



TESIS - SM 092306

**IMPLEMENTASI METODE *MESHLESS LOCAL
PETROV GALERKIN (MLPG)* UNTUK PENENTUAN
LOKASI SUMBER PENCEMAR DI SUNGAI
BRANTAS**

MIRANDA ELIYAN
NRP 1212 2012 07

DOSEN PEMBIMBING
Prof. Dr. BASUKI WIDODO, M.Sc.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2014



THESIS - SM 092306

**THE IMPLEMENTATION OF MESHLESS LOCAL
PETROV GALERKIN (MLPG) METHOD FOR
DETERMINE POLLUTANT SOURCES IN BRANTAS
RIVER**

MIRANDA ELIYAN
NRP 1212 2012 07

SUPERVISOR
Prof. Dr. BASUKI WIDODO, M.Sc.

PROGRAMME MAGISTER
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2014

IMPLEMENTASI METODE *MESHLESS LOCAL PETROV GALERKIN* (MLPG) UNTUK PENENTUAN LOKASI SUMBER PENCEMAR DI SUNGAI BRANTAS

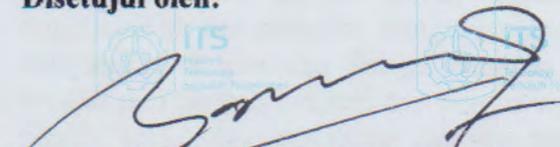
Tesis ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Magister Sains (M.Si)

**di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember**

**Oleh:
MIRANDA ELIYAN
NRP. 1212 201 207**

**Tanggal ujian : 24 Juli 2014
Periode Wisuda : September 2014**

Disetujui oleh:


1. Prof. Dr. Basuki Widodo, M.Sc
NIP. 19650605 198903 1 002

(Pembimbing)


2. Dr. Mahmud Yunus, M.Si
NIP. 19620407 198703 1 005

(Penguji)

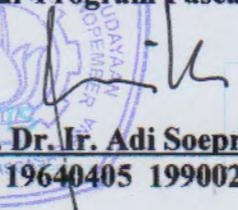

3. Dr. Hariyanto, M.Si
NIP. 19530414 198203 1 002

(Penguji)


4. Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

(Penguji)

Direktur Program Pascasarjana ITS


Prof. Dr. Ir. Adi Soeprijanto, MT
NIP. 19640405 199002 1 001

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN PROPOSAL TESIS	iii
ABSTRAK	v
ABSTRACT	vii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
BAB II KAJIAN PUSTAKA	5
2.1 Unsur Hidrodinamika Sungai	5
2.2 Parameter Kualitas Air Sungai	5
2.3 Konsep Aliran Fluida Pada Saluran Terbuka	6
2.3.1 Hukum Kekekalan Massa	8
2.3.2 Hukum Kekekalan Momentum	9
2.4 Perubahan Morfologi Sungai	9
2.5 Sedimentasi Sungai	10
2.6 Metode <i>Meshless Local Petrov Galerkin</i> (MLPG)	11
2.7 Interpolasi <i>Moving Least Square</i>	14
2.8 Gauss Kuadratur	16
2.8.1 Problem Satu Dimensi	17
2.8.2 Problem Dua Dimensi	17
2.9 Stabilitas dan Konsistensi Numerik	18
2.10 Diskritisasi Persamaan	19
BAB III METODE PENELITIAN	21

3.1	Lokasi Penelitian	21
3.2	Tahapan Penelitian	21
3.3	Jadwal Kegiatan.....	23
BAB IV PEMBAHASAN.....		23
4.1	Memodelkan Persamaan Polutan dan Sedimentasi Pada Volume Kendali .	23
4.1.1	Persamaan Kekekalan Massa Dalam Volume Kendali.....	24
4.1.2	Persamaan Kekekalan Momentum Dalam Volume Kendali	27
4.2	Persamaan Pembangun	29
4.2.1	Persamaan Pembangun Sungai Marmoyo.....	29
4.2.2	Persamaan Pembangun Sungai Surabaya	31
4.2.3	Persamaan Pembangun Pada Pertemuan Dua Sungai	33
4.2.4	Persamaan Pembangun Skalar Transport Konsentrasi Polutan.....	34
4.3	Penerapan Metode MLPG Pada Model Polutan dan Sedimentasi	38
4.3.1	Persamaan <i>Global Weak</i>	38
4.3.2	Persamaan <i>Local Weak</i>	40
4.3.3	Pendekatan <i>Moving Least Square</i> (MLS).....	42
4.3.4	Diskritisasi Persamaan Terhadap Waktu	46
4.3.5	Tahap Penyelesaian Numerik.....	46
4.3.6	Stabilitas dan Konsistensi Numerik.....	47
4.4	Analisa Hasil dan Simulasi	47
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN.....		51
5.1	Simpulan	51
5.2	Saran	51
DAFTAR PUSTAKA.....		
LAMPIRAN		

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Aliran Pertemuan Dua Sungai di Sungai Brantas.....	10
Gambar 2.6.1	Local subdomain Ω_s dari domain Ω	13
Gambar 3.1	Peta Lokasi Daerah Aliran Sungai Brantas	21
Gambar 4.1	Peta Lokasi Penelitian.....	25
Gambar 4.2	Diagram skematik dari Pertemuan Dua Sungai.....	25
Gambar 4.4.1	(a) Konsentrasi BOD sepanjang sumbu-X, (b) kontur BOD sepanjang sumbu-X.....	49
Gambar 4.4.2	(a) Konsentrasi COD sepanjang sumbu-X, (b) kontur COD sepanjang sumbu-X.....	50
Gambar 4.4.3	(a) Konsentrasi TSS sepanjang sumbu-X, (b) kontur TSS sepanjang sumbu-X.....	51
Gambar 4.4.4	(a) Konsentrasi BOD sepanjang sumbu-Y, (b) kontur BOD sepanjang sumbu-Y.....	52
Gambar 4.4.5	(a) Konsentrasi COD sepanjang sumbu-X, (b) kontur COD sepanjang sumbu-Y.....	53
Gambar 4.4.6	(a) Konsentrasi TSS sepanjang sumbu-Y, (b) kontur TSS sepanjang sumbu-Y	54

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji dan syukur dipanjatkan kehadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat-Nya, sehingga penyusunan tesis yang berjudul “Implementasi Metode Meshless Local Petrov Galerkin untuk Penentuan Lokasi Sumber Pencemar Di Sungai Brantas” dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya.

Salah satu tujuan dari disusunnya tesis ini adalah untuk memenuhi sebagian persyaratan dalam mencapai jenjang Magister Sains dari Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh November Surabaya.

Adapun keberhasilan penyusunan tesis ini, tidak lepas dari partisipasi berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Allah SWT yang selalu memberikan kesehatan, kemudahan dan kelancaran selama penulisan tesis ini.
2. Bapak Prof.Dr.Basuki Widodo, M.Sc selaku dosen pembimbing tesis yang telah mengarahkan, memberikan ilmu dan memberikan semangat selama penulisan tesis ini.
3. Bapak Dr.Budi Setiyono,S.Si,M.T selaku dosen wali yang telah memberikan pengarahan dan motivasi selama penulis kuliah.
4. Seluruh Dosen Pascasarjana Matematika yang memberikan ilmu yang sangat bermanfaat bagi penulis selama perkuliahan.
5. Staf Pascasarjana Matematika yang telah banyak membantu dalam hal administrasi.
6. Teman-teman angkatan 2012 yang selalu membantu selama kuliah.
7. Rekan satu tim penelitian (Rani, Uswa dan Dewi) terimakasih atas kebersamaannya.

penulis menyadari bahwa tesis ini masih belum sempurna, karena itu kritik dan saran sangat diperlukan.

Penulis

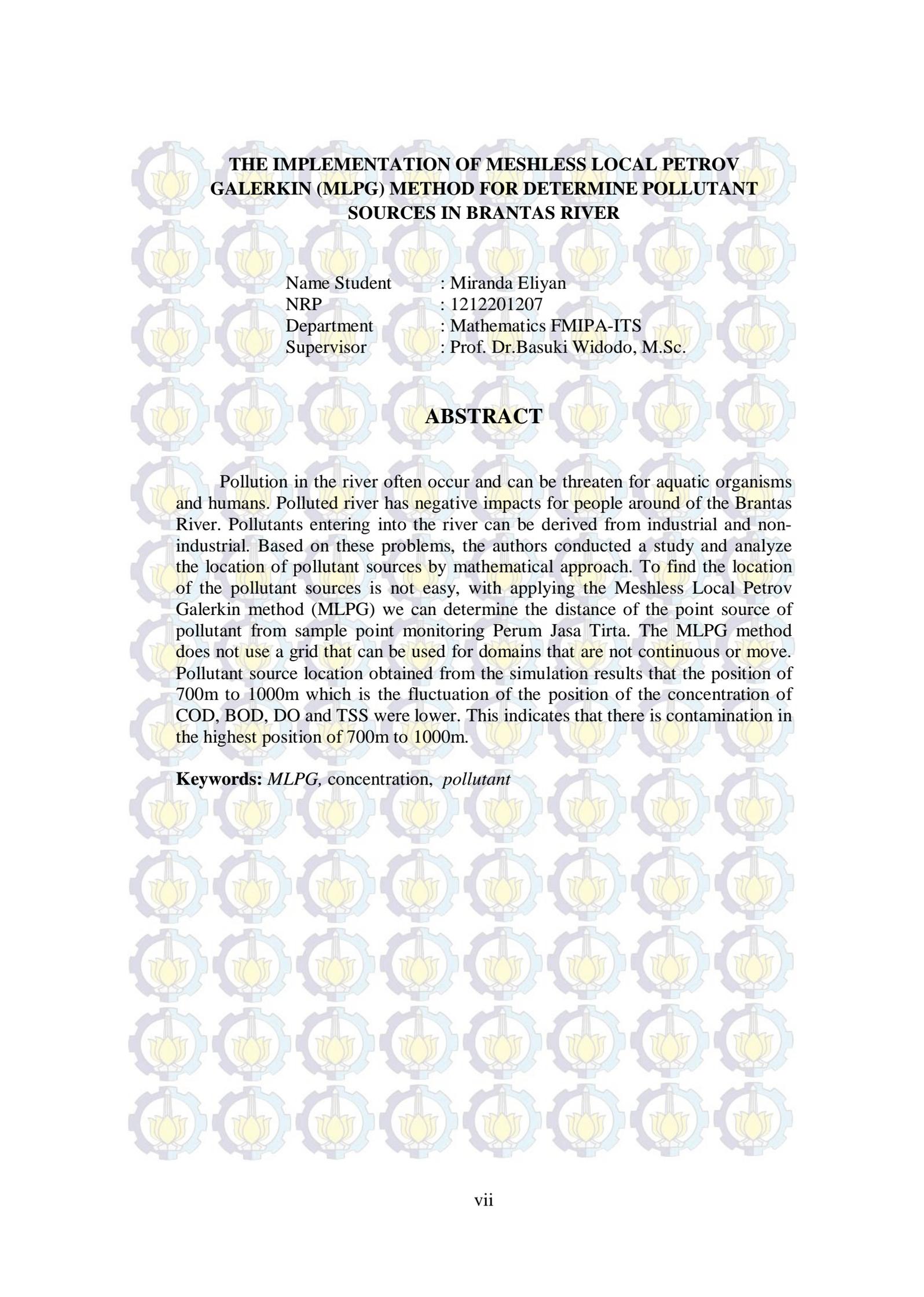
IMPLEMENTASI METODE *MESHLESS LOCAL PETROV GALERKIN* (MLPG) UNTUK PENENTUAN LOKASI SUMBER PENCEMAR DI SUNGAI BRANTAS

Nama Mahasiswa : Miranda Eliyan
NRP : 1212201207
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS
Pembimbing : Prof. Dr.Basuki Widodo, M.Sc.

ABSTRAK

Pencemaran sungai sering terjadi dan dapat mengancam kehidupan organisme air dan manusia. Sungai yang tercemar membawa dampak negatif bagi masyarakat di kawasan Sungai Brantas. Polutan yang masuk ke sungai dapat berasal dari limbah industri dan non-industri. Berdasarkan permasalahan tersebut, penulis melakukan penelitian dan menganalisis lokasi sumber pencemar melalui pendekatan secara matematis. Untuk menemukan lokasi sumber pencemar tidaklah mudah, dengan menerapkan metode *Meshless Local Petrov Galerkin* (MLPG) dapat ditentukan jarak lokasi sumber pencemar dari titik pantau Perum Jasa Tirta. Metode MLPG ini tidak menggunakan grid sehingga dapat digunakan untuk domain yang tidak kontinu atau bergerak. Lokasi sumber pencemar yang diperoleh dari hasil simulasi yaitu pada posisi 700m sampai 1000m yang mana pada posisi ini terjadi fluktuasi konsentrasi COD, BOD, DO dan TSS yang semakin rendah. Hal ini mengindikasikan bahwa terjadi pencemaran tertinggi pada posisi 700m sampai 1000m.

Kata Kunci: *MLPG, konsentrasi, pencemar*



THE IMPLEMENTATION OF MESHLESS LOCAL PETROV GALERKIN (MLPG) METHOD FOR DETERMINE POLLUTANT SOURCES IN BRANTAS RIVER

Name Student : Miranda Eliyan
NRP : 1212201207
Department : Mathematics FMIPA-ITS
Supervisor : Prof. Dr.Basuki Widodo, M.Sc.

ABSTRACT

Pollution in the river often occur and can be threaten for aquatic organisms and humans. Polluted river has negative impacts for people around of the Brantas River. Pollutants entering into the river can be derived from industrial and non-industrial. Based on these problems, the authors conducted a study and analyze the location of pollutant sources by mathematical approach. To find the location of the pollutant sources is not easy, with applying the Meshless Local Petrov Galerkin method (MLPG) we can determine the distance of the point source of pollutant from sample point monitoring Perum Jasa Tirta. The MLPG method does not use a grid that can be used for domains that are not continuous or move. Pollutant source location obtained from the simulation results that the position of 700m to 1000m which is the fluctuation of the position of the concentration of COD, BOD, DO and TSS were lower. This indicates that there is contamination in the highest position of 700m to 1000m.

Keywords: *MLPG*, concentration, *pollutant*

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sungai memiliki banyak manfaat dalam kehidupan terutama bagi warga di sekitar DAS (Daerah Aliran Sungai). Sebagian warga memanfaatkan air sungai untuk minum, mencuci kendaraan, mencuci pakaian, dan transportasi. Sungai di daerah perkotaan rentan tercemar oleh limbah industri atau non industri. Effendi (2003) mengelompokkan jenis pencemar di wilayah perairan menjadi beberapa kelompok yaitu: pencemar yang mengakibatkan penurunan kadar oksigen terlarut, pencemar yang mengakibatkan penyakit, senyawa organik sintetis, nutrisi tumbuhan, senyawa anorganik, sedimen, radioaktif, panas, dan minyak. Pencemar yang masuk ke badan air biasanya merupakan kombinasi dari beberapa jenis pencemar yang berinteraksi. Pencemaran air sungai yang pernah terjadi di Sungai Brantas pada bulan November 2013 lalu mengakibatkan matinya ikan-ikan. Salah satu faktor penyebab matinya ikan karena pembuangan limbah dalam jumlah yang besar, sehingga sungai menjadi pekat dan berdampak pada berkurangnya kadar oksigen di air sungai (Kompasiana, 2013). Kasus pencemaran lain juga terjadi seperti di Teluk Minamata dan Itai-itai di Jepang yang menyebabkan kematian karena warganya mengkonsumsi ikan yang tercemar oleh limbah Merkuri (Hg) dan Kadmium (Cd) (Darmono, 1995).

Pencemar yang mengakibatkan penurunan kadar oksigen dapat dideteksi keberadaannya dengan melihat beberapa parameter kualitas air misalnya COD, BOD, dan DO. Pencemar yang tidak terlarut oleh air akan mengendap ke dasar dan melekat pada dinding sungai dan menyebabkan pembentukan sedimen. Sedimen yang menumpuk di dasar maupun di dinding sungai akan mengakibatkan fluktuasi permukaan air sungai yang dapat melebihi tinggi dinding sungai pada musim hujan atau terjadinya pendangkalan sungai pada saat musim kemarau (Effendi, 2003).

Morfologi sungai dan faktor alam sangat mempengaruhi proses sedimentasi. Beberapa faktor alam yang mempengaruhi tingkat sedimentasi antara lain yaitu, kekuatan dinding sungai, debit aliran, dan kecepatan aliran. Sedimentasi juga diakibatkan oleh material-material abu vulkanik dari letusan gunung berapi yang terbawa oleh aliran sungai, seperti yang terjadi pada Gunung Kelud pada 14 Februari 2014. Lahar panas Gunung Kelud yang terbawa oleh aliran sungai dapat membeku dan mengendap membentuk sedimen (Kompasiana, 2013).

Berdasarkan permasalahan tersebut dapat dibuatkan model matematikanya menurut hukum fisika, dan kimia. Adapun sungai yang akan diteliti pada tesis ini adalah pertemuan dua sungai di Sungai Brantas. Sungai Brantas merupakan sungai yang terletak di Kabupaten Mojokerto, kemudian aliran sungai ini mengalir melalui Gresik, Sidoarjo, Surabaya, dan berakhir di muara Selat Madura.

Pada penelitian sebelumnya yang telah dilakukan Yulianto (2013) hanya menentukan koordinat sumber polutan yang potensial pada daerah pertemuan dua sungai di Sungai Surabaya dengan mengimplementasikan Metode Meshless Local Petrov Galerkin (MLPG). Sedangkan pada tesis ini menentukan lokasi pencemar di daerah pertemuan dua sungai di Sungai Brantas berdasarkan fluktuasi polutan dan sedimen dengan mengimplementasikan metode MLPG. Metode MLPG ini dipilih sebagai alternatif penyelesaian numerik untuk kasus pertemuan dua sungai ini karena lebih fleksibel, akurat dan tidak menggunakan grid dalam penerapannya, sehingga dapat menghemat waktu perhitungan dan hasil yang diperoleh diharapkan dapat mewakili kondisi sebenarnya.

1.2 Rumusan Masalah

Pada tesis ini permasalahan yang akan diselesaikan yaitu:

- a. Bagaimana model matematika dari persebaran polutan dan sedimen di daerah aliran pertemuan dua sungai di Sungai Brantas ?
- b. Bagaimana metode MLPG digunakan untuk mendapatkan solusi berupa lokasi sumber pencemar di daerah aliran pertemuan dua sungai di Sungai Brantas ?

- c. Bagaimana cara menentukan lokasi sumber pencemar di daerah aliran pertemuan dua sungai di Sungai Brantas ?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah yang akan dibahas pada tesis ini adalah:

- a. Polutan bersifat *diffusive* dan parameter yang digunakan adalah COD dan BOD, sedangkan untuk parameter sedimentasi yaitu TSS.
- b. Unsur hidrodinamika sungai yaitu kecepatan aliran, debit sungai, dan kedalaman sungai. Pola persebaran polutan dan sedimentasi digambarkan dalam dua dimensi.
- c. Pola pengangkutan sedimen bersifat *suspended load* sehingga sedimen diasumsikan bercampur dengan air sungai.
- d. Limbah masuk ke sungai melalui saluran pembuangan limbah industri atau domestik.

1.4 Tujuan

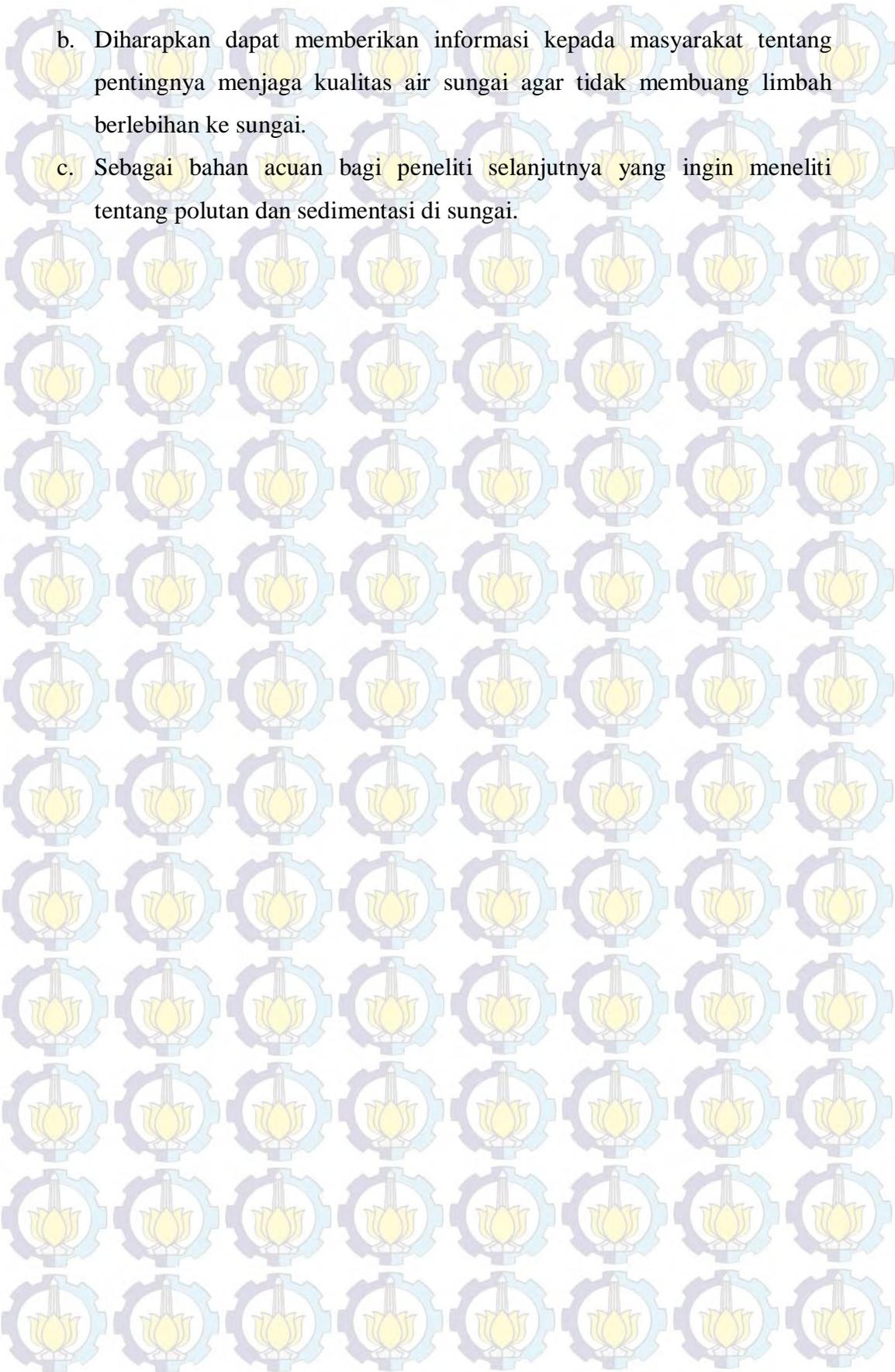
Adapun tujuan tesis ini yaitu:

- a. Merumuskan model matematika dari persebaran polutan dan sedimentasi di daerah aliran pertemuan dua sungai di Sungai Brantas dengan menggunakan unsur hidrodinamika sungai.
- b. Menerapkan metode *Meshless Local Petrov Galerkin* (MLPG) pada model pertemuan dua sungai untuk mendapatkan lokasi sumber pencemar yang mengakibatkan polutan dan sedimentasi di sungai.
- c. Menganalisa lokasi sumber pencemar di daerah aliran pertemuan dua sungai di Sungai Brantas.

1.5 Manfaat

Adapun manfaat yang didapat dari penyusunan tesis ini yaitu:

- a. Diharapkan dapat membantu pihak Perum Jasa Tirta dalam melakukan pengawasan atau monitoring kualitas air sungai, sehingga dapat dengan cepat mengambil tindakan yang tepat untuk mengatasi terjadinya pencemaran sungai ataupun pendangkalan sungai.



b. Diharapkan dapat memberikan informasi kepada masyarakat tentang pentingnya menjaga kualitas air sungai agar tidak membuang limbah berlebihan ke sungai.

c. Sebagai bahan acuan bagi peneliti selanjutnya yang ingin meneliti tentang polutan dan sedimentasi di sungai.

BAB 2 TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Unsur Hidrodinamika Sungai

Sungai merupakan salah satu contoh konsep hidrodinamika. Dinamika pada aliran sungai dipengaruhi oleh beberapa faktor yaitu kecepatan, debit, dan kedalaman. Untuk lebih memahami konsep hidrodinamika pada aliran sungai, berikut ini diberikan definisi dari kecepatan, debit, dan kedalaman :

- a. Kecepatan aliran sungai adalah jarak yang mampu ditempuh oleh partikel zat cair dalam satuan waktu tertentu yang mengakibatkan perpindahan horizontal atau vertikal massa air (Raju,1986).
- b. Debit air sungai adalah tinggi permukaan air sungai yang terukur oleh alat ukur permukaan air sungai. Pengertian lain debit air sungai adalah laju aliran air (volume air) yang melewati suatu penampang melintang sungai persatuan waktu. Satuan besaran debit dalam sistem satuan SI dinyatakan dalam satuan meter kubik per detik (m^3/s). Hubungan antara debit dan kecepatan aliran (Raju,1986):

$$Q = A.V \quad (2.1)$$

keterangan:

Q = Debit Aliran (m^3/s)

V = Kecepatan Aliran (m/s)

A = Luas penampang basah saluran (m^2)

- c. Kedalaman yaitu jarak yang diukur ke arah vertikal dari muka air ke dasar sungai/saluran terbuka (Raju,1986).

2.2 Parameter Kualitas Air Sungai

Menurut Effendi (2003) beberapa parameter yang digunakan untuk mengetahui kualitas air sungai. Parameter-parameter tersebut antara lain yaitu:

- a. COD (*Chemical Oxygen Demand*) adalah jumlah oksigen yang diperlukan agar bahan buangan yang ada didalam air dapat teroksidasi oleh kalium dikromat($K_2Cr_2O_7$) menjadi CO_2 dan H_2O .
- b. BOD (*Biological Oxygen Demand*) adalah jumlah oksigen yang dibutuhkan oleh mikroba aerob untuk mengoksidasi bahan organik menjadi CO_2 dan H_2O . Dengan kata lain BOD menunjukkan jumlah oksigen yang dikonsumsi oleh proses respirasi mikroba aerob yang terdapat dalam botol BOD yang diinkubasi pada suhu sekitar $20^{\circ}C$ selama lima hari, dalam keadaan tanpa cahaya.
- c. DO (*Dissolved Oxygen*) adalah jumlah oksigen dalam miligram yang terdapat dalam satu liter air. Oksigen terlarut umumnya berasal dari difusi udara melalui permukaan air, aliran air masuk, air hujan, dan hasil dari proses fotosintesis plankton atau tumbuhan air. Oksigen terlarut merupakan parameter penting karena dapat digunakan untuk mengetahui gerakan massa air serta merupakan indikator yang peka bagi proses-proses kimia dan biologi.
- d. TSS (*Total Suspended Solid*) adalah padatan tersuspensi total diameter $> 1\mu m$ yang tertahan pada saringan *millipore* yang berdiameter sebesar $0,45\mu m$. TSS ini terdiri dari lumpur, pasir halus, dan jasad-jasad renik akibat dari erosi tanah yang terbawa ke badan air.

2.3 Konsep Aliran Fluida Pada Saluran Terbuka

Pertemuan dua fluida yaitu udara dan air yang mana kerapatan udara jauh lebih kecil dari pada kerapatan air sehingga pengaruh udara dapat diabaikan. Perbandingan gaya-gaya inersia dengan gaya-gaya gravitasi (persatuan volume) dikenal dengan bilangan Froude dan dapat ditulis (Widodo,2012) :

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}} \quad (2.2)$$

dengan

u = kecepatan aliran sungai(m/s)

g = percepatan gravitasi(m/s^2)

h = kedalaman sungai (m)

kriteria aliran dilihat dari bilangan Froude diklasifikasikan menjadi :

$F_r = 1$, aliran kritis

$F_r < 1$, aliran subkritis

$F_r > 1$, aliran superkritis

Menurut (Widodo, 2012) jenis-jenis aliran sungai dibagi menjadi dua yaitu:

- a. Aliran Tunak (*steady flow*) dan Aliran Tak Tunak (*unsteady flow*).

Aliran tunak (*steady flow*) yaitu aliran yang apabila kedalaman, debit dan kecepatan rata-rata pada setiap penampang tidak berubah menurut waktu. Apabila kuantitas ini berubah menurut waktu, maka aliran tersebut dinamakan aliran tak tunak (*unsteady flow*).

- b. Aliran Seragam dan Aliran Tak Seragam.

Aliran seragam adalah aliran yang garis-garis arusnya sejajar dan besar kecepatannya tetap. Sedangkan aliran yang garis-garis arusnya tidak sejajar dan besar kecepatannya berubah dinamakan aliran tidak seragam.

Menurut (Widodo, 2012) terdapat beberapa gaya yang bekerja pada suatu penampang saluran yaitu:

- a. Gaya hidrostatis dinotasikan dengan P , menurut dapat dihitung dengan menggunakan rumus :

$$P = \frac{1}{2} \gamma h^2 b \quad (2.3)$$

dengan :

γ = berat spesifik air

h = kedalaman sungai

b = lebar sungai

Sedangkan komponen hilir berat air pada volume kendali sungai utama yang dinotasikan dengan W dirumuskan :

$$W = \gamma A L_i S_x \quad (2.4)$$

dengan :

A = luas permukaan kendali

L_i = panjang volume kendali pertemuan sungai

S_x = kemiringan sungai.

b. Gaya geser yang dinotasikan S adalah gaya geser yang terjadi pada *interface* antara volume kendali sungai utama dan volume kendali anak sungai. Gaya geser pada pertemuan sungai dapat dihitung sebagai berikut :

$$S = C_f \frac{\rho(u^2 - v^2)}{2} hL_i \quad (2.5)$$

dengan :

ρ = massa jenis air

C_f = koefisien gesek

u = kecepatan aliran pada sungai utama

v = kecepatan aliran pada anak sungai

c. Gaya gesek dinotasikan F_b terjadi pada volume kendali. Gaya gesek yang terjadi pada sungai utama akibat dinding sungai dan aliran air adalah :

$$F_{b1} = \rho \left(\frac{u_3}{C^*} \right)^2 [b_3(1 - \xi) + y_3]L \quad (2.6)$$

$$F_{b2} = \rho \left(\frac{u_3}{C^*} \right)^2 [b_3\xi + y_3]L_1 \quad (2.7)$$

dengan :

C^* = koefisien Chezy

u_3 = kecepatan pada pertemuan sungai

y_3 = kedalaman pada pertemuan sungai

b_3 = lebar sungai (m)

ξ = rasio debit anak sungai dengan debit pertemuan sungai

Q_3 = debit pada pertemuan sungai

Q_2 = debit pada anak sungai

Q_1 = debit pada sungai utama

L = panjang domain kendali sungai utama

L_1 = panjang domain kendali anak sungai

2.3.1 Hukum kekekalan massa

Menurut (Apsley, 2005) hukum kekekalan massa untuk suatu volume kendali dinyatakan dengan persamaan:

$$\frac{d}{dt}(\text{mass}) + \text{net outward mass flux} = 0 \quad (2.8)$$

dengan :

massa = ρV ; ρ = massa jenis ; V = volume

mass *flux* yang keluar = $\rho u A$; u = kecepatan dan A = luas permukaan

sehingga Persamaan (2.3.1.1) dapat ditulis dalam bentuk :

$$\frac{d}{dt}(\rho V) + \sum_{\text{faces}} \rho u A = 0 \quad (2.9)$$

dan menurut teorema pengangkutan Reynold (Apsley,2005), Persamaan (2.9) dapat dinyatakan dalam bentuk diskrit, seperti persamaan ini :

$$\sum_{\text{faces}} \rho u A = (\rho u A)_{\text{out}} - (\rho u A)_{\text{in}} \quad (2.10)$$

2.3.2 Hukum Kekekalan Momentum

Menurut (Apsley, 2005) hukum kekekalan momentum dapat dinyatakan dengan:

$$\frac{d}{dt}(\text{momentum}) + \text{net outward momentum flux} = \text{force} \quad (2.11)$$

dengan :

momentum = massa x kecepatan = $\rho V u$

u = kecepatan ; *momentum flux* yang keluar = $\rho u A u$

sehingga Persamaan (2.11) menjadi :

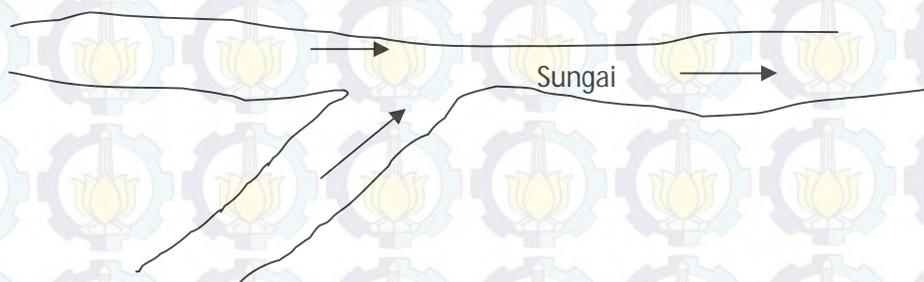
$$\frac{d}{dt}(\rho V u) + \sum_{\text{faces}} \rho u A u = F \quad (2.12)$$

Force atau gaya pada aliran fluida terdiri dari dua tipe, yaitu *surface force* dan *body force*. Gaya pokok yang termasuk dalam kategori *surface force* adalah

gaya tekan hidrostatis dan viskositas, sedangkan yang termasuk *body force* adalah gaya gravitasi, gaya berat dan gaya gesek.

2.4 Perubahan Morfologi Sungai

Bentuk morfologi pertemuan dua aliran sungai merupakan suatu fenomena alam yang menarik untuk dipelajari. Perlu dibuat model matematika untuk menjelaskan fenomena tersebut sehingga mendekati kondisi real. Salah satu model pertemuan sungai yang cukup baik telah dikembangkan oleh Shazy Shabayek, *dkk* (2002). Pada model ini, Shazy Shabayek membagi domain sungai menjadi dua bagian volume kendali (CV). Sungai utama (*main stream*) dinyatakan sebagai volume kendali 1 (CV1) sedangkan anak sungai (*lateral stream*) dinyatakan sebagai volume kendali 2 (CV2). Untuk gaya-gaya yang bekerja pada volume kendali ini antara lain gaya hidrostatis, gaya gesek pada dasar sungai, gaya geser yang terjadi pada pertemuan sungai, dan gaya berat pengaruh dari gravitasi bumi. Fenomena yang terjadi pada pertemuan sungai shazy shabayek ini juga terjadi di Sungai Brantas, masuknya aliran dari anak sungai ke sungai utama seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.1. Beberapa karakteristik dari sungai utama akan mengalami perubahan dengan masuknya aliran anak sungai. Perubahan tersebut antara lain adalah perubahan massa, kecepatan, kedalaman, arah dan debit aliran, serta perubahan-perubahan lainnya yang nanti akan mempengaruhi morfologi dari Sungai Brantas.



Gambar 2.1 Aliran Pertemuan Dua Sungai di Sungai Brantas

2.5 Sedimentasi Sungai

Sedimen merupakan hasil proses difusi dengan air yang ada di sungai. Proses terjadinya sedimentasi dapat dimodelkan secara matematis, sehingga perubahan morfologi sungai akibat adanya sedimentasi tersebut dapat diperkirakan. Berdasarkan pengangkutannya, sedimentasi dibedakan menjadi tiga yaitu *suspended load*, *bed load*, dan *washed load*. *Suspended load* adalah pergerakan sedimen dengan cara melayang terbawa oleh aliran. *Washed load* adalah pergerakan butiran sedimen yang berukuran kecil dan halus dibanding dengan sedimen dasar. Sedangkan sedimentasi *bed load* adalah pergerakan sedimen dengan cara menggelinding, longsor, atau melompat. Perubahan morfologi sungai diasumsikan hanya terjadi pada dasar sungai dan diakibatkan oleh adanya gerusan dan pengendapan. Perubahan dasar sungai ini dapat dihitung dengan menggunakan persamaan kekekalan massa untuk transportasi sedimen.

Menurut (Yang, 1996) persamaan kekekalan massa sedimen didefinisikan oleh:

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{1}{(1-p)} \left(\frac{\partial q_b}{\partial x} + \frac{\partial q_b}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.13)$$

dengan,

z_b = ketinggian dasar sungai

p = porositas

q_b = banyaknya sedimen *bed load*

Transportasi sedimen (Yang, 1996):

$$q_b = C_m [(s - 1)g]^{0.5} d_{50}^{1.5} (\mu\theta_b - \theta_c)^{1.5} \quad (2.14)$$

dengan,

q_b = banyaknya sedimen *bed load*

s = rasio massa jenis sedimen dengan massa jenis air

ρ_s = massa jenis sedimen

ρ = massa jenis air

d_{50} = rata-rata diameter sedimen

θ_c = 0.047

C_m = 8.0

μ = 1.0

2.6 Metode *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG)

Metode MLPG ini tidak menggunakan *mesh*, baik dalam melakukan interpolasi fungsi *trial* dan *test* maupun dalam melakukan perhitungan integral. Pada penelitian Atlury terdahulu metode ini pernah digunakan, sangat akurat dan mendekati kondisi sebenarnya di lapangan. Kemudian dilakukan pengkajian kembali menggunakan metode MLPG dengan perbandingan metode *Finite Element* dan metode *Boundary Element* (Atlury dan Shen, 2002).

Berikut ini persamaan poisson liniernya

$$\nabla u^2(x) = p(x), \quad x \in \Omega \quad (2.15)$$

dengan p adalah sebuah fungsi *source*, domain Ω yang dibatasi oleh *boundary* $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$, dengan *boundary condition* sebagai berikut :

$$u = \bar{u} \quad \text{pada } \Gamma_u \quad (2.15a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = q = \bar{q} \quad \text{pada } \Gamma_q \quad (2.15b)$$

dengan \bar{u} adalah *initial condition* dan \bar{q} *boundary condition*.

Atlury dan Shen (2002) menguraikan persamaan (2.15) dapat ditulis menjadi :

$$\int_{\Omega} (\nabla u^2(x) - p)v \, d\Omega = 0 \quad (2.16)$$

dengan u adalah fungsi *trial* dan v adalah fungsi *test*.

dengan menerapkan teorema divergensi $(\nabla^2 u)v = u_{,ii}v = (u_{,i}v)_{,i} - (uv_{,i})_{,i} + uv_{,ii}$, sehingga Persamaan (2.16) menjadi:

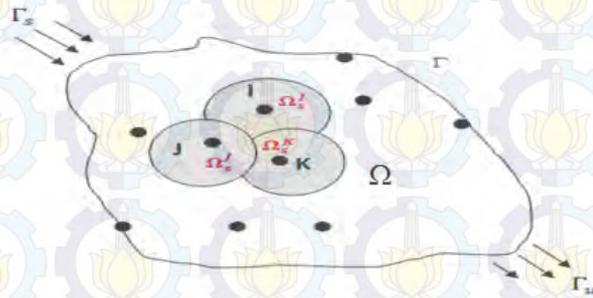
$$\int_{\Gamma} u_{,i}n_i v \, d\Gamma - \int_{\Gamma} uv_{,i}n_i \, d\Gamma + \int_{\Omega} u\nabla^2 v \, d\Omega - \int_{\Omega} pvd\Omega = 0 \quad (2.17)$$

Selanjutnya dengan memasukkan kedua *boundary condition* (2.15a) ke Persamaan (2.17) di peroleh :

$$\int_{\Gamma_q} \bar{q}v \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} qv \, d\Gamma - \int_{\Gamma_q} uv_{,i}n_i \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \bar{u}v_{,i}n_i \, d\Gamma + \int_{\Omega} u\nabla^2 v \, d\Omega - \int_{\Omega} pvd\Omega = 0 \quad (2.18)$$

metode ini menggunakan bentuk *local weak* sehingga benar-benar tidak menggunakan *mesh* dalam penerapannya, dan bentuk ini tidak menggunakan

domain Ω secara keseluruhan melainkan hanya pada subdomain-subdomain yang berada di dalam Ω tersebut. Atlury (2002) menyatakan bahwa subdomain-subdomain ini boleh mempunyai bentuk yang berbeda-beda dan saling berpotongan satu sama lain. Untuk 2 dimensi, subdomain tersebut dapat berbentuk lingkaran, ellips, bujur sangkar, persegi panjang atau bentuk-bentuk yang lain. Sedangkan untuk 3 dimensi, subdomain tersebut dapat berbentuk bola, kubus atau bentuk-bentuk sederhana lainnya. Penjelasan dari subdomain tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.6.1 berikut ini :



Gambar 2.6.1 Local Subdomain Ω_s dari domain Ω

diperoleh bentuk local *weak* dari Persamaan (2.16) sebagai berikut :

$$\int_{\Omega_s} (\nabla u^2(x) - p)v \, d\Omega = 0 \quad (2.19)$$

Dengan menggunakan rumus $(\nabla^2 u)v = u_{,ii}v$, *penalty* α dan teorema divergensi maka diperoleh bentuk LSWF dari Persamaan (2.6.1) yaitu :

$$\int_{\Gamma_s} qv \, d\Gamma - \int_{\Omega_s} (u_{,i}v_{,i} + pv) \, d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_u} (\bar{u} - u)v \, d\Gamma = 0 \quad (2.20)$$

Karena $\Gamma_s = L_s + \Gamma_{su} + \Gamma_{sq}$ maka :

$$\int_{L_s} qv \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} qv \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{sq}} \bar{q}v \, d\Gamma - \int_{\Omega_s} (u_{,i}v_{,i} + pv) \, d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_u} (\bar{u} - u)v \, d\Gamma = 0 \quad (2.21)$$

dengan Ω_s adalah subdomain, L_s *boundary* dari subdomain Ω_s , Γ_{su} *boundary* dari Ω_s yang berimpit dengan *boundary* domain dimana u (*essential boundary*) ditentukan, Γ_{sq} adalah *boundary* dari Ω_s yang berimpit dengan *boundary* domain dimana q (*natural boundary*) ditentukan. Untuk subdomain Ω_s yang secara keseluruhan berada di dalam domain Ω sedemikian hingga tidak berpotongan

dengan *boundary* dari Ω , maka integral pada *boundary* Γ_{su} dan Γ_{sq} dihilangkan maka bentuk *Local Weak* dari persamaan (2.21) adalah :

$$\int_{L_s} qv d\Gamma - \int_{L_s} uv_{,i}n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} qv d\Gamma + \int_{\Gamma_{sq}} \bar{q}v d\Gamma - \int_{\Gamma_{sq}} uv_{,i}n_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} \bar{u}v_{,i}n_i d\Gamma + \int_{\Omega_s} u\nabla^2 v d\Omega - \int_{\Omega_s} pvd\Omega = 0 \quad (2.22)$$

Perlu diketahui bahwa bentuk subdomain pada *local weak* ini tidak harus sama bentuk maupun ukurannya, sehingga bentuk subdomain yang digunakan dapat dipilih yang sederhana dengan catatan bahwa gabungan dari subdomain ini dapat mengcover keseluruhan domain, yaitu $\cup \Omega_s \supset \Omega$ (Atlury dan Shen, 2002).

2.7 Interpolasi *Moving Least Square* (MLS)

Misalkan sebuah fungsi taksiran $u(x)$ pada domain Ω dengan titik-titik sebaran $\{x_i\}, i=1, 2, 3, \dots, n$, penaksir MLS yaitu $u^h(x)$ dari $u(x), \forall x \in \Omega$ didefinisikan sebagai berikut (Atlury dan Shen, 2002):

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x)a_j(x) = p^T(x)a(x), \forall x \in \Omega \quad (2.23)$$

dengan $p^T(x) = [p_1(x), p_2(x), p_3(x), \dots, p_m(x)]$ adalah basis monomial lengkap orde m . Sebagai contoh $p^T(x)$ untuk 2 dimensi, bentuk linier :

$$p^T(x) = [1, x, y], m = 3$$

Dan bentuk kuadrat

$$p^T(x) = [1, x, y, x^2, xy, y^2], m = 6$$

$a(x)$ adalah vektor yang memuat koefisien-koefisien fungsi $a_j(x), j = 1, 2, \dots, m$ merupakan fungsi-fungsi variable x yang diperoleh dengan meminimumkan *norm* diskrit berbobot L_2 , yang didefinisikan sebagai berikut

$$J(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) [u^h(x_i) - \hat{u}_i(x_i)]^2$$

$$J(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) [p^T(x_i)a(x) - \hat{u}_i]^2$$

$$J(x) = [P \cdot a(x) - \hat{u}]^T \cdot W \cdot [P \cdot a(x) - \hat{u}] \quad (2.24)$$

dengan $w_i(x)$ adalah fungsi bobot dari titik x_i , dengan $w_i(x) > 0$ untuk semua x yang berada di dalam *support* dari $w_i(x)$, n adalah banyaknya titik yang berada di dalam domain Ω , dengan $w_i(x) > 0$.

Matriks \hat{u} , P dan W didefinisikan sebagai berikut :

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \dots \\ \hat{u}_n \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} p^T(x_1) \\ p^T(x_2) \\ \dots \\ p^T(x_n) \end{bmatrix} \text{ dan } W = \begin{bmatrix} w_1(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & w_n(x) \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini \hat{u}_i adalah nilai fiktif dan bukan nilai sebenarnya dari fungsi $u^h(x)$ secara umum. Selanjutnya dengan meminimumkan J pada persamaan (2.7.2):

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \quad (2.25)$$

maka akan diperoleh nilai $a(x)$, dengan hubungan antara $a(x)$ dan \hat{u} adalah sebagai berikut :

$$A(x)a = B(x)\hat{u} \quad (2.25a)$$

atau

$$a(x) = A^{-1}(x)B(x)\hat{u} \quad (2.25b)$$

dengan A dan B adalah matriks yang didefinisikan sebagai berikut :

$$A(x) = P^T W P = \sum_{i=1}^n w_i(x) p(x_i) p^T(x_i)$$

dan

$$B(x) = P^T W = [w_1(x)p(x_1), \dots, w_n(x)p(x_n)]$$

Dengan menyelesaikan Persamaan (2.25) terhadap $a(x)$, kemudian disubstitusikan ke Persamaan (2.23) di peroleh :

$$\begin{aligned} u^h(x) &= p^T(x)A^{-1}(x)B(x)\hat{u} \\ &= \Phi^T(x)\hat{u}, \\ &= \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \hat{u}_i \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$u^h(x) \equiv u_i = \hat{u}_i, \quad x \in \Omega$$

dengan :

$$\Phi^T(x) = p^T(x)A^{-1}(x)B(x) \text{ adalah fungsi } \textit{nodal} \text{ dari } x$$

Pemilihan fungsi bobot w yang akan digunakan adalah bebas selama fungsi bobot tersebut adalah positif dan kontinu. Fungsi bobot yang sering digunakan adalah fungsi bobot *Gaussian* dan fungsi bobot *spline*.

Fungsi bobot *Gaussian* (Atlury dan shen,2002) adalah:

$$w_i(x) = \begin{cases} \frac{\exp\left[-\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^{2k}\right] - \exp\left[-\left(\frac{r_i}{c_i}\right)^{2k}\right]}{1 - \exp\left[-\left(\frac{r_i}{c_i}\right)^{2k}\right]}, & 0 \leq d_i \leq r_i \\ 0, & d_i \geq r_i \end{cases} \quad (2.27)$$

dengan $d_i = |x - x_i|$ yang merupakan jarak antara x dan x_i , c_i adalah konstanta, dan r_i adalah ukuran dari *support* untuk fungsi bobot w_i .

Fungsi bobot *spline* (Atlury dan Shen,2002) adalah :

$$w_i(x) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^2 + 8\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^3 - 3\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^4, & 0 \leq d_i \leq r_i \\ 0, & d_i \geq r_i \end{cases} \quad (2.28)$$

Salah satu fungsi *test* yaitu fungsi *Heaviside*. Fungsi *test* ini merupakan fungsi *test* yang paling sederhana karena menggunakan fungsi konstan. Bahkan penggunaan fungsi ini sebagai fungsi *test* pada metode MLPG menjadi salah satu faktor metode MLPG dikatakan simpel dan efisien. Fungsi *test Heaviside* dapat dituliskan sebagai berikut (Atlury dan Shen,2002):

$$q(x) = \begin{cases} c, & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases} \quad (2.29)$$

dengan c adalah konstanta.

Untuk mendiskritisasi bentuk *local weak*, persamaan interpolasi MLS disubstitusi ke persamaan bentuk *weak* tersebut. Hasil substitusi tersebut dapat dibentuk menjadi sistem persamaan linier berikut (Atlury dan Shen,2002):

$$\begin{aligned} K \cdot \hat{u} &= f, \\ K\hat{u}' + C \cdot \hat{u} &= f \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.8 Gauss Kuadratur

Metode Gaus Kuadratur digunakan untuk menyelesaikan integral. Berikut ini penjelasan gauss kuadratur untuk problem satu dimensi dan dua dimensi.

2.8.1 Problem Satu Dimensi

Sebuah integral mempunyai limit-limit batas yang dapat ditransformasikan menjadi limit-limit dari -1 sampai +1. Untuk $f = f(x)$ dan dengan substitusi

$$x = \frac{(x_2 + x_1) + (x_2 - x_1)x_d}{2} \quad (2.31)$$

maka persamaan :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{-1}^1 \phi(x_d) dx_d \quad (2.32)$$

dengan

$$\phi(x_d) = f\left(\frac{(x_2 + x_1) + (x_2 - x_1)x_d}{2}\right) \quad (2.33)$$

Integral I ini ditransformasikan dari $f = f(x)$ menjadi $\phi = \phi(x_d)$, dengan x_d

adalah koordinat *sampling point* dan ϕ mengandung jacobian (J) dari transformasi, yaitu :

$$J = \frac{dx}{dx_d} = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \quad (2.34)$$

sehingga didapatkan formula kuadratur :

$$I = \int_{-1}^1 \phi dx_d \approx W_1\phi_1 + W_2\phi_2 + \dots + W_n\phi_n \quad (2.35)$$

Kemudian untuk mengaproksimasi nilai I , $\phi = \phi(x_d)$ dievaluasi pada setiap lokasi x_{di} untuk menghitung ϕ_i , kemudian mengalikan setiap ϕ_i dengan *weight* W_i . *Gauss* dapat menentukan lokasi x_{di} dan *weight* W_i dengan akurasi yang tinggi untuk setiap nilai n titik (Yulianto,2013).

2.8.2. Problem Dua Dimensi

Aturan Gauss multidimensional, yang disebut aturan produk *Gaussian*, dibentuk dari aplikasi aturan *Gauss* 1 dimensi, yaitu dengan substitusi

$$x = \frac{(x_2 + x_1) + (x_2 - x_1)x_d}{2} \quad (2.36)$$

dan

$$y = \frac{(y_2 + y_1) + (y_2 - y_1)y_d}{2} \quad (2.37)$$

sehingga persamaan :

$$I = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx dy \quad (2.38)$$

menjadi :

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(x_d, y_d) dx_d dy_d \quad (2.39)$$

dengan

$$\phi(x_d, y_d) = f\left(\frac{(x_2 + x_1) + (x_2 - x_1)x_d}{2}, \frac{(y_2 + y_1) + (y_2 - y_1)y_d}{2}\right) \quad (2.40)$$

Integral I ditransformasikan dari $f = f(x, y)$ menjadi $\phi = \phi(x_d, y_d)$, dengan x_d, y_d adalah koordinat *sampling point* dan ϕ mengandung jacobian (J) dari transformasi, yaitu :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dx_d} & \frac{dx}{dy_d} \\ \frac{dy}{dx_d} & \frac{dy}{dy_d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(x_2 - x_1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(y_2 - y_1) \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \quad (2.41)$$

mengingat fungsi $\phi = \phi(x_d, y_d)$, maka integrasi dilakukan pertama kali terhadap x_d , kemudian terhadap y_d .

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(x_d, y_d) dx_d dy_d \approx \int_{-1}^1 [\sum_i^n W_i \phi(x_{di}, y_d)] dy_d \\ &\approx \sum_{j=1}^n W_j \left[\sum_i^n W_i \phi(x_{di}, y_{dj}) \right] \\ &\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j \phi(x_{di}, y_{dj}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

(Yulianto, 2013)

2.9 Stabilitas dan Konsistensi Numerik

Untuk stabilitas numerik, skema numerik yang digunakan pada MLPG adalah skema eksplisit. Oleh karena itu perhitungannya dengan setiap waktu tertentu (Δt). Menurut (Yulianto, 2013) perhitungan ini dibuat untuk setiap waktu tertentu dengan menggunakan kriteria dibawah ini :

$$\Delta t \leq \frac{\min[dr(i, j)]}{2 \max \left[\left(\sqrt{gh + \sqrt{u^2 + v^2}} \right)_{i, j} \right]} \quad (2.43)$$

Δt adalah jarak antara setiap titik tengah dari masing-masing subdomain. Sedangkan untuk konsistensi numerik, didasarkan pada definisi konsisten, yaitu suatu metode dikatakan konsisten bila ordernya minimal satu. Berdasarkan definisi order, suatu metode dikatakan berorder p bila $l_n := \mathcal{O}(\Delta t^{p+1})$.

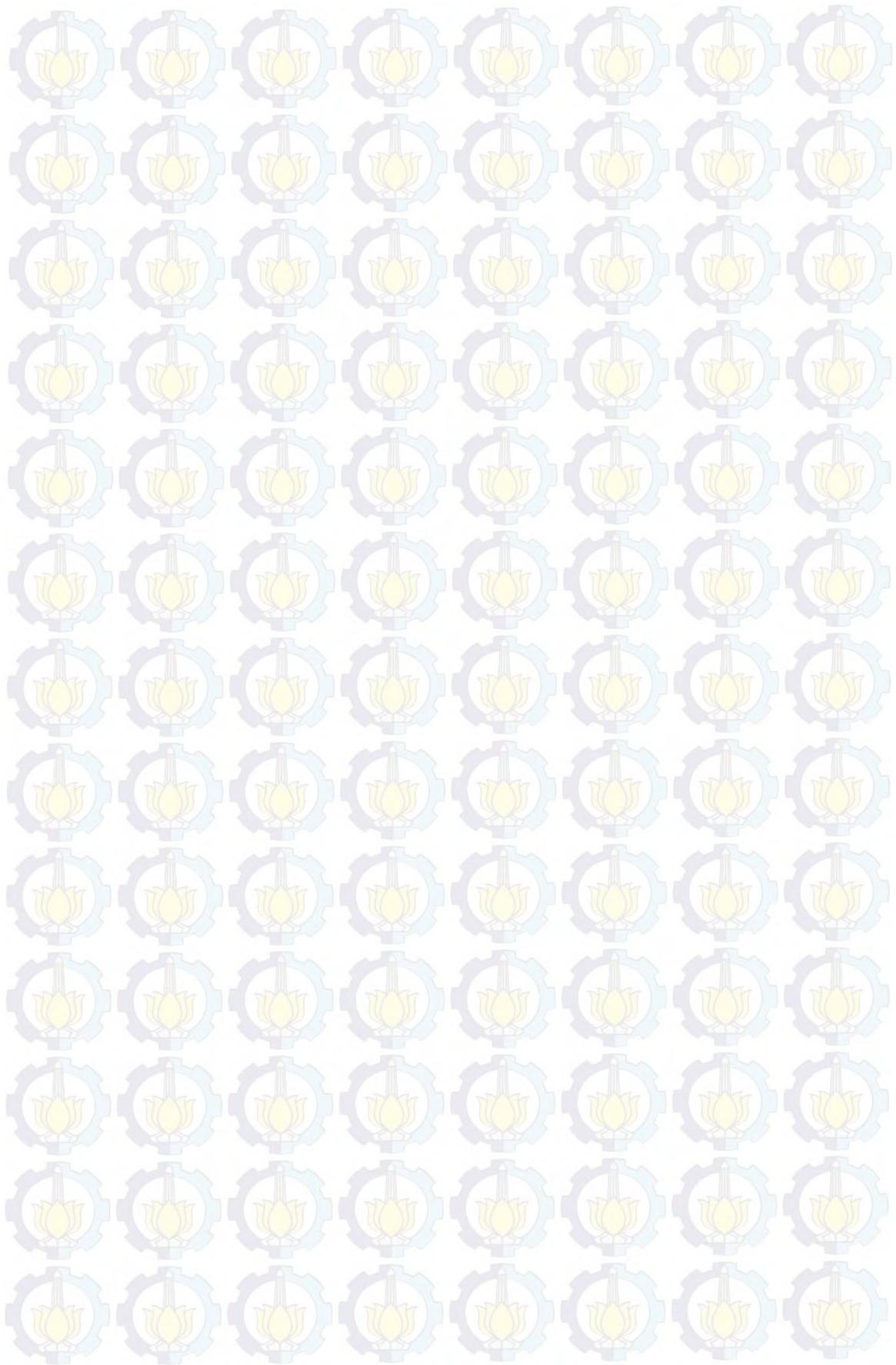
2.10 Diskritisasi Persamaan

Menurut (Widodo, 2012) diskritisasi persamaan terhadap waktu dengan menggunakan deret Taylor yaitu:

$$\hat{V}(t + \Delta t) = \hat{V}(t) + \frac{\hat{V}'(t)}{1!}(\Delta t) + \frac{\hat{V}''(t)}{2!}(\Delta t)^2 + \dots \quad (2.44)$$

Untuk order 1: $\hat{V}(t + \Delta t) = \hat{V}(t) + \frac{\hat{V}'(t)}{1!}(\Delta t)$ maka $\hat{V}'(t) = \frac{\hat{V}(t+\Delta t) - \hat{V}(t)}{\Delta t}$

Kemudian mensubstitusikannya ke dalam persamaan liniernya.



BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Lokasi Penelitian

Penelitian ini dilakukan di pertemuan dua sungai di Sungai Brantas, Mojokerto. Berikut ini adalah lokasi pertemuan sungai yaitu Sungai Marmoyo dan Sungai Surabaya yang menjadi objek penelitian:



Sumber: *Google Map*

Gambar 3.1 Peta Lokasi Daerah Aliran Sungai Brantas

3.2 Tahapan Penelitian

Pada bab ini diuraikan beberapa tahapan penelitian yang akan digunakan atau dikerjakan untuk mencapai tujuan penelitian. Adapun tahapan penelitian yang digunakan sebagai berikut:

a. Identifikasi Masalah.

Pada tahapan ini dilakukan identifikasi permasalahan yang ada, kemudian menuangkannya secara tertulis di dalam pendahuluan yang mencakup latar belakang, permasalahan, tujuan, batasan masalah, metodologi dan lokasi penelitian.

b. Studi Literatur.

Pada tahap ini dilakukan penentuan topik yang dipilih, mengkaji literatur, dan mencari literatur yang diperlukan.

c. Pengumpulan Data dan Survey Lapangan.

Pada tahap ini dilakukan pengambilan data sekunder di Perum Jasa Tirta. Data yang diperlukan dari Perum Jasa Tirta yaitu data pada tahun 2010 sampai 2013 sebagai berikut:

Data Parameter Air Sungai	Data Unsur Hidrodinamika
COD	Debit Sungai
BOD	Kecepatan Aliran
DO	Kedalaman Sungai
TSS	

selain pengambilan data juga dilakukan survey lapangan untuk mengetahui kondisi fisik dari daerah pertemuan dua sungai di Sungai Brantas.

d. Modifikasi Model Matematika

Pada tahap ini dilakukan modifikasi dan pengkajian model Sungai di pertemuan dua sungai berdasarkan Hukum Fisika dan Hukum Kimia.

e. Menerapkan Metode MLPG

Pada tahapan ini dicari penyelesaian numeriknya dengan menerapkan Metode MLPG pada model pertemuan dua sungai.

f. Verifikasi dan Simulasi

Melakukan verifikasi kemudian mensimulasikan pada software Matlab dengan memasukkan data parameter air sungai dan data unsur hidrodinamika ke dalam model matematika pertemuan dua sungai. Dari hasil simulasi ini nanti dapat dilihat persebaran polutan dan sedimennya.

g. Analisa Hasil dan Pembahasan

Berdasarkan hasil simulasi kemudian dianalisa hubungan antara parameter air sungai dengan unsur hidrodinamika sedemikian hingga dapat diketahui lokasi sumber pencemarnya.

h. Menyusun Laporan

Pada tahap ini dilakukan pendokumentasian hasil penelitian.

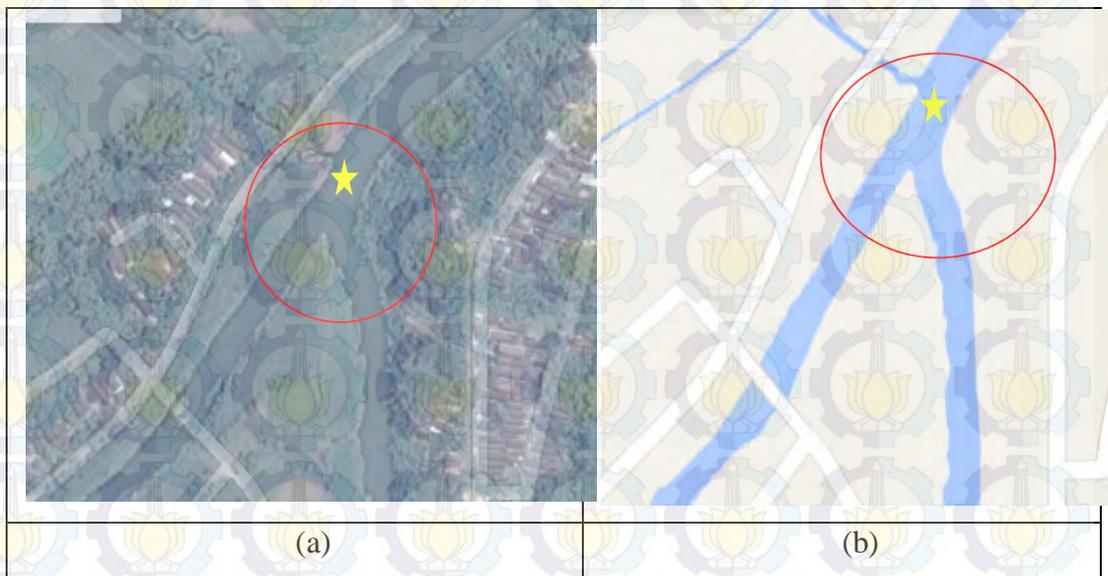
3.3 Jadwal Kegiatan

No	Nama Kegiatan	Waktu Pelaksanaan (dalam minggu)																			
		Bulan I				Bulan II				Bulan III				Bulan IV				Bulan V			
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	Identifikasi Masalah																				
2	Studi Literatur																				
3	Pengumpulan Data dan Survey																				
4	Modifikasi Model Matematika																				
5	Menerapkan Metode MLPG																				
6	Verifikasi & Simulasi																				
7	Analisa Hasil & Pembahasan																				
8	Menyusun Laporan																				

BAB 4 HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Memodelkan Persamaan Polutan dan Sedimentasi pada Volum Kendali

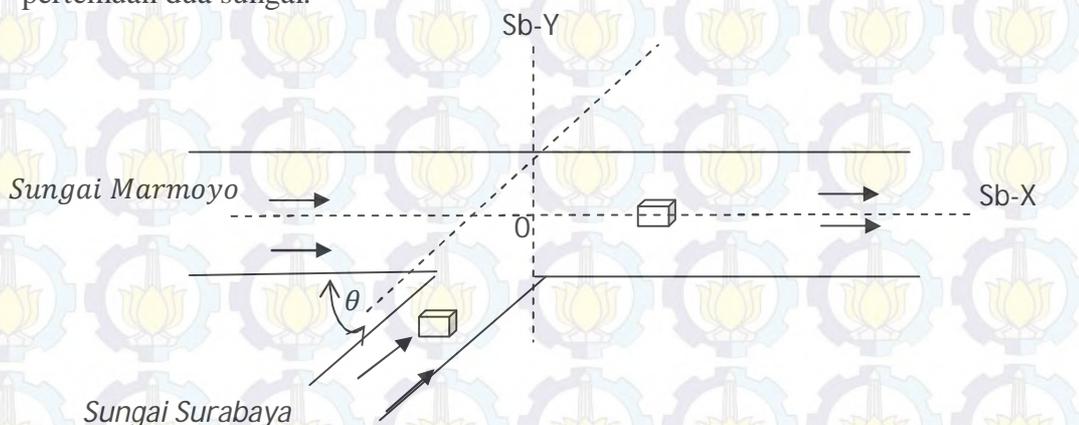
Untuk memodelkan persamaan penyebaran polutan dan sedimen pada pertemuan dua sungai yaitu dengan merepresentasikannya pada suatu volum kendali.



Sumber: Google Map

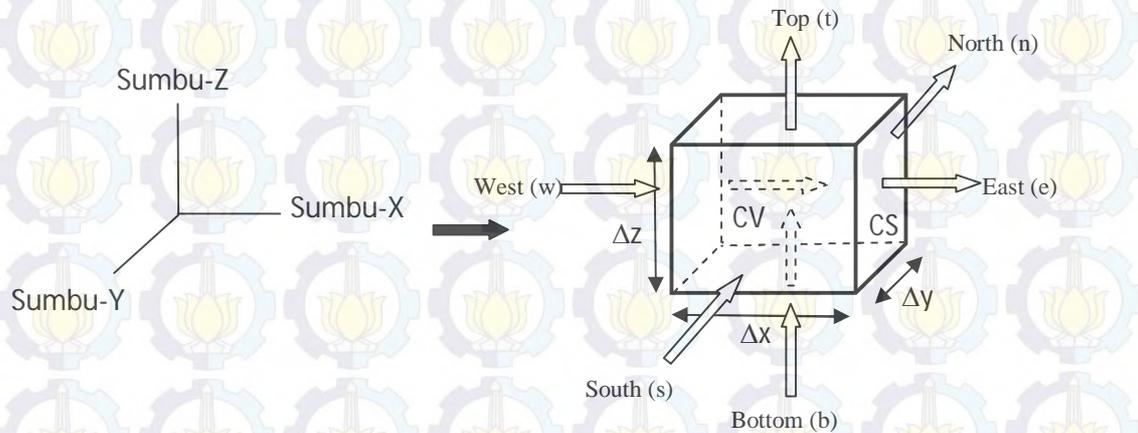
Gambar 4.1 Peta Lokasi Penelitian: (a) Citra Satelit , (b) Citra Peta

Berikut ini skematik untuk memudahkan dalam memodelkan persamaan pertemuan dua sungai.



Gambar 4.2 Diagram Skematik dari Pertemuan Dua Sungai

Dari Gambar 4.2 diasumsikan arah aliran pertemuan dua sungai pada sumbu-X dan sumbu-Y. Pada daerah pertemuan dua sungai diasumsikan terdapat suatu volum kendali.



Gambar 4.3 Volume Kendali Dari Aliran Pertemuan Dua Sungai

Pada Gambar 4.3 Sumbu-X merupakan arah komponen vektor searah dengan aliran sungai, Sumbu-Y merupakan arah komponen vektor searah dengan lebar sungai, dan Sumbu-Z merupakan arah komponen vektor searah dengan kedalaman sungai. Dalam suatu volum kendali berlaku beberapa hukum fisis yaitu hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum. Menurut Apsley (Apsley, 2011) terdapat beberapa faktor yang perlu diperhatikan dalam membentuk suatu model pada volum kendali. Adapun faktor tersebut yaitu:

- (i). Laju perpindahan yang melewati permukaan kendali (*Flux*).
- (ii). Laju hasil perubahan yang diakibatkan oleh volum kendali (*Source*).
- (iii). *Advection* yaitu perpindahan yang searah dengan arah aliran.
- (iv). *Diffusion* yaitu perpindahan yang tidak searah dengan arah aliran.

4.1.1. Persamaan Kekekalan Massa dalam Volum Kendali

Hukum kekekalan massa yang berlaku pada suatu volum kendali adalah sebagai berikut :

$$\{\text{Laju perubahan dalam volum kendali}\} + \{\text{Flux yang masuk dan keluar melalui permukaan kendali}\} = \{\text{gaya didalam volum kendali}\}$$

$$\frac{d}{dt}(\rho V) + \sum_{faces} \rho u A = 0 \quad (4.1)$$

Dari Gambar 4.3 diasumsikan arah aliran seragam searah Sumbu-X dan massa jenis air (ρ) sama yaitu untuk setiap waktu. Sehingga aliran sungai termasuk aliran tetap dan tidak mampat. Untuk volume kendali dimensi dua persamaan (4.1) dapat dituliskan dalam bentuk :

$$\frac{d}{dt}(\rho V) + (\rho u A)_e - (\rho u A)_w + (\rho v A)_n - (\rho v A)_s + (\rho w A)_t - (\rho w A)_b = 0 \quad (4.2)$$

dengan

A_e = permukaan kendali yang keluar sisi timur,

A_w = permukaan kendali yang masuk sisi barat,

A_n = permukaan kendali yang keluar sisi utara,

A_s = permukaan kendali yang masuk sisi selatan,

A_t = permukaan kendali yang keluar sisi atas,

A_b = permukaan kendali yang masuk sisi bawah,

u =kecepatan searah sumbu-X,

v =kecepatan searah sumbu-Y

w =kecepatan searah sumbu-Z

Karena $V = \Delta x \Delta y \Delta z$, $A_e = A_w = \Delta y \Delta z$, $A_n = A_s = \Delta x \Delta z$, dan $A_t = A_b = \Delta x \Delta y$ maka Persamaan (4.2) dapat ditulis menjadi :

$$\frac{d}{dt}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z) + \rho(u_e - u_w)\Delta y \Delta z + \rho(v_n - v_s)\Delta x \Delta z + \rho(w_t - w_b)\Delta x \Delta y = 0 \quad (4.3)$$

Diasumsikan pula volume kendalinya tetap dan tidak berubah bentuk, maka Persamaan (4.3) dapat dinyatakan dengan persamaan :

$$\Delta x \Delta y \Delta z \frac{d}{dt}(\rho) + \rho(u_e - u_w)\Delta y \Delta z + \rho(v_n - v_s)\Delta x \Delta z + \rho(w_t - w_b)\Delta x \Delta y = 0 \quad (4.4)$$

Kemudian Persamaan (4.4) disederhanakan dengan pembagi $(\Delta x \Delta y \Delta z)$, maka diperoleh persamaan yang baru yaitu :

$$\frac{d}{dt}(\rho) + \frac{\rho(u_e - u_w)}{\Delta x} + \frac{\rho(v_n - v_s)}{\Delta y} + \frac{\rho(w_t - w_b)}{\Delta z} = 0 \quad (4.5)$$

Dengan $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ dan $\Delta z \rightarrow 0$ diperoleh :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.6)$$

Karena alirannya tidak mampat maka $\frac{d\rho}{dt} = 0$ pada setiap waktu t , sehingga persamaan (4.6) jika dikalikan $\frac{1}{\rho}$ menjadi :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.7)$$

Persamaan (4.7) merupakan persamaan kekekalan massa pada volum kendali.

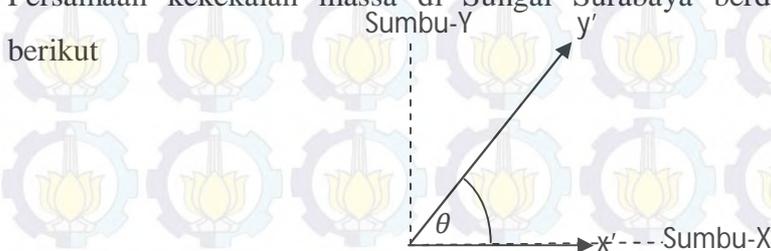
a. Persamaan Kekekalan Massa di Sungai Marmoyo:

Pada penelitian ini arah aliran pada volum kendali hanya ditinjau berdasarkan pada arah longitudinal (Sumbu-X) dan arah lateral (Sumbu-Y), maka pembentukan persamaan kekekalan massanya dalam bentuk dua dimensi yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.8)$$

b. Persamaan Kekekalan Massa di Sungai Surabaya:

Persamaan kekekalan massa di Sungai Surabaya berdasarkan pada ilustrasi berikut



Gambar 4.4 Arah perpindahan massa dalam dua dimensi.

Dari Gambar (4.4), Sumbu x' dan Sumbu y' mewakili arah aliran dari Sungai Surabaya, dengan cara yang sama maka untuk bentuk persamaan kekekalan massa di Sungai Surabaya sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \theta = 0 \quad (4.10)$$

c. Persamaan Kekekalan Massa di Pertemuan Sungai:

Pada pertemuan dua sungai terdapat kekekalan massa terhadap arah longitudinal (Sumbu-X) sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = Q_1 + Q_2 \quad (4.11)$$

dengan Q_1 adalah debit aliran di Sungai Marmoyo, Q_2 adalah debit aliran di Sungai Surabaya.

4.1.2. Persamaan Kekekalan Momentum dalam Volum Kendali

Persamaan kekekalan momentum digunakan metode volume hingga yang didasarkan pada hukum kekekalan momentum yaitu rata-rata perubahan momentum di dalam suatu volum kendali ditambah arus momentum yang keluar melalui permukaan kendali sama dengan laju perubahan momentum terhadap waktu, sehingga dalam bentuk matematisnya dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}(\text{momentum}) + (\text{net outward momentum flux}) = \text{force} \quad (4.12)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho \forall U) + \sum_{\text{faces}} \rho U A u = \sum F_{\text{system}} \quad (4.13)$$

dengan :

massa = $\rho \forall$; ρ = massa jenis ; \forall = volume
mass flux yang keluar = $\rho U A$; U = kecepatan dan A = luas permukaan

Persamaan kekekalan momentum diatas dapat dijabarkan menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho U + \rho q_b) + \frac{(\rho U u)_e - (\rho U u)_w}{\Delta x} + \frac{(\rho U v)_n - (\rho U v)_s}{\Delta y} + \frac{(\rho U w)_t - (\rho U w)_b}{\Delta z} \\ = \frac{F_{sx}}{\Delta x} + \frac{F_{sy}}{\Delta y} + \frac{F_{sz}}{\Delta z} + F_b \end{aligned} \quad (4.14)$$

Karena pada penelitian ini hanya menggunakan aliran lateral dan longitudinal, maka persamaan (4.14) menjadi:

$$\frac{d}{dt}(\rho U + \rho q_b) + \frac{(\rho U u)_e - (\rho U u)_w}{\Delta x} + \frac{(\rho U v)_n - (\rho U v)_s}{\Delta y} = \frac{F_{sx}}{\Delta x} + \frac{F_{sy}}{\Delta y} + F_b \quad (4.15)$$

$$\rho \left[\frac{d}{dt}(U + q_b) + \frac{(Uu)_e - (Uu)_w}{\Delta x} + \frac{(Uv)_n - (Uv)_s}{\Delta y} \right] = \frac{F_{sx}}{\Delta x} + \frac{F_{sy}}{\Delta y} + F_b \quad (4.16)$$

Jika kedua ruas dibagi dengan ρ , sehingga didapat sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}(U + q_b) + \frac{(Uu)_e - (Uu)_w}{\Delta x} + \frac{(Uv)_n - (Uv)_s}{\Delta y} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{F_{sx}}{\Delta x} + \frac{F_{sy}}{\Delta y} + F_b \right) \quad (4.17)$$

Gaya yang bekerja pada *surface force* fluida (F_s) adalah gaya tekan hidrostatis serta gaya-gaya yang bekerja pada *body force* fluida (F_b) yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$F_s = -\frac{p}{A} = -\frac{\frac{1}{2}\gamma h^2 b}{hb} = -\frac{1}{2}\rho gh \quad (4.18)$$

$$\tau_b = \rho gh(S_x + S_y) \quad (4.19)$$

dengan p adalah tekanan hidrostatis, τ_b adalah gaya gesek dasar sungai, dan S_x adalah kemiringan dasar saluran pada sumbu x , dan S_y adalah kemiringan dasar saluran pada sumbu y .

Selanjutnya pembentukan persamaan dalam arah sumbu-X dan sumbu-Y dapat dijabarkan sebagai berikut:

4.2. Pembentukan Persamaan Pembangun

Pembentukan persamaan pembangun berdasarkan persamaan hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum.

4.2.1. Persamaan Pembangun Kekekalan Momentum di Sungai Marmoyo:

Terhadap arah sumbu-X:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(U + q_b) + \frac{(Uu)_e - (Uu)_w}{\Delta x} + \frac{(Uv)_n - (Uv)_s}{\Delta y} \\ = \frac{1}{\rho} \left(\frac{-\frac{1}{2}\rho gh}{\Delta x} + \frac{-\frac{1}{2}\rho gh}{\Delta y} + \rho gh(S_x + S_y) \right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(U + q_b) + \frac{Uu_x}{\Delta x} + \frac{Uu_y}{\Delta y} \\ = \frac{1}{\rho} \left(\frac{-\frac{1}{2}\rho gh}{\Delta x} + \frac{-\frac{1}{2}\rho gh}{\Delta y} + \rho gh(S_x + S_y) \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

dengan limit $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ maka pada persamaan (4.21) diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(U + q_b) + \frac{Uu_x}{dx} + \frac{Uu_y}{dy} \\ = \frac{1}{\rho} \left(\frac{-\frac{1}{2}d\rho gh}{dx} + \frac{-\frac{1}{2}d\rho gh}{dy} + \rho gh(S_x + S_y) \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

karena $U = ui + vj$, maka persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk arah sumbu x dengan $U = u$ dan dengan $u_x = u, v_y = v$ maka persamaan (4.22) menjadi:

$$\frac{d}{dt}(u + q_b) + \frac{d(uu)}{dx} + \frac{d(uv)}{dy} \quad (4.23)$$

$$= \frac{-d(gh)}{2dx} + \frac{-d(gh)}{2dy} + gh(S_x + S_y)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u + q_b) + 2u \frac{du}{dx} + \left(u \frac{dv}{dy} + v \frac{du}{dy} \right) \\ = \frac{d(gh)}{2dx} - \frac{d(gh)}{2dy} + gh(S_x + S_y) \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u + q_b) + u \frac{du}{dx} + u \frac{du}{dx} + \left(u \frac{dv}{dy} + v \frac{du}{dy} \right) \\ = -\frac{d(gh)}{2dx} - \frac{d(gh)}{2dy} + gh(S_x + S_y) \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u + q_b) + u \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dy} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} \\ = -\frac{d(gh)}{2dx} - \frac{d(gh)}{2dy} + gh(S_x + S_y) \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u + q_b) + u \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} \right) + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} \\ = -\frac{d(gh)}{2dx} - \frac{d(gh)}{2dy} + gh(S_x + S_y) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Karena mensubstitusi persamaan (4.8) ke dalam persamaan (4.27) sehingga didapatkan persamaan persamaan pembangun Sungai Marmoyo pada arah sumbu-X sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}(u + q_b) + \frac{d(u^2)}{dx} + \frac{d(vu)}{dy} + \frac{d(gh)}{2dx} + \frac{d(gh)}{2dy} - gh(S_x + S_y) = 0 \quad (4.28)$$

$$\frac{d}{dt}(u + q_b) + \frac{d(u^2 + \frac{1}{2}gh)}{dx} + \frac{d(vu + \frac{1}{2}gh)}{dy} - gh(S_x + S_y) = 0 \quad (4.29)$$

Terhadap arah sumbu-Y:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u + q_b) + \frac{(Uu)_e - (Uu)_w}{\Delta x} + \frac{(Uv)_n - (Uv)_s}{\Delta y} \\ = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{1}{2}\rho gh \frac{1}{\Delta x} + -\frac{1}{2}\rho gh \frac{1}{\Delta y} + \rho gh(S_x + S_y) \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u + q_b) + \frac{Uu_x}{\Delta x} + \frac{Uu_y}{\Delta y} \\ = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{1}{2}\rho gh \frac{1}{\Delta x} + -\frac{1}{2}\rho gh \frac{1}{\Delta y} + \rho gh(S_x + S_y) \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

dengan limit $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ maka pada persamaan (4.29) diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u + q_b) + \frac{Uu_x}{dx} + \frac{Uu_y}{dy} \\ = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{1}{2}\rho gh \frac{d}{dx} - \frac{1}{2}\rho gh \frac{d}{dy} + \rho gh(S_x + S_y) \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

karena $U = ui + vj$, maka persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk arah sumbu y dengan $U = v$ dan $u_x = u, v_y = v$ maka persamaan (4.32) menjadi:

$$\frac{d}{dt}(v + q_b) + \frac{dvv}{dx} + \frac{dvv}{dy} = \frac{-dgh}{2dx} + \frac{-dgh}{2dy} + gh(S_x + S_y) \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v + q_b) + v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} + 2v \frac{dv}{dy} \\ = -\frac{dgh}{2dx} - \frac{dgh}{2dy} + gh(S_x + S_y) \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v + q_b) + v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + v \frac{dv}{dy} \\ = -\frac{dgh}{2dx} - \frac{dgh}{2dy} + gh(S_x + S_y) \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v + q_b) + v \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dy} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} \\ = -\frac{dgh}{2dx} - \frac{dgh}{2dy} + gh(S_x + S_y) \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v + q_b) + v \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} \right) + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} \\ = -\frac{dgh}{2dx} - \frac{dgh}{2dy} + gh(S_x + S_y) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Karena mensubstitusi persamaan (4.8) ke dalam persamaan (4.37) sehingga didapatkan persamaan pembangun sungai pada sumbu-y sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}(v + q_b) + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + \frac{dgh}{2dx} + \frac{dgh}{2dy} - gh(S_x + S_y) = 0 \quad (4.38)$$

$$\frac{d}{dt}(u + q_b) + \frac{d(vu + \frac{1}{2}gh)}{dx} + \frac{d(v^2 + \frac{1}{2}gh)}{dy} - gh(S_x + S_y) = 0 \quad (4.39)$$

4.2.2. Persamaan Pembangun Sungai Surabaya

Terhadap Arah Sumbu-X:

Untuk aliran sungai yang terdapat pada Sungai Surabaya dengan cara yang sama maka persamaan kekekalan momentum adalah sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}(u + q_b) + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy'} = -\frac{gh}{2dx} - \frac{gh}{2dy'} + gh(S_x + S_y) \quad (4.40)$$

dengan mensubstitusikan persamaan 4.10 ke dalam persamaan

$$\frac{d}{dt}(u + q_b) + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dx} \cos \theta + v \frac{du}{dy} \sin \theta \quad (4.41)$$

$$= -\frac{dgh}{2dx} - \frac{dgh}{2dx} \cos \theta - \frac{dgh}{2dy} \sin \theta + gh(S_x + S_y) \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u + q_b) + \frac{du^2}{dx} + \frac{d(uv \cos \theta)}{dx} + \frac{d(uv \sin \theta)}{dy} + \frac{d(\frac{1}{2}gh)}{dx} + \frac{d(\frac{1}{2}gh)}{dx} \cos \theta \\ + \frac{d(\frac{1}{2}gh)}{dy} \sin \theta - gh(S_x + S_y) = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\frac{d}{dt}(u + q_b) + \frac{d(u^2 + uv \cos \theta + \frac{1}{2}gh(1 + \cos \theta))}{dx} + \frac{d((uv + \frac{1}{2}gh) \sin \theta)}{dy} - gh(S_x + S_y) = 0 \quad (4.44)$$

Terhadap Arah Sumbu-Y:

$$\frac{d}{dt}(v + q_b) + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy'} = -\frac{dgh}{2dx} - \frac{dgh}{2dy'} + gh(S_x + S_y) \quad (4.45)$$

Dengan mensubstitusi (4.10) sehingga didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v + q_b) + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dx} \cos \theta + v \frac{dv}{dy} \sin \theta \\ = -\frac{dgh}{2dx} - \frac{dgh}{2dx} \cos \theta - \frac{dgh}{2dy} \sin \theta + gh(S_x + S_y) \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v + q_b) + \frac{d(uv + v^2 \cos \theta)}{dx} + \frac{d(v^2 \sin \theta)}{dy} + \frac{d(gh)}{2dx} \\ + \frac{d(gh \cos \theta)}{2dx} + \frac{d(gh \sin \theta)}{2dy} - gh(S_x + S_y) = 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\frac{d}{dt}(v + q_b) + \frac{d\left(uv + v^2 \cos \theta + \frac{1}{2}gh(1 + \cos \theta)\right)}{dx} + \frac{d\left((v^2 + \frac{1}{2}gh)\sin \theta\right)}{dy} - gh(S_x + S_y) = 0 \quad (4.48)$$

4.2.3. Persamaan Pembangun Pada Aliran Pertemuan Dua Sungai

Terhadap Arah Sumbu-X:

Pada pertemuan aliran dua sungai untuk kekekalan momentum berdasarkan dari persamaan (4.27) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u + q_b) + u \frac{du}{dx} + v \frac{dv}{dy} \\ = -\frac{dgh}{2dx} - \frac{dgh}{2dy} + gh(S_x + S_y) + v_1 Q_1 + v_2 Q_2 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Karena arah aliran pada pertemuan dua sungai lurus dan seragam, sehingga kecepatan untuk arah sumbu y sama dengan nol, sehingga persamaan (4.82) menjadi:

$$\frac{d}{dt}(u + q_b) + \frac{d(u^2 + \frac{1}{2}gh)}{dx} - gh(S_x + S_y) - v_1 Q_1 - v_2 Q_2 = 0 \quad (4.50)$$

Terhadap Arah Sumbu-Y:

Pada pertemuan aliran dua sungai untuk kekekalan momentum berdasarkan dari persamaan (4.37), sehingga diperoleh

$$\frac{d}{dt}(v + q_b) + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} = -\frac{dgh}{2dx} - \frac{dgh}{2dy} + gh(S_x + S_y) \quad (4.51)$$

Karena arah aliran pada pertemuan dua sungai lurus dan seragam, sehingga kecepatan untuk arah sumbu x sama dengan nol, sehingga persamaan (4.44) menjadi:

$$\frac{d}{dt}(v + q_b) + \frac{d(v^2 + \frac{1}{2}gh)}{dy} - gh(S_x + S_y) = 0 \quad (4.52)$$

Untuk kekekalan massa sedimen pada aliran lurus, didapatkan:

$$\frac{dz_b}{dt} + \frac{1}{(1-p)} \left(\frac{dq_b}{dx} + \frac{dq_b}{dy} \right) = 0 \quad (4.53)$$

Untuk transportasi sedimen didapatkan:

$$q_b = c_m [(s-1)g]^{0.5} d_{50}^{1.5} (\mu\theta_b - \theta_c)^{1.5} \quad (4.54)$$

dengan:

q_b = banyaknya sedimen *bed load*

s = rasio massa jenis sedimen dengan massa jenis air

$d_{50}^{1.5}$ = rata-rata diameter sedimen

c_m = 8.0

μ = 1.0

θ_c = 0.047

$\theta_b = \frac{\tau_b}{(\rho_b - \rho)gd_{50}}$

dimana:

$$\tau_b = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{0.06}{\left(\log \left(\frac{12h}{2.5d_{50}} \right) \right)^2} \right) u^2$$

dengan:

ρ = massa jenis air

τ_b = tegangan geser

4.2.4. Persamaan Pembangun Skalar Transport Konsentrasi Polutan

Perubahan konsentrasi didapatkan dari persamaan skalar transport (Apsley, 2011) adalah sebagai berikut: Skalar transport yaitu persamaan yang diturunkan dari beberapa kuantitas fisik yang menyebabkan adveksi dan difusi. Nilai skalar transport mengacu pada luas daerah dan gradien dari konsentrasi, sehingga dengan menggunakan hukum Fick diperoleh:

$$\frac{d}{dt} (\text{mass} \times V) + \sum \left((\text{mass flux} \times V) + \left(-E \frac{\partial c}{\partial n} A \right) \right) = \text{source density}(s) \times \text{Volume}(V) \quad (4.55)$$

a. Persamaan Pembangun Skalar *Transport* Polutan di Sungai Marmoyo

Untuk persamaan *transport* dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}(\rho \forall C) + \sum \text{faces} \left((\rho u \cdot A)C - E \frac{\partial C}{\partial n} A \right) = s \forall \quad (4.56)$$

Dengan $\forall = \Delta x \Delta y \Delta z$ dari persamaan (4.47) didapatkan:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\rho C) \Delta x \Delta y \Delta z + \left(\rho u C A - E_x \frac{\partial C}{\partial x} A \right)_e - \left(\rho u C A - E_x \frac{\partial C}{\partial x} A \right)_w + \\ & \left(\rho u C A - E_y \frac{\partial C}{\partial y} A \right)_n - \left(\rho u C A - E_y \frac{\partial C}{\partial y} A \right)_s + \left(\rho u C A - E_z \frac{\partial C}{\partial z} A \right)_t - \\ & \left(\rho u C A - E_z \frac{\partial C}{\partial z} A \right)_b = s \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (4.57)$$

Diketahui skalar *transport* adalah tetap dan tidak terdeformasi. Dengan $A_e = A_w = \Delta y \Delta z, A_n = A_s = \Delta x \Delta z$, dan $A_t = A_b = \Delta x \Delta y$ sehingga dari persamaan (4.48) dapat dinyatakan ke dalam persamaan:

$$\begin{aligned} & \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial}{\partial t}(\rho C) + (\rho C)(u_e - u_w) \Delta y \Delta z + (\rho C)(u_n - u_s) \Delta x \Delta z \\ & + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(-E_x C) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(-E_y C) = s \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (4.58)$$

Kedua ruas dibagi $\Delta x \Delta y \Delta z$ maka didapatkan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\rho C) + \frac{(\rho C)(u_e - u_w)}{\Delta x} - \frac{\left(E_x \frac{dC}{dx} \right)}{\Delta x} + \frac{(\rho C)(u_n - u_s)}{\Delta y} - \frac{\left(E_y \frac{dC}{dy} \right)}{\Delta y} \\ & + \frac{(\rho C)(u_t - u_b)}{\Delta z} - \frac{\left(E_z \frac{dC}{dz} \right)}{\Delta z} = s \end{aligned} \quad (4.59)$$

Untuk limit $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho C) + \frac{d}{dx} \left((\rho C)u_x - \left(E_x \frac{dC}{dx} \right) \right) + \frac{d}{dy} \left((\rho C)v_y - \left(E_y \frac{dC}{dy} \right) \right) \\ + \frac{d}{dz} \left((\rho C)w_z - \left(E_z \frac{dC}{dz} \right) \right) = s \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho C) + \frac{d}{dx}(\rho C)u_x + \frac{d}{dy}(\rho C)v_y + \frac{d}{dz}(\rho C)w_z - \left(E_x \frac{d^2 C}{dx^2} \right) \\ - \left(E_y \frac{d^2 C}{dy^2} \right) - \left(E_z \frac{d^2 C}{dz^2} \right) = s \end{aligned} \quad (4.61)$$

Karena pada penelitian ini hanya menggunakan arah lateral dan longitudinal, sehingga persamaan (4.52) menjadi:

$$\frac{d}{dt}(\rho C) + \frac{d}{dx}(\rho C)u_x + \frac{d}{dy}(\rho C)v_y - \left(E_x \frac{d^2 C}{dx^2} \right) - \left(E_y \frac{d^2 C}{dy^2} \right) = s \quad (4.62)$$

Karena aliran sungai merupakan *incompressible*, maka persamaan (4.54) menjadi:

$$\rho \left[\frac{dC}{dt} + \frac{d}{dx}(u_x C) + \frac{d}{dy}(v_y C) - \left(\frac{E_x}{\rho} \frac{d^2 C}{dx^2} \right) - \left(\frac{E_y}{\rho} \frac{d^2 C}{dy^2} \right) \right] = s \quad (4.63)$$

dengan membagi kedua ruas dengan ρ , maka persamaan (4.54) menjadi:

$$\frac{dC}{dt} + \frac{d}{dx}(u_x C) + \frac{d}{dy}(v_y C) - \left(\frac{E_x}{\rho} \frac{d^2 C}{dx^2} \right) - \left(\frac{E_y}{\rho} \frac{d^2 C}{dy^2} \right) = \frac{s}{\rho} \quad (4.64)$$

Karena sungai utama kondisinya laminar, maka dari persamaan (4.55) menjadi:

$$\frac{dC}{dt} + \frac{d}{dx}(u_x C) + \frac{d}{dy}(v_y C) = \frac{s}{\rho} \quad (4.65)$$

dengan $u_x = u$ adalah kecepatan pada sumbu x dan $v_x = v$ adalah kecepatan pada sumbu y , sehingga didapatkan persamaan skalar *transport* pada Sungai Marmoyo yaitu sebagai berikut:

$$\frac{dC}{dt} + \frac{d(uC)}{dx} + \frac{d(vC)}{dy} = \frac{s}{\rho} \quad (4.66)$$

b. Persamaan Pembangun Skalar *Transport* Polutan di Sungai Surabaya.

Transport sungai diperoleh dengan cara yang sama sebagai berikut:

$$\frac{dC}{dt} + \frac{d(uC)}{dx'} + \frac{d(vC)}{dy'} = \frac{s}{\rho} \quad (4.67)$$

$$\frac{dC}{dt} + \frac{d(uC)}{dx} + \frac{d(vC)}{dx} \cos \theta + \frac{d(vC)}{dy} \sin \theta = \frac{s}{\rho} \quad (4.68)$$

$$\frac{dC}{dt} + \frac{d(uC)}{dx} + v \left(\frac{dC}{dx} \cos \theta + \frac{dC}{dy} \sin \theta \right) = \frac{s}{\rho} \quad (4.69)$$

4.3. Penerapan Metode MLPG Pada Model Polutan dan Sedimentasi.

4.3.1. Persamaan Global Weak:

Penerapan MLPG di Pertemuan Sungai:

a. Pada arah sumbu-X

Kekekalan massa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = Q_1 + Q_2 \quad (4.83)$$

Kekekalan momentum:

$$\frac{d}{dt}(u + q_b) + \frac{d(u^2 + \frac{1}{2}gh)}{dx} = gh(S_x + S_y) + v_1 Q_1 + v_2 Q_2 \quad (4.84)$$

Transport Konsentrasi Polutan:

$$\frac{dC}{dt} + \frac{d(uC)}{dx} + \frac{d(vC)}{dy} = \frac{s}{\rho} \quad (4.85)$$

Jika Persamaan disusun dalam bentuk matriks diperoleh sistem persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} 0 \\ u + q_b \\ C \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} u \\ u^2 + \frac{1}{2}gh \\ uC \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ vC \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 + Q_2 \\ gh(S_x + S_y) + v_1 Q_1 + v_2 Q_2 \\ \frac{s}{\rho} \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

misalkan : $U_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ u + q_b \\ C \end{bmatrix}$, $F_1(U_1) = \begin{bmatrix} u \\ u^2 + \frac{1}{2}gh \\ uC \end{bmatrix}$

$$H_1(U_1) = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ vC \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} Q_1 + Q_2 \\ gh(S_x + S_y) + v_1Q_1 + v_2Q_2 \\ \frac{s}{\rho} \end{bmatrix}$$

Sehingga sistem Persamaan (4.39) dapat ditulis menjadi :

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1(U_1)}{\partial x} + \frac{\partial H_1(U_1)}{\partial y} = G_1 \quad (4.87)$$

b. Pada arah sumbu-Y

Pada arah sumbu-Y diperoleh sistem persamaan kekekalan massa, kekekalan momentum dan tranport konsentrasi polutan sebagai berikut:

Kekekalan massa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = Q_1 + Q_2 \quad (4.88)$$

Kekekalan momentum:

$$\frac{d}{dt}(v + q_b) + \frac{d(v^2 + \frac{1}{2}gh)}{dy} - gh(S_x + S_y) = 0 \quad (4.89)$$

Tranport Konsentrasi Polutan:

$$\frac{dC}{dt} + \frac{d(uC)}{dx} + v \left(\frac{dC}{dx} \cos \theta + \frac{dC}{dy} \sin \theta \right) = \frac{s}{\rho} \quad (4.90)$$

Selanjutnya persamaan tersebut disusun dalam bentuk matriks sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} 0 \\ v + q_b \\ C \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} u \\ v^2 + \frac{1}{2}gh \\ C(u + v \cos \theta) \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ C \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 + Q_2 \\ gh(S_x + S_y) \\ \frac{s}{\rho} \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

$$\text{misalkan : } U_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ u + q_b \\ C \end{bmatrix}, \quad F_2(U_2) = \begin{bmatrix} u \\ v^2 + \frac{1}{2}gh \\ C(u + v \cos \theta) \end{bmatrix}$$

$$H_2(U_2) = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ C \sin \theta \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} Q_1 + Q_2 \\ gh(S_x + S_y) \\ s \\ \rho \end{bmatrix}$$

Sehingga sistem Persamaan (4.91) dapat ditulis menjadi :

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2(U_2)}{\partial x} + \frac{\partial H_2(U_2)}{\partial y} = G_2 \quad (4.92)$$

4.3.2. Bentuk *local weak*

Untuk dapat menyelesaikan Persamaan (4.87) dan (4.92) menggunakan MLPG, maka persamaan tersebut terlebih dahulu diubah ke dalam bentuk *local weak*. Pengubahan bentuk Persamaan menjadi bentuk *local weak* dilakukan dengan merubahnya ke dalam bentuk residual, sehingga diperoleh :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial H(U)}{\partial y} - G = 0 \quad (4.93)$$

Persamaan (4.93) kemudian diboboti fungsi *test q*, kemudian diintegrasikan terhadap sub domain $\Omega_{sx} = [x_{sl} \ x_{sr}]$ dan $\Omega_{sy} = [y_{sl} \ y_{sr}]$ diperoleh :

$$\int_{\Omega_{sx}} \int_{\Omega_{sy}} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial H(U)}{\partial y} - G \right) q d\Omega_{sy} d\Omega_{sx} = 0 \quad (4.94)$$

dengan *q* adalah fungsi *test Heaviside*.

Dengan pengintegralan pada Persamaan (4.94) diperoleh :

$$\begin{aligned} & \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} \frac{\partial U}{\partial t} q dx dy + \\ & \left(\int_{y_{sl}}^{y_{sr}} F(U) q \Big|_{x_{sl}}^{x_{sr}} dy - \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} F(U) \frac{\partial q}{\partial x} dy dx \right) + \\ & \left(\int_{x_{sl}}^{x_{sr}} H(U) q \Big|_{y_{sl}}^{y_{sr}} dx - \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} H(U) \frac{\partial q}{\partial y} dy dx \right) - \end{aligned} \quad (4.95)$$

$$\int_{y_{sl}}^{y_{sr}} \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} G q dx dy = 0$$

dengan x_{sl} dan y_{sl} adalah batas bawah sedangkan x_{sr} dan y_{sr} adalah batas atas dari sub domain Ω_s .

Jika Persamaan (4.95) disederhanakan, maka diperoleh bentuk *local weak* dari Persamaan (4.95), yaitu :

$$\int_{y_{sl}}^{y_{sr}} \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} \frac{\partial U}{\partial t} dx dy + \left(\int_{y_{sl}}^{y_{sr}} F(U)|_{x_{sl}}^{x_{sr}} dy + \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} H(U)|_{y_{sl}}^{y_{sr}} dx \right) - \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} G dx dy = 0 \quad (4.96)$$

4.3.3. Pendekatan *Moving Least Square* (MLS)

Nilai U pada Persamaan (4.96) didekati dengan pendekatan MLS sebagai berikut :

$$U^h(x, y, t) = \sum_{j=I_{sl}}^{I_{sr}} \phi_j(x, y) \dot{U}_j(t) \quad (4.97)$$

dengan I_{sl} adalah indeks terkecil dan I_{sr} adalah indeks terbesar dari titik diskrit yang berada di dalam subdomain $[x_{sl} \ x_{sr}]$ dan $[y_{sl} \ y_{sr}]$ sehingga :

$$\phi_j(x, y) = \sum_{i=1}^n p_i(x, y) (A^{-1}(x, y) B(x, y))_{i,j} \quad (4.98)$$

Turunan terhadap waktu dari fungsi MLS adalah :

$$U_t^h(x, y, t) = \sum_{j=I_{sl}}^{I_{sr}} \phi_j(x, y) \dot{U}_j'(t) \quad (4.99)$$

Persamaan (4.98) dan (4.99) disubstitusikan ke persamaan (4.96) sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned}
& \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} \sum_{j=I_{sl}}^{I_{sr}} \phi_j(x, y) \dot{U}_j'(t) dx dy + \\
& \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} F \left(\sum_{j=I_{sl}}^{I_{sr}} \phi_j(x, y) \dot{U}_j(t) \right) \Big|_{x_{sl}}^{x_{sr}} dy + \\
& \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} H \left(\sum_{j=I_{sl}}^{I_{sr}} \phi_j(x, y) \dot{U}_j(t) \right) \Big|_{y_{sl}}^{y_{sr}} dx - \\
& \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} G dx dy = 0
\end{aligned} \tag{4.100}$$

Selanjutnya jika tanda *sigma* dikeluarkan dari integral maka didapat :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=I_{sl}}^{I_{sr}} \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} \phi_j(x, y) \dot{U}_j'(t) dx dy + \\
& \sum_{j=I_{sl}}^{I_{sr}} \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} F \left(\phi_j(x, y) \dot{U}_j(t) \right) \Big|_{x_{sl}}^{x_{sr}} dy + \\
& \sum_{j=I_{sl}}^{I_{sr}} \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} H \left(\phi_j(x, y) \dot{U}_j(t) \right) \Big|_{y_{sl}}^{y_{sr}} dx - \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} G dx dy = 0
\end{aligned} \tag{4.101}$$

Karena $\dot{U}_j(t)$ dan $\dot{U}_j'(t)$ independen terhadap x dan y maka :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=I_{sl}}^{I_{sr}} \dot{U}_j'(t) \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} \phi_j(x, y) dx dy + \\
& \sum_{j=I_{sl}}^{I_{sr}} \dot{U}_j(t) \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} F \left(\phi_j(x, y) \right) \Big|_{x_{sl}}^{x_{sr}} dy +
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1_{sl}}^{I_{sr}} \dot{U}_j(t) \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} H(\phi_j(x, y)) \Big|_{y_{sl}}^{y_{sr}} dx - \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} G dx dy = 0 \quad (4.102)$$

Selanjutnya Persamaan (4.102) dapat disederhanakan menjadi :

$$\sum_{j=1_{sl}}^{I_{sr}} \dot{U}_j'(t) \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} \phi_j(x, y) dx dy + \sum_{j=1_{sl}}^{I_{sr}} \dot{U}_j(t) \left(\int_{y_{sl}}^{y_{sr}} F(\phi_j(x, y)) \Big|_{x_{sl}}^{x_{sr}} dy + \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} H(\phi_j(x, y)) \Big|_{y_{sl}}^{y_{sr}} dx \right) - \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} G dx dy = 0 \quad (4.103)$$

Misalkan :

$$K_j = \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} \phi_j(x, y) dx dy$$

$$D_j = \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} F(\phi_j(x, y)) \Big|_{x_{sl}}^{x_{sr}} dy + \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} H(\phi_j(x, y)) \Big|_{y_{sl}}^{y_{sr}} dx$$

$$f = \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} G dx dy$$

Dan Persamaan (4.103) diimplementasikan pada setiap subdomain Ω_{si} maka persamaan (4.103) menjadi :

$$\sum_{j=1_{sl}}^{I_{sr}} \dot{U}_j'(t) K_{i,j} + \sum_{j=1_{sl}}^{I_{sr}} \dot{U}_j(t) D_{i,j} - f = 0 \quad (4.104)$$

Persamaan (4.104) dapat ditulis dalam bentuk matriks, yaitu :

$$K\dot{U}'_j + D\dot{U}_j - f = 0 \quad (4.105)$$

dengan :

$K = [K_1, K_2, K_3, \dots, K_n]^T$ merupakan bentuk transpose dari matrik kolom K

$D = [D_1, D_2, D_3, \dots, D_n]^T$ merupakan bentuk transpose dari matrik kolom D

$f = [f_1, f_2, f_3, \dots, f_n]^T$ merupakan bentuk transpose dari matrik kolom f

$f_i = [f_{i1}, f_{i2}, f_{i3}, \dots, f_{in}]^T$ merupakan bentuk transpose dari matrik kolom f_i

$\dot{U} = [\dot{U}_1 \ \dot{U}_2 \ \dot{U}_3 \ \dots \ \dot{U}_n]^T$ merupakan bentuk transpose dari matrik \dot{U}

$\dot{U}' = [\dot{U}'_1 \ \dot{U}'_2 \ \dot{U}'_3 \ \dots \ \dot{U}'_n]^T$ merupakan bentuk transpose dari matrik \dot{U}'

Selanjutnya untuk f_i dan f_{li} yaitu

$$f_i = \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} G_i dx dy$$

$$f_{li} = \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} G_{li} dx dy$$

dengan

$$G_i = \left[Q_1 + Q_2 \quad gh(S_x + S_y) + v_1 Q_1 + v_2 Q_2 \quad \frac{S}{\rho} \right]^T$$

$$G_{li} = \left[Q_1 + Q_2 \quad gh(S_x + S_y) \quad \frac{S}{\rho} \right]^T$$

Untuk menghitung integral K_i dan D_j

$$K_i = \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} \phi_i(x, y) dx dy$$

$$D_j = \int_{y_{sl}}^{y_{sr}} F(\Phi_j(x, y)) \Big|_{x_{sl}}^{x_{sr}} dy + \int_{x_{sl}}^{x_{sr}} H(\Phi_j(x, y)) \Big|_{y_{sl}}^{y_{sr}} dx$$

dengan

$$F(\Phi_i(x, y)) = \left[u \quad u^2 + \frac{1}{2}gh \quad uC \right]^T$$

$$H(\Phi_i(x, y)) = \left[0 \quad \frac{1}{2}gh \quad 0 \right]^T$$

$$\Phi_i(x, y) = p^T(x_i, y_i)A_i^{-1}(x, y)B_i(x, y)$$

dengan

$p^T(x_i, y_i) = [1 \ x_i \ y_i]$ merupakan basis monomial berorde 3

Kemudian A_i dan B_i didefinisikan sebagai berikut

$$A_i = P^T W_i P = [1 \ x_i \ y_i] \begin{bmatrix} w_1(x, y) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & w_n(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^T(x_1, y_1) \\ p^T(x_2, y_2) \\ p^T(x_3, y_3) \\ \dots \\ p^T(x_n, y_n) \end{bmatrix}$$

$$B_i = P^T W_i = [1 \ x_i \ y_i] \begin{bmatrix} w_1(x, y) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & w_n(x, y) \end{bmatrix}$$

Dengan fungsi bobotnya menggunakan fungsi bobot *spline* yang didefinisikan sebagai berikut:

$$w_i(x) = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{d_i}{r_i} \right)^2 + 8 \left(\frac{d_i}{r_i} \right)^3 - 3 \left(\frac{d_i}{r_i} \right)^4, & 0 \leq d_i \leq r_i \\ 0, & d_i \geq r_i \end{cases}$$

untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan r_i adalah jari-jari domain terdefinisi untuk sub domain

ke- i , sedangkan $d_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$ adalah jarak antara x, y dan x_i, y_i .

4.3.4. Diskritisasi Persamaan Terhadap Waktu.

Persamaan (4.105) didiskritkan terhadap waktu dengan menggunakan deret Taylor, yaitu :

$$K\dot{U}^{(t+\Delta t)} + (\Delta t D - K)\dot{U}^{(t)} - \Delta t f = 0 \quad (4.106)$$

Dengan mengumpulkan setiap komponen dalam waktu t ke ruas kanan, diperoleh persamaan linier yang terdiskritisasi terhadap waktu t , yaitu :

$$\dot{U}^{(t+\Delta t)} = K^{-1} \left((K - \Delta t D)\dot{U}^{(t)} + \Delta t f \right) \quad (4.107)$$

4.3.5. Tahap Penyelesaian Numerik

Untuk menyelesaikan Persamaan (4.107) pada domain Ω , disusun algoritma penyelesaian sebagai berikut :

1. Mendefinisikan domain Ω dan *boundary* Γ .
2. Mendefinisikan sejumlah titik x_i dan y_i didalam domain Ω dan *boundary* Γ tersebut dan menentukan titik-titik koordinatnya.
3. Menetapkan subdomain Ω_s dan *boundary*-nya Γ_s di dalam domain Ω untuk setiap titik yang telah dibuat pada no.1 dengan titik tersebut sebagai pusatnya.
4. Menetapkan *domain of influence* yang berisi titik-titik disekitar x_i dan y_i dimana $w_i(x_i, y_i) > 0$.
5. Menetapkan *initial condition* (untuk waktu $t=0$) dan *boundary condition*
6. Mengulang proses 6 sampai dengan 7 terhadap setiap titik pada subdomain Ω_s dan *boundary* Γ_s .
7. Menentukan titik-titik kuadratur Gaussian x_Q dan y_Q pada subdomain Ω_s dan *boundary* Γ_s .
8. Mengulang proses item 8 sampai 10 untuk setiap titik-titik kuadratur Gaussian x_Q dan y_Q yang ada pada subdomain Ω_s dan *boundary* Γ_s .
9. Tentukan titik-titik x_i dan y_i pada domain terdefinisi dari MLS, yaitu titik yang memenuhi $w_i(x_Q, y_Q) > 0$.
10. Hitung $\Phi(x_Q, y_Q)$.
11. Dari hasil no.10 dihitung K, C, f
12. Menyusun hasil dari item 9 ke dalam bentuk matriks K, D, f .
13. Mengulang langkah item 13 sampai item 14 untuk $t = 0$ sampai $t = T$.
14. Hitung $\hat{U}^{(t+\Delta t)}$ menggunakan Persamaan (4.108).

4.3.6. Stabilitas dan Konsistensi Numerik

Skema numerik yang digunakan pada MLPG adalah skema eksplisit. Oleh karena itu perhitungannya dengan setiap waktu tertentu (Δt). Perhitungan ini dibuat untuk setiap waktu tertentu dengan menggunakan kriteria dibawah ini

$$\Delta t \leq \frac{\min[dr(i,j)]}{2\max\left[\left(\sqrt{gh+\sqrt{u^2+v^2}}\right)_{i,j}\right]} \quad (4.108)$$

dr adalah jarak antara setiap titik tengah dari masing-masing subdomain.

Suatu metode dikatakan konsisten bila ordernya minimal satu. Berdasarkan definisi order, suatu metode dikatakan berorder p bila $l_n := \mathcal{O}(\Delta t^{p+1})$. Dapat dibuktikan bahwa metode *Meshless Local Petrov-Galerkin* (MLPG) adalah konsisten. Hal ini dapat ditelusuri dengan menentukan kesalahan pemenggalan lokal pada saat pendiskritan terhadap waktu. Persamaan (4.108) didiskritkan terhadap waktu dengan menggunakan deret Taylor, yaitu :

$$U^{(t+\Delta t)} = \dot{U}(t) + \frac{\Delta t}{1!} U''(t) + \frac{\Delta t^2}{2!} \dot{U}'''(t) + \dots \quad (4.109)$$

Untuk diskritisasi terhadap waktu t pada Metode MLPG, Persamaan (4.109) dapat disederhanakan menjadi :

$$U^{(t+\Delta t)} = \dot{U}(t) + \frac{\Delta t}{1!} U''(t) \quad (4.110)$$

Sehingga kesalahan pemenggalan lokal pada diskritisasi terhadap waktu t adalah :

$$l_n := \frac{\Delta t^2}{2!} \dot{U}'''(t) + \frac{\Delta t^3}{3!} \dot{U}^{(4)}(t) + \dots$$

$$l_n := \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (4.111)$$

Dari persamaan (4.110), maka jelas bahwa metode MLPG memenuhi syarat konsistensi numerik.

4.4. Analisa Hasil dan Simulasi

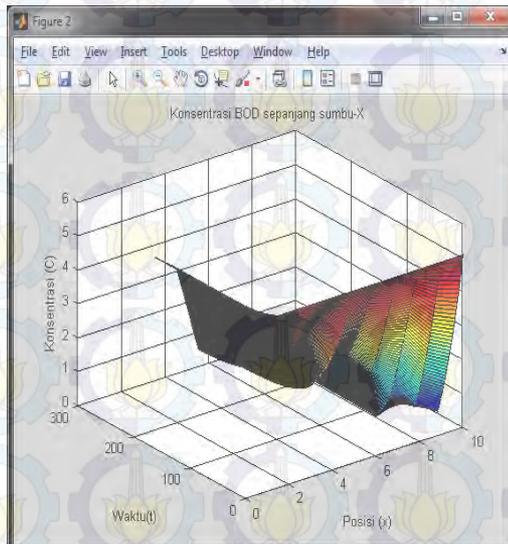
Penentuan Posisi Pada Arah Sumbu-X:

Menentukan lokasi sumber pencemar yang berasal dari arah sepanjang Sungai marmoyo berdasarkan fluktuasi konsentrasi COD, BOD dan TSS. Dengan memberikan kondisi awal yang yaitu kecepatan sungai marmoyo, kecepatan sungai surabaya, COD, BOD, dan TSS sama pada semua posisi (x, y) . Dalam simulasi ini diasumsikan kedalaman h adalah 3m dan waktu t adalah 10 sekon. Penentuan lokasi sumber pencemar diasumsikan posisi 1 mewakili jarak 100m dari lokasi pengambilan sampel oleh Perum Jasa Tirta di Jembatan Pening. Berikut ini hasil *output* program:

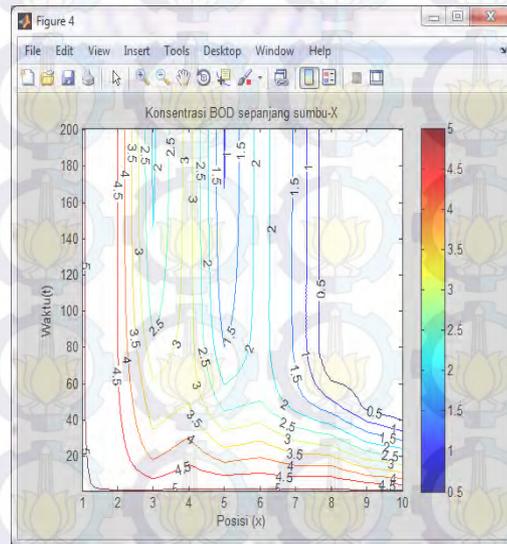
Simulasi BOD:

Input:

$u_i=0.4588$; (kecepatan awal sungai marmoyo tahun 2010 bulan 10)
 $v_i=0.728$; (kecepatan awal sungai surabaya tahun 2010 bulan 10)
 $C_i=5.04$; (konsentrasi BOD)
 $h_i=3$; (kedalaman sungai)
 $T=10$; (waktu t (sekon))
 $dt=0.05$; (delta t)



(a)



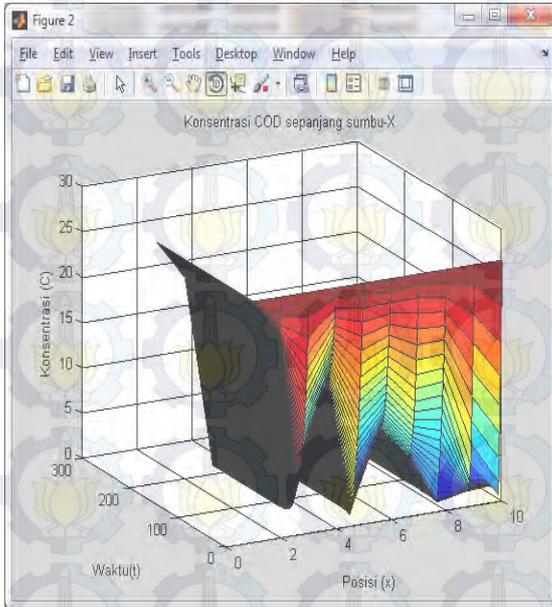
(b)

Gambar 4.4.1 (a) Konsentrasi BOD sepanjang sumbu-X
(b) Kontur BOD sepanjang sumbu-X

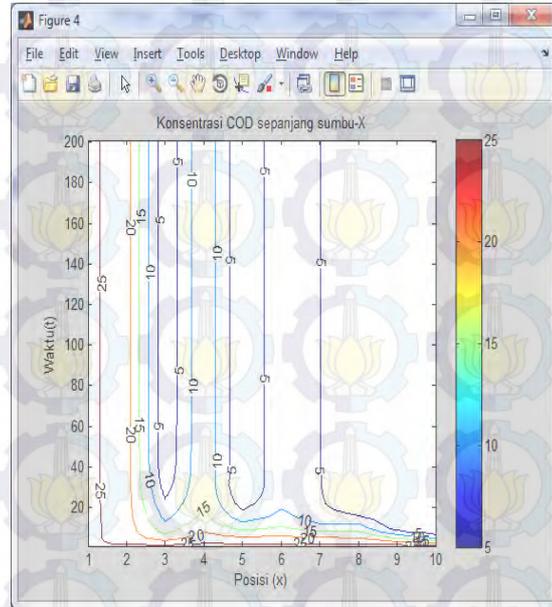
Berdasarkan simulasi diperoleh konsentrasi BOD terendah yaitu pada interval posisi [7,10]. Hasil simulasi dapat dilihat pada lampiran A.

Simulasi COD:

$u_i=0.4588$; (kecepatan sungai marmoyo)
 $v_i=0.728$; (kecepatan sungai surabaya)
 $C_i= 26.384$; (konsentrasi COD)
 $h_i=3$; (kedalaman sungai)
 $T=10$; (waktu t (sekon))
 $dt=0.05$; (delta t)



(a)



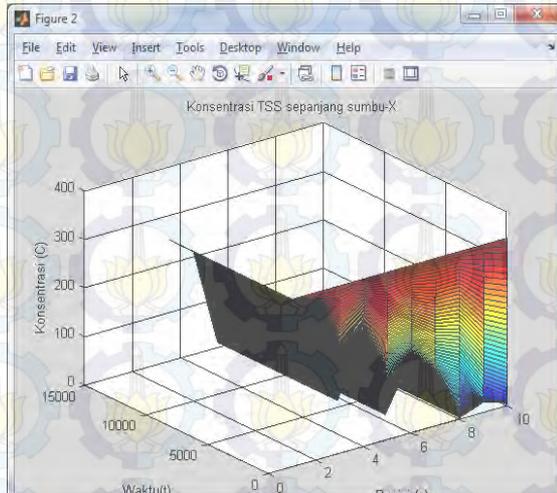
(b)

Gambar 4.4.2 (a) Konsentrasi COD sepanjang sumbu-X
(b) Kontur COD sepanjang sumbu-X

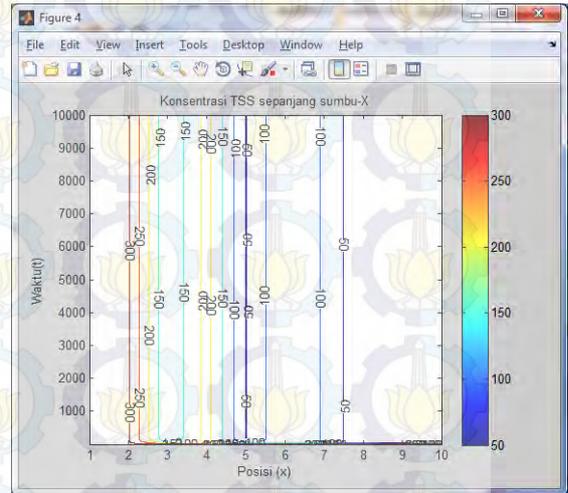
Berdasarkan simulasi diperoleh konsentrasi COD terendah yaitu pada interval posisi [2,4], posisi [4,6], dan posisi [7,10]. Hasil simulasi dapat dilihat pada lampiran A.

Simulasi TSS:

$u_i=0.4588$; (kecepatan sungai marmoyo)
 $v_i=0.728$; (kecepatan sungai surabaya)
 $C_i= 344$; (konsentrasi TSS)
 $h_i=3$; (kedalaman sungai)
 $T=10$; (waktu t (sekon))
 $dt=0.01$; (delta t)



(a)



(b)

Gambar 4.4.3 (a) Konsentrasi TSS sepanjang sumbu-X
(b) Kontur TSS sepanjang sumbu-X

Berdasarkan simulasi diperoleh konsentrasi TSS terendah yaitu pada interval posisi [5,6] dan posisi [7,10]. Hasil simulasi dapat dilihat pada lampiran A.

Dari hasil simulasi COD, BOD dan TSS tersebut dapat diketahui bahwa perubahan konsentrasi terendah adalah pada interval posisi [7,10]. Apabila posisi ini di overlay kedaerah sebelum pertemuan sungai yaitu di sepanjang Sungai Marmoyo terlihat bahwa fluktuasi konsentrasi COD, BOD dan TSS yang semakin rendah, hal ini menandakan bahwa terjadi pencemaran tertinggi pada posisi [7,10], yaitu berjarak sekitar 700m sampai 1000m dari lokasi pengambilan sampel Perum Jasa Tirta.

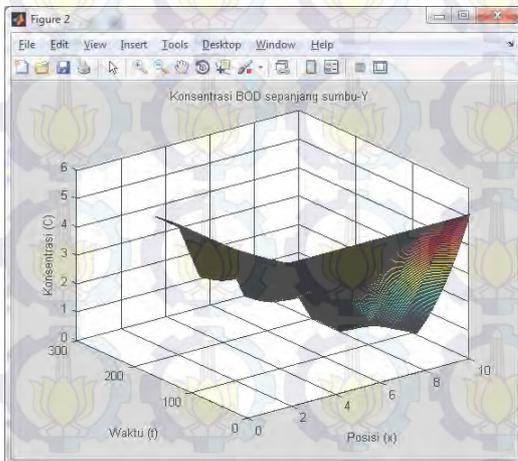
Penentuan Posisi Pada Arah Sumbu-Y:

Menentukan lokasi sumber pencemar yang berasal dari arah sepanjang Sungai Surabaya berdasarkan fluktuasi konsentrasi COD, BOD dan TSS. Dengan memberikan kondisi awal yang yaitu kecepatan sungai marmoyo, kecepatan sungai surabaya, COD, BOD, dan TSS sama pada semua posisi (x,y) . Dalam simulasi ini diasumsikan kedalaman h adalah 3m dan waktu t adalah 10 sekon. Penentuan lokasi sumber pencemar diasumsikan posisi 1 mewakili jarak 100m dari lokasi pengambilan sampel oleh Perum Jasa Tirta di Jembatan Pening. Berikut ini hasil *output* program:

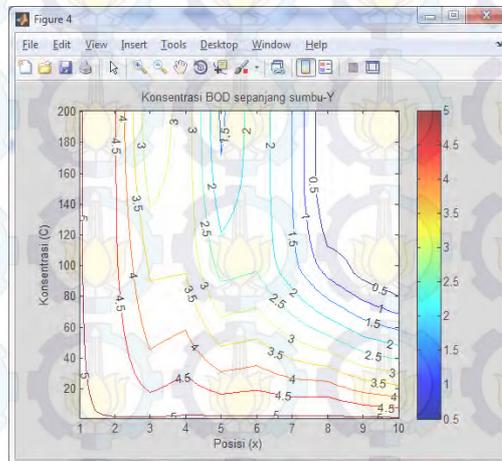
Simulasi BOD:

Input:

```
ui=0.4588;(kecepatan sungai marmoyo)
vi=0.728;(kecepatan sungai surabaya)
Ci=5.04;(konsentrasi BOD)
hi=3;(kedalaman sungai)
T=10;(waktu t (sekon))
dt=0.05;(delta t)
teta=60 (sudut pertemuan sungai 60°)
```



(a)



(b)

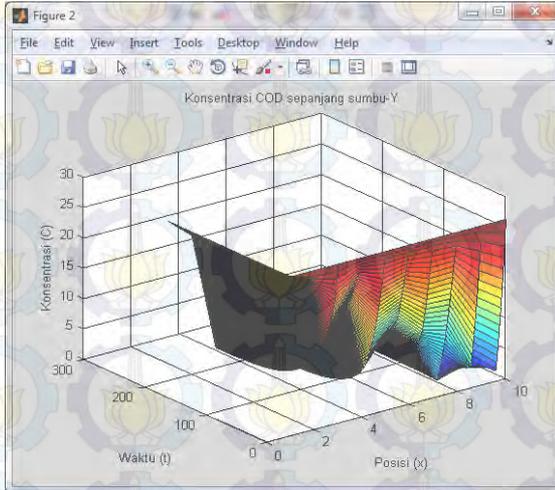
Gambar 4.4.4 (a) Konsentrasi BOD sepanjang sumbu-X

(b) Kontur BOD sepanjang sumbu-X

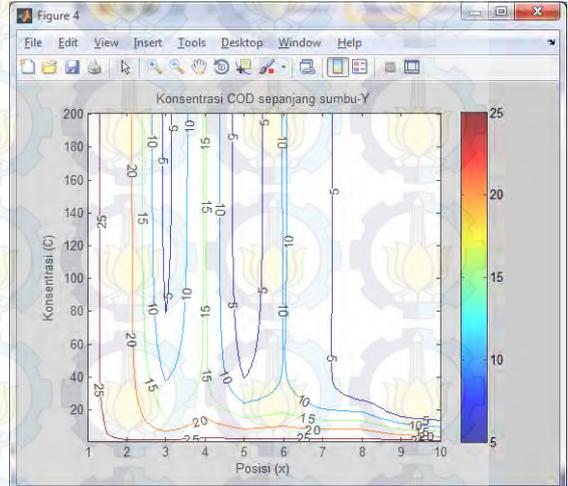
Berdasarkan simulasi diperoleh konsentrasi BOD terendah yaitu pada interval posisi $[7,10]$. Hasil simulasi dapat dilihat pada lampiran B.

Simulasi COD:

$u_i=0.4588$; (kecepatan sungai marmoyo)
 $v_i=0.728$; (kecepatan sungai surabaya)
 $C_i= 26.076$; (konsentrasi COD)
 $h_i=3$; (kedalaman sungai)
 $T=10$; (waktu t (sekon))
 $dt=0.05$; (delta t)
 $teta=60$ (sudut pertemuan sungai 60°)



(a)



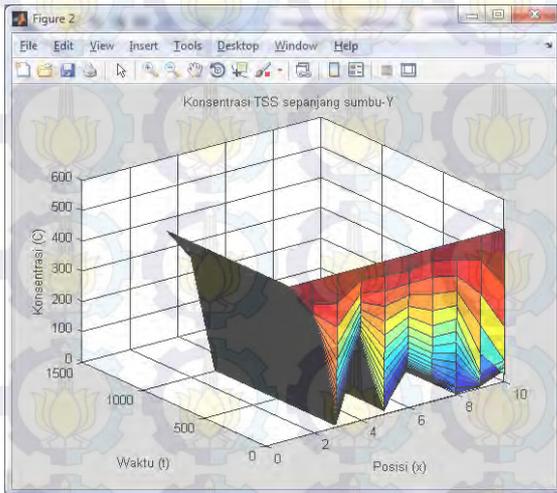
(b)

Gambar 4.4.5 (a) Konsentrasi COD sepanjang sumbu-X
(b) Kontur COD sepanjang sumbu-X

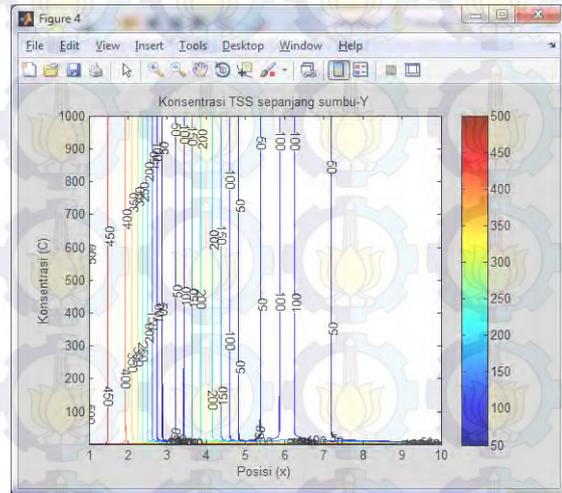
Berdasarkan simulasi diperoleh konsentrasi COD terendah yaitu pada interval posisi [2,3], [5,6], dan [7,10]. Hasil simulasi dapat dilihat pada lampiran B.

Simulasi TSS:

$u_i=0.4588$; (kecepatan sungai marmoyo)
 $v_i=0.728$; (kecepatan sungai surabaya)
 $C_i= 502.5$; (konsentrasi TSS)
 $h_i=3$; (kedalaman sungai)
 $T=10$; (waktu t (sekon))
 $dt=0.01$; (delta t)
 $teta=60$ (sudut pertemuan sungai 60°)



(a)



(b)

Gambar 4.4.6 (a) Konsentrasi TSS sepanjang sumbu-X
(b) Kontur TSS sepanjang sumbu-X

Berdasarkan simulasi diperoleh konsentrasi TSS terendah yaitu pada interval posisi [3,4],[5,6], dan [7,10]. Hasil simulasi dapat dilihat pada lampiran B.

Dari hasil simulasi COD, BOD dan TSS tersebut dapat diketahui bahwa perubahan konsentrasi terendah adalah pada interval posisi [7,10]. Apabila posisi ini di overlay kedaerah sebelum pertemuan sungai yaitu di sepanjang Sungai Marmoyo terlihat bahwa fluktuasi konsentrasi COD, BOD dan TSS yang semakin rendah, hal ini menandakan bahwa terjadi pencemaran tertinggi pada posisi [7,10], yaitu berjarak sekitar 700m sampai 1000m dari lokasi pengambilan sampel Perum Jasa Tirta.

BAB 5

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Model matematika dari persebaran polutan dan sedimentasi dapat dibentuk berdasarkan prinsip kontinum yaitu hukum kekekalan massa, kekekalan momentum, dan persamaan transport dengan menggunakan volum kendali.
2. Metode MLPG ini dapat diterapkan pada model matematika aliran sungai karena tidak menggunakan grid tetapi menggunakan sub domain berupa lingkaran sehingga hasil yang diperoleh lebih mendekati kondisi lapangan.
3. Berdasarkan hasil simulasi dapat disimpulkan bahwa fluktuasi COD, BOD, dan TSS semakin rendah pada posisi 7 sampai 10 yaitu pada jarak sekitar 700m sampai 1000m dari lokasi pengambilan sampel Perum Jasa Tirta. Hal ini mengindikasikan bahwa terjadi tingkat pencemaran tinggi.

5.2 Saran

Beberapa saran yang disampaikan penulis untuk penelitian lebih lanjut mengenai penentuan lokasi sumber pencemar di Sungai yaitu:

1. Penelitian dengan menggunakan GPS agar lokasi lebih akurat, dan gunakan metode numerik lain sebagai pembandingan.
2. Menerapkan metode MLPG pada kasus yang lain.
3. Penelitian dengan memanfaatkan pencitraan digital akan sangat membantu mengetahui lokasi sumber pencemar.

DAFTAR PUSTAKA

- Apsley, David. 2005, "*Computational Fluid Dynamic*", New York: Spring 2005.
- Atlury dan Lin. 2001. "*The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method for Solving Incompressible Navier-Stokes Equation*". CMES vol.2.no.2, pp.117-142.
- Atlury dan Shen. 2002. "*The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple & Less-costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods*". CMES vol.3.no.1, pp.11-51.
- Darmono. 1995. "*Logam Dalam Sistem Biologi Makhluk Hidup*". Universitas Indonesia, Jakarta.
- Effendi, H. 2003. "*TELAAH KUALITAS AIR*", *Bagi Pengelola Sumber Daya dan Lingkungan Perairan*. Kanisius, Yogyakarta
- Pribadi, A. 4 Januari 2013. "*Selamatkan Brantas* ", (<http://m.kompasiana.com>), diakses 22 Februari 2014
- Raju. 1986. "*Aliran Melalui Saluran Terbuka*", Erlangga: Jakarta.
- Shabayek, S., 2002. "*Dynamic Model for Sub Critical Combining Flows in Channel Junction*", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, pp.821-828
- Widodo, B. 2013. "*Model Matematika Dan Simulasi Komputer Dari Pengaruh Hidrodinamika Pada Dispersi Polutan di Pertemuan Dua Sungai*", Hibah Penelitian, ITS Surabaya
- Widodo, B. 2012. "*Pemodelan Matematika*", ITSPress, Surabaya
- Yang, C.T. 1996. "*Sediment transport, Theory and Practice*", New York : McGraw Hill
- Yulianto, T. 2013. "*Penentuan Koordinat Sumber Polutan Yang Potensial Pada Daerah Pertemuan Dua Sungai*", Tesis Program Magister Matematika. ITS

BIODATA



Penulis lahir di Sidoarjo 5 Mei 1989 dan mengenyam pendidikan formal di SD Negeri 9 Mataram, SMP Negeri 15 Mataram, SMA Negeri 1 Mataram. Setelah lulus SMA penulis melanjutkan pendidikan sarjana di jurusan matematika Universitas Brawijaya Malang. Penulis mengambil bidang minat Aljabar dan lulus menyandang gelar sarjana pada tahun 2012. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan magister di Institut Teknologi Sepuluh Nopember pada tahun 2012 dan lulus tahun 2014 dengan mengambil bidang minat pemodelan matematika. Jika ada kritik dan saran dapat dikirimkan melalui email eliyanmiranda@gmail.com