °C. Dari semua hasil yang diperoleh tersebut jika ditinjau dari variasi jumlah nodal yang diberikan, hasil tersebut sudah sesuai dengan teori yang ada dalam literatur. Dalam sebuah teori semakin banyak variasi nodal yang diberikan, semakin meningkat pula nilai temperatur yang didapat. Namun teori tersebut tidak berlaku untuk kondisi batas awal yang diberikan dalam penelitian ini.

Selanjutnya, setelah ditinjau dari persebaran nodal yang dilakukan oleh perangkat lunak ANSYS, kemudian tinjauan performa didapat dari waktu proses

pengerjaan yang dilakukan oleh perangkat lunak tersebut terhadap geometri rumit dianggap FGMs variasi trigonometri sehingga didapatkan nilai temperatur antar variasi jumlah nodal yang diberikan. Hasilnya seperti yang ditunjukkan oleh Tabel 4.21, yaitu masing-masing sebesar 28, 31, 35 dan 128 pada jumlah nodal masing-masing 828, 1065, 1329 dan 6945. Dari hasil yang ditunjukkan tersebut, terlihat bahwa semakin banyak jumlah nodal yang diberikan semakin lama waktu proses pengerjaan. Sebaliknya semakin sedikit jumlah nodal yang diberikan, semakin cepat waktu proses pengerjaannya. Akan tetapi jika dikaitkan dengan nilai temperatur rata-rata pada semua koordinat yang ditunjukkan, pada nilai nodal 1329 didapatkan nilai temperatur rata-rata mendekati nilai variasi nodal 6945 jika dibandingkan dengan kedua variasi nodal tersebut. Sedangkan untuk variasi jumlah nodal 828, didapatkan nilai rata-rata temperatur rendah dari semua variasi jumlah nodal yang ditunjukkan.



Gambar 4.45 Plot kontur dari temperatur dari FGMs geometri rumit variasi trigonometri dengan jumlah nodal a) 6945, b) 828, c) 1065 dan d) 1329

Tabel 4.20 Perbandingan temperatur pada titik koordinat x_1 yang sama dengan jumlah nodal berbeda

Waktu	Jumlah nodal	Temperatur $^{\circ}C$		
		Koordinat (-0,03,0,17)	Koordinat (-0,03,0,07)	Koordinat (0,06,0,07)
0.128	828	32.0933	7.75519	35.6461
	1065	32.1966	7.79035	35.6428
	1329	32.2404	7.75118	35.6473
	6945	32.2925	7.74349	35.6436

Tabel 4.21 Perbandingan jumlah nodal terhadap waktu proses pengerjaan (s)

Jumlah Nodal	Waktu proses pengerjaan (s)
828	28
1065	31
1329	35
6945	128

BAB 5

Kesimpulan dan Saran

5.1 Kesimpulan

Setelah dilakukan percobaan ke beberapa contoh geometri dua dimensi mulai dari silinder berlubang, persegi dan geometri rumit, dengan variasi sifat konduksi panas FGMs yang diberikan kuadratik, eksponensial dan trigonometri, dihasilkan sebuah kesimpulan bahwa FEM adalah sebuah metode numerik yang sangat disarankan untuk digunakan menganalisa konduksi panas dua dimensi pada FGMs. Jika ditinjau dari variasi FGMs yang digunakan untuk permasalahan konduksi panas kuadratik, eksponensial dan trigonometri, pada variasi trigonometri dihasilkan hasil yang paling baik jika dibandingkan dengan kuadratik dan eksponensial. Karena konduksi panas yang dihasilkan sangat baik pada variasi trigonometri, sehingga menghasilkan nilai temperatur yang rendah jika dibandingkan dengan variasi konduksi panas yang lain tersebut. Misalkan pada geometri silinder berlubang, nilai temperatur rata-rata yang didapat sebesar $T = 30,3447 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Kemudian pada geometri persegi sebesar $T = 46,0835 \text{ }^{\circ}\text{C}$. Dan yang terakhir pada geometri rumit sebesar $T = 25,2129 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Kemudian, jika ditinjau dari performa yang diperoleh menggunakan FEM untuk menganalisis konduktifitas panas dua dimensi pada FGMs sangat baik. Terlihat dari hasil yang diperoleh dari beberapa contoh variasi geometri dua dimensi yang sudah ditampilkan, terutama apabila dengan menambahkan jumlah nodal pada geometri yang sedang diteliti. Meskipun dengan waktu pengerjaan yang lebih lama dibandingkan dengan jumlah nodal yang sedikit, namun menghasilkan hasil yang sangat baik. Misalkan pada geometri silinder berlubang variasi kuadratik dengan jumlah nodal 1379, didapatkan waktu pengerjaan selama 434,6 s. Pada geometri silinder berlubang variasi eksponensial, waktu pengerjaan selama 435 s. Dan pada geometri silinder berlubang variasi trigonometri, waktu pengerjaan selama 444 s. Kemudian pada geometri persegi, didapatkan waktu pengerjaan yang rata-rata sama yakni selama 37 s. Dan yang terakhir, pada geometri rumit didapatkan waktu pengerjaan yang rata-rata sama juga yakni selama 35 s.

Dan yang terakhir, jika ditinjau dari efisiensi yang diperoleh menggunakan FEM untuk menganalisis konduktifitas panas dua dimensi pada FGMs sangat baik. Terlihat dari hasil yang diperoleh dari contoh geometri dua dimensi silinder berlubang variasi kuadratik yang sudah ditampilkan, hasil dari FEM sangat mendekati hasil dari metode analitik, terutama apabila dengan menambahkan jumlah nodal pada geometri yang sedang diteliti. Misalkan pada geometri silinder berlubang variasi kuadratik dengan jumlah nodal 761, didapatkan rata-rata nilai error sebesar 0,0019. Kemudian pada geometri silinder berlubang variasi kuadratik dengan jumlah nodal 883, rata-rata nilai error sebesar 0,0013. Dan yang terakhir pada geometri silinder berlubang variasi kuadratik dengan jumlah nodal 1379, rata-rata nilai error sebesar 0,0012.

5.2 Saran

Dari penelitian yang telah dilakukan, diharapkan dapat memberikan pertimbangan pilihan metode analisis konduktivitas panas. Dan diharapkan di kemudian hari ada penelitian lebih lanjut tentang analisis konduktivitas panas pada FGMs dengan FEM guna memperbaiki mutu produk bagi sektor industri dengan memperbanyak jumlah mesh, terkait pemilihan material untuk meningkatkan produktivitas sekaligus menekan biaya produksi.

DAFTAR PUSTAKA

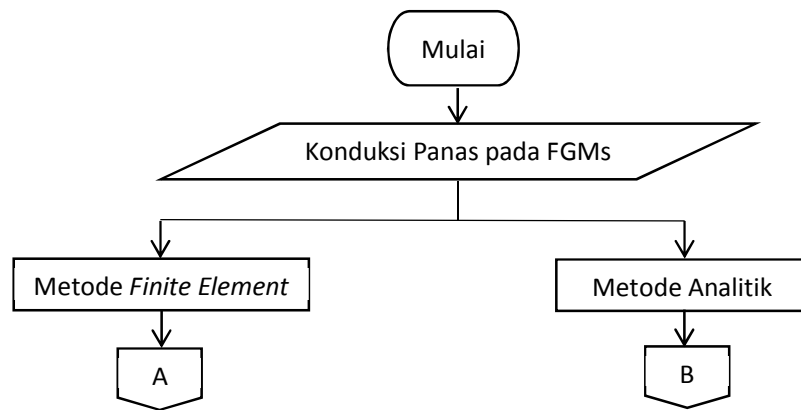
- Abreu, A. I., Canelas, A. dan Mansur, W. J., (2013), "A CQM-Based BEM for Transient Heat Conduction Problems in Homogeneous Materials and FGMs", *Applied Mathematical Modelling*, 37, hal. 776-792.
- Asgari, M. dan Akhlaghi, M., (2009), "Transient Heat Conduction in Two-Dimensional Functionally Graded Hollow Cylinder with Finite Length", *Heat Mass Transfer*, 45, hal. 1383-1392.
- Babaei, M. H. dan Chen, Z., (2010), "Transient Hyperbolic Heat Conduction in a Functionally Graded Hollow Cylinder", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 24, hal. 325-330.
- Belmonte M., dkk., (2009), "Continuous in situ functionally graded silicon nitride materials", *Acta Materialia* 57, hal. 2607-2612.
- Birman, V., (1995), "Stability of Functionally Graded Hybrid Composite Plates", *Composites Eng.*, 5, hal. 913-921.
- Birman, V., (1997), "Stability of Functionally Graded Shape Memory Alloy Sandwich Panels", *Smart Mater. Struct.*, 6, hal. 278-286.
- Bruch, J. C. JR. dan Zyzoloski, G., (1973), "A Finite Element Weighted Residual Solution to One-Dimensional Field Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 6, hal. 577-585.
- Bruch, J. C. JR. dan Zyzoloski, G., (1974), "Transient Two-Dimensional Heat Conduction Problems Solved by The Finite Element Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8, hal. 481-494.
- Cannillo X., dkk., (2007), "Prediction of the elastic properties profile in glass-alumina functionally graded materials" *Journal of the European Ceramic Society* 27, hal. 2393-2400.
- Carl De Boor, (1972), "On Calculating with B-splines", *Journal of Approximation Theory*, 6, hal. 50-62.
- Chen, B., dan Tong, L., (2004), "Sensitivity Analysis of Heat Conduction for Functionally Graded Materials", *Mater. Des.*, 25, hal. 663-672.
- Chen, J., Liu, Z., dan Zou, Z., (2002), "Transient Internal Crack Problem for a Nonhomogeneous Orthotropic Strip Mode I", *Int. J. Eng. Sci.*, 40, hal. 1761-1774.
- Daneshjou, K. dkk., (2015), "Transient Thermal Analysis in 2D Orthotropic FG Hollow Cylinder with Heat Source", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 89, hal. 977-984.

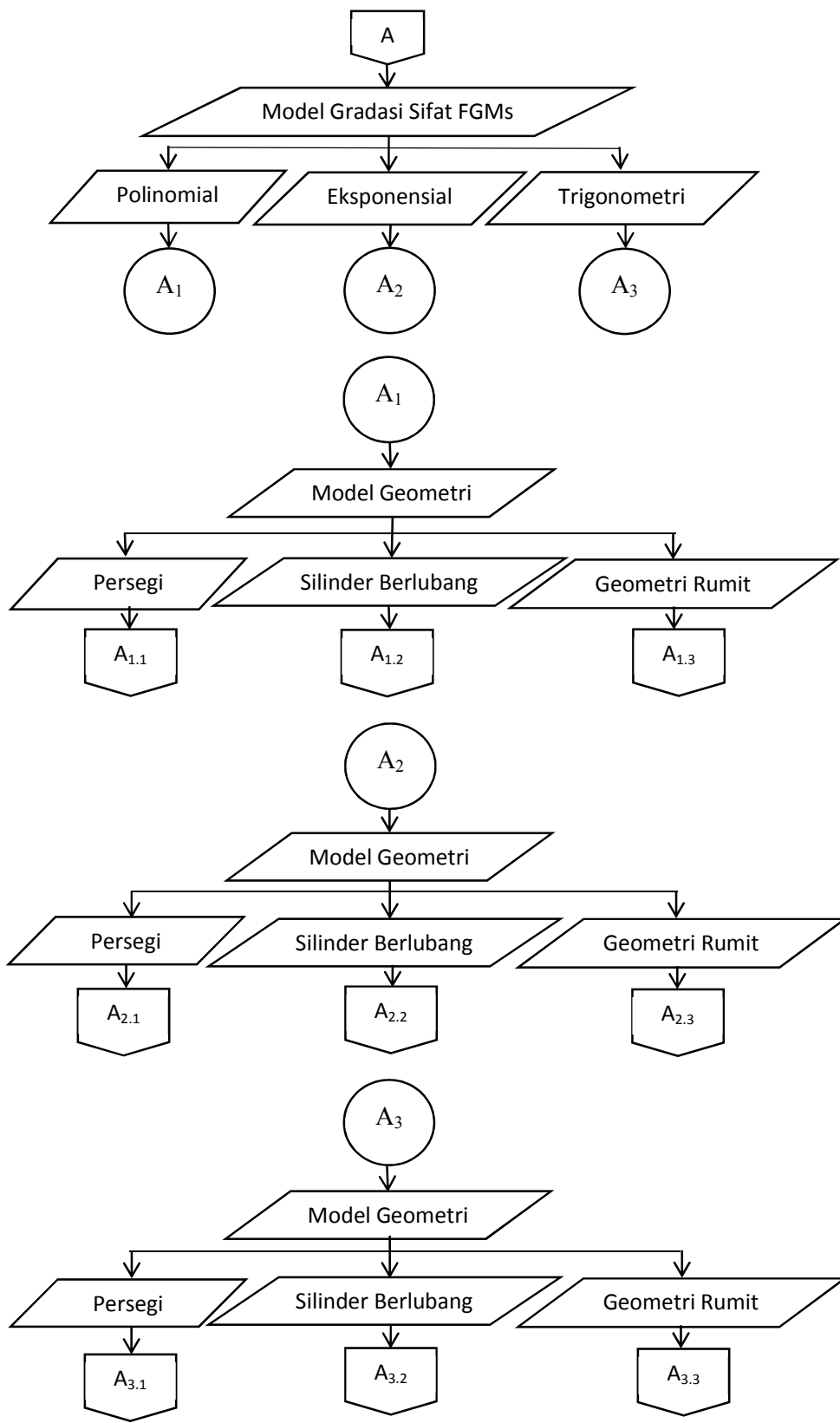
- Daneshjou, K. dkk, (2016), “Non-Fourier Heat Conduction Analysis of Infinite 2D Orthotropic FG Hollow Cylinders Subjected to Time-Dependent Heat Source”, *Applied Thermal Engineering*, 98, hal. 582-590.
- Duquea N., Melgarejoa, Z., dan Suarez O., (2005), “Functionally graded aluminum matrix composites produced by centrifugal casting”, *Materials Characterization* 55, hal. 167 – 171.
- EL-Wazery, M. S. dan EL-Desouky, A. R., (2015), “A Review on Functionally Graded Ceramic-Metal Materials”, *Menoufiya University, Shebin ElKom, EGYPT*, hal. 1369-1376.
- Gibson, Ian, W. Rosen, D, dan Stucker, Brent, (2010), “Additive Manufacturing Technologies”, *Springer Science+Business Media, New York, USA*.
- Golbahar, H. M. R., Egtesad, M. dan Malekzadeh, P., (2008), “Coupled DQ–FE Methods for Two Dimensional Transient Heat Transfer Analysis of Functionally Graded Material”, *Energy Conversion and Management*, 49, hal. 995-1001.
- He Z., Ma J., dan Tan G., (2009), *J All and Comp*.54, hal. 459.
- Hosseini, S. M., Akhlaghi, M. dan Shakeri, M., (2007), “Transient Heat Conduction in Functionally Graded Thick Hollow Cylinders by Analytical Method”, *Heat Mass Transfer*, 43, hal. 669-675.
- Jin, Z.-H., (2002), “An Asymptotic Solution of Temperature Field in a Strip of a Functionally Graded Material”, *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, 29, hal. 887–895.
- Kaysser, W. A., dan Ilschner, B., (1995), “FGM Research Activities in Europe”, *MRS Bull.*,20, hal. 22–26.
- Malekzadeh, P., Haghighi, Golbahar, M. R. dan Heydarpour, Y., (2013), “Heat Transfer Analysis of Functionally Graded Hollow Cylinders Subjected to an Axisymmetric Moving Boundary Heat Flux”, *Numerical Heat Transfer*, 61, hal. 614-632.
- Mas Irfan. P.H, dkk, (2014), “Meshless Local B-Spline-FD Method and its Application for 2D Heat Conduction Problems with Spatially Varying Thermal Conductivity”, *Applied Mathematics and Computation*, 242, hal. 236–254.
- Moaveni, Saeed, (1999), “FINITE ELEMENT ANALYSIS. Theory and Application with ANSYS”, *PRENTICE HALL, USA*.
- Ochia, Y., (2004), “Two-Dimensional Steady Heat Conduction in Functionally Gradient Materials by Triple-Reciprocity Boundary Element Method”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28, hal. 1445-1453.
- Ootao, Y., dan Tanigawa, Y., (2004), “Transient Thermoelastic Problem of Functionally Graded Thick Strip Due to Nonuniform Heat Supply”, *Compos. Struct.*, 63, hal. 139–146.

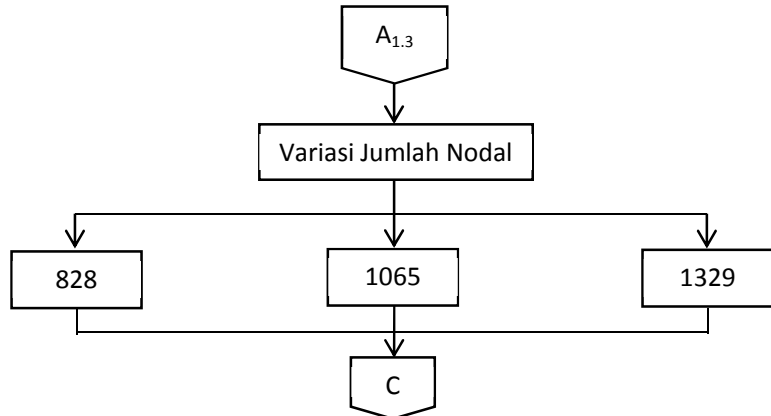
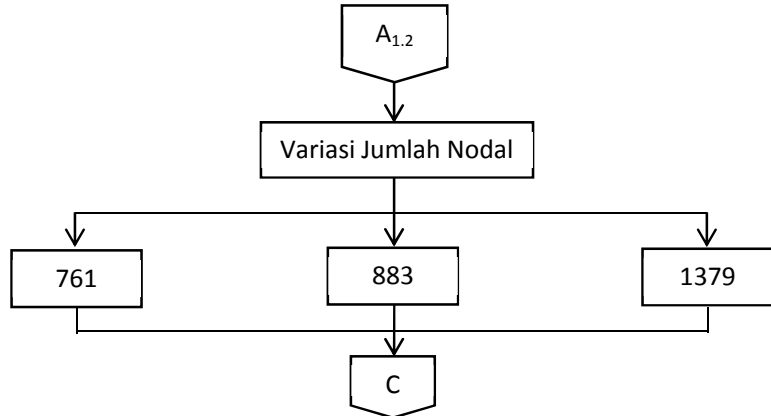
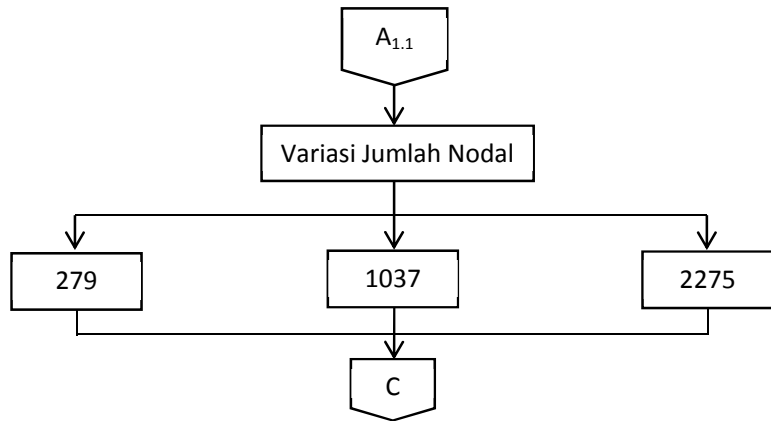
- Santos, H. dkk, (2008), "A Semi-Analytical Finite Element Model for The Analysis of Cylindrical Shells Made of Functionally Graded Materials under Thermal Shock", *Composite Structures*, 86, hal. 10-21.
- Sarra, S. A., (2006), "Integrated Multiquadric Radial Basis Function Approximation Methods", *Computers and Mathematics with Applications*, 51, hal. 1283-1296.
- Shahrjerdi A., dkk, (2011), "Fabrication of functionally graded HydroxyapatiteTitanium by applying optimal sintering procedure and powder metallurgy", *International Journal of the Physical Sciences*, Vol. 6 (9), hal. 2258-2267.
- P. Shanmugavel, dkk, (2012), "An overview of fracture analysis in functionally graded materials," *European Journal of Scientific Research*, vol.68 No.3, hal. 412-439.
- Sladek, J., Sladek, V., dan Zhang, Ch., (2003), "Transient Heat Conduction Analysis in Functionally Graded Materials by The Meshless Local Boundary Integral Equation Method", *Comput. Mater. Sci.*, 28, hal. 494–504.
- Sutradhar, A., dan Paulino, G. H., (2004), "The Simple Boundary Element Method for Transient Heat Conduction in Functionally Graded Materials", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 193, hal. 4511–4539.
- Sutradhar, A., Paulino, G. H., dan Gray, L. J., (2005), "On Hypersingular Surface Integral in the Symmetric Galerkin Boundary Element Method: Application to Heat Conduction in Exponentially Graded Materials", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 62, hal. 122–157.
- Tanigawa, Y., Matsumoto, M. dan Akai, T., (1997), "Optimization of Material Composition to Minimize Thermal Stresses in Nonhomogeneous Plate Subjected to Unsteady Heat Supply", *JSME International Journal*, 40, hal. 84-93.
- Torii S., dkk, (2004), *J Trans. Phenomena*, 6, hal. 189.
- Vel, S. S., dan Batra, R. C., (2002), "Exact Solution for Thermoelastic Deformations of Functionally Graded Thick Rectangular Plates", *AIAA J.*, 40, hal. 1421–1433.
- Wang, Bao-Lin dan Mai, Yiu-Wing, (2005), "Transient One-Dimensional Heat Conduction Problems Solved by Finite Element", *International Journal of Mechanical Sciences*, 47, hal. 303–317.
- Wang, Bao-Lin dan Tian, Zhen-Hui, (2005), "Application of finite element–finite difference method to the determination of transient temperature field in functionally graded materials", *Finite Elements in Analysis and Design*, 41, hal. 335–349.

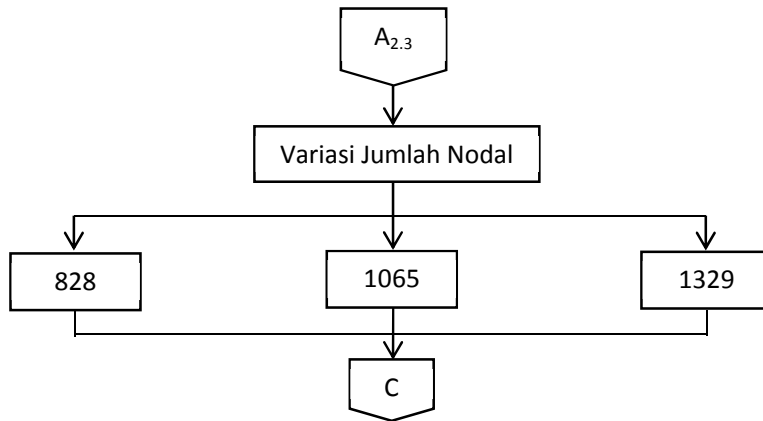
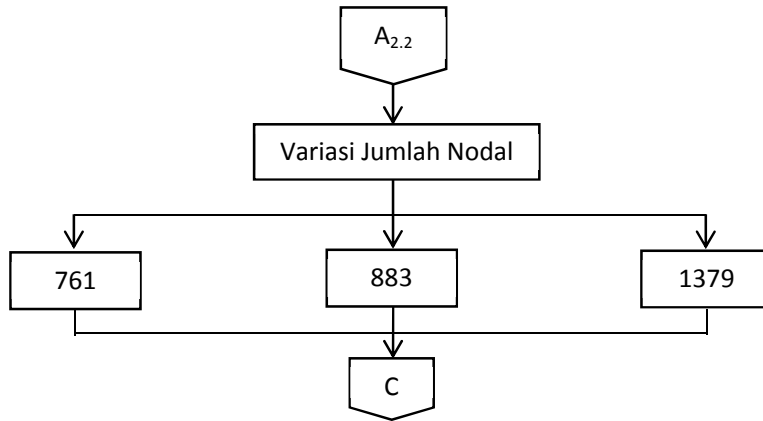
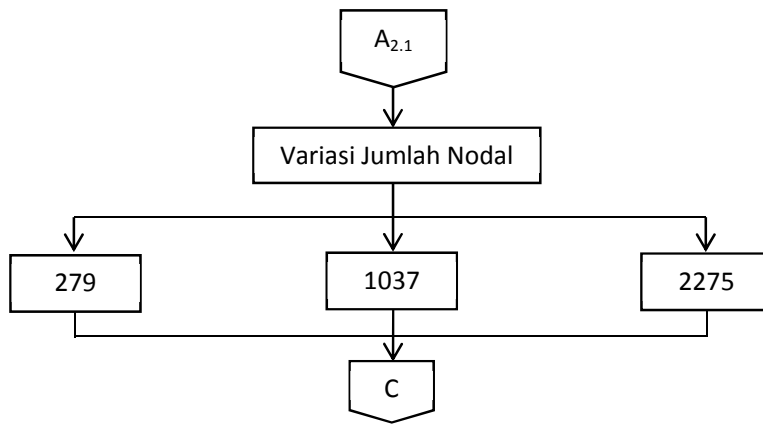
- Wang, H. M., (2013), "An Effective Approach for Transient Thermal Analysis in a Functionally Graded Hollow Cylinder", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 67, hal. 499-505.
- Watanabe Y. dkk, 2005, "Functionally Graded Material Fabricated by a Centrifugal Method from ZK60A Magnesium Alloy", *Materials Transactions*, Vol. 46 (5), hal. 944-949.
- X. Jin, L. dkk, (2009), "Experimental investigation of the mixed-mode crack propagation in ZrO₂/NiCr functionally graded materials," *Engineering Fracture Mechanics*, 76 (12), hal. 1800-1810.
- X.W. Gao, (2006), "A Meshless BEM for Isotropic Heat Conduction Problems with Heat Generation and Spatially Varying Conductivity", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 66, hal. 1411-1431.
- Yao, W. dkk, (2014), "A Precise Integration Boundary Element Method for Solving Transient Heat Conduction Problems", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 78, hal. 883-891.
- Yeo J, Jung Y., dan Choi S., (1998), "Zirconia-Stainless Steel Functionally Graded Material by Tape Casting ", *Journal of the European Ceramic Society* 18, hal. 1281-1285.
- Yin, H. M., Sun, L. Z., dan Paulino, G. H., (2004), "Micromechanics-Based Elastic Model for Functionally Graded Materials with Particle Interactions", *Acta Mater.*, 52, hal. 3535-3543.
- Zhang, H. H., Han, S. Y. dan Fan, L. F., (2017), "Modeling 2D Transient Heat Conduction Problems by The Numerical Manifold Method on Wachspress polygonal elements", *Applied Mathematical Modelling*, , hal. .
- Zhang, X., Zhang, P. dan Zhang, L., (2013), "An Improved Meshless Method with Almost Interpolation Property for Isotropic Heat Conduction Problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37, hal. 850-859.

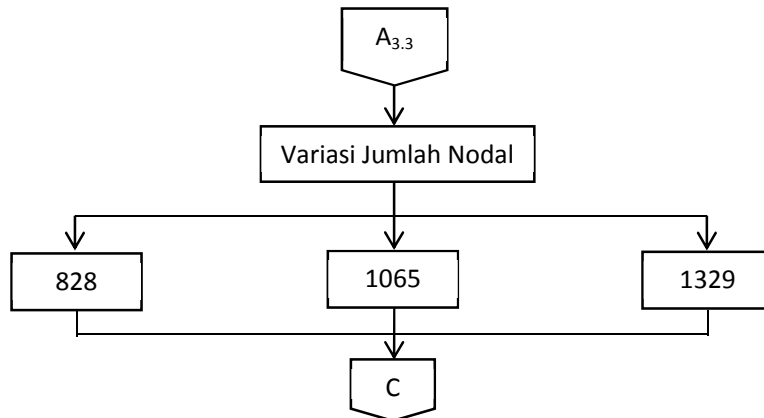
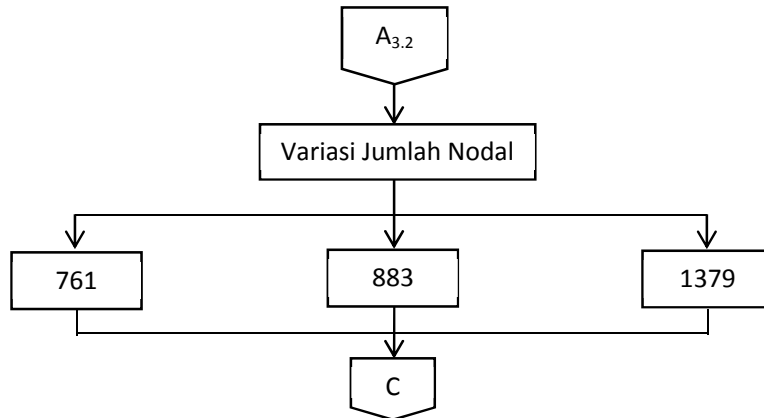
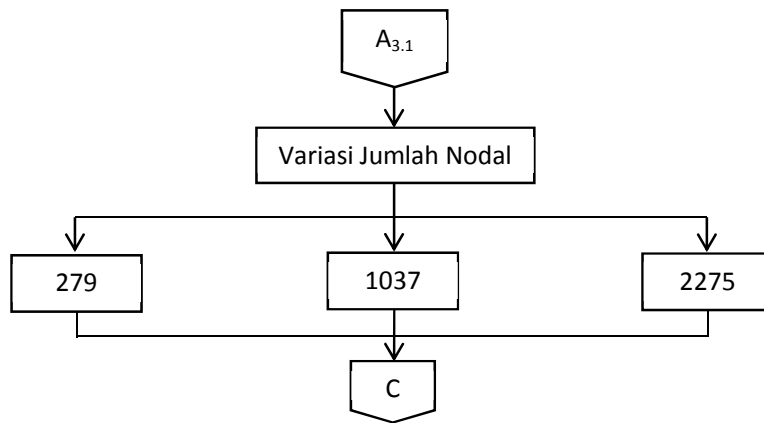
Lampiran

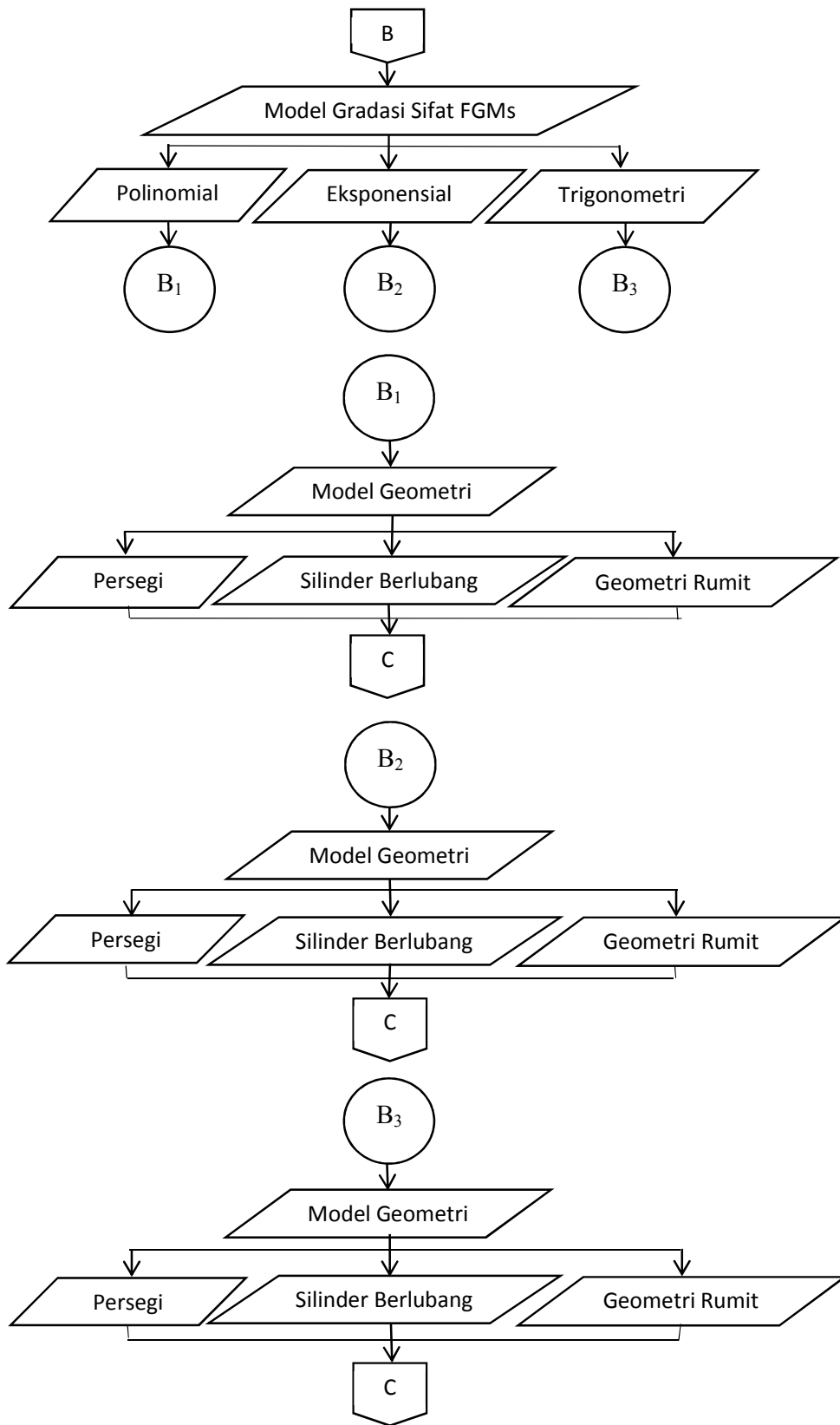


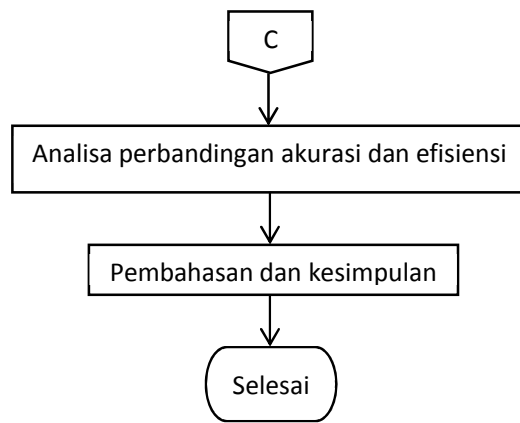












Kodingang FGMs persegi dengan jumlah nodal 279

```
/CLEAR,NOSTART                                wpof,0.1000000,,
/NOPR                                           wpro,,,90.000000
KEYW,PR_SET,1                                  ASBW, 1
KEYW,PR_STRUC,0                                ASBW, 1
KEYW,PR_THERM,1                                wpof,,,0.1000000
KEYW,PR_FLUID,0                                wpof,,,0.1000000
KEYW,PR_ELMAG,0                                ASBW, 2
KEYW,MAGNOD,0                                  ASBW, 2
KEYW,MAGEDG,0                                  wpof,,,0.1000000
KEYW,MAGHFE,0                                  wpof,,,0.1000000
KEYW,MAGELC,0                                  ASBW, 1
KEYW,PR_MULTI,0                                ASBW, 1
KEYW,LSDYNA,0                                  wpof,,,0.1000000
KEYW,PR_DYNA,0                                wpof,,,0.1000000
/GO
!*                                              ASBW, 2
!*
/PREP7                                          wpof,,,0.1000000
!*
ET,1,PLANE55                                   ASBW, 1
MPTEMP,1,100                                  wpof,,,0.1000000
K, ,,,                                         ASBW, 2
K, ,1,,                                         wpof,,,0.1000000
K, ,1,1,,                                       ASBW, 1
K, ,,1,,                                         ASBW, 1
LSTR, 1, 2                                       wpof,,,0.1000000
LSTR, 2, 3                                       wpof,,,0.1000000
LSTR, 3, 4                                       ASBW, 2
LSTR, 4, 1                                       ASBW, 2
FLST,2,4,4                                       wpof,,,0.1000000
FITEM,2,1                                       ASBW, 1
FITEM,2,2                                       wpof,,,0.1000000
FITEM,2,3                                       wpof,,,0.5000000,
FITEM,2,4                                       wpof,0.5000000,
AL,P51X                                           wpro,,, -90.000000
wpstyle,0.025,0.1,-1,1,0.0001,0,2,,5          wpro,,90.000000,
```


ASBW, ALL

MSHAPE,0,2D

MSHKEY,1

AMESH,ALL

NUMCMP,AREA

NUMCMP,LINE

NUMCMP,KP

NUMCMP,ELEM

NUMCMP,NODE

Kodingang FGMs persegi dengan jumlah nodal 1037

```

/CLEAR,NOSTART                                wpof,0.1000000,,
/NOPR                                          wpro,,,90.000000
KEYW,PR_SET,1                                  ASBW, 1
KEYW,PR_STRUC,0                                ASBW, 1
KEYW,PR_THERM,1                                wpof,,,0.1000000
KEYW,PR_FLUID,0                                wpof,,,0.1000000
KEYW,PR_ELMAG,0                                ASBW, 2
KEYW,MAGNOD,0                                  ASBW, 2
KEYW,MAGEDG,0                                  wpof,,,0.1000000
KEYW,MAGHFE,0                                  wpof,,,0.1000000
KEYW,MAGELC,0                                  ASBW, 1
KEYW,PR_MULTI,0                                ASBW, 1
KEYW,LSDYNA,0                                  wpof,,,0.1000000
KEYW,PR_DYNA,0                                wpof,,,0.1000000
/GO
!*                                             ASBW, 2
!*
/PREP7                                         wpof,,,0.1000000
!*
ET,1,PLANE55                                  ASBW, 1
MPTEMP,1,100                                  wpof,,,0.1000000
MPTEMP,2,400                                  ASBW, 2
K, ,,,                                         wpof,,,0.1000000
K, ,1,,                                         wpof,,,0.1000000
K, ,1,1,,                                       ASBW, 1
K, ,,1,,
LSTR, 1, 2                                       wpof,,,0.1000000
LSTR, 2, 3                                       ASBW, 2
LSTR, 3, 4                                       wpof,,,0.1000000
LSTR, 4, 1
FLST,2,4,4                                       ASBW, 1
FITEM,2,1                                         wpof,,,0.1000000
FITEM,2,2                                         wpof,,,0.1000000
FITEM,2,3                                         wpof,,,0.1000000
FITEM,2,4                                         wpof,,0.5000000,
AL,P51X                                          wpro,,, -90.000000
wpstyle,0.025,0.1,-1,1,0.0001,0,2,,5          wpro,,90.000000,

```

ASBW, ALL

MSHAPE,0,2D

MSHKEY,1

AMESH,ALL

AREFINE, ALL, , , 1

NUMCMP,AREA

NUMCMP,LINE

NUMCMP,KP

NUMCMP,ELEM

NUMCMP,NODE

Kodingang FGMs persegi dengan jumlah nodal 2275

```

/CLEAR,NOSTART                                wpof,0.1000000,,
/NOPR                                          wpro,,,90.000000
KEYW,PR_SET,1                                  ASBW, 1
KEYW,PR_STRUC,0                                ASBW, 1
KEYW,PR_THERM,1                                wpof,,,0.1000000
KEYW,PR_FLUID,0                                wpof,,,0.1000000
KEYW,PR_ELMAG,0                                ASBW, 2
KEYW,MAGNOD,0                                  ASBW, 2
KEYW,MAGEDG,0                                  wpof,,,0.1000000
KEYW,MAGHFE,0                                  wpof,,,0.1000000
KEYW,MAGELC,0                                  ASBW, 1
KEYW,PR_MULTI,0                                ASBW, 1
KEYW,LSDYNA,0                                  wpof,,,0.1000000
KEYW,PR_DYNA,0                                wpof,,,0.1000000
/GO
!*                                             ASBW, 2
!*
/PREP7                                         wpof,,,0.1000000
!*
ET,1,PLANE55                                  ASBW, 1
MPTEMP,1,100                                  wpof,,,0.1000000
MPTEMP,2,400                                  ASBW, 2
K, ,,,                                         wpof,,,0.1000000
K, ,1,,                                         wpof,,,0.1000000
K, ,1,1,,                                       ASBW, 1
K, ,,1,,
LSTR, 1, 2                                       wpof,,,0.1000000
LSTR, 2, 3                                       ASBW, 2
LSTR, 3, 4                                       wpof,,,0.1000000
LSTR, 4, 1
FLST,2,4,4                                       ASBW, 1
FITEM,2,1                                         wpof,,,0.1000000
FITEM,2,2                                         wpof,,,0.1000000
FITEM,2,3                                         wpof,,,0.1000000
FITEM,2,4                                         wpof,,0.5000000,
AL,P51X                                           wpro,,, -90.000000
wpstyle,0.025,0.1,-1,1,0.0001,0,2,,5          wpro,,90.000000,

```

ASBW, ALL

MSHAPE,0,2D

MSHKEY,1

AMESH,ALL

AREFINE, ALL, , 2

NUMCMP,AREA

NUMCMP,LINE

NUMCMP,KP

NUMCMP,ELEM

NUMCMP,NODE

Kodingang FGMs silinder berlubang dengan jumlah nodal 761

```

/CLEAR,NOSTART
/NOPR
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,0
KEYW,PR_THERM,1
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_ELMAG,0
KEYW,MAGNOD,0
KEYW,MAGEDG,0
KEYW,MAGHFE,0
KEYW,MAGELC,0
KEYW,PR_MULTI,0
KEYW,LSDYNA,0
KEYW,PR_DYNA,0
/GO
!*
!*
/PREP7
!*
ET,1,PLANE55

MPTEMP,1,100

K, ,,,
K, ,-10,,
K, ,10,,
K, ,,10,,
K, ,-10,,
K, ,-5,,
K, ,5,,
K, ,,5,,
K, ,-5,,

LARC,2,3,1,10,
LARC,3,4,1,10,
LARC,4,5,1,10,
LARC,5,2,1,10,
LARC,6,7,1,5,
LARC,7,8,1,5,
LARC,8,9,1,5,
LARC,9,6,1,5,

FLST,2,8,4
FITEM,2,1
FITEM,2,2
FITEM,2,3
FITEM,2,4
FITEM,2,5
FITEM,2,6
FITEM,2,7
FITEM,2,8

AL,P51X

wpstyle,0.025,0.1,-1,1,0.0001,0,2,,5

wpof,6.0000000,,
wpro,,,90.000000

ASBW, 1

wpof,,,2.0000000

ASBW, 2

wpof,,, -14.0000000

ASBW, 3

wpof,,, -2.0000000

ASBW, 2

wpro,,, -90.000000

wpro,,90.000000,

ASBW, ALL

wpro,, -90.000000,

wpof,8.0000000,,

wpof,,6.0000000,

wpro,,90.000000,

```

```
ASBW, 15
wpof,,,-2.0000000
ASBW, 1
wpof,,14.0000000
ASBW, 14
wpof,,2.0000000
ASBW, 1
wpro,,-90.000000,
wpro,,90.000000
ASBW, ALL
MSHAPE,0,2D
MSHKEY,0
AMESH,ALL
NUMCMP,AREA
NUMCMP,LINE
NUMCMP,KP
NUMCMP,ELEM
NUMCMP,NODE
```

Kodingang FGMs silinder berlubang dengan jumlah nodal 883

```
/CLEAR,NOSTART
/NOPR
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,0
KEYW,PR_THERM,1
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_ELMAG,0
KEYW,MAGNOD,0
KEYW,MAGEDG,0
KEYW,MAGHFE,0
KEYW,MAGELC,0
KEYW,PR_MULTI,0
KEYW,LSDYNA,0
KEYW,PR_DYNA,0
/GO
!*
!*
/PREP7
!*
ET,1,PLANE55

MPTEMP,1,100

K, ,,,
K, ,-10,,
K, ,10,,
K, ,,10,,
K, ,-10,,
K, ,-5,,
K, ,5,,
K, ,,5,,
K, ,-5,,

LARC,2,3,1,10,
LARC,3,4,1,10,
LARC,4,5,1,10,
LARC,5,2,1,10,
LARC,6,7,1,5,
LARC,7,8,1,5,
LARC,8,9,1,5,
LARC,9,6,1,5,

FLST,2,8,4
FITEM,2,1
FITEM,2,2
FITEM,2,3
FITEM,2,4
FITEM,2,5
FITEM,2,6
FITEM,2,7
FITEM,2,8

AL,P51X

wpstyle,0.025,0.1,-1,1,0.0001,0,2,,5

wpof,6.0000000,,
wpro,,,90.000000

ASBW, 1

wpof,,,2.0000000

ASBW, 2

wpof,,, -14.0000000

ASBW, 3

wpof,,, -2.0000000

ASBW, 2

wpro,,, -90.000000

wpro,,,90.000000,

ASBW, ALL

wpro,,, -90.000000,

wpof,8.0000000,,

wpof,,6.0000000,

wpro,,,90.000000,
```


ASBW, 15
wpof,,,-2.0000000
ASBW, 1
wpof,,14.0000000
ASBW, 14
wpof,,2.0000000
ASBW, 1
wpro,,-90.000000,
wpro,,90.000000
ASBW, ALL
MSHAPE,0,2D
MSHKEY,0
SMRT,2
AMESH,ALL
NUMCMP,AREA
NUMCMP,LINE
NUMCMP,KP
NUMCMP,ELEM
NUMCMP,NODE

Kodingang FGMs silinder berlubang dengan jumlah nodal 1379

```
/CLEAR,NOSTART
/NOPR
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,0
KEYW,PR_THERM,1
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_ELMAG,0
KEYW,MAGNOD,0
KEYW,MAGEDG,0
KEYW,MAGHFE,0
KEYW,MAGELC,0
KEYW,PR_MULTI,0
KEYW,LSDYNA,0
KEYW,PR_DYNA,0
/GO
!*
!*
/PREP7
!*
ET,1,PLANE55

MPTEMP,1,100

K, ,,,
K, ,, -10,,
K, , 10,,
K, ,, 10,,
K, , -10,,
K, ,, -5,,
K, , 5,,
K, ,, 5,,
K, , -5,,

LARC,2,3,1,10,
LARC,3,4,1,10,
LARC,4,5,1,10,
LARC,5,2,1,10,
LARC,6,7,1,5,
LARC,7,8,1,5,
LARC,8,9,1,5,
LARC,9,6,1,5,

FLST,2,8,4
FITEM,2,1
FITEM,2,2
FITEM,2,3
FITEM,2,4
FITEM,2,5
FITEM,2,6
FITEM,2,7
FITEM,2,8

AL,P51X

wpstyle,0.025,0.1,-1,1,0.0001,0,2,,5

wpof,6.000000,,
wpro,,,90.000000

ASBW, 1

wpof,,,2.000000

ASBW, 2

wpof,,, -14.000000

ASBW, 3

wpof,,, -2.000000

ASBW, 2

wpro,,, -90.000000

wpro,,90.000000,

ASBW, ALL

wpro,, -90.000000,

wpof,8.000000,,

wpof,,6.000000,

wpro,,90.000000,
```

ASBW, 15
wpof,,,-2.0000000
ASBW, 1
wpof,,14.0000000
ASBW, 14
wpof,,2.0000000
ASBW, 1
wpro,,-90.000000,
wpro,,90.000000
ASBW, ALL
MSHAPE,0,2D
MSHKEY,0
SMRT,1
AMESH,ALL
NUMCMP,AREA
NUMCMP,LINE
NUMCMP,KP
NUMCMP,ELEM
NUMCMP,NODE

Kodingang FGMs geometri rumit dengan jumlah nodal 828

/CLEAR,NOSTART	LSTR, 2, 3
	LSTR, 3, 4
/NOPR	LSTR, 4, 5
KEYW,PR_SET,1	LSTR, 5, 6
KEYW,PR_STRUC,0	LSTR, 6, 7
KEYW,PR_THERM,1	LSTR, 7, 8
KEYW,PR_FLUID,0	LSTR, 8, 9
KEYW,PR_ELMAG,0	LSTR, 16, 11
KEYW,MAGNOD,0	LSTR, 11, 12
KEYW,MAGEDG,0	LSTR, 12, 13
KEYW,MAGHFE,0	LSTR, 13, 14
KEYW,MAGELC,0	LSTR, 14, 15
KEYW,PR_MULTI,0	LSTR, 15, 16
KEYW,LSDYNA,0	
KEYW,PR_DYNA,0	FLST,2,15,4
/GO	FITEM,2,3
!*	FITEM,2,4
!*	FITEM,2,5
/PREP7	FITEM,2,6
!*	FITEM,2,7
ET,1,PLANE55	FITEM,2,8
	FITEM,2,9
MPTEMP,1,100	FITEM,2,2
	FITEM,2,1
K, ,,,	FITEM,2,10
K, ,0.05,,	FITEM,2,11
K, ,0.1,,	FITEM,2,12
K, ,0.1,0.1,,	FITEM,2,13
K, ,,0.1,,	FITEM,2,14
K, ,,0.2,,	FITEM,2,15
K, ,-0.1,0.2,,	AL,P51X
K, ,-0.1,,	
K, ,-0.05,,	wpstyle,0.025,0.1,-1,1,0.0001,0,2,,5
K, ,,0.05,,	
	wpof,,0.0700000,
K, ,-0.04,0.1,,	
K, ,-0.04,0.125,,	wpro,90.000000,,
K, ,-0.04,0.150,,	
K, ,-0.06,0.150,,	wpro,,,90.000000
K, ,-0.06,0.125,,	
K, ,-0.06,0.1,,	ASBW, 1
LARC,2,10,1,0.05,	wpof,,,0.1000000
LARC,10,9,1,0.05,	ASBW, 3

wpor,,,-0.0950000

wpor,,,-0.0600000,

wpor,,90.000000,

ASBW, ALL

wpor,,,-0.0900000

ASBW, ALL

MESH,0,2D

MESHKEY,0

SMRT,2

AMESH,ALL

NUMCMP,AREA

NUMCMP,LINE

NUMCMP,KP

NUMCMP,ELEM

NUMCMP,NODE

Kodingang FGMs geometri rumit dengan jumlah nodal 1065

/CLEAR,NOSTART	LSTR, 2, 3
	LSTR, 3, 4
/NOPR	LSTR, 4, 5
KEYW,PR_SET,1	LSTR, 5, 6
KEYW,PR_STRUC,0	LSTR, 6, 7
KEYW,PR_THERM,1	LSTR, 7, 8
KEYW,PR_FLUID,0	LSTR, 8, 9
KEYW,PR_ELMAG,0	LSTR, 16, 11
KEYW,MAGNOD,0	LSTR, 11, 12
KEYW,MAGEDG,0	LSTR, 12, 13
KEYW,MAGHFE,0	LSTR, 13, 14
KEYW,MAGELC,0	LSTR, 14, 15
KEYW,PR_MULTI,0	LSTR, 15, 16
KEYW,LSDYNA,0	
KEYW,PR_DYNA,0	FLST,2,15,4
/GO	FITEM,2,3
!*	FITEM,2,4
!*	FITEM,2,5
/PREP7	FITEM,2,6
!*	FITEM,2,7
ET,1,PLANE55	FITEM,2,8
	FITEM,2,9
MPTEMP,1,100	FITEM,2,2
	FITEM,2,1
K, ,,,	FITEM,2,10
K, ,0.05,,	FITEM,2,11
K, ,0.1,,	FITEM,2,12
K, ,0.1,0.1,,	FITEM,2,13
K, ,,0.1,,	FITEM,2,14
K, ,,0.2,,	FITEM,2,15
K, ,-0.1,0.2,,	AL,P51X
K, ,-0.1,,	
K, ,-0.05,,	wpstyle,0.025,0.1,-1,1,0.0001,0,2,,5
K, ,,0.05,,	
	wpof,,0.0700000,
K, ,-0.04,0.1,,	
K, ,-0.04,0.125,,	wpro,90.000000,,
K, ,-0.04,0.150,,	
K, ,-0.06,0.150,,	wpro,,,90.000000
K, ,-0.06,0.125,,	
K, ,-0.06,0.1,,	ASBW, 1
LARC,2,10,1,0.05,	wpof,,,0.1000000
LARC,10,9,1,0.05,	ASBW, 3

wpor,,,-0.0950000

wpor,,,-0.0600000,

wpor,,90.000000,

ASBW, ALL

wpor,,,-0.0900000

ASBW, ALL

MESH,0,2D

MKEY,0

AMESH,ALL

AREFINE, ALL, , , 1

NUMCMP,AREA

NUMCMP,LINE

NUMCMP,KP

NUMCMP,ELEM

NUMCMP,NODE

Kodingang FGMs geometri rumit dengan jumlah nodal 1329

/CLEAR,NOSTART	LSTR, 2, 3
	LSTR, 3, 4
/NOPR	LSTR, 4, 5
KEYW,PR_SET,1	LSTR, 5, 6
KEYW,PR_STRUC,0	LSTR, 6, 7
KEYW,PR_THERM,1	LSTR, 7, 8
KEYW,PR_FLUID,0	LSTR, 8, 9
KEYW,PR_ELMAG,0	LSTR, 16, 11
KEYW,MAGNOD,0	LSTR, 11, 12
KEYW,MAGEDG,0	LSTR, 12, 13
KEYW,MAGHFE,0	LSTR, 13, 14
KEYW,MAGELC,0	LSTR, 14, 15
KEYW,PR_MULTI,0	LSTR, 15, 16
KEYW,LSDYNA,0	
KEYW,PR_DYNA,0	FLST,2,15,4
/GO	FITEM,2,3
!*	FITEM,2,4
!*	FITEM,2,5
/PREP7	FITEM,2,6
!*	FITEM,2,7
ET,1,PLANE55	FITEM,2,8
	FITEM,2,9
MPTEMP,1,100	FITEM,2,2
	FITEM,2,1
K, ,,,	FITEM,2,10
K, ,0.05,,	FITEM,2,11
K, ,0.1,,	FITEM,2,12
K, ,0.1,0.1,,	FITEM,2,13
K, ,,0.1,,	FITEM,2,14
K, ,,0.2,,	FITEM,2,15
K, ,-0.1,0.2,,	AL,P51X
K, ,-0.1,,	
K, ,-0.05,,	wpstyle,0.025,0.1,-1,1,0.0001,0,2,,5
K, ,,0.05,,	
	wpof,,0.0700000,
K, ,-0.04,0.1,,	
K, ,-0.04,0.125,,	wpro,90.000000,,
K, ,-0.04,0.150,,	
K, ,-0.06,0.150,,	wpro,,,90.000000
K, ,-0.06,0.125,,	
K, ,-0.06,0.1,,	ASBW, 1
LARC,2,10,1,0.05,	wpof,,,0.1000000
LARC,10,9,1,0.05,	ASBW, 3

wpor,,,-0.0950000

wpor,,,-0.0600000,

wpor,,90.000000,

ASBW, ALL

wpor,,,-0.0900000

ASBW, ALL

MESH,0,2D

MESHKEY,0

SMRT,1

AMESH,ALL

NUMCMP,AREA

NUMCMP,LINE

NUMCMP,KP

NUMCMP,ELEM

NUMCMP,NODE

Kodingang FGMs geometri rumit dengan jumlah nodal 6945

```

/CLEAR,NOSTART

/NOPR
KEYW,PR_SET,1
KEYW,PR_STRUC,0
KEYW,PR_THERM,1
KEYW,PR_FLUID,0
KEYW,PR_ELMAG,0
KEYW,MAGNOD,0
KEYW,MAGEDG,0
KEYW,MAGHFE,0
KEYW,MAGELC,0
KEYW,PR_MULTI,0
KEYW,LSDYNA,0
KEYW,PR_DYNA,0

/GO
!*
!*
/PREP7
!*
ET,1,PLANE55

MPTEMP,1,100

K, ,,,
K, ,0.05,,
K, ,0.1,,
K, ,0.1,0.1,,
K, ,,0.1,,
K, ,,0.2,,
K, ,-0.1,0.2,,
K, ,-0.1,,
K, ,-0.05,,
K, ,,0.05,,

K, ,-0.04,0.1,,
K, ,-0.04,0.125,,
K, ,-0.04,0.150,,
K, ,-0.06,0.150,,
K, ,-0.06,0.125,,
K, ,-0.06,0.1,,

LARC,2,10,1,0.05,

LARC,10,9,1,0.05,

LSTR, 2, 3
LSTR, 3, 4
LSTR, 4, 5
LSTR, 5, 6
LSTR, 6, 7
LSTR, 7, 8
LSTR, 8, 9
LSTR, 16, 11
LSTR, 11, 12
LSTR, 12, 13
LSTR, 13, 14
LSTR, 14, 15
LSTR, 15, 16

FLST,2,15,4
FITEM,2,3
FITEM,2,4
FITEM,2,5
FITEM,2,6
FITEM,2,7
FITEM,2,8
FITEM,2,9
FITEM,2,2
FITEM,2,1
FITEM,2,10
FITEM,2,11
FITEM,2,12
FITEM,2,13
FITEM,2,14
FITEM,2,15
AL,P51X

wpstyle,0.025,0.1,-1,1,0.0001,0,2,,5

wpof,,0.0700000,
wpro,90.000000,,
wpro,,,90.000000

ASBW, 1

wpof,,,0.1000000

```

```
ASBW, 3
wpof,, -0.0950000
wpof,, -0.0600000,
wpro,, 90.000000,
ASBW, ALL
wpof,, -0.0900000
ASBW, ALL
MSHAPE,0,2D
MSHKEY,0
SMRT,2
AMESH,ALL
NUMCMP,AREA
NUMCMP,LINE
NUMCMP,KP
NUMCMP,ELEM
NUMCMP,NODE
```

(Halaman ini sengaja dikosongkan)