



---

TESIS - SM 142501

**KONTROL OPTIMAL SISTEM PERAWATAN  
PRODUKSI DENGAN MEMPERHATIKAN  
KERUSAKAN PRODUK DAN TINGKAT DISKON**

SISKA APRILIA HARDIYANTI  
NRP 1214 201 018

DOSEN PEMBIMBING  
Dr. Subiono, M.Sc.

PROGRAM MAGISTER  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2016



---

THESIS - SM 142501

**OPTIMAL CONTROL OF A PRODUCTION  
MAINTENANCE SYSTEM BY CONSIDERING  
DETERIORATE ITEMS AND DISCOUNT RATE**

SISKA APRILIA HARDIYANTI  
NRP 1214 201 018

SUPERVISOR  
Dr. Subiono, M.Sc.

MAGISTER DEGREE  
MATHEMATICS DEPARTMENT  
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2016

**LEMBAR PENGESAHAN TESIS**

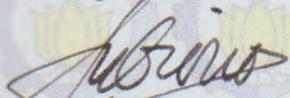
Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar  
**Magister Sains (M.Si.)**  
di  
**Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya**

Oleh

**Siska Aprilia Hardiyanti**  
NRP. 1214 201 018

Tanggal Ujian : 11 Januari 2016  
Periode Wisuda : Maret 2016

Disetujui oleh :



Dr. Subiono, M.Sc

NIP 19570411 198403 1 001

(Pembimbing)



Dr. Mardijah, M.T.

NIP 19670114 199102 2 001

(Penguji)



Dr. Didik Khusnul Arif, M.Si

NIP 19730930 199702 1 001

(Penguji)



Dicky Adzkiya, M.Si, Ph.D

NIP 19830517 200812 1 003

(Penguji)

Direktur Program Pascasarjana,



Prof. Diauhar Manfaat, M.Sc, Ph.D

NIP. 19601202-198701 1 001

# KONTROL OPTIMAL SISTEM PERAWATAN PRODUKSI DENGAN MEMPERHATIKAN KERUSAKAN PRODUK DAN TINGKAT DISKON

Nama Mahasiswa : Siska Aprilia Hardiyanti  
NRP : 1214 201 018  
Pembimbing : Dr. Subiono, M.Sc

## ABSTRAK

Tujuan utama perusahaan adalah meningkatkan laba atau profit dengan melakukan beberapa upaya. Upaya tersebut digunakan untuk menyelesaikan masalah inventori atau persediaan barang. Pada penelitian ini, permasalahan inventori berupa perawatan produksi dengan memperhatikan banyaknya kerusakan produk dan tingkat diskon. Upaya lain yang diperhatikan adalah banyaknya produk yang terjadwal dan banyaknya produk yang akan diberi perawatan. Selain itu perusahaan menentukan masing-masing banyaknya inventori, proporsi produk baik, produk yang terjadwal, dan produk yang diberi perawatan sesuai yang diinginkan (target) sehingga akan diperoleh biaya total yang optimal. Pengembangan pada penelitian ini adalah menambahkan faktor diskon pada model fungsi objektif dari sistem perawatan produksi. Kontrol optimal sistem perawatan produksi diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Selanjutnya hasil dari Prinsip Maksimum Pontryagin tersebut diselesaikan dengan simulasi numerik dengan *software* Scilab menggunakan metode Runge Kutta orde 4.

**Kata kunci:** Kontrol Optimal, Metode Runge Kutta Orde 4, Prinsip Maksimum Pontryagin, Sistem Perawatan Produksi.

# OPTIMAL CONTROL OF A PRODUCTION MAINTENANCE SYSTEM BY CONSIDERING DETERIORATE ITEMS AND DISCOUNT RATE

Name : Siska Aprilia Hardiyanti  
NRP : 1214 201 018  
Supervisor : Dr. Subiono, M.Sc

## ABSTRACT

The main objective of the company is improving the company's earnings or profits by doing some efforts. The efforts are used to solve inventory problem. In this research, inventory problem is production maintenance by considering deteriorate items and discount rate. The other considered efforts are scheduled production rate and preventive maintenance production rate. Beside that the company determines by itself the amount of inventory level, proportion of good items, scheduled production rate, and preventive maintenance rate so that the optimal total cost can be obtained. The development in this research is by adding the discount rate in objective function model from production maintenance system. Optimal control of production maintenance system is solved by using Pontryagin Maximum Principle. At the end, the output of Pontryagin Maximum Principle is solved by numerical simulation using Scilab software with fourth order Runge Kutta method.

**Keywords:** Optimal Control, Fourth Order Runge Kutta Method, Pontryagin Maximum Principle, Production Maintenance System.

## KATA PENGANTAR

*Bismillahirrahmanirrahim,*

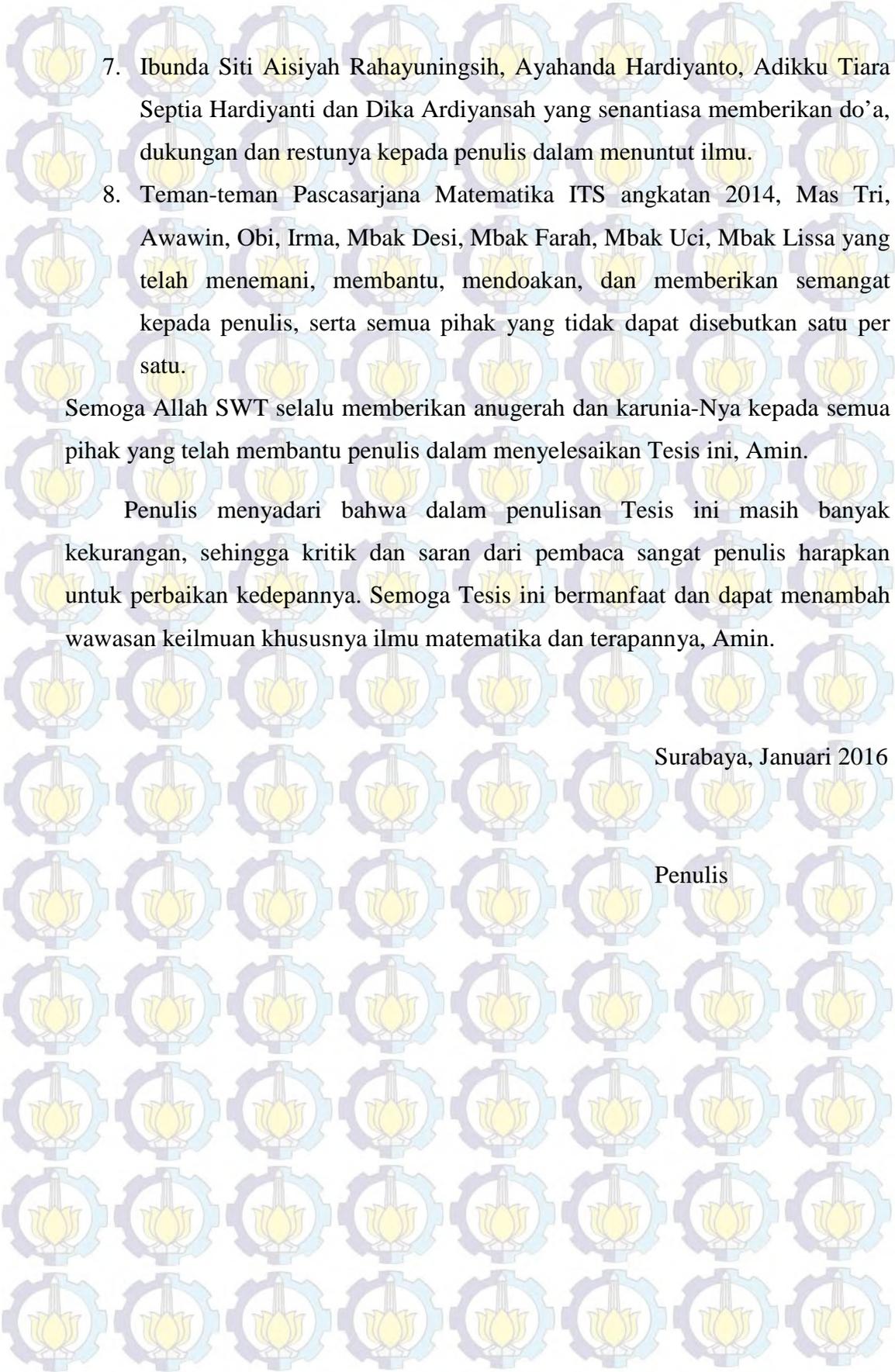
*Alhamdulillahirobbil 'alamin,* segala puji syukur ke hadirat Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis yang berjudul

### **“Kontrol Optimal Sistem Perawatan Produksi dengan Memperhatikan Kerusakan Produk dan Tingkat Diskon”**

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Studi Strata 2 (S-2) Magister Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan Tesis ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Ir. Joni Hermana, M.Sc.ES., Ph.D selaku Rektor Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
2. Prof. Djauhar Manfaat, M.Sc.,Ph.D selaku Direktur Program Pascasarjana Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
3. Dr. Imam Mukhlash, S.Si.,M.T. selaku Ketua Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
4. Dr. Dwi Ratna Sulistyaningrum, S.Si.,M.T. selaku Dosen Wali yang telah memberikan motivasi, arahan, dan bimbingannya.
5. Dr. Subiono, M.S. selaku Koordinator Program Studi Pascasarjana Matematika dan sebagai dosen pembimbing, yang telah memberikan pengalaman yang berharga serta meluangkan waktu di tengah kesibukannya untuk berdiskusi dan memberi arahan dalam penyusunan tesis ini.
6. Seluruh Dosen Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya, terimakasih atas seluruh ilmu, nasihat, dan bimbingannya, serta seluruh Staff Administrasi, terima kasih atas segala bantuannya.

- 
7. Ibunda Siti Aisiyah Rahayuningsih, Ayahanda Hardiyanto, Adikku Tiara Septia Hardiyanti dan Dika Ardiyansah yang senantiasa memberikan do'a, dukungan dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
  8. Teman-teman Pascasarjana Matematika ITS angkatan 2014, Mas Tri, Awawin, Obi, Irma, Mbak Desi, Mbak Farah, Mbak Uci, Mbak Lissa yang telah menemani, membantu, mendoakan, dan memberikan semangat kepada penulis, serta semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Semoga Allah SWT selalu memberikan anugerah dan karunia-Nya kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan Tesis ini, Amin.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan Tesis ini masih banyak kekurangan, sehingga kritik dan saran dari pembaca sangat penulis harapkan untuk perbaikan kedepannya. Semoga Tesis ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya ilmu matematika dan terapannya, Amin.

Surabaya, Januari 2016

Penulis



## DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR TABEL	xxi
DAFTAR SIMBOL	xxiii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	4
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI</b>	<b>5</b>
2.1 Penelitian yang Pernah Dilakukan	5
2.2 Model Sistem Perawatan Produksi	5
2.3 Bentuk Sistem Inventori	8
2.3.1 Sistem Sederhana	8
2.3.2 Sistem Berjenjang ( <i>Multi Echelon Inventory System</i> )	9
2.4 Biaya-Biaya Inventori	10
2.4.1 <i>Cost Item</i> atau Harga Barang per Unit	10
2.4.2 <i>Ordering Cost</i> atau Biaya Pemesanan	10
2.4.3 <i>Holding Cost</i> atau Biaya Penyimpanan	10
2.4.4 <i>Stockout Cost</i> atau Biaya Kekurangan Persediaan	10
2.4.5 Biaya Resiko Kerusakan dan Kehilangan Persediaan	10
2.4.6 <i>Safety Stock</i> atau Biaya Persediaan Pengaman	10

2.5	Titik Kesetimbangan .....	10
2.6	Linierisasi .....	11
2.7	Kestabilan Lokal .....	11
2.8	Keterkontrolan dan Keteramatan .....	12
	2.8.1 Keterkontrolan ( <i>Controllability</i> ) .....	12
	2.8.2 Keteramatan .....	12
2.9	Kontrol Optimal .....	13
2.10	Prinsip Maksimum Pontryagin .....	13
2.11	Metode Runge Kutta .....	14
<b>BAB III</b>	<b>METODA PENELITIAN</b> .....	<b>17</b>
<b>BAB IV</b>	<b>HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....	<b>19</b>
4.1	Model Sistem Perawatan Produksi dengan Memperhatikan Kerusakan Produk dan Tingkat Diskon .....	19
	4.1.1 Laju Banyaknya Inventori (Persediaan Barang) .....	19
	4.1.2 Laju Proporsi Produk Baik .....	20
4.2	Analisa Model Sistem Perawatan Produksi .....	21
	4.2.1 Penyelesaian Titik Kesetimbangan .....	21
	4.2.2 Penyelesaian Linierisasi .....	22
	4.2.3 Penyelesaian Kestabilan .....	22
	4.2.4 Analisa Kestabilan Sistem Perawatan Produksi Secara Numerik .....	23
4.3	Penyelesaian Keterkontrolan dan Keteramatan .....	27
	4.3.1 Penyelesaian Keterkontrolan ( <i>Controllability</i> ) .....	27
	4.3.2 Penyelesaian Keteramatan .....	28
4.4	Fungsi Objektif Sistem Perawatan Produksi .....	29
4.5	Penyelesaian Kontrol Optimal .....	29
4.6	Penyelesaian Numerik .....	31
4.7	Simulasi Numerik .....	35
	4.7.1 Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang (Kadaluarsa) Konstan .....	35
	4.7.2 Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang (Kadaluarsa) Musiman .....	38
	4.7.3 Permintaan Konsumen Menurun dan Banyaknya Produk Usang (Kadaluarsa) Konstan .....	49
	4.7.4 Permintaan Konsumen Konstan dan Banyaknya Produk Usang (Kadaluarsa) Menurun .....	52

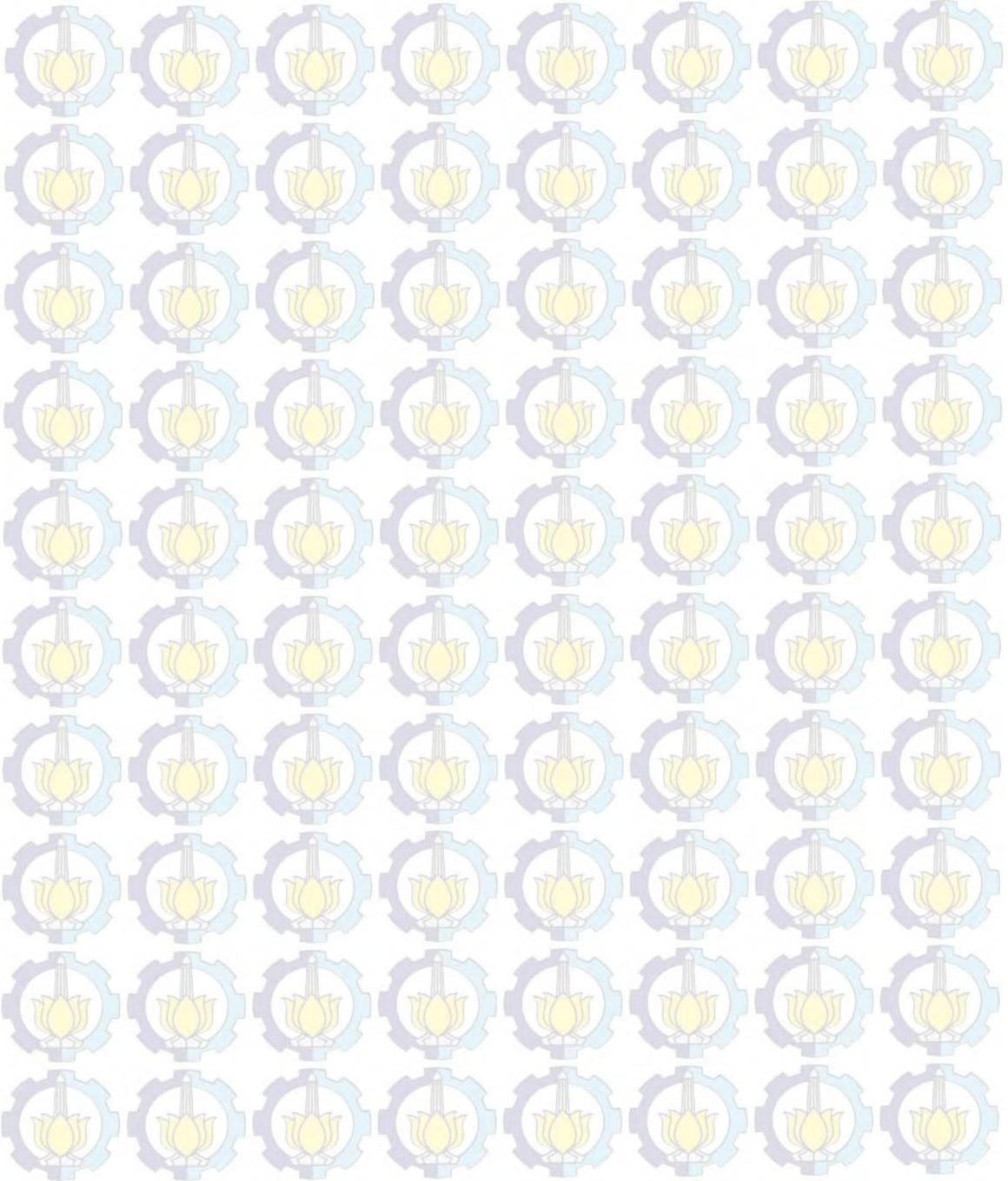
4.7.5	Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang (Kadaluarsa) Menurun .....	55
4.7.6	Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang (Kadaluarsa) Meningkat .....	58
4.7.7	Permintaan Konsumen Meningkat dan Banyaknya Produk Usang (Kadaluarsa) Menurun .....	61
4.7.8	Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang (Kadaluarsa) Tidak Pasti .....	64
<b>BAB V      SIMPULAN DAN SARAN</b>		69
5.1	Simpulan .....	69
5.2	Saran .....	70
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>		71
<b>LAMPIRAN</b>		
<b>A. FORMAT <i>PROGRAMMING</i> MATLAB</b> .....		72
<b>BIODATA DIRI</b>		79

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Sistem Persediaan Input-Output . . . . .	8
Gambar 2.2	Sistem Persediaan Berjenjang . . . . .	9
Gambar 4.1	Diagram Kompartemen untuk Laju Banyaknya Inventori . . .	19
Gambar 4.2	Diagram Kompartemen untuk Laju Proporsi Produk Baik . .	20
Gambar 4.3	Fungsi Tingkat Inventori . . . . .	24
Gambar 4.4	Fungsi Laju Proporsi Produk Baik . . . . .	25
Gambar 4.5	Fungsi Tingkat Inventori . . . . .	26
Gambar 4.6	Fungsi Laju Proporsi Produk Baik . . . . .	27
Gambar 4.7	Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu . . . . .	36
Gambar 4.8	a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan . . . . .	37
Gambar 4.9	Fungsi Biaya Produksi Total terhadap Waktu . . . . .	38
Gambar 4.10	Fungsi Permintaan terhadap Waktu . . . . .	39
Gambar 4.11	Fungsi Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu . . . . .	40
Gambar 4.12	a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan . . . . .	41
Gambar 4.13	Fungsi Biaya Produksi Total terhadap Waktu . . . . .	42
Gambar 4.14	Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu . . . . .	43
Gambar 4.15	Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu . . . . .	43
Gambar 4.16	a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan . . . . .	44
Gambar 4.17	Fungsi Biaya Produksi Total terhadap Waktu . . . . .	45
Gambar 4.18	Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu . . . . .	46

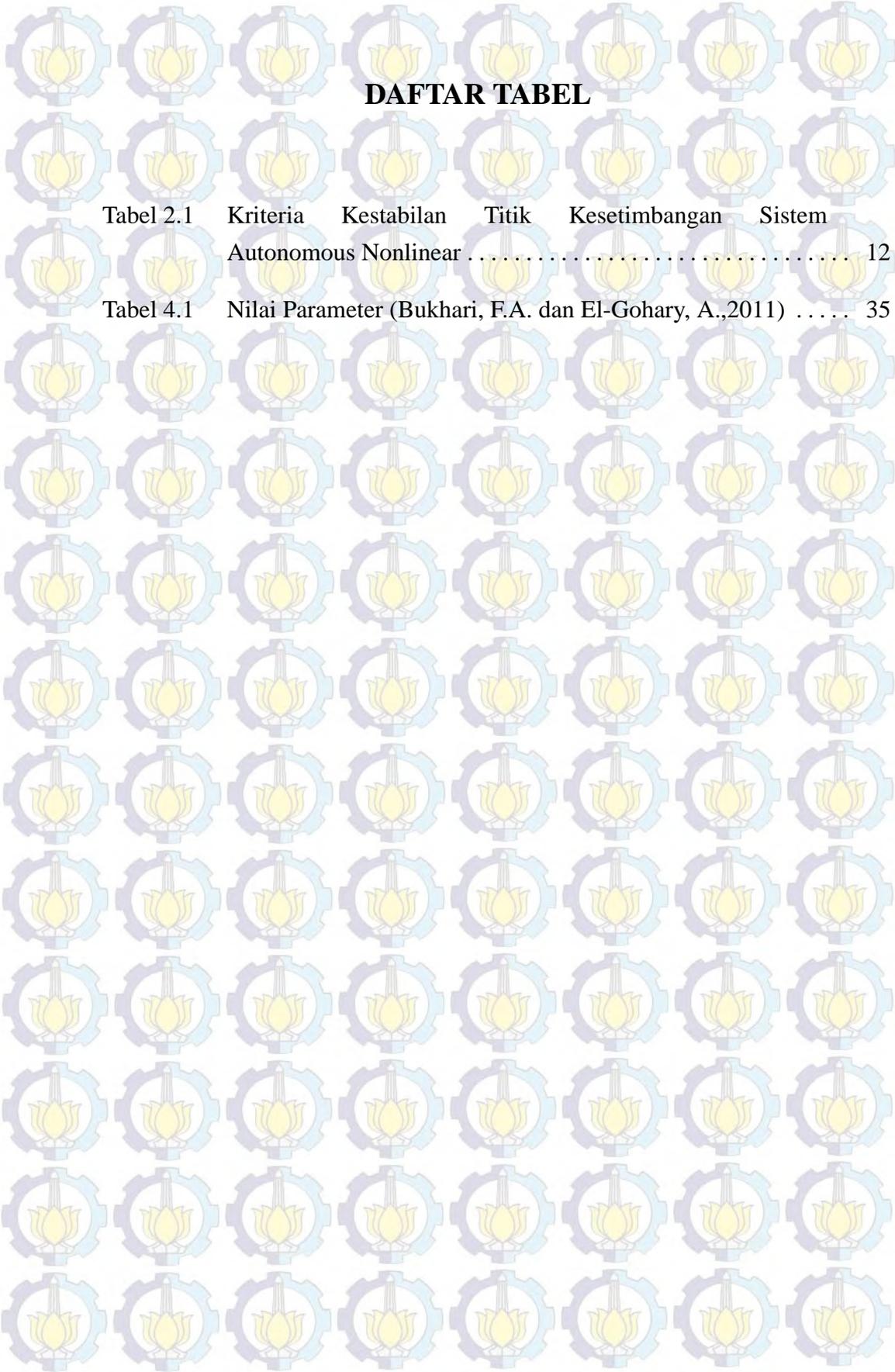
Gambar 4.19	Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu .....	47
Gambar 4.20	a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan .....	48
Gambar 4.21	Fungsi Biaya terhadap Waktu .....	49
Gambar 4.22	Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu .....	50
Gambar 4.23	a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan .....	51
Gambar 4.24	Fungsi Biaya terhadap Waktu .....	52
Gambar 4.25	Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu .....	53
Gambar 4.26	a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan .....	54
Gambar 4.27	Fungsi Biaya Produksi Total terhadap Waktu .....	55
Gambar 4.28	Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu .....	56
Gambar 4.29	a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan .....	57
Gambar 4.30	Fungsi Biaya Produksi Total terhadap Waktu .....	58
Gambar 4.31	Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu .....	59
Gambar 4.32	a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan .....	60
Gambar 4.33	Fungsi Biaya Produksi Total terhadap Waktu .....	61
Gambar 4.34	Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu .....	62
Gambar 4.35	a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan .....	63
Gambar 4.36	Fungsi Biaya Produksi Total terhadap Waktu .....	64

Gambar 4.37	Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu .....	65
Gambar 4.38	Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu .....	65
Gambar 4.39	a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan .....	66
Gambar 4.40	Fungsi Biaya terhadap Waktu .....	67



## DAFTAR SIMBOL

$R_t$	Arus kas bersih ( <i>net cash flow</i> ) pada waktu ke t
$I(t)$	Banyaknya inventori pada waktu t
$\bar{I}$	Banyaknya inventori yang diinginkan (target)
$u(t)$	Banyaknya produk yang terjadwal pada waktu t
$\bar{u}$	Banyaknya produk terjadwal yang diinginkan (target)
$\alpha(t)$	Banyaknya produk yang usang pada waktu t
$m(t)$	Banyaknya produk yang akan diberi perawatan pada waktu t
$\bar{m}$	Banyaknya produk yang akan diberi perawatan yang diinginkan (target)
$S(t)$	Banyaknya permintaan pada waktu t
$h_i$	Biaya penyimpanan
$c_1$	Biaya inventori
$c_2$	Biaya perawatan produksi
$\theta$	Proporsi produk yang rusak
$p(t)$	Proporsi produk yang baik pada waktu t
$\bar{p}$	Proporsi produk baik yang diinginkan (target)
$\gamma$	Nilai eigen
$\lambda_i(t)$	Pengali Lagrange
$\rho$	Tingkat diskon (konstan tak negatif)



## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Kriteria Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Autonomous Nonlinear .....	12
Tabel 4.1	Nilai Parameter (Bukhari, F.A. dan El-Gohary, A.,2011) .....	35

# BAB I

## PENDAHULUAN

Pada bagian ini diuraikan latar belakang yang mendasari penulisan penelitian. Di dalamnya mencakup identifikasi permasalahan, beberapa informasi tentang penelitian terdahulu yang berhubungan dengan topik tesis, uraian singkat tentang inventori. Uraian ini bersifat umum yang menjelaskan secara singkat hal-hal yang akan dilakukan pada penyelesaian tesis. Dari informasi tersebut kemudian dirumuskan permasalahan yang akan dibahas, tujuan, batasan masalah, dan manfaat dari penelitian ini.

### 1.1 Latar Belakang

Persaingan dalam dunia usaha adalah faktor *eksternal* yang tidak mungkin dapat dihindari dan tidak dapat dikendalikan oleh suatu perusahaan. Suatu perusahaan dapat melakukan upaya-upaya dari dalam perusahaan untuk mempertahankan keberadaannya. Upaya *internal* yang dapat dilakukan antara lain dengan meminimumkan biaya-biaya pengelolaan perusahaan atau memaksimalkan pemanfaatan sumber daya yang dimiliki perusahaan. Pemanfaatan seluruh sumber daya yang ada dengan baik dan seefisien mungkin meningkatkan laba atau profit yang menjadi tujuan utama perusahaan (Sumayang,L., 2003).

Pada buku yang ditulis Aminudin (Aminudin, 2005) bahwa perusahaan terlebih dahulu harus melakukan perkiraan untuk memperkecil segala hal yang berhubungan dengan biaya agar pengeluaran dapat ditekan sekecil mungkin dalam mencapai hasil operasi perusahaan yang optimal. Misalkan jika jumlah barang yang diproduksi terlalu sedikit dibandingkan dengan jumlah permintaan dari konsumen, maka akan mengakibatkan hilangnya kepercayaan dari konsumen terhadap perusahaan sehingga dampaknya bagi perusahaan yaitu kehilangan kesempatan memperoleh laba dan kemungkinan akan mengeluarkan biaya yang jauh lebih besar untuk memenuhi jumlah permintaan tersebut. Namun sebaliknya, jika jumlah permintaan dari konsumen jauh lebih kecil dari jumlah barang yang diproduksi, justru perusahaan tersebut akan mengalami kerugian yang disebabkan dari pertambahan biaya penyimpanan sisa produksi yang tidak tersalurkan, biaya kerusakan, dan biaya perawatan produksi. Maka dari kasus tersebut perusahaan harus menganalisis persediaan berkaitan dengan perencanaan teknik dalam mencapai tingkat perse-

diaan optimal. Kriteria optimal yang dimaksudkan adalah meminimalkan total biaya persediaan. Dengan demikian, *Inventory Control* sangat diperlukan untuk mengelola hasil produksi sehingga sasaran yang diinginkan perusahaan dapat tercapai.

Penelitian tentang pemodelan sistem inventori menggunakan kontrol optimal telah banyak dilakukan sebelumnya. Misalnya yang dilakukan oleh Darsih Indayani dalam papernya (Indayani, D., 2010) membahas tentang kendali optimal pada pengadaan bahan mentah dengan kebijakan pengadaan tepat waktu, pergudangan, dan penundaan. Pada papernya dijelaskan mengenai faktor pemotongan atau diskon, baik dalam bentuk diskrit maupun kontinu. Selain itu Bukhari dan Gohary dalam papernya (Bukhari dan Gohary, 2011) membahas tentang kontrol optimal sistem perawatan produksi dengan memperhatikan kerusakan produk. Namun dalam papernya tidak memuat faktor diskon.

Sehingga penelitian ini akan menyempurnakan penelitian-penelitian sebelumnya. Permasalahan inventori dalam penelitian ini yaitu model perawatan produksi yang akan diselesaikan dengan memperhatikan banyaknya kerusakan produk dan tingkat diskon. Selain itu banyaknya produk yang terjadwal dan produk yang akan diberi perawatan juga diperhatikan. Pada penelitian ini, perusahaan menentukan banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan sesuai yang diinginkan (target) maka diperoleh biaya produksi total. Model fungsi objektif atau fungsi tujuan dari sistem perawatan produksi yang digunakan dalam penelitian ini dikembangkan dengan menambahkan faktor diskon. Sistem perawatan produksi diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Selanjutnya hasil perhitungan dari Prinsip Maksimum Pontryagin diselesaikan dengan simulasi numerik menggunakan *software* Scilab dengan metode Runge Kutta orde 4.

## **1.2 Perumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya, maka dapat dirumuskan permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana mengembangkan model fungsi objektif atau fungsi tujuan dari sistem perawatan produksi dengan memperhatikan kerusakan produk dan tingkat diskon dalam bentuk masalah kontrol optimal.
2. Bagaimana menentukan banyaknya produk yang diberi perawatan dan banyaknya produk yang terjadwal secara optimal dari model sistem

perawatan produksi dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.

3. Bagaimana analisa simulasi dengan menggunakan *software* Scilab pada sistem perawatan produksi setelah dilakukan kontrol optimal.

### 1.3 Batasan Masalah

Penulisan penelitian ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan masalah sebagai berikut.

1. Permintaan mempunyai batas maksimum.
2. Produk yang diproduksi adalah sejenis.
3. Tingkat kerusakan terjadi setelah produk masuk dalam inventori (gudang penyimpanan).
4. Tingkat inventori awal  $I(0) = I_0 > 0$  dan proporsi produk baik awal  $p(0) = p_0 > 0$  bernilai positif.
5. Model yang digunakan dalam penelitian ini adalah model perawatan produksi kontinu.
6. Gudang penyimpanan produk dianggap dapat menampung jumlah produk yang dipesan.

### 1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengembangkan model fungsi objektif atau fungsi tujuan dari sistem perawatan produksi dengan memperhatikan kerusakan produk dan tingkat diskon dalam bentuk masalah kontrol optimal.
2. Menentukan banyaknya produk yang diberi perawatan dan banyaknya produk yang terjadwal secara optimal dari model sistem perawatan produksi dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin.
3. Menganalisa simulasi dengan menggunakan *software* Scilab pada sistem perawatan produksi setelah dilakukan kontrol optimal.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari hasil penelitian ini antara lain:

1. Memberikan informasi untuk penelitian selanjutnya tentang kontrol optimal sistem inventori khususnya pada perawatan produksi.
2. Memberikan informasi kepada perusahaan dalam melakukan perawatan produksi agar perusahaan tidak menanggung kerugian.

## **BAB II**

### **KAJIAN PUSTAKA DAN DASAR TEORI**

Sebelum menyelesaikan model dan menganalisisnya, sangat diperlukan adanya materi-materi penunjang dan pendukung. Pada bab ini diberikan teori-teori penunjang terkait dengan penelitian.

#### **2.1 Penelitian yang Pernah Dilakukan**

Banyak penelitian yang membahas tentang kontrol optimal dalam manajemen inventori. Beberapa penelitian yang terkait dengan penulisan dan penyelesaian penelitian ini sebagai berikut.

1. Gohary, Tadj, and Al-Rasheedi (2006) membahas tentang penggunaan kontrol optimal untuk mengatur laju produksi dari sistem inventori yang buruk.
2. Darsih Indayani (2010) membahas tentang kendali optimal pada pengadaan bahan mentah dengan kebijakan pengadaan tepat waktu, pergudangan, dan penundaan. Pada papernya dijelaskan mengenai faktor pemotongan atau diskon, baik dalam bentuk diskrit maupun kontinu.
3. Bukhari dan Gohary (2011) membahas tentang kontrol optimal sistem perawatan produksi dengan memperhatikan kerusakan produk. Namun dalam papernya tidak memuat faktor diskon.
4. Vylda Pavela (2015) membahas tentang kontrol optimal sistem inventori dengan memperhatikan kerusakan produk. Pada papernya produk yang diproduksi adalah sejenis.

#### **2.2 Model Sistem Perawatan Produksi**

Persediaan atau inventori merupakan aset yang sangat penting, baik dalam jumlah maupun peranannya dalam kegiatan perusahaan. Sistem inventori merupakan kegiatan dalam proses mengelola data transaksi dan persediaan dalam gudang. Sistem Inventori biasanya terdiri dari sistem penerimaan barang, sistem pembelian barang dan sistem gudang. Informasi yang dapat ditampilkan adalah informasi permintaan pembelian barang (*Purchase Request*), pembelian barang (*Purchase Order*), penerimaan barang (*Receiving*) dan informasi inventori lainnya.

Sebuah perusahaan memproduksi produk yang homogen atau sejenis dan mempunyai gudang penyimpanan. Dalam paper (Bukhari dan Gohary, 2011) sistem inventori dengan perawatan produksi yang digunakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \dot{I}(t) &= p(t)u(t) - \theta I(t) - S(t) \\ \dot{p}(t) &= -[\alpha(t) + m(t)]p(t) + m(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

dan

$$I(t) \geq 0, S(t) \geq 0, 0 \leq m(t) \leq M, 0 \leq p(t) \leq 1, \alpha(t) \geq 0, u(t) \geq 0$$

dengan keterangan sebagai berikut:

$\dot{I}(t)$	Laju banyaknya inventori pada waktu t
$\dot{p}(t)$	Laju proporsi produk baik pada waktu t
$I(t)$	Banyaknya inventori pada waktu t
$p(t)$	Proporsi produk baik pada waktu t
$u(t)$	Banyaknya produk yang terjadwal pada waktu t
$S(t)$	Banyaknya permintaan pada waktu t
$\theta$	Proporsi produk yang rusak
$m(t)$	Banyaknya produk yang akan diberi perawatan pada waktu t
$\alpha(t)$	Banyaknya produk yang usang pada waktu t

Pada penelitian ini, model sistem perawatan produksi khususnya pada fungsi objektifnya akan dikembangkan dengan menambahkan faktor diskon. Selanjutnya akan dibahas mengenai pengertian dari diskon.

Darsih Indayani (2010) dalam papernya menjelaskan bahwa *Net Present Value* (NPV) merupakan metode untuk menganalisis *Discounted Cash Flow* (DCF) dan merupakan metode standar untuk menaksir kondisi finansial dari proyek jangka panjang. NPV untuk sistem waktu yang diskrit merupakan pembagian oleh nilai 1 tambah rata-rata bunga atau pemotongan untuk tiap periode waktu yang akan berlalu. Jadi untuk mendapatkan NPV untuk sistem waktu yang diskrit dilakukan *discounting* dengan faktor pemotongan sebesar  $\frac{R_t}{(1+r)^t}$ . Maka untuk sistem waktu yang diskrit NPV dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$NPV = \frac{R_t}{(1 + \rho)^t} \quad (2.2)$$

Sedangkan untuk sistem waktu yang kontinu digunakan faktor pemotongan sebesar  $e^{-rt}R_t$ . Maka untuk sistem waktu yang kontinu NPV dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$NPV = e^{-\rho t} R_t \quad (2.3)$$

Pada paper Bukhari dan Gohary (2011) digunakan fungsi objektif sebagai berikut.

$$2J = \min_{u(t), m(t) \geq 0} \int_0^T [h_1(I(t) - \bar{I})^2 + h_2(p(t) - \bar{p})^2 + c_1(u(t) - \bar{u})^2 + c_2(m(t) - \bar{m})^2] dt \quad (2.4)$$

Dari persamaan (2.1), (2.3) dan (2.4) dapat diformulasikan permasalahan kontrol optimal yang terdiri dari dua variabel *state* yaitu banyaknya inventori ( $I(t)$ ) dan proporsi produk baik serta dua variabel kontrol yaitu banyaknya produk yang terjadwal dan banyaknya produk yang akan diberi perawatan. Permasalahan dalam penelitian ini adalah untuk meminimumkan fungsi objektif atau fungsi tujuan (*Performance Index*) dan dipengaruhi oleh *discounting*. Fungsi objektif yang digunakan dalam penelitian sebagai berikut:

$$2J = \min_{u(t), m(t) \geq 0} \int_0^T e^{-\rho t} [h_1(I(t) - \bar{I})^2 + h_2(p(t) - \bar{p})^2 + c_1(u(t) - \bar{u})^2 + c_2(m(t) - \bar{m})^2] dt \quad (2.5)$$

dimana  $t \in [0, T]$ ,  $h_i, c_i > 0, i = 1, 2$ .

dengan keterangan sebagai berikut:

$h_i$	Biaya penyimpanan
$c_1$	Biaya inventori
$c_2$	Biaya perawatan produksi
$\bar{I}$	Banyaknya inventori yang diinginkan (target)
$\bar{p}$	Proporsi produk baik yang diinginkan (target)
$\bar{u}$	Banyaknya produk terjadwal yang diinginkan (target)
$\bar{m}$	Banyaknya produk yang akan diberi perawatan yang diinginkan (target)
$\rho$	Faktor diskon

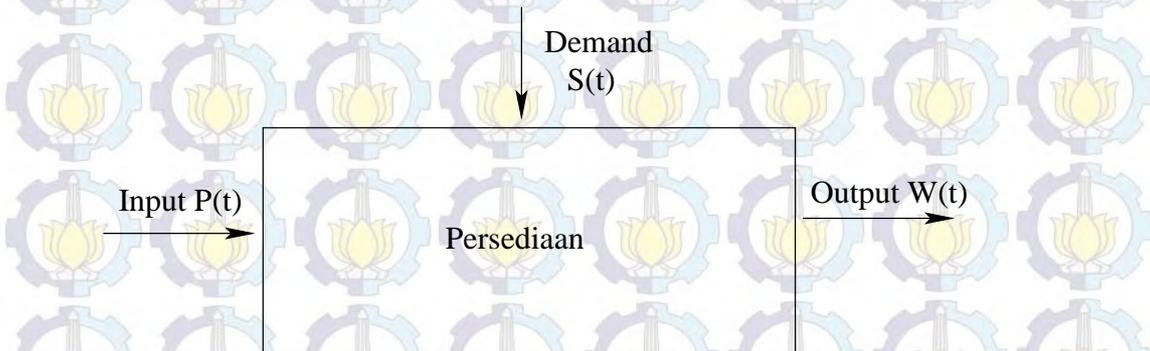
Fungsi objektif (2.5) adalah menghitung besarnya biaya produksi total. Biaya produksi total terdiri dari biaya penyimpanan, biaya inventori, dan biaya perawatan produksi. Nilai  $\frac{1}{2}$  menunjukkan bahwa bobot yang menyatakan tingkat kepentingan dari biaya-biaya yang bersangkutan adalah sama. Masalah optimasi tersebut dapat diselesaikan dengan Prinsip Maksimum Pontryagin (Bounkhel, M. dan Tadj, L., 2005).

## 2.3 Bentuk Sistem Inventori

Pada buku yang ditulis Ginting (Ginting, R., 2007) bahwa secara umum, suatu sistem inventori atau persediaan terbagi atas:

### 2.3.1 Sistem Sederhana

Sistem sederhana yaitu sistem persediaan yang berdasarkan atas input dan output.

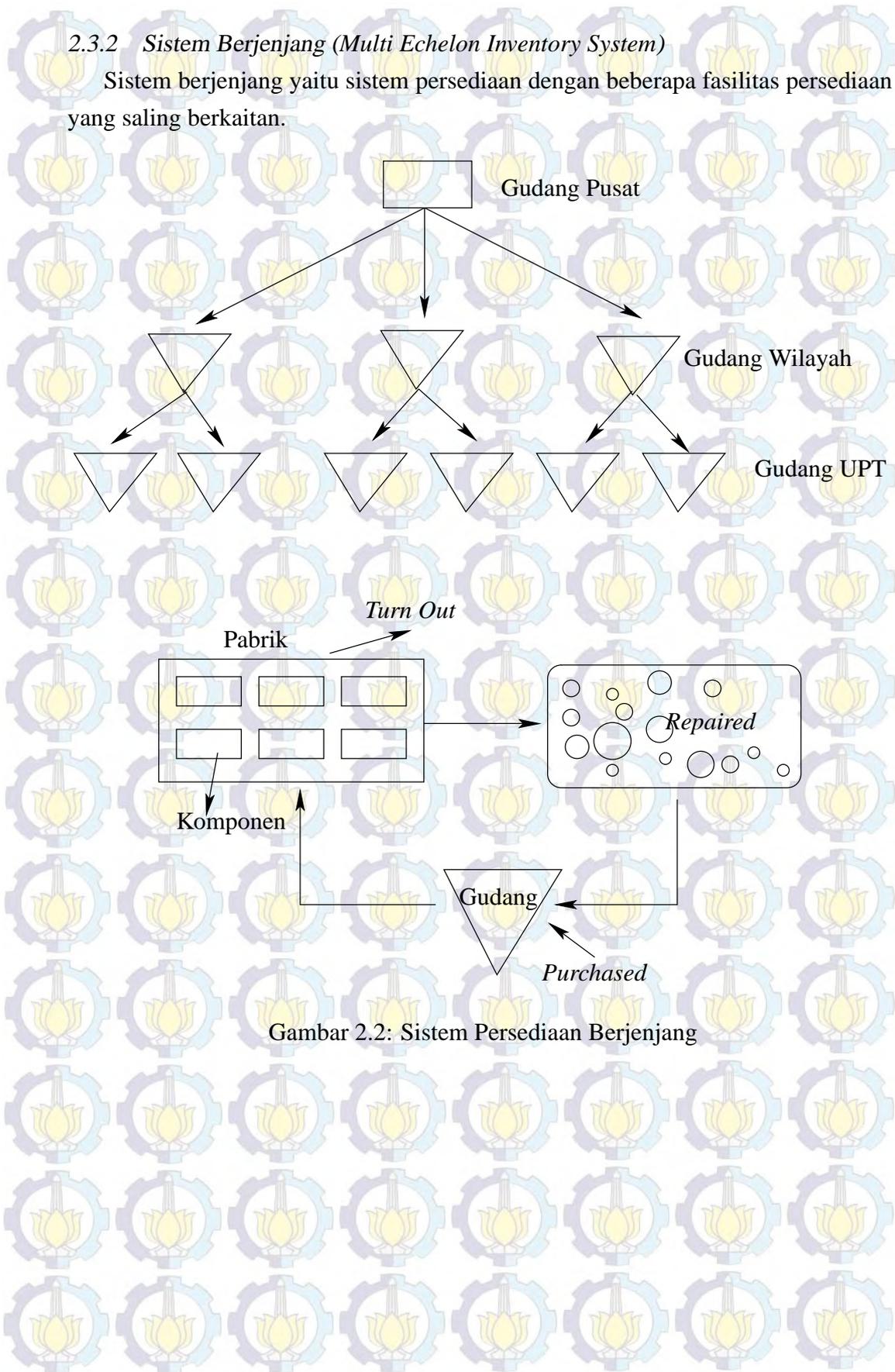


Gambar 2.1: Sistem Persediaan Input-Output

Gambar 2.1 menunjukkan sistem persediaan yang dipengaruhi oleh proses input dan proses output.  $P(t)$  adalah rata-rata material atau bahan yang masuk kedalam sistem persediaan pada saat  $t$ . Sedangkan  $W(t)$  adalah rata - rata suatu material atau bahan keluar dari sistem persediaan. Output ( $W(t)$ ) dipengaruhi oleh permintaan atau kebutuhan terhadap material atau bahan, dengan rata-rata  $S(t)$ , yang berasal dari luar perusahaan dan berada diluar kendali perusahaan.

### 2.3.2 Sistem Berjenjang (Multi Echelon Inventory System)

Sistem berjenjang yaitu sistem persediaan dengan beberapa fasilitas persediaan yang saling berkaitan.



Gambar 2.2: Sistem Persediaan Berjenjang

## 2.4 Biaya-Biaya Inventori

Biaya-biaya persediaan ini timbul karena adanya rencana persediaan dalam perusahaan untuk memperlancar kegiatan produksi. Biaya-biaya akibat pengelolaan persediaan dibedakan menjadi enam, yaitu:

### 2.4.1 *Cost Item atau Harga Barang per Unit*

Biaya yang timbul karena adanya harga per unit pembelian barang.

### 2.4.2 *Ordering Cost atau Biaya Pemesanan*

Biaya yang dikeluarkan berkenaan dengan adanya pemesanan barang atau bahan. Yang termasuk dalam bentuk biaya ini meliputi biaya administrasi, biaya pengiriman/pengangkutan dan bongkar muat pesanan, biaya penempatan order, dan biaya pemeriksaan.

### 2.4.3 *Holding Cost atau Biaya Penyimpanan*

Biaya yang dikeluarkan berkenaan dengan adanya kegiatan penyimpanan barang/bahan yang sudah dibeli.

### 2.4.4 *Stockout Cost atau Biaya Kekurangan Persediaan*

Biaya yang digunakan sehubungan dengan adanya persediaan yang kecil dari jumlah yang dikeluarkan. Di samping itu, biaya ini timbul akibat keterlambatan pengiriman pesanan dari pemasok.

### 2.4.5 *Biaya Resiko Kerusakan dan Kehilangan Persediaan*

Biaya yang timbul akibat barang persediaan telah kadaluarsa atau rusak akibat kondisi tertentu dan kehilangan persediaan.

### 2.4.6 *Safety Stock atau Biaya Persediaan Pengaman*

Biaya yang dikeluarkan sehubungan dengan adanya persediaan pengaman yang berfungsi sebagai persediaan tambahan untuk melindungi dan menjaga kemungkinan terjadinya kekurangan persediaan atau biaya yang dikeluarkan sehubungan dengan adanya pesanan permintaan yang datang terlalu awal (Sumayang, 2003).

## 2.5 Titik Kesetimbangan

Diberikan sistem persamaan differensial tak linear:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= f(I, p) \\ \frac{dp}{dt} &= g(I, p) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Sebuah titik  $(I^*, p^*)$  merupakan titik kesetimbangan dari persamaan (2.6) jika memenuhi  $f(I, p) = g(I, p) = 0$ . Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan  $I(t) = I^*$  dan  $p(t) = p^*$  adalah penyelesaian kesetimbangan dari persamaan (2.6) untuk semua  $t$ .

## 2.6 Linierisasi

Linierisasi merupakan proses melinierkan suatu sistem persamaan tak linier. Pendekatan linier dilakukan disekitar titik setimbang. Misalkan titik setimbang  $(I^*, p^*)$ , sehingga ekspansi deret Taylor dari sistem (2.6) adalah sebagai berikut: (Subiono, 2013)

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= f(I^*, p^*) + (I - I^*) \frac{\partial f}{\partial I} + (p - p^*) \frac{\partial f}{\partial p} + (u - u^*) \frac{\partial f}{\partial u} + (m - m^*) \frac{\partial f}{\partial m} + \dots \\ \frac{dp}{dt} &= g(I^*, p^*) + (I - I^*) \frac{\partial g}{\partial I} + (p - p^*) \frac{\partial g}{\partial p} + (u - u^*) \frac{\partial g}{\partial u} + (m - m^*) \frac{\partial g}{\partial m} + \dots \end{aligned}$$

dengan

$$f(I^*, p^*) = 0$$

$$g(I^*, p^*) = 0$$

didefinisikan

$$I - I^* = a_1 \Rightarrow \dot{I} = \dot{a}_1$$

$$p - p^* = a_2 \Rightarrow \dot{p} = \dot{a}_2$$

$$u - u^* = v_1 \Rightarrow \dot{u} = \dot{v}_1$$

$$m - m^* = v_2 \Rightarrow \dot{m} = \dot{v}_2$$

Sehingga ekspansi deret Taylor diatas menjadi

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= a_1 \frac{\partial f}{\partial I} + a_2 \frac{\partial f}{\partial p} + v_1 \frac{\partial f}{\partial u} + v_2 \frac{\partial f}{\partial m} \\ \frac{dp}{dt} &= a_1 \frac{\partial g}{\partial I} + a_2 \frac{\partial g}{\partial p} + v_1 \frac{\partial g}{\partial u} + v_2 \frac{\partial g}{\partial m} \end{aligned}$$

Persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial I} & \frac{\partial f}{\partial p} \\ \frac{\partial g}{\partial I} & \frac{\partial g}{\partial p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial m} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

## 2.7 Kestabilan Lokal

Misalkan akar-akar persamaan karakteristik sistem (2.6) adalah  $\gamma_1$  dan  $\gamma_2$ , maka  $\gamma_1$  dan  $\gamma_2$  disebut nilai eigen. Nilai eigen tersebut digunakan untuk menentukan

jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.6). Untuk memperoleh nilai eigen digunakan rumus  $\det(A - \gamma I) = 0$ . Kestabilan dari titik kesetimbangan sistem *autonomous* (berkaitan dengan vektor keadaan) nonlinear yang dilinearakan dapat ditentukan berdasarkan analisis kestabilan dari sistem *autonomous* linear, seperti yang ditampilkan pada Tabel 2.1 (Boyce dan DiPrima, 2009).

Tabel 2.1: Kriteria Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem *Autonomous* Nonlinear

Nilai Eigen	Kriteria	Kestabilan	Bentuk
$\gamma_{1,2} \in R$	$\gamma_{1,2} > 0$ $\gamma_{1,2} < 0$ Minimal satu $\gamma > 0$	Tak stabil Stabil asimtotik Tak stabil	Simpul Simpul Pelana
$\gamma_{1,2} = a \pm bi \in C$	$a > 0$ $a < 0$ $a = 0$	Tak stabil Stabil asimtotik Tidak dapat ditentukan	Pelana Spiral Elips/lingkaran

## 2.8 Keterkontrolan dan Keteramatan

### 2.8.1 Keterkontrolan (*Controllability*)

Diberikan sistem linear varian-waktu yang disajikan oleh persamaan:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \quad (2.7)$$

**Definisi 1:** Sistem linear (2.7) dikatakan terkontrol bila untuk setiap keadaan sebarang  $x(0) = x_0$  ada masukan  $u(t)$  yang tidak dibatasi mentransfer keadaan  $x_0$  ke sebarang keadaan akhir  $x(t_1) = x_1$  dengan waktu akhir  $t_1$  hingga.

**Teorema 1:** Syarat perlu dan cukup sistem (2.7) terkontrol adalah:

- $\omega(0, t_1) = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$  non singular.
- $M_c = (B | AB | A^2 B | \dots | A^{n-1} B)$  mempunyai rank sama dengan  $n$

### 2.8.2 Keteramatan

**Definisi 2:** Bila setiap keadaan awal  $x(0) = x_0$  secara tunggal dapat diamati dari setiap pengukuran keluaran sistem (2.7)  $t = 0$  ke  $t = t_1$ , maka sistem dikatakan "teramati".

**Teorema 2:** Syarat perlu dan cukup sistem (2.7) teramati adalah:

- Matriks  $m(0, t) = \int_0^t e^{-A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$  non singular.
- $M_0 = (C | CA | CA^2 | \dots | CA^{n-1})^{-1}$  mempunyai rank sama dengan  $n$

## 2.9 Kontrol Optimal

Tujuan utama dari permasalahan kontrol optimal yaitu untuk mencari nilai kontrol yang akan dimasukkan ke dalam model atau sistem dan memenuhi kendala. Pada waktu yang sama, dapat ditentukan nilai yang optimal (yaitu maksimum atau minimum) berdasarkan fungsi tujuan (fungsi objektif). Pada umumnya fungsi objektif pada masalah kontrol optimal dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$J(u(t)) = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^T V(x(t), u(t), t) dt \quad (2.8)$$

dengan sistem (*plant*) dinyatakan oleh persamaan berikut,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2.9)$$

serta kondisi batas

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ x(t_f) &= x_f \end{aligned}$$

Kontrol  $u^*(t)$  merupakan kontrol optimal, jika disubstitusikan ke dalam sistem (2.9) akan diperoleh *state* yang optimal  $x^*(t)$  dan pada saat yang sama mengoptimalkan fungsi objektif (2.8) yang kemudian dinotasikan dengan  $J(u^*(t))$  atau  $J^*$ . *State* optimal  $x^*(t)$  dibatasi oleh kondisi batas, yaitu kondisi awal ( $x_0$ ) dan kondisi akhir ( $x_f$ ) (Naidu, 2002).

## 2.10 Prinsip Maksimum Pontryagin

Prinsip Maksimum Pontryagin digunakan untuk memperoleh kontrol terbaik pada sistem dinamik dari *state* awal hingga *state* akhir, yaitu dengan memaksimalkan atau meminimumkan indeks performansi dengan kontrol  $u(t)$  terbatas pada ( $u(t) \in U$ ). Langkah-langkah menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin adalah sebagai berikut. Diberikan persamaan state (2.9) dimana  $\dot{x}$  merupakan vektor yang merepresentasikan sistem, fungsi objektif (2.8), dan kondisi batas  $x(t_0) = x_0$  dan  $x(t_f) = x_f$ . Maka langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut (Naidu, 2002).

1. membentuk fungsi Hamiltonian

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda' f(x(t), u(t), t) \quad (2.10)$$

2. meminimumkan H terhadap semua vektor kontrol u(t)

$$\frac{\partial H(x(t), u(t), \lambda(t), t)}{\partial u(t)} = 0 \quad (2.11)$$

dan diperoleh

$$u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

3. menggunakan hasil dari langkah 2 yaitu dengan mensubstitusikannya ke dalam langkah 1 dan menentukan  $H^*$  yang optimal.

$$H^*(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) = H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t) \quad (2.12)$$

4. menyelesaikan persamaan

$$\dot{x}^*(t) = +\left(\frac{\partial H(x(t), u(t), \lambda(t), t)}{\partial \lambda(t)}\right)_* \quad (2.13)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\left(\frac{\partial H(x(t), u(t), \lambda(t), t)}{\partial x(t)}\right)_* \quad (2.14)$$

dengan kondisi awal  $x_0$  dan kondisi akhir

$$\left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t}\right]_{t_f} \delta t_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_* - \lambda^*(t)\right]'_{t_f} \delta x_f = 0 \quad (2.15)$$

dengan S adalah bentuk Meyer dari fungsi tujuan J, H adalah persamaan Hamiltonian,  $\delta$  menunjukkan variasi dan tanda \* menunjukkan keadaan saat variabel kontrolnya stasioner.

5. untuk memperoleh kontrol optimal, solusi  $x^*(t), \lambda^*(t)$  dari langkah 4 disubstitusikan ke dalam ekspresi kontrol optimal  $u^*(t)$  pada langkah 2.

## 2.11 Metode Runge Kutta

Metode Runge Kutta merupakan metode penyelesaian numerik yang hanya membutuhkan satu nilai awal. Metode ini hanya dapat digunakan pada sistem persamaan diferensial tingkat satu, selain itu harus diubah menjadi persamaan differensial simultan terlebih dahulu. Jenis metode Runge Kutta yang digunakan

adalah metode *forward backward sweep* Runge Kutta orde 4 karena sistem persamaan diferensial pada usulan penelitian ini terdapat persamaan yang diketahui nilai awal dan persamaan yang lain diketahui nilai akhir. Alur pengerjaannya adalah menyelesaikan persamaan yang diketahui nilai awalnya terlebih dahulu secara *forward*, kemudian persamaan yang lain yang diketahui nilai akhir dikerjakan secara *backward*. Secara matematika dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= f(t, I(t), u(t)), x(t_0) = a \\ \frac{d\lambda(t)}{dt} &= g(t, \lambda(t), u(t)), \lambda(t_f) = b \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$t_0 \leq t \leq t_f$$

Integrasi numerik dari persamaan (2.16) dengan metode Runge Kutta orde empat dinyatakan sebagai berikut:

- *Forward Sweep*

$$I_{n+1}(t) = I_n(t) + \frac{h}{6}(k_{1,I} + 2k_{2,I} + 2k_{3,I} + k_{4,I})$$

dengan

$$k_{1,I} = f(t_n, I_n, u_n)$$

$$k_{2,I} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, I_n + \frac{h}{2}k_{1,I}, \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})\right)$$

$$k_{3,I} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, I_n + \frac{h}{2}k_{2,I}, \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})\right)$$

$$k_{4,I} = f(t_n + h, I_n + hk_{3,I}, u_{n+1})$$

- *Backward Sweep*

$$\lambda_{n-1}(t) = \lambda_n(t) - \frac{h}{6}(k_{1,\lambda} + 2k_{2,\lambda} + 2k_{3,\lambda} + k_{4,\lambda})$$

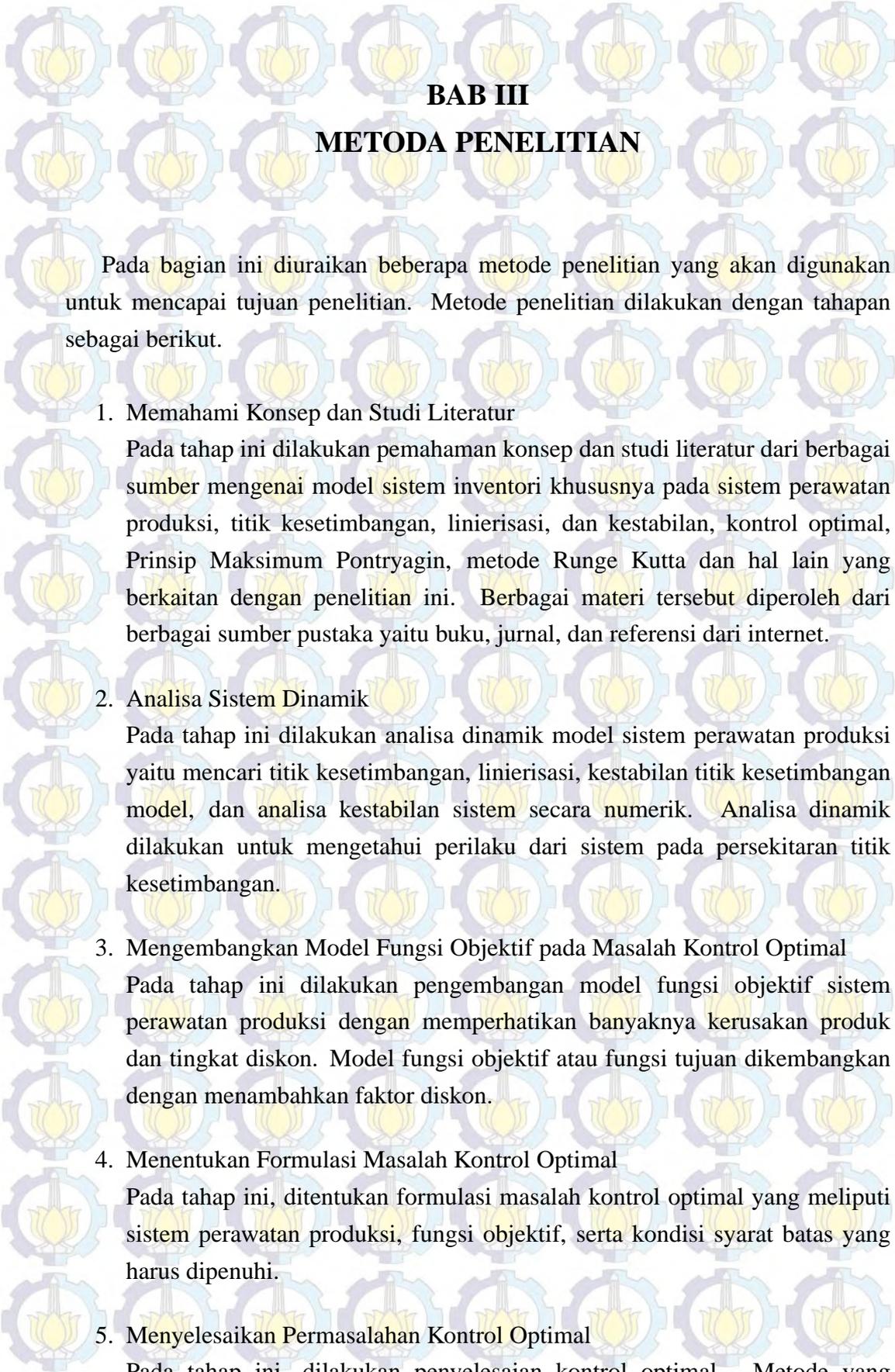
dengan

$$k_{1,\lambda} = g(t_n, \lambda_n, I_n, u_n)$$

$$k_{2,\lambda} = g\left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_n - \frac{h}{2}k_{1,\lambda}, \frac{1}{2}(I_n + I_{n-1}), \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1})\right)$$

$$k_{3,\lambda} = g\left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_n - \frac{h}{2}k_{2,\lambda}, \frac{1}{2}(I_n + I_{n-1}), \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1})\right)$$

$$k_{4,\lambda} = g(t_n - h, \lambda_n - hk_{3,\lambda}, I_{n-1}, u_{n-1})$$



## **BAB III**

### **METODA PENELITIAN**

Pada bagian ini diuraikan beberapa metode penelitian yang akan digunakan untuk mencapai tujuan penelitian. Metode penelitian dilakukan dengan tahapan sebagai berikut.

#### **1. Memahami Konsep dan Studi Literatur**

Pada tahap ini dilakukan pemahaman konsep dan studi literatur dari berbagai sumber mengenai model sistem inventori khususnya pada sistem perawatan produksi, titik kesetimbangan, linierisasi, dan kestabilan, kontrol optimal, Prinsip Maksimum Pontryagin, metode Runge Kutta dan hal lain yang berkaitan dengan penelitian ini. Berbagai materi tersebut diperoleh dari berbagai sumber pustaka yaitu buku, jurnal, dan referensi dari internet.

#### **2. Analisa Sistem Dinamik**

Pada tahap ini dilakukan analisa dinamik model sistem perawatan produksi yaitu mencari titik kesetimbangan, linierisasi, kestabilan titik kesetimbangan model, dan analisa kestabilan sistem secara numerik. Analisa dinamik dilakukan untuk mengetahui perilaku dari sistem pada persekitaran titik kesetimbangan.

#### **3. Mengembangkan Model Fungsi Objektif pada Masalah Kontrol Optimal**

Pada tahap ini dilakukan pengembangan model fungsi objektif sistem perawatan produksi dengan memperhatikan banyaknya kerusakan produk dan tingkat diskon. Model fungsi objektif atau fungsi tujuan dikembangkan dengan menambahkan faktor diskon.

#### **4. Menentukan Formulasi Masalah Kontrol Optimal**

Pada tahap ini, ditentukan formulasi masalah kontrol optimal yang meliputi sistem perawatan produksi, fungsi objektif, serta kondisi syarat batas yang harus dipenuhi.

#### **5. Menyelesaikan Permasalahan Kontrol Optimal**

Pada tahap ini, dilakukan penyelesaian kontrol optimal. Metode yang

digunakan dalam penyelesaian kontrol optimal ini adalah Prinsip Maksimum Pontryagin.

#### 6. Pembuatan Program Simulasi

Pada tahap ini, dicari solusi dari permasalahan kontrol optimal yaitu meminimumkan biaya produksi total. Dengan memanfaatkan persamaan sistem, fungsi objektif, serta kondisi syarat batas yang harus dipenuhi, maka dibuat simulasi dengan memasukkan fungsi permintaan dan fungsi banyaknya produk yang usang (kadaluarsa) yang berbeda (*sensitivity analysis*) sehingga diperoleh hasil berupa grafik fungsi permintaan, fungsi banyaknya produk yang usang (kadaluarsa), fungsi tingkat inventori, fungsi proporsi produk baik, fungsi banyaknya produk yang terjadwal, fungsi banyaknya produk yang diberi perawatan, dan fungsi biaya total dengan menggunakan algoritma metode Runge Kutta orde 4 dan *software* yang digunakan adalah Scilab.

#### 7. Analisa Hasil Simulasi

Pada tahap ini, dilakukan analisa dan pembahasan terhadap hasil dari *running* simulasi yang berupa grafik fungsi permintaan, fungsi banyaknya produk yang usang (kadaluarsa), fungsi tingkat inventori, fungsi proporsi produk baik, fungsi banyaknya produk yang terjadwal, fungsi banyaknya produk yang diberi perawatan, dan fungsi biaya total. Dengan mengubah fungsi permintaan dan fungsi banyaknya produk yang usang (kadaluarsa) pada program simulasi, maka akan dianalisa bagaimana perubahan grafik tersebut.

## BAB IV

### HASIL DAN PEMBAHASAN

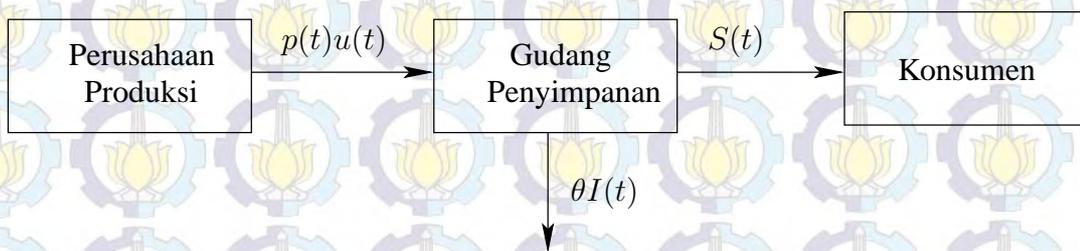
Dalam bab ini dibahas tentang formulasi masalah kontrol optimal model sistem perawatan produksi yang terdiri dari dua variabel *state* yaitu banyaknya inventori ( $I(t)$ ) dan proporsi produk baik ( $p(t)$ ) serta dua variabel kontrol yaitu produk yang terjadwal ( $u(t)$ ) dan produk yang diberi perawatan ( $m(t)$ ). Selain itu, dibahas tentang strategi penyelesaian masalah kontrol optimal menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Selanjutnya dilakukan simulasi dan analisa terhadap hasil yang diperoleh.

#### 4.1 Model Sistem Perawatan Produksi dengan Memperhatikan Kerusakan Produk dan Tingkat Diskon

Model sistem inventori dalam penelitian ini merupakan model sistem perawatan produksi yang memperhatikan tingkat kerusakan produk dan tingkat diskon. Semua fungsi diasumsikan sebagai fungsi yang *differentiable* dan kontinu. Sistem perawatan produksi yang digunakan sebagai berikut.

##### 4.1.1 Laju Banyaknya Inventori (Persediaan Barang)

Model laju banyaknya inventori ini dapat diilustrasikan berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 4.1.



Gambar 4.1: Diagram Kompartemen untuk Laju Banyaknya Inventori

Sistem perawatan produksi untuk laju banyaknya inventori sebagai berikut:

$$\dot{I}(t) = p(t)u(t) - \theta I(t) - S(t) \quad (4.1)$$

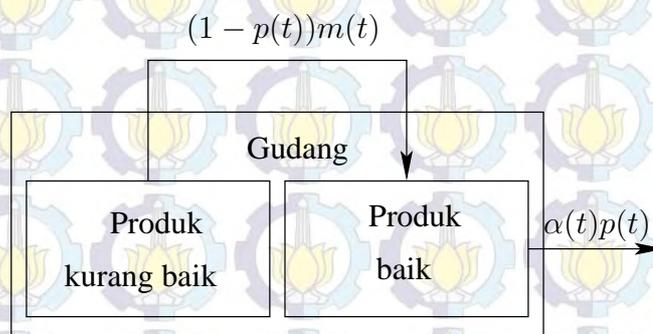
dengan keterangan sebagai berikut:

- $\dot{I}(t)$  Laju banyaknya inventori pada waktu  $t$
- $I(t)$  Banyaknya inventori pada waktu  $t$
- $p(t)$  Proporsi produk yang baik pada waktu  $t$
- $u(t)$  Banyaknya produk yang terjadwal pada waktu  $t$
- $S(t)$  Banyaknya permintaan pada waktu  $t$
- $\theta$  Proporsi produk yang rusak

Laju banyaknya inventori dipengaruhi oleh proporsi produk baik, produk yang terjadwal, banyaknya inventori, proporsi produk yang rusak, dan permintaan. Jika proporsi produk baik dan produk yang terjadwal tinggi maka laju banyaknya inventori juga meningkat dan sebaliknya. Jika proporsi produk yang rusak meningkat maka laju banyaknya inventori menurun dan sebaliknya. Serta jika permintaan konsumen meningkat maka laju banyaknya inventori menurun pula dan sebaliknya.

#### 4.1.2 Laju Proporsi Produk Baik

Model laju proporsi produk baik ini dapat diilustrasikan berdasarkan diagram kompartemen pada Gambar 4.2.



Gambar 4.2: Diagram Kompartemen untuk Laju Proporsi Produk Baik

Sistem perawatan produksi untuk laju proporsi produk baik sebagai berikut:

$$\dot{p}(t) = (1 - p(t))m(t) - \alpha(t)p(t) \quad (4.2)$$

dengan keterangan sebagai berikut:

- $\dot{p}(t)$  Laju proporsi produk baik pada waktu  $t$
- $p(t)$  Proporsi produk baik pada waktu  $t$
- $m(t)$  Banyaknya produk yang akan diberi perawatan pada waktu  $t$
- $\alpha(t)$  Banyaknya produk yang usang pada waktu  $t$
- $(1 - p(t))$  Proporsi produk yang kurang baik pada waktu  $t$

Laju proporsi produk baik dipengaruhi oleh banyaknya produk yang usang (kadaluarsa), banyaknya produk yang diberi perawatan, proporsi produk baik, dan proporsi produk yang kurang baik. Jika banyaknya produk yang diberi perawatan dari produk yang kurang baik meningkat maka laju proporsi produk baik juga meningkat dan sebaliknya. Jika banyaknya produk baik yang usang (kadaluarsa) meningkat maka laju banyaknya inventori menurun dan sebaliknya.

Kendala variabel dari Persamaan (4.1) dan (4.2) sebagai berikut:

$$I(t) \geq 0, S(t) \geq 0, 0 \leq m(t) \leq M, 0 \leq p(t) \leq 1, \alpha(t) \geq 0, u(t) \geq 0$$

Kendala variabel menjelaskan bahwa tingkat inventori, banyaknya permintaan, banyaknya produk yang usang (kadaluarsa), dan banyaknya produk yang terjadwal bernilai positif atau lebih dari atau sama dengan nol. Sedangkan banyaknya produk yang diberi perawatan dan proporsi produk baik dibatasi yaitu untuk banyaknya produk yang diberi perawatan bernilai antara nol sampai M dan proporsi produk baik bernilai antara nol sampai 1.

## 4.2 Analisa Model Sistem Perawatan Produksi

Penyelesaian titik kesetimbangan, linierisasi, dan kestabilan digunakan untuk menentukan kestabilan dari sistem perawatan produksi. Sedangkan analisa kestabilan dilakukan secara numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta Orde 4.

### 4.2.1 Penyelesaian Titik Kesetimbangan

Titik Kesetimbangan  $(I^o, p^o)$  pada sistem Persamaan (4.1) dan (4.2) dapat diperoleh jika memenuhi  $\frac{dI(t)}{dt} = \frac{dp(t)}{dt} = 0$ , sehingga sistem Persamaan (4.1) dan (4.2) menjadi

$$\dot{I}(t) = p(t)u(t) - \theta I(t) - S(t) = 0 \quad (4.3)$$

$$\dot{p}(t) = (1 - p(t))m(t) - \alpha(t)p(t) = 0 \quad (4.4)$$

Dari Persamaan (4.3) dan (4.4) maka diperoleh  $p(t) = \frac{m(t)}{\alpha(t)+m(t)}$  dan  $I(t) = \frac{u(t)p(t)-S(t)}{\theta}$ . Setelah dilakukan substitusi  $p(t)$  ke hasil  $I(t)$  maka diperoleh titik kesetimbangan sebagai berikut.

$$P_a^o(I^o, p^o) = \left( \frac{u(t)\frac{m(t)}{\alpha(t)+m(t)} - S(t)}{\theta}, \frac{m(t)}{\alpha(t)+m(t)} \right)$$

Titik kesetimbangan  $P_a^o(I^o, p^o)$  menjelaskan bahwa sistem perawatan produksi akan stabil pada titik tersebut atau pada persekitaran titik tersebut.

#### 4.2.2 Penyelesaian Linierisasi

Pada penelitian ini, linierisasi digunakan untuk melinierkan sistem perawatan produksi dimana sistem tersebut merupakan sistem persamaan tak linier. Pendekatan linier dilakukan disekitar titik kesetimbangan. Linierisasi pada sistem persamaan tak linier dilakukan dengan menurunkan Persamaan (4.1) dan (4.2) terhadap variabel state dan kontrolnya. Hasil pelinieran dari Persamaan (4.1) dan (4.2) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial I(t)}{\partial I(t)} & \frac{\partial I(t)}{\partial p(t)} \\ \frac{\partial p(t)}{\partial I(t)} & \frac{\partial p(t)}{\partial p(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial I(t)}{\partial u(t)} & \frac{\partial I(t)}{\partial m(t)} \\ \frac{\partial p(t)}{\partial u(t)} & \frac{\partial p(t)}{\partial m(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ m(t) \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh hasil linierisasi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta & u(t) \\ 0 & -[\alpha(t) + m(t)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p(t) & 0 \\ 0 & 1 - p(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -S(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

dengan matriks A

$$A = \begin{bmatrix} -\theta & u(t) \\ 0 & -[\alpha(t) + m(t)] \end{bmatrix}$$

#### 4.2.3 Penyelesaian Kestabilan

Akar-akar persamaan karakteristik dari matriks jacobii (A) sistem perawatan produksi adalah  $\gamma_1$  dan  $\gamma_2$ . Nilai  $\gamma_1$  dan  $\gamma_2$  digunakan untuk menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem perawatan produksi. Untuk memperoleh  $\gamma_1$  dan  $\gamma_2$  atau nilai eigen digunakan rumus  $\det(\gamma I - A) = 0$  atau  $\det(A - \gamma I) = 0$ . Penyelesaian untuk menentukan nilai eigen dengan menggunakan rumus  $\det(\gamma I - A) = 0$  sebagai berikut:

$$\det \left[ \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma + \theta & u(t) \\ 0 & \gamma + [\alpha(t) + m(t)] \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\det \left[ \begin{pmatrix} \gamma + \theta & u(t) \\ 0 & \gamma + [\alpha(t) + m(t)] \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$(\gamma + \theta)(\gamma + (\alpha(t) + m(t))) = 0$$

$$\gamma^2 + (\alpha(t) + m(t))\gamma + \theta\gamma + \theta(\alpha(t) + m(t)) = 0$$

$$\gamma^2 + (\alpha(t) + m(t) + \theta)\gamma + \theta(\alpha(t) + m(t)) = 0 \quad (4.5)$$

Maka dari Persamaan (4.6) diperoleh akar-akar karakteristik sebagai berikut:

$$\gamma_{1,2} = \frac{-(\alpha(t) + m(t) + \theta) \pm \sqrt{(\alpha(t) + m(t) + \theta)^2 - 4\theta(\alpha(t) + m(t))}}{2} \quad (4.6)$$

dimana

$$\gamma_1 = \frac{-(\alpha(t) + m(t) + \theta) + \sqrt{(\alpha(t) + m(t) + \theta)^2 - 4\theta(\alpha(t) + m(t))}}{2} \quad (4.7)$$

$$\gamma_2 = \frac{-(\alpha(t) + m(t) + \theta) - \sqrt{(\alpha(t) + m(t) + \theta)^2 - 4\theta(\alpha(t) + m(t))}}{2} \quad (4.8)$$

Dari hasil yang diperoleh, maka  $\gamma_2$  memenuhi kriteria kestabilan yaitu  $\gamma_2 < 0$  stabil asimtotik dan untuk  $\gamma_1$  agar diperoleh stabil maka  $\gamma_1 < 0$  dengan syarat sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \sqrt{(\alpha(t) + m(t) + \theta)^2 - 4\theta(\alpha(t) + m(t))} &< (\alpha(t) + m(t) + \theta) \\ (\alpha(t) + m(t) + \theta)^2 - 4\theta(\alpha(t) + m(t)) &< (\alpha(t) + m(t) + \theta)^2 \\ -4\theta(\alpha(t) + m(t)) &< 0 \\ 4\theta(\alpha(t) + m(t)) &> 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

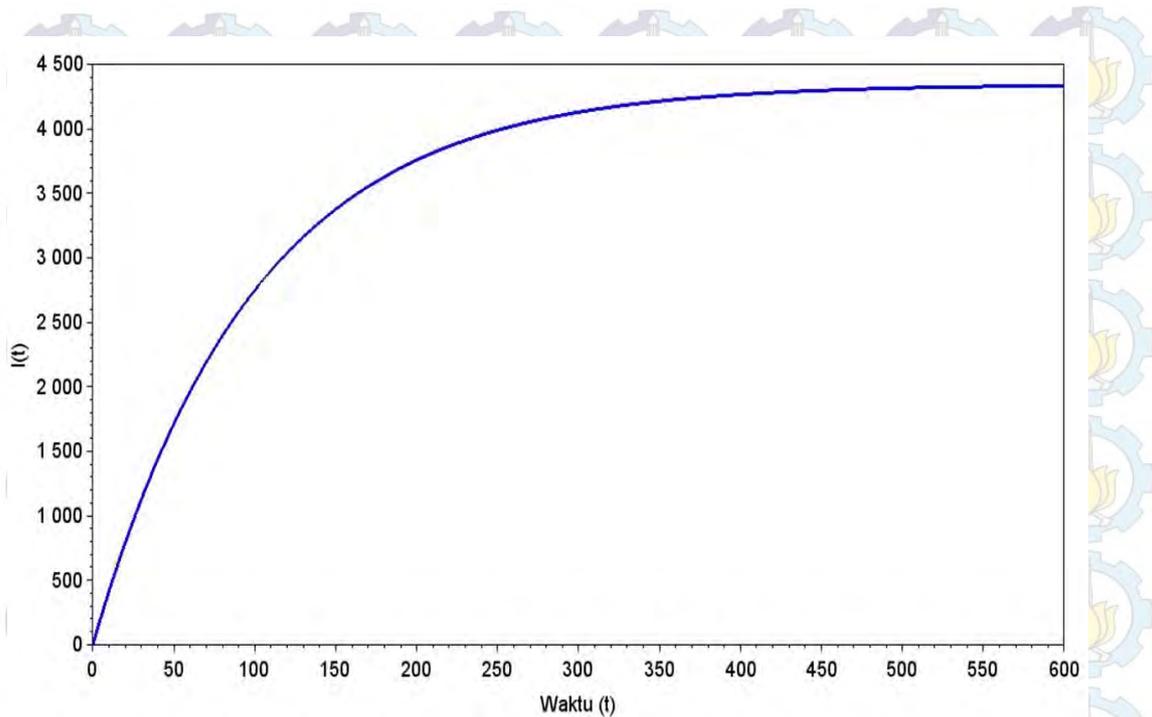
Dengan syarat  $\theta(\alpha(t) + m(t)) > 0$  maka  $\gamma_1$  stabil.

#### 4.2.4 Analisa Kestabilan Sistem Perawatan Produksi Secara Numerik

Analisa sistem secara numerik dilakukan dengan menggunakan *software* scilab.

Pada penelitian ini, analisa sistem dilakukan dengan mengubah bentuk fungsi dari fungsi permintaan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa). Bentuk fungsi yang digunakan adalah fungsi konstan dan fungsi yang bergantung waktu yaitu sinusoidal.

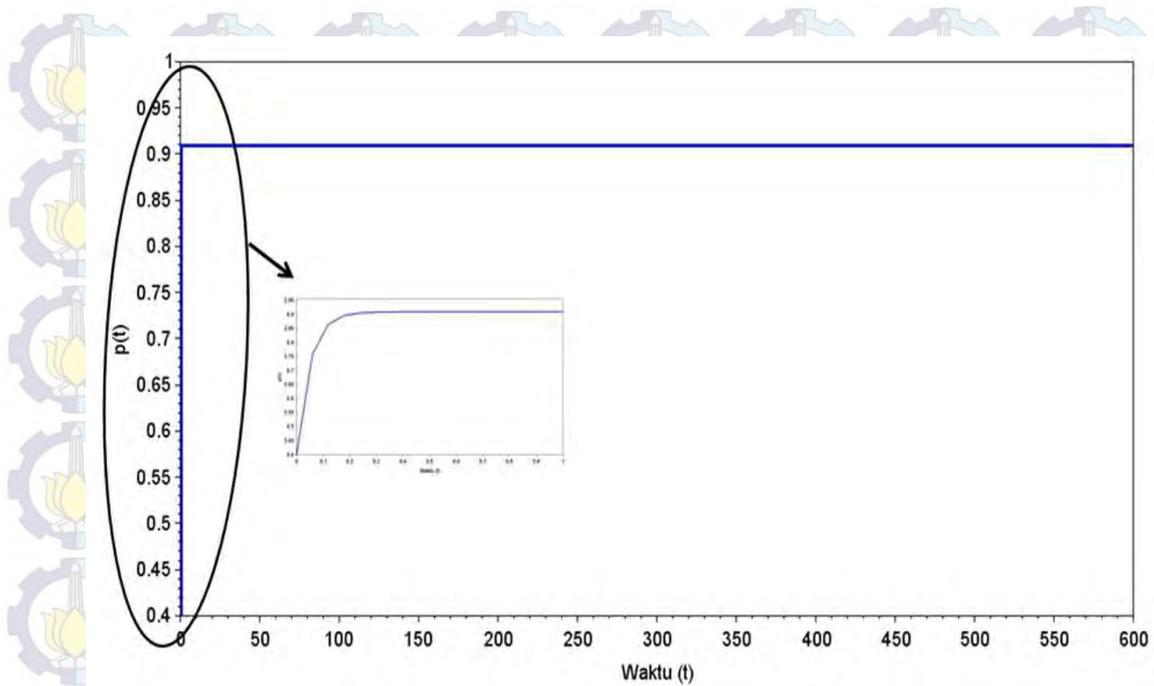
1. Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang (Kadaluarsa) Konstan  
Permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang terjadi pada perusahaan ini berupa fungsi konstan. Adapun nilai-nilai parameter dari model perawatan produksi yang digunakan untuk simulasi yaitu banyaknya produk yang terjadwal pada waktu  $t$  ( $u(t)$ ) adalah 50, banyaknya produk yang diberi perawatan pada waktu  $t$  ( $m(t)$ ) adalah 20, proporsi produk yang rusak ( $\theta$ ) adalah 0.01, banyaknya permintaan konsumen ( $S(t)$ ) adalah 2, banyaknya produk yang kadaluarsa pada waktu  $t$  ( $\alpha(t)$ ) adalah 2, dengan nilai awal tingkat inventori ( $I(0)$ ) adalah 6 dan proporsi produk baik ( $p(0)$ ) adalah 0.4.



Gambar 4.3: Fungsi Tingkat Inventori

Gambar 4.3 merupakan hasil simulasi tingkat inventori dengan bentuk fungsi permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) konstan.

Dari Gambar 4.3 dapat disimpulkan bahwa tingkat inventori menuju ke suatu titik tertentu atau stabil.

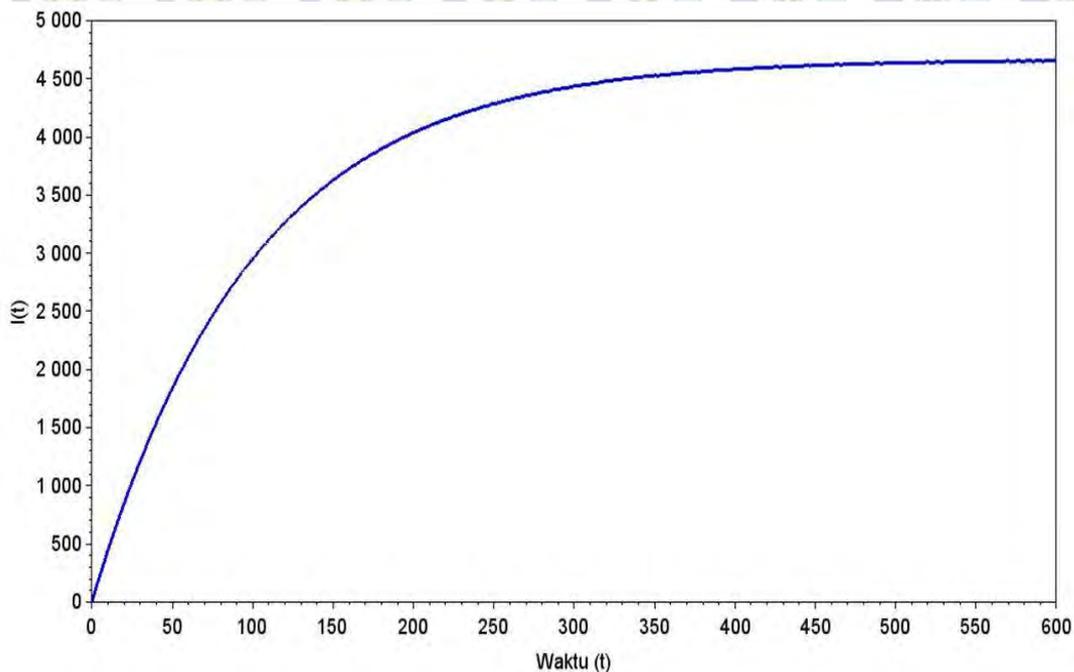


Gambar 4.4: Fungsi Laju Proporsi Produk Baik

Gambar 4.4 merupakan hasil simulasi proporsi produk baik dengan bentuk fungsi permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) konstan. Dari Gambar 4.4 dapat disimpulkan bahwa proporsi produk baik menuju ke suatu titik tertentu atau stabil. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar.

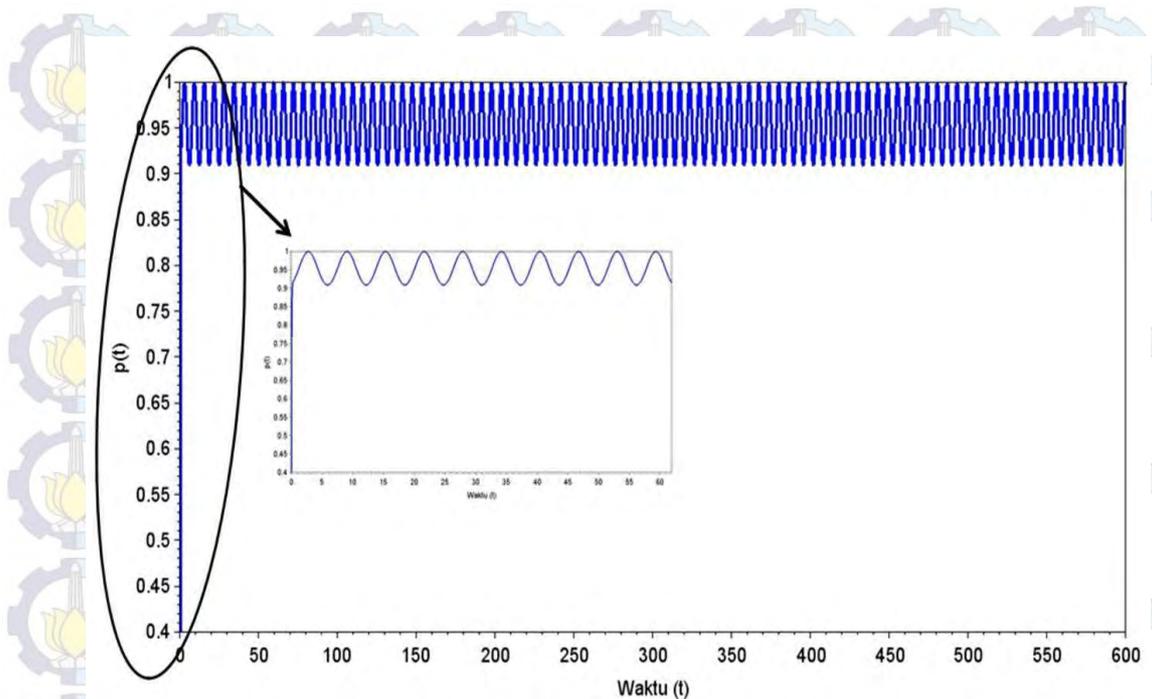
## 2. Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang (Kadaluarsa) Bergantung Waktu

Permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang terjadi pada perusahaan ini berupa fungsi. Fungsi permintaan menggunakan bentuk  $1 + \sin(5t)$  sedangkan fungsi banyaknya produk usang (kadaluarsa) menggunakan bentuk  $1 + \sin(2 + t)$ . Adapun nilai-nilai parameter dari model perawatan produksi yang digunakan untuk simulasi yaitu banyaknya produk yang terjadwal pada waktu  $t$  ( $u(t)$ ) adalah 50, banyaknya produk yang diberi perawatan pada waktu  $t$  ( $m(t)$ ) adalah 20, proporsi produk yang rusak ( $\theta$ ) adalah 0.01, banyaknya permintaan konsumen ( $S(t)$ ) adalah 2, banyaknya produk yang kadaluarsa pada waktu  $t$  ( $\alpha(t)$ ) adalah 2, dengan nilai awal tingkat inventori ( $I(0)$ ) adalah 6 dan proporsi produk baik ( $p(0)$ ) adalah 0.4.



Gambar 4.5: Fungsi Tingkat Inventori

Gambar 4.5 merupakan hasil simulasi tingkat inventori dengan bentuk fungsi permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang bergantung waktu. Dari Gambar 4.5 dapat disimpulkan bahwa tingkat inventori menuju ke suatu titik tertentu atau stabil.



Gambar 4.6: Fungsi Laju Proporsi Produk Baik

Gambar 4.6 merupakan hasil simulasi proporsi produk baik dengan bentuk fungsi permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang bergantung waktu. Dari Gambar 4.6 dapat disimpulkan bahwa proporsi produk baik stabil. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar.

Maka dapat disimpulkan dari hasil simulasi dengan mengubah bentuk fungsi permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) pada Gambar 4.3 sampai Gambar 4.6 menunjukkan bahwa sistem perawatan produksi dengan memperhatikan kerusakan produk adalah stabil.

### 4.3 Penyelesaian Keterkontrolan dan Keteramatan

#### 4.3.1 Penyelesaian Keterkontrolan (*Controllability*)

Dari hasil linierisasi maka diperoleh matriks A dan B sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} -\theta & u(t) \\ 0 & -[\alpha(t) + m(t)] \end{bmatrix}_{(I^0, p^0)}$$

$$B = \begin{bmatrix} p(t) & 0 \\ 0 & 1 - p(t) \end{bmatrix}_{(I^0, p^0)}$$

dengan parameter  $\theta = 0.01$ ,  $u(t) = 50$ ,  $\alpha(t) = 2$ ,  $m(t) = 20$ ,  $S(t) = 2$  maka diperoleh titik kesetimbangan  $(I^0, p^0) = (\frac{9956}{22}, \frac{20}{22})$  maka diperoleh matriks A dan B sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} -0.01 & 50 \\ 0 & -22 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{20}{22} & 0 \\ 0 & \frac{2}{22} \end{bmatrix}$$

Berdasarkan teorema 1 bahwa syarat perlu dan cukup sistem terkontrol adalah:  $M_c = (B|AB|A^2B| \dots |A^{n-1}B)$  mempunyai rank sama dengan n. Sehingga diperoleh matriks  $M_c$  sebagai berikut.

$$M_c = \begin{bmatrix} 0.9090 & 0 & -0.00909 & 0 \\ 0 & 0.0909 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Karena matriks  $M_c$  mempunyai rank sama dengan 2 maka sistem terkontrol.

#### 4.3.2 Penyelesaian Keteramatan

Dari hasil linierisasi maka diperoleh matriks A dan B sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} -\theta & u(t) \\ 0 & -[\alpha(t) + m(t)] \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dengan parameter  $\theta = 0.01$ ,  $u(t) = 50$ ,  $\alpha(t) = 2$ ,  $m(t) = 20$ ,  $S(t) = 2$  maka diperoleh titik kesetimbangan  $(I^0, p^0) = (\frac{9956}{22}, \frac{20}{22})$  maka diperoleh matriks A sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} -0.01 & 50 \\ 0 & -22 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan teorema 2 bahwa syarat perlu dan cukup sistem teramati adalah:  $M_0 = (C|CA|CA^2| \dots |CA^{n-1})^{-1}$  mempunyai rank sama dengan n. Sehingga diperoleh matriks  $M_0$  sebagai berikut.

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -0.01 & 50 \\ 0 & -22 \end{bmatrix}$$

Karena matriks  $M_0$  mempunyai rank sama dengan 2 maka sistem teramati.

#### 4.4 Fungsi Objektif Sistem Perawatan Produksi

Dalam hal ini, tujuan dari permasalahan kontrol optimal pada model sistem perawatan produksi dengan kerusakan produk dan tingkat diskon adalah meminimumkan biaya produksi total. Biaya produksi total pada penelitian ini meliputi biaya penyimpanan, biaya inventori, dan biaya perawatan produksi. Selain itu, pada penelitian ini juga diasumsikan bahwa perusahaan menentukan banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan yang diinginkan (target). Biaya produksi total terjadi jika banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan menyimpang dari yang diinginkan (target). Fungsi objektif dari sistem perawatan produksi sebagai berikut:

$$2J = \min_{u(t), m(t) \geq 0} \int_0^T e^{-\rho t} [h_1(I(t) - \bar{I})^2 + h_2(p(t) - \bar{p})^2 + c_1(u(t) - \bar{u})^2 + c_2(m(t) - \bar{m})^2] dt \quad (4.10)$$

dimana  $t \in [0, T]$ ,  $h_i, c_i > 0, i = 1, 2$ .

dengan keterangan sebagai berikut:

$h_i$	Biaya penyimpanan
$c_1$	Biaya inventori
$c_2$	Biaya perawatan produksi
$\bar{I}$	Banyaknya inventori yang diinginkan (target)
$\bar{p}$	Proporsi produk baik yang diinginkan (target)
$\bar{u}$	Banyaknya produk terjadwal yang diinginkan (target)
$\bar{m}$	Banyaknya produk yang akan diberi perawatan yang diinginkan (target)
$\rho$	Faktor diskon

#### 4.5 Penyelesaian Kontrol Optimal

Strategi penyelesaian permasalahan kontrol optimal sistem Persamaan (4.1), (4.2), dan fungsi objektif (4.10) dengan Prinsip Maksimum Pontryagin. Langkah penyelesaian dari Prinsip Maksimum Pontryagin sebagai berikut.

**Langkah 1:** Bentuk fungsi Hamiltonian yang diperoleh dari persamaan (2.10).

$$H = [-\frac{1}{2}e^{-\rho t} [h_1(I(t) - \bar{I})^2 + h_2(p(t) - \bar{p})^2 + c_1(u(t) - \bar{u})^2 + c_2(m(t) - \bar{m})^2)] + \lambda_1(t)(p(t)u(t) - \theta I(t) - S(t)) + \lambda_2(t)(-[\alpha(t) + m(t)]p(t) + m(t)) \quad (4.11)$$

**Langkah 2:** Meminimumkan H terhadap semua vektor kontrol persamaan  $u(t)$  dan persamaan  $m(t)$ .

- Hasil meminimumkan H terhadap vektor kontrol  $u(t)$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u} &= 0 \\ -e^{-\rho t}c_1(u(t) - \bar{u}) + \lambda_1(t)p(t) &= 0 \\ e^{-\rho t}c_1(u(t) - \bar{u}) &= \lambda_1(t)p(t) \\ (u(t) - \bar{u}) &= \frac{\lambda_1(t)p(t)}{e^{-\rho t}c_1} \\ u(t) &= \frac{\lambda_1(t)p(t)}{e^{-\rho t}c_1} + \bar{u}\end{aligned}$$

maka diperoleh  $u(t)$  yang optimal yaitu  $u^*(t)$

$$u^*(t) = \frac{\lambda_1(t)p(t)}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u} \quad (4.12)$$

- Hasil meminimumkan H terhadap vektor kontrol  $m(t)$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial m(t)} &= 0 \\ -e^{-\rho t}c_2(m(t) - \bar{m}) + \lambda_2(t)(-p(t) + 1) &= 0 \\ e^{-\rho t}c_2(m(t) - \bar{m}) &= \lambda_2(t)(-p(t) + 1) \\ (m(t) - \bar{m}) &= \frac{\lambda_2(t)(-p(t) + 1)}{e^{-\rho t}c_2} \\ m(t) &= \frac{\lambda_2(t)(-p(t) + 1)}{e^{-\rho t}c_2} + \bar{m}\end{aligned}$$

maka diperoleh  $m(t)$  yang optimal yaitu  $m^*(t)$

$$m^*(t) = \frac{\lambda_2(t)(1 - p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m} \quad (4.13)$$

Sehingga persamaan  $u^*(t)$  dan persamaan  $m^*(t)$  diperoleh batasan sebagai berikut.

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \frac{\lambda_1(t)p(t)}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u} < 0 \\ \frac{\lambda_1(t)p(t)}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u} & 0 \leq \frac{\lambda_1(t)p(t)}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u} \leq u_{max} \\ u_{max} & \frac{\lambda_1(t)p(t)}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u} > u_{max} \end{cases} \quad (4.14)$$

dan

$$m^*(t) = \begin{cases} 0 & \frac{\lambda_2(t)(1-p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m} < 0 \\ \frac{\lambda_2(t)(1-p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m} & 0 \leq \frac{\lambda_2(t)(1-p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m} \leq M \\ M & \frac{\lambda_2(t)(1-p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m} > M \end{cases} \quad (4.15)$$

**Langkah 3:** menggunakan hasil dari langkah 2, substitusi ke dalam langkah 1 maka diperoleh  $H^*$  yang optimal.

$$H^* = \left[ -\frac{1}{2} e^{-\rho t} [h_1(I(t) - \bar{I})^2 + h_2(p(t) - \bar{p})^2 + c_1(u^*(t) - \bar{u})^2 + c_2(m^*(t) - \bar{m})^2)] + \lambda_1(t)(p(t)u^*(t) - \theta I(t) - S(t)) + \lambda_2(t)(-\alpha(t) + m^*(t))p(t) + m^*(t) \right] \quad (4.16)$$

**Langkah 4:** menentukan persamaan *state* dan *costate*

- Persamaan *state*:

$$\dot{I}^*(t) = u^*p(t) - \theta I(t) - S(t) \quad (4.17)$$

$$\dot{p}^*(t) = -[\alpha(t) + m^*(t)]p(t) + m^*(t) \quad (4.18)$$

- Persamaan *costate*:

$$\dot{\lambda}_1^*(t) = e^{-\rho t} h_1(I(t) - \bar{I}) + \theta \lambda_1(t) \quad (4.19)$$

$$\dot{\lambda}_2^*(t) = e^{-\rho t} h_2(p(t) - \bar{p}) - \lambda_1(t)u^*(t) + \lambda_2(t)(\alpha(t) + m^*(t)) \quad (4.20)$$

dengan kondisi awal  $I_0$  dan  $p_0$  serta kondisi akhir  $\lambda_i(t_f) = 0$ .

Setelah diperoleh hasil dari Prinsip Maksimum Pontryagin yaitu Persamaan (4.12) dan (4.13), *state* pada Persamaan (4.17) dan (4.18), dan *costate* pada Persamaan (4.19) dan (4.20) selanjutnya menyelesaikan hasil tersebut dengan simulasi numerik.

#### 4.6 Penyelesaian Numerik

Penyelesaian kondisi optimal, persamaan *state*, persamaan *costate* pada masalah kontrol optimal model perawatan produksi dengan memperhatikan kerusakan produk dan tingkat diskon tidak mudah diselesaikan secara analitis. Oleh karena itu, permasalahan ini diselesaikan secara numerik. Penyelesaian numerik dilakukan untuk memudahkan dalam menganalisa. Pada tesis ini, penyelesaian numeriknya

diselesaikan dengan metode Runge Kutta orde empat dan *forward-backward sweep method*.

Langkah pertama untuk penyelesaian numerik adalah transformasikan masalah kontrol optimal model perawatan produksi dengan memperhatikan kerusakan produk dan tingkat diskon dalam bentuk diskrit. Diskritisasi dilakukan pada interval  $[t_0, t_f]$  dengan *step size*  $h_0 = \frac{t_f - t_0}{N}$  dan *grid*  $t_i = t_0 + ih_0 (i = 0, 1, 2, \dots, N)$  sehingga  $t_f = t_N$ . Selanjutnya, pada persamaan *state* dilakukan diskritisasi beda maju (*forward sweep*) metode Runge Kutta orde empat karena diketahui nilai awal dari  $I$  dan  $p$ . Kemudian untuk persamaan *costate* dilakukan diskritisasi beda mundur (*backward sweep*) metode Runge Kutta orde empat karena diketahui nilai akhir dari  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$ .

- *Forward Sweep* pada Persamaan *State*

$$\begin{aligned} \dot{I}^*(t) &= \frac{\lambda_1(t)p^2(t)}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u}p(t) - \theta I(t) - S(t) \\ \dot{p}^*(t) &= -[\alpha(t) + \frac{\lambda_2(t)(1-p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m}]p(t) + \frac{\lambda_2(t)(1-p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m} \end{aligned}$$

Hasil diskritisasi dengan menggunakan *forward sweep* Runge Kutta orde empat sebagai berikut.

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + \frac{h}{6}(k_{1,I} + 2k_{2,I} + 2k_{3,I} + k_{4,I}) \\ p_{n+1} &= p_n + \frac{h}{6}(k_{1,p} + 2k_{2,p} + 2k_{3,p} + k_{4,p}) \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} k_{1,I} &= f(t_n, I_n, p_n, S_n, \alpha_n, u_n, m_n) \\ k_{1,I} &= \frac{\lambda_{1,n}(t)p_n^2(t)}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u}p_n(t) - \theta I_n(t) - S_n(t) \\ k_{1,p} &= g(t_n, I_n, p_n, S_n, \alpha_n, u_n, m_n) \\ k_{1,p} &= -[\alpha_n(t) + \frac{\lambda_{2,n}(t)(1-p_n(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m}]p_n(t) + \frac{\lambda_{2,n}(t)(1-p_n(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m} \\ k_{2,I} &= f(t_n + \frac{h}{2}, I_n + \frac{k_{1,I}}{2}, p_n + \frac{k_{1,p}}{2}, \frac{1}{2}(S_n + S_{n+1}), \alpha_n + \alpha_{n+1}, u_n + u_{n+1}, \\ &\quad m_n + m_{n+1}) \\ k_{2,I} &= \frac{\lambda_{1,n}(t)(p_n(t) + \frac{k_{1,p}}{2})^2}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u}(p_n(t) + \frac{k_{1,p}}{2}) - \theta(I_n(t) + \frac{k_{1,I}}{2}) - \frac{1}{2}(S_n + S_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2,p} &= g\left(t_n + \frac{h}{2}, I_n + \frac{k_{1,I}}{2}, p_n + \frac{k_{1,p}}{2}, \frac{1}{2}(S_n + S_{n+1}, \alpha_n + \alpha_{n+1}, u_n + u_{n+1}, m_n + m_{n+1})\right) \\
k_{2,p} &= -\left[\frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_{n+1}) + \frac{\lambda_{2,n}(t)(1 - (p_n(t) + \frac{k_{1,p}}{2}))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m}\right](p_n(t) + \frac{k_{1,p}}{2}) \\
&\quad + \frac{\lambda_{2,n}(t)(1 - (p_n(t) + \frac{k_{1,p}}{2}))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m} \\
k_{3,I} &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, I_n + \frac{k_{2,I}}{2}, p_n + \frac{k_{2,p}}{2}, \frac{1}{2}(S_n + S_{n+1}, \alpha_n + \alpha_{n+1}, u_n + u_{n+1}, m_n + m_{n+1})\right) \\
k_{3,I} &= \frac{\lambda_{1,n}(t)(p_n(t) + \frac{k_{2,p}}{2})^2}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u}(p_n(t) + \frac{k_{2,p}}{2}) - \theta(I_n(t) + \frac{k_{2,I}}{2}) - \frac{1}{2}(S_n + S_{n+1}) \\
k_{3,p} &= g\left(t_n + \frac{h}{2}, I_n + \frac{k_{2,I}}{2}, p_n + \frac{k_{2,p}}{2}, \frac{1}{2}(S_n + S_{n+1}, \alpha_n + \alpha_{n+1}, u_n + u_{n+1}, m_n + m_{n+1})\right) \\
k_{3,p} &= -\left[\frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_{n+1}) + \frac{\lambda_{2,n}(t)(1 - (p_n(t) + \frac{k_{2,p}}{2}))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m}\right](p_n(t) + \frac{k_{2,p}}{2}) \\
&\quad + \frac{\lambda_{2,n}(t)(1 - (p_n(t) + \frac{k_{2,p}}{2}))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m} \\
k_{4,I} &= f(t_n + h, I_n + k_{3,I}, p_n + k_{3,p}, S_{n+1}, \alpha_{n+1}, u_{n+1}, m_{n+1}) \\
k_{4,I} &= \frac{\lambda_{1,n}(t)(p_n(t) + k_{3,p})^2}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u}(p_n(t) + k_{3,p}) - \theta(I_n(t) + k_{3,I}) - S_{n+1} \\
k_{4,p} &= g(t_n + h, I_n + k_{3,I}, p_n + k_{3,p}, S_{n+1}, \alpha_{n+1}, u_{n+1}, m_{n+1}) \\
k_{4,p} &= -\left[\alpha_{n+1} + \frac{\lambda_{2,n}(1 - (p_n(t) + k_{3,p}))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m}\right](p_n(t) + k_{3,p}) + \\
&\quad \frac{\lambda_{2,n}(1 - (p_n(t) + k_{3,p}))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

• *Backward Sweep* pada Persamaan *Costate*

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1^*(t) &= e^{-\rho t} h_1(I(t) - \bar{I}) + \theta \lambda_1(t) \\
\dot{\lambda}_2^*(t) &= e^{-\rho t} h_2(p(t) - \bar{p}) - \lambda_1(t) u^*(t) + \lambda_2(t)(\alpha(t) + m^*(t))
\end{aligned}$$

Hasil diskritisasi dengan menggunakan *backward sweep* Runge Kutta orde empat sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,n-1} &= \lambda_{1,n} - \frac{h}{6}(k_{1,\lambda_1} + 2k_{2,\lambda_1} + 2k_{3,\lambda_1} + k_{4,\lambda_1}) \\
\lambda_{2,n-1} &= \lambda_{2,n} - \frac{h}{6}(k_{1,\lambda_2} + 2k_{2,\lambda_2} + 2k_{3,\lambda_2} + k_{4,\lambda_2})
\end{aligned}$$

dengan

$$k_{1,\lambda_1} = f(t_n, \lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, I_n, p_n, S_n, \alpha_n, u_n, m_n)$$

$$k_{1,\lambda_1} = e^{-\rho t} h_1(I_n - \bar{I}) + \theta \lambda_{1,n}$$

$$k_{1,\lambda_2} = g(t_n, \lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, I_n, p_n, S_n, \alpha_n, u_n, m_n)$$

$$k_{1,\lambda_2} = e^{-\rho t} h_2(p_n - \bar{p}) - \lambda_{1,n} u_n + \lambda_{2,n} (\alpha_n + m_n)$$

$$k_{2,\lambda_1} = f\left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}, \frac{1}{2}(I_n + I_{n-1}), p_n + p_{n-1}, S_n + S_{n-1}, \alpha_n + \alpha_{n-1}, u_n + u_{n-1}, m_n + m_{n-1}\right)$$

$$k_{2,\lambda_1} = e^{-\rho t} h_1\left(\frac{1}{2}(I_n + I_{n-1}) - \bar{I}\right) + \theta\left(\lambda_{1,n} - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}\right)$$

$$k_{2,\lambda_2} = g\left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}, \frac{1}{2}(I_n + I_{n-1}), p_n + p_{n-1}, S_n + S_{n-1}, \alpha_n + \alpha_{n-1}, u_n + u_{n-1}, m_n + m_{n-1}\right)$$

$$k_{2,\lambda_2} = e^{-\rho t} h_2\left(\frac{1}{2}(p_n + p_{n-1}) - \bar{p}\right) - \left(\lambda_{1,n} - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}\right) \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) +$$

$$\left(\lambda_{2,n} - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}\right) \left(\frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_{n-1}) + \frac{1}{2}(m_n + m_{n-1})\right)$$

$$k_{3,\lambda_1} = f\left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}, \frac{1}{2}(I_n + I_{n-1}), p_n + p_{n-1}, S_n + S_{n-1}, \alpha_n + \alpha_{n-1}, u_n + u_{n-1}, m_n + m_{n-1}\right)$$

$$k_{3,\lambda_1} = e^{-\rho t} h_1\left(\frac{1}{2}(I_n + I_{n-1}) - \bar{I}\right) + \theta\left(\lambda_{1,n} - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}\right)$$

$$k_{3,\lambda_2} = g\left(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}, \frac{1}{2}(I_n + I_{n-1}), p_n + p_{n-1}, S_n + S_{n-1}, \alpha_n + \alpha_{n-1}, u_n + u_{n-1}, m_n + m_{n-1}\right)$$

$$k_{3,\lambda_2} = e^{-\rho t} h_2\left(\frac{1}{2}(p_n + p_{n-1}) - \bar{p}\right) - \left(\lambda_{1,n} - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}\right) \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) +$$

$$\left(\lambda_{2,n} - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}\right) \left(\frac{1}{2}(\alpha_n + \alpha_{n-1}) + \frac{1}{2}(m_n + m_{n-1})\right)$$

$$k_{4,\lambda_1} = f(t_n - h, \lambda_{1,n} - k_{3,\lambda_1}, \lambda_{2,n} - k_{3,\lambda_2}, I_{n-1}, p_{n-1}, S_{n-1}, \alpha_{n-1}, u_{n-1}, m_{n-1})$$

$$k_{4,\lambda_1} = e^{-\rho t} h_1(I_{n-1} - \bar{I}) + \theta(\lambda_{1,n} - k_{3,\lambda_1})$$

$$k_{4,\lambda_2} = g(t_n - h, \lambda_{1,n} - k_{3,\lambda_1}, \lambda_{2,n} - k_{3,\lambda_2}, I_{n-1}, p_{n-1}, S_{n-1}, \alpha_{n-1}, u_{n-1}, m_{n-1})$$

$$k_{4,\lambda_2} = e^{-\rho t} h_2(p_{n-1} - \bar{p}) - (\lambda_{1,n} - k_{3,\lambda_1}) u_{n-1} + (\lambda_{2,n} - k_{3,\lambda_2})(\alpha_{n-1} + m_{n-1})$$

dengan  $h$  adalah langkah waktu.

Setelah diperoleh diskritisasi sistem, selanjutnya hasil diskritisasi tersebut diimplementasikan ke dalam program komputer untuk simulasi. Simulasi numerik dari masalah kontrol optimal yang dilakukan dengan *forward backward sweep method* Runge Kutta orde empat dan dijalankan dengan menggunakan *software* Scilab.

## 4.7 Simulasi Numerik

Pada subbab ini dipaparkan tentang hasil simulasi numerik dan intepretasinya. Simulasi numerik ini menggunakan *software* Scilab. Dengan menerapkan kondisi batas pada Persamaan (4.10) dan menggunakan *forward backward sweep method* Runge Kutta orde empat maka didapatkan solusi optimal yang nilainya bergantung pada bentuk fungsi permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa). Adapun nilai-nilai parameter dari model perawatan produksi yang digunakan untuk simulasi dinyatakan dalam tabel berikut.

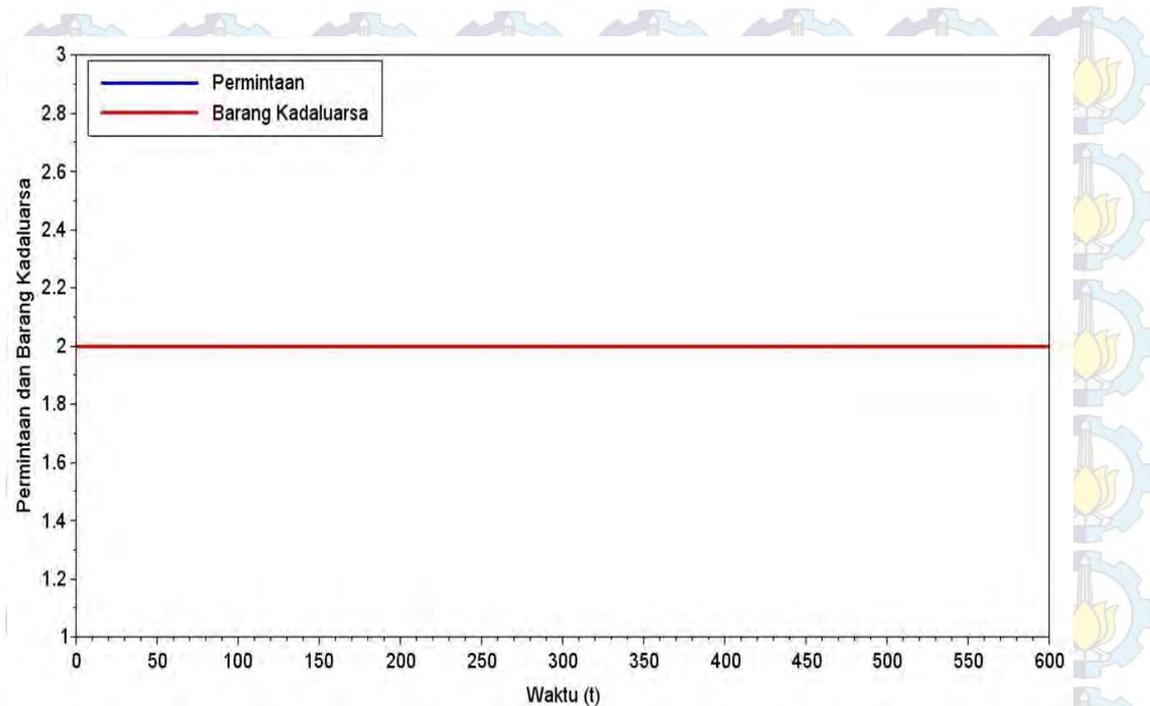
Tabel 4.1: Nilai Parameter (Bukhari, F.A. dan El-Gohary, A.,2011)

<i>par.</i>	$\bar{u}$	$\bar{m}$	$c_1$	$c_2$	$h_1$	$h_2$	$\theta$	$\rho$
<i>val.</i>	50	20	60	30	50	60	0.01	0.01

### 4.7.1 Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang (Kadaluarsa) Konstan

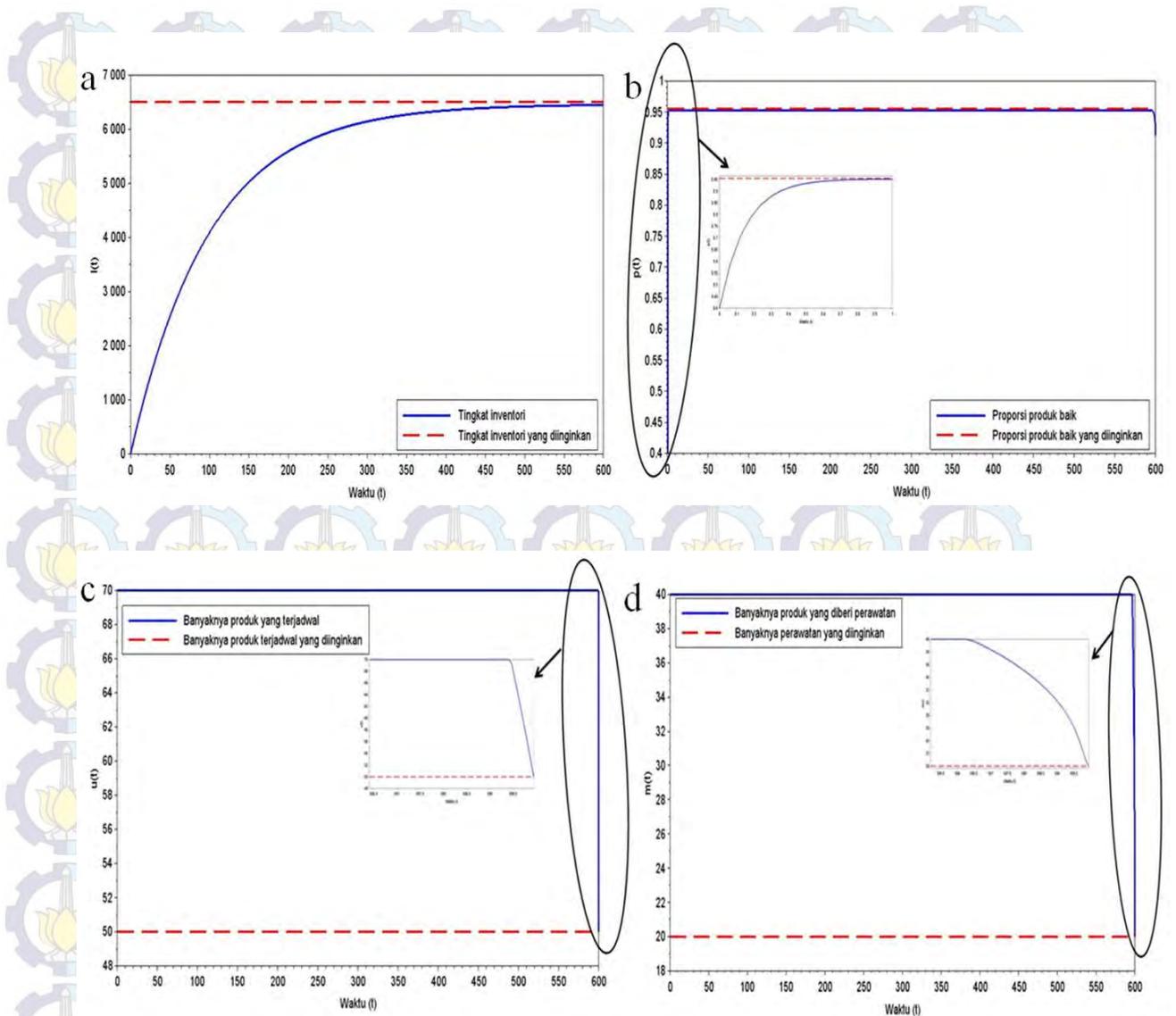
Misalkan untuk kasus pertama, suatu perusahaan merencanakan produksinya selama 600 satuan waktu, dengan *discounting* adalah 0.01, dan banyaknya inventori saat awal periode produksi adalah 6 unit dan proporsi produk baik sebesar 0.4. Biaya produksi total yang akan ditanggung perusahaan jika semakin besar *error* dari nilai sebenarnya dengan nilai yang diinginkan perusahaan tersebut yang terdiri dari biaya penyimpanan sebesar 60 dan 30, biaya inventori sebesar 50, dan biaya perawatan produksi sebesar 60. Banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, serta banyaknya produk yang diberi perawatan yang diinginkan (target) adalah  $\bar{I} = 6500$ ,  $\bar{p} = 0.955$ ,  $\bar{u} = 50$ , dan  $\bar{m} = 20$  sedangkan tingkat kerusakan produk saat berada pada gudang penyimpanan sebesar 0.01. Permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang terjadi pada perusahaan ini berupa fungsi konstan yaitu  $S=2$  dan  $\alpha = 2$ .

Gambar 4.7 menggambarkan grafik fungsi permintaan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) dalam bentuk fungsi konstan. Grafik tersebut menunjukkan bahwa permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) konstan terhadap fungsi waktu. Dengan permintaan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang digambarkan oleh grafik tersebut maka diperoleh grafik tingkat inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan ditunjukkan oleh Gambar 4.8.



Gambar 4.7: Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu

Pada Gambar 4.8 a dan c menunjukkan banyaknya produk yang terjadwal diawal waktu konstan selanjutnya menurun diakhir waktu, banyaknya produk yang terjadwal menurun menuju ke banyaknya produk terjadwal yang diinginkan (target). Sama halnya pada grafik tingkat inventori yaitu meningkat hingga menuju ke tingkat inventori yang diinginkan (target). Hal ini disebabkan inventori digudang meningkat sehingga butuh perusahaan harus mengontrol produknya dengan menekan produk yang terjadwal seminimum mungkin. Selain itu, hal ini juga disebabkan permintaan konsumen konstan sehingga produk yang terjadwal menurun secara perlahan juga. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar.

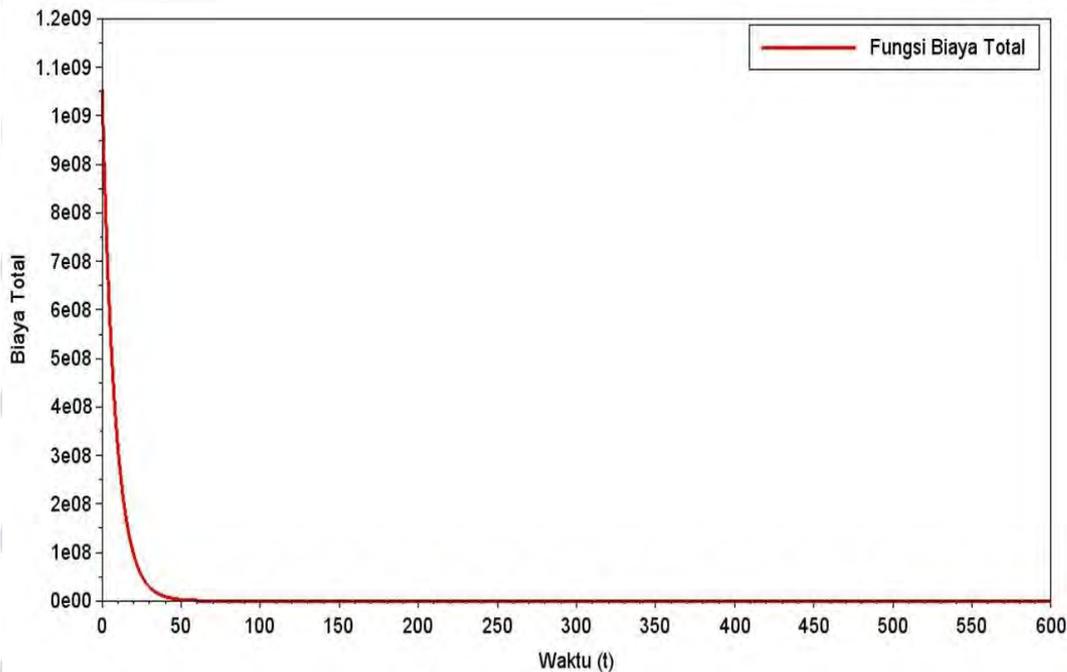


Gambar 4.8: a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan

Pada Gambar 4.8 b dan d menunjukkan banyaknya produk yang diberi perawatan konstan selanjutnya diakhir waktu semakin menurun menuju ke target. Hal ini disebabkan proporsi produk baik meningkat diawal waktu sehingga butuh perawatan tidak banyak sehingga banyaknya barang yang diberi perawatan konstan, selanjutnya proporsi produk baik konstan maka banyaknya produk yang diberi perawatan konstan pula dan selanjutnya menurun. Selain itu, hal ini juga disebabkan produk yang kadaluarsa konstan maka produk yang diberi perawatan menurun juga. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar.

Gambar 4.8 a sampai d menunjukkan bahwa banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi

perawatan menuju yang diinginkan. Hal tersebut, membuat biaya produksi total menjadi minimum. Berikut ini adalah grafik fungsi biaya produksi total yang dijelaskan pada Gambar 4.9.



Gambar 4.9: Fungsi Biaya Produksi Total terhadap Waktu

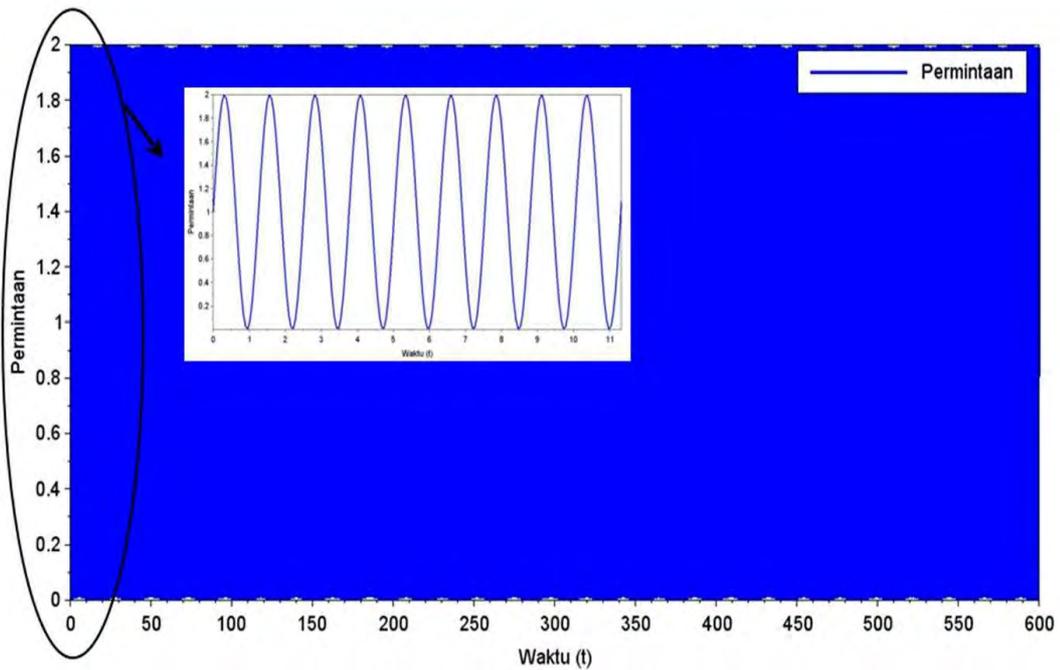
Fungsi biaya produksi total pada Gambar 4.9 menunjukkan bahwa pada selang waktu 600 satuan waktu, fungsi biaya produksi total semakin menurun. Hal ini sesuai dengan kondisi yang diharapkan yaitu pada kasus pertama dimana permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) digunakan fungsi konstan diperoleh biaya produksi total yang minimum.

#### 4.7.2 *Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang (Kadaluarsa) Musiman*

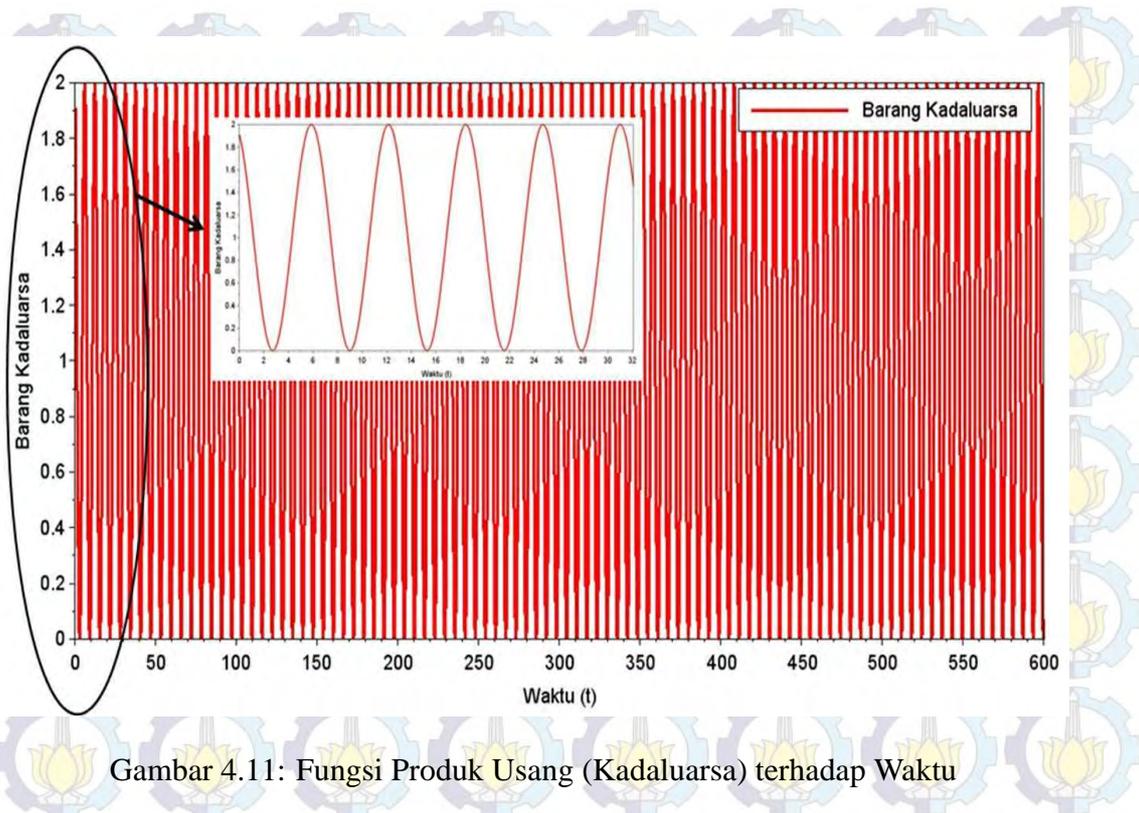
Misalkan untuk kasus kedua, suatu perusahaan merencanakan produksinya selama 600 satuan waktu, dengan *discounting* adalah 0.01, dan banyaknya inventori saat awal periode produksi adalah 6 unit dan proporsi produk baik sebesar 0.4. Biaya produksi total yang akan ditanggung perusahaan jika semakin besar *error* dari nilai sebenarnya dengan nilai yang diinginkan perusahaan tersebut yang terdiri dari biaya penyimpanan sebesar 60 dan 30, biaya inventori sebesar 50, dan biaya perawatan produksi sebesar 60. Banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, serta banyaknya produk yang diberi perawatan yang diinginkan (target) adalah  $\bar{I} = 6710$ ,  $\bar{p} = 0.975$ ,  $\bar{u} = 50$ , dan

$\bar{m} = 20$  sedangkan tingkat kerusakan produk saat berada pada gudang penyimpanan sebesar 0.01. Pada kasus kedua yaitu permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) musiman menggunakan 3 kasus dengan beberapa fungsi bentuk sinusoidal. Kasus musiman yang pertama yaitu permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang terjadi menggunakan fungsi  $1 + \sin(5t)$  dan  $1 + \sin(2 + t)$ .

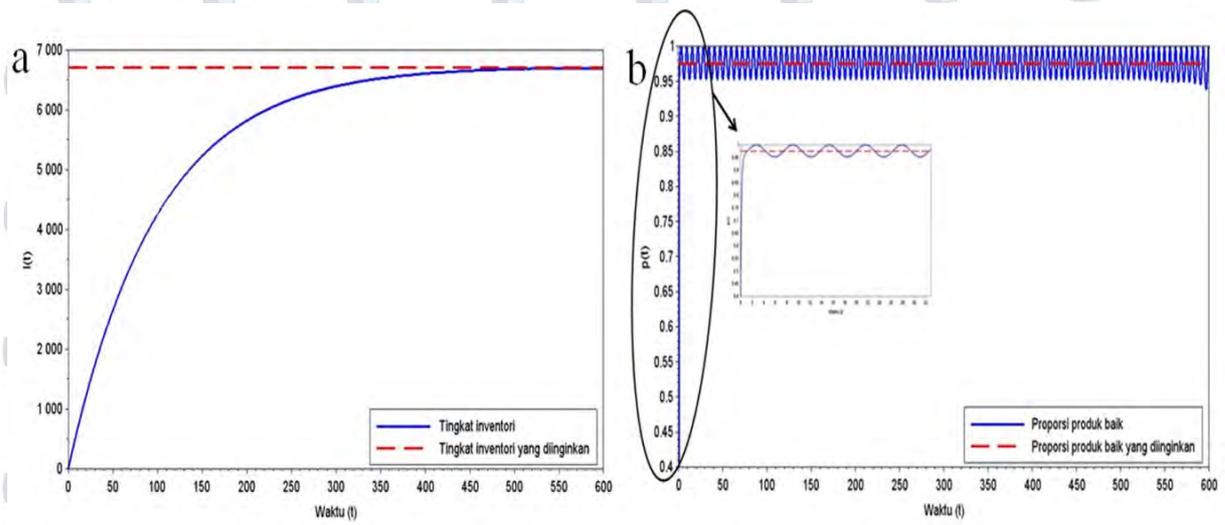
Gambar 4.10 dan Gambar 4.11 menggambarkan grafik fungsi permintaan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) dalam bentuk fungsi sinusoidal. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar. Grafik tersebut menunjukkan bahwa permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) naik selanjutnya turun kemudian naik lagi dan terus berulang kembali. Dengan permintaan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang digambarkan oleh grafik tersebut maka diperoleh grafik tingkat inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan ditunjukkan oleh Gambar 4.12.



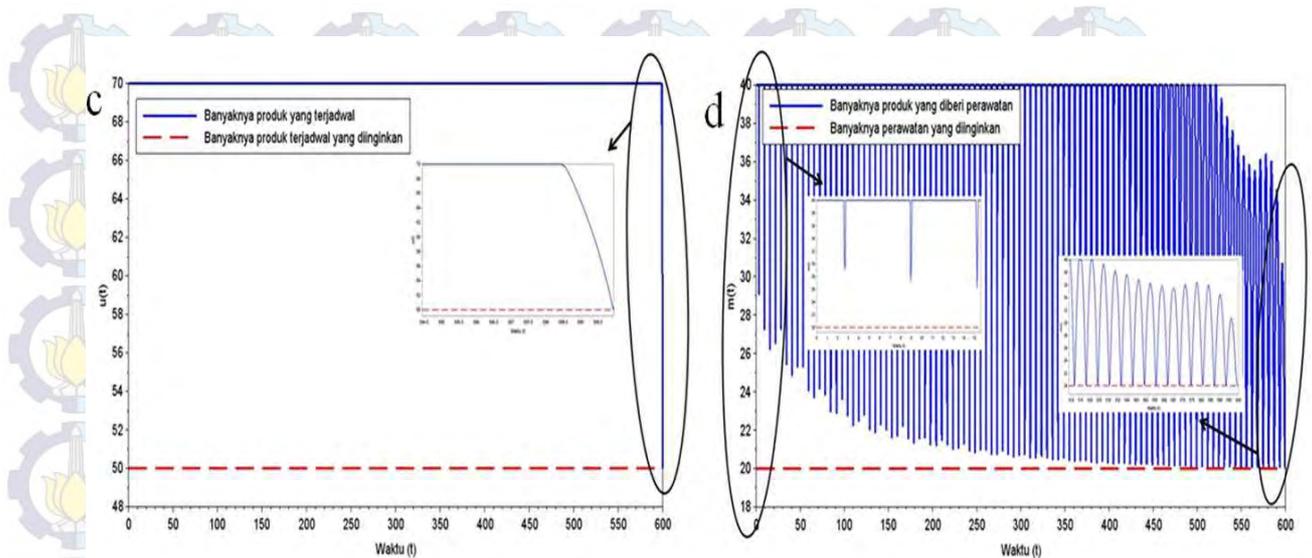
Gambar 4.10: Fungsi Permintaan terhadap Waktu



Gambar 4.11: Fungsi Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu



Pada Gambar 4.12 a dan c menunjukkan banyaknya produk yang terjadwal diawal konstan selanjutnya menurun diakhir waktu, banyaknya produk yang terjadwal menurun menuju ke banyaknya produk terjadwal yang diinginkan (target). Sama halnya pada grafik tingkat inventori yaitu meningkat hingga menuju ke tingkat inventori yang diinginkan (target). Hal ini disebabkan inventori digudang meningkat sehingga butuh perusahaan harus mengontrol produknya dengan menekan produk yang terjadwal seminimum mungkin. Selain itu, hal ini juga disebabkan permintaan konsumen naik turun dan terus berulang dengan maksimal 2 maka produk yang terjadwal diawal konstan selanjutnya menurun. Untuk menge-



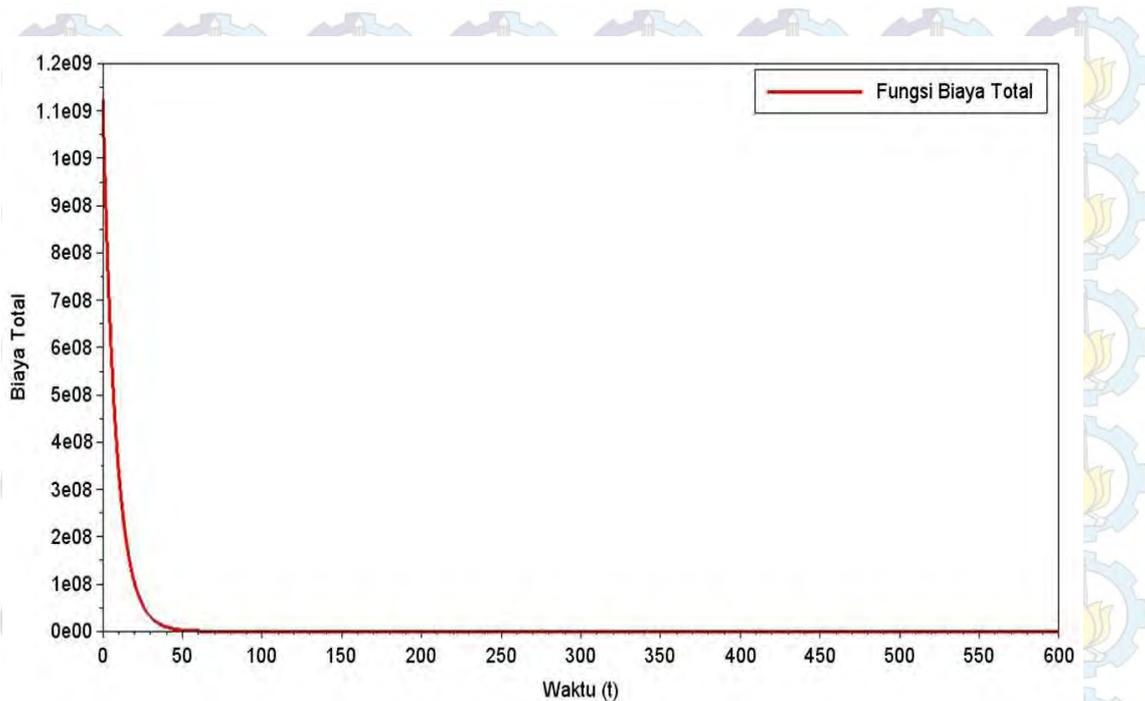
Gambar 4.12: a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan

tahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar.

Pada Gambar 4.12 b dan d menunjukkan banyaknya produk yang diberi perawatan diawal konstan selanjutnya menurun kemudian naik dan konstan kembali secara berulang. Hal ini disebabkan proporsi produk baik meningkat. Selain itu juga dipengaruhi oleh produk yang usang konstan selanjutnya menurun maka produk yang diberi perawatan ada kalanya konstan, turun, dan naik. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar.

Gambar 4.12 menunjukkan bahwa banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan menuju yang diinginkan (target). Hal tersebut membuat biaya produksi total menjadi minimum. Berikut ini adalah grafik fungsi biaya produksi total yang dijelaskan pada Gambar 4.13.

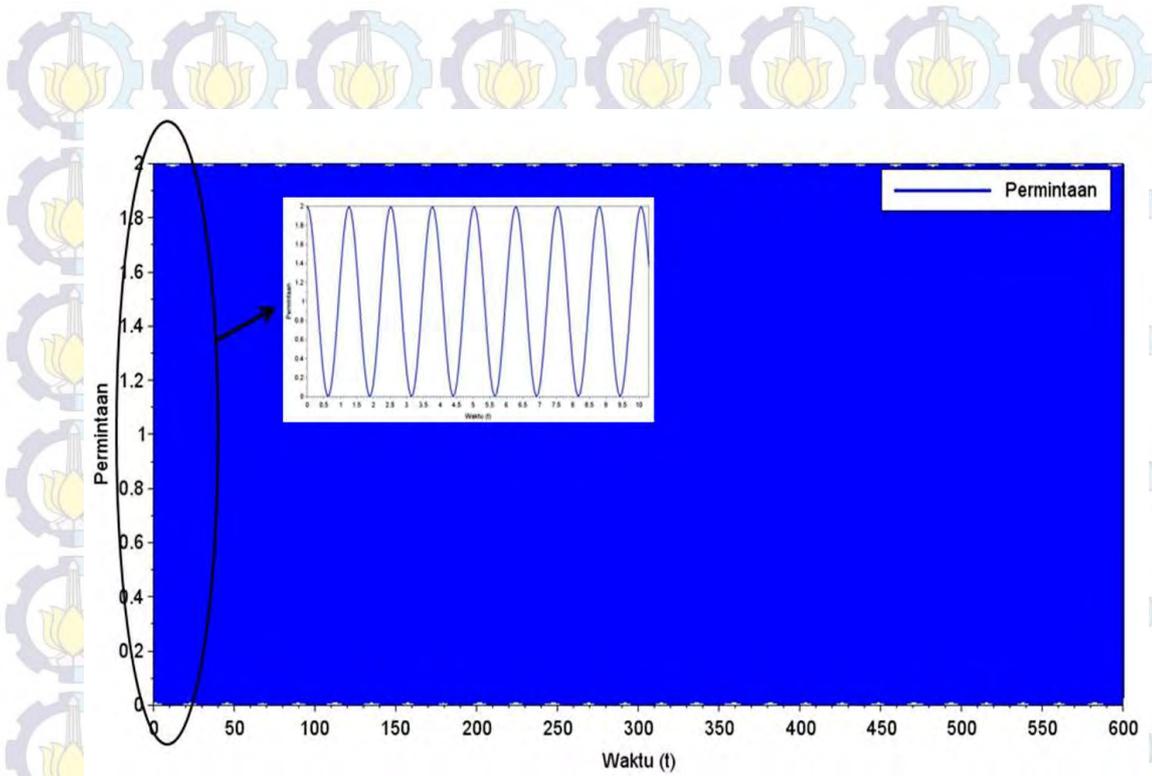
Fungsi biaya produksi total pada Gambar 4.13 menunjukkan bahwa pada selang waktu 600 satuan waktu, fungsi biaya produksi total semakin menurun. Hal ini sesuai dengan kondisi yang diharapkan yaitu pada kasus kedua dimana permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) digunakan fungsi sinusoidal sehingga diperoleh biaya produksi total yang minimum.



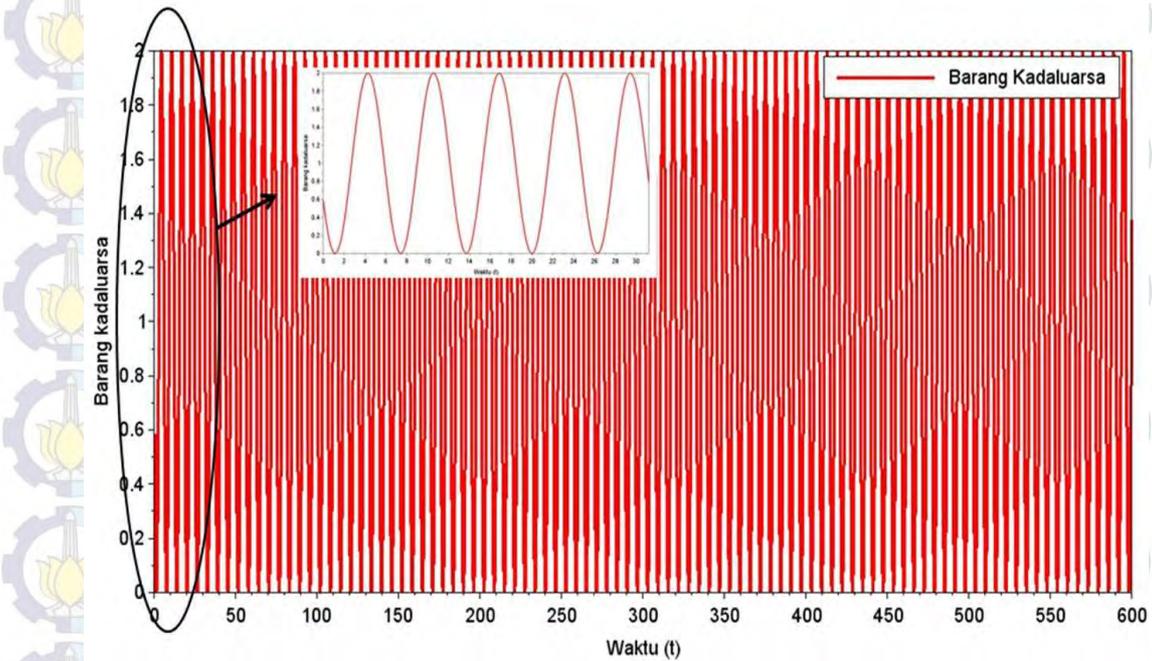
Gambar 4.13: Fungsi Biaya Produksi Total terhadap Waktu

Untuk musiman yang kedua, fungsi permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) menggunakan bentuk sinusoidal yaitu  $1 + \cos(5t)$  dan  $1 + \cos(2 + t)$ .

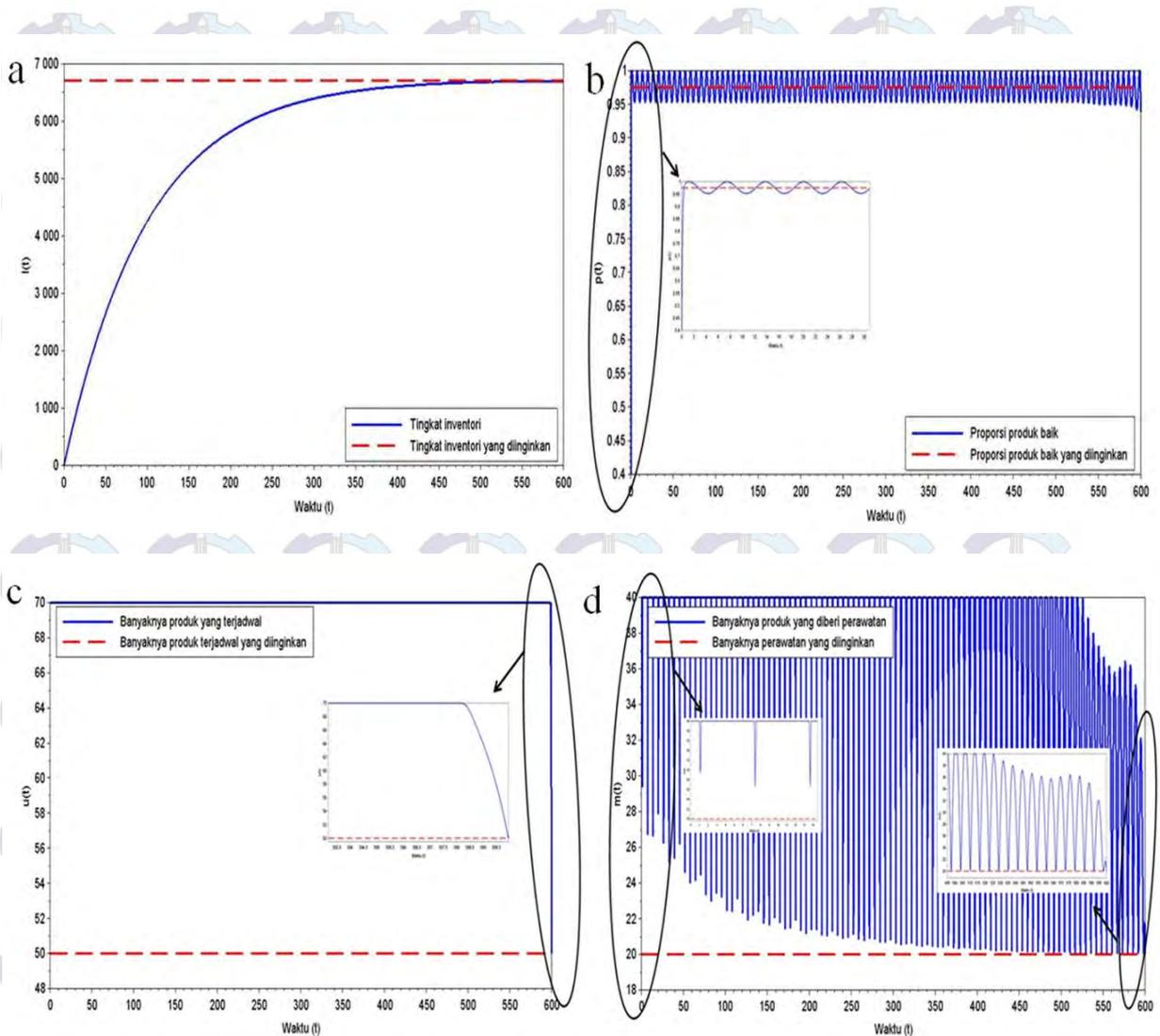
Gambar 4.14 dan Gambar 4.15 menggambarkan bahwa permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) turun selanjutnya naik kemudian turun lagi dan berulang kembali. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar. Dengan permintaan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang digambarkan oleh grafik tersebut maka diperoleh grafik tingkat inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan ditunjukkan oleh Gambar 4.16.



Gambar 4.14: Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu



Gambar 4.15: Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu



Gambar 4.16: a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan

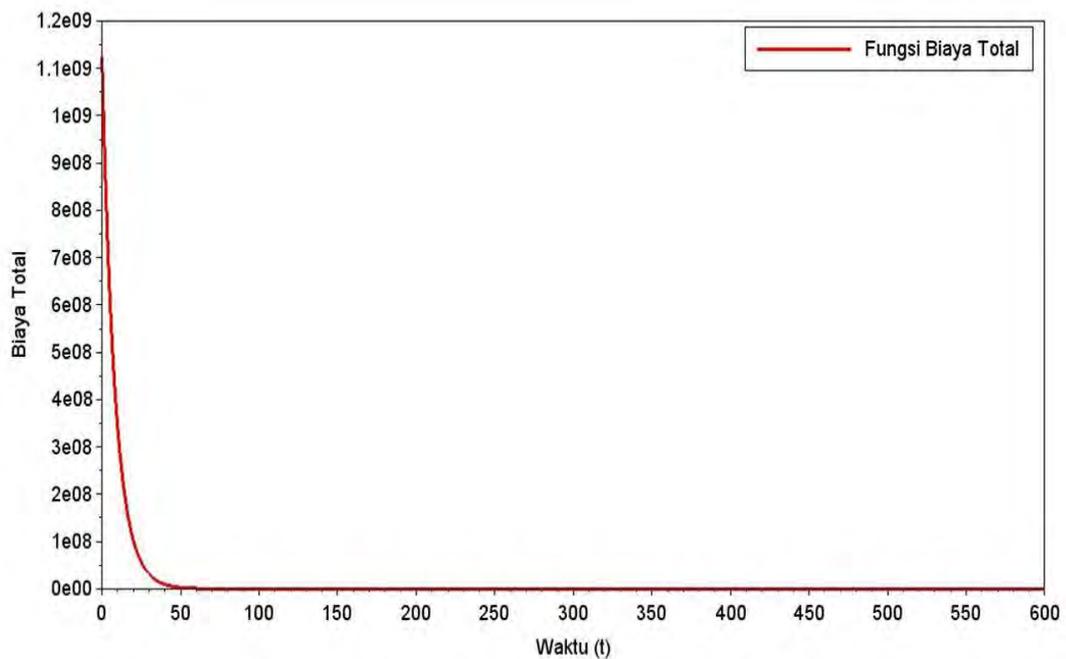
Pada Gambar 4.16 a dan c menunjukkan banyaknya produk yang terjadwal diawal konstan selanjutnya menurun. Hal ini disebabkan inventori digudang meningkat sehingga butuh perusahaan harus mengontrol produknya dengan menekan produk yang terjadwal seminimum mungkin. Hal ini disebabkan pula oleh permintaan konsumen yang naik sehingga produk yang terjadwal diawal konstan selanjutnya menurun. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar.

Pada Gambar 4.16 b dan d menunjukkan banyaknya produk yang diberi perawatan diawal konstan selanjutnya menurun kemudian naik dan konstan kembali. Grafik tersebut terjadi berulang-ulang. Hal ini disebabkan proporsi produk baik meningkat. Selain itu juga dipengaruhi oleh produk yang usang konstan selanjutnya turun maka produk yang diberi perawatan ada kalanya konstan, turun, dan

naik. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar.

Gambar 4.16 menunjukkan bahwa banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan menuju yang diinginkan (target). Hal tersebut membuat biaya produksi total menjadi minimum. Berikut ini adalah grafik fungsi biaya produksi total yang dijelaskan pada Gambar 4.17.

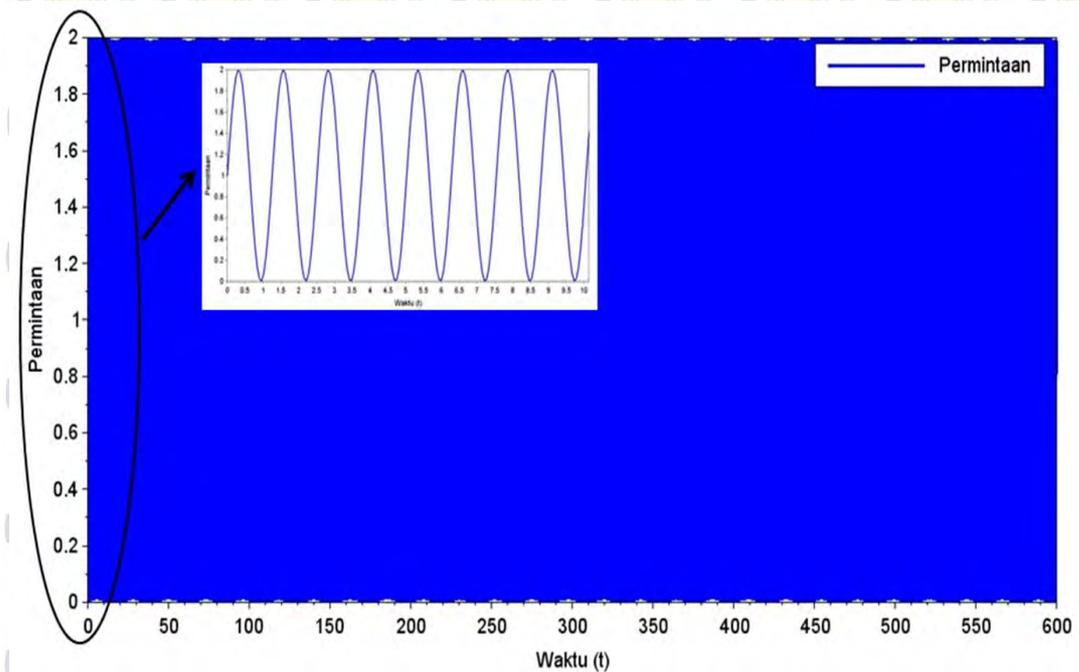
Fungsi biaya produksi total pada Gambar 4.17 menunjukkan bahwa pada selang waktu 600 satuan waktu, fungsi biaya produksi total semakin menurun. Hal ini sesuai dengan kondisi yang diharapkan yaitu pada kasus kedua dimana permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) digunakan fungsi sinusoidal sehingga diperoleh biaya produksi total yang minimum.



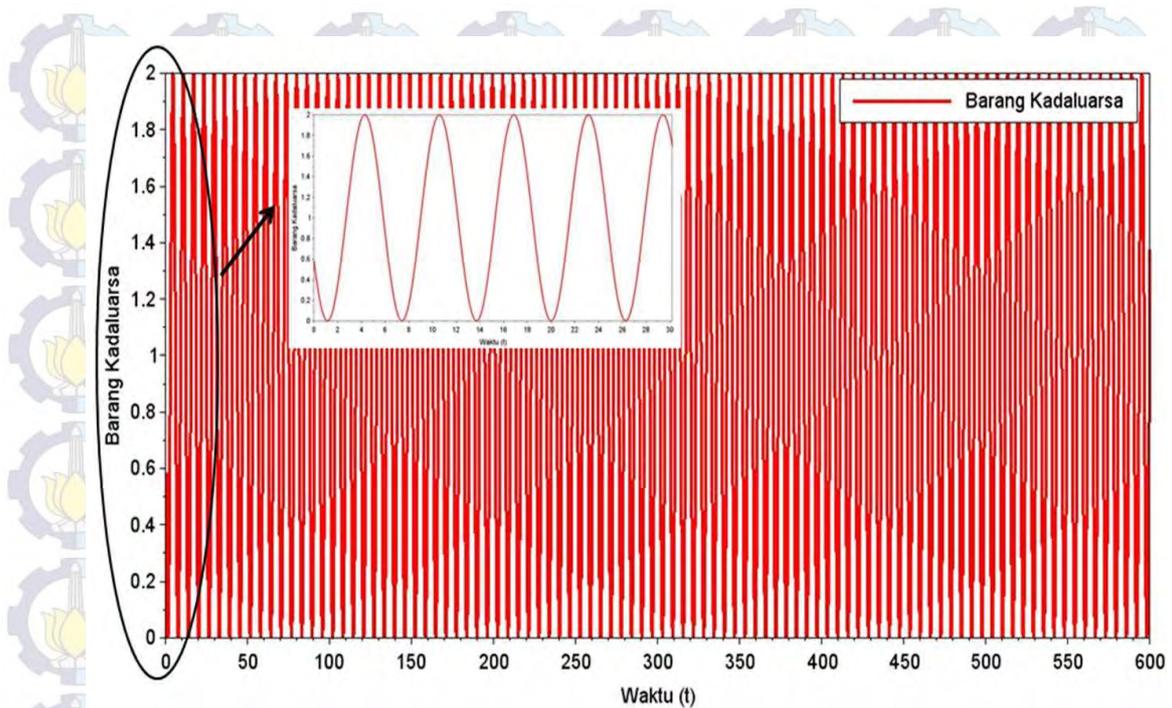
Gambar 4.17: Fungsi Biaya Produksi Total terhadap Waktu

Untuk musiman yang ketiga, fungsi permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) menggunakan bentuk sinusoidal yaitu  $1 + \sin(5t)$  dan  $1 + \cos(2 + t)$ .

Gambar 4.18 dan Gambar 4.19 menggambarkan bahwa permintaan konsumen naik selanjutnya turun kemudian naik lagi dan terus berulang kembali. Sedangkan grafik banyaknya produk usang (kadaluarsa) yaitu turun selanjutnya naik kemudian turun lagi dan hal ini juga akan berulang kembali. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar. Dengan permintaan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang digambarkan oleh grafik tersebut maka diperoleh grafik tingkat inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan ditunjukkan oleh Gambar 4.20.



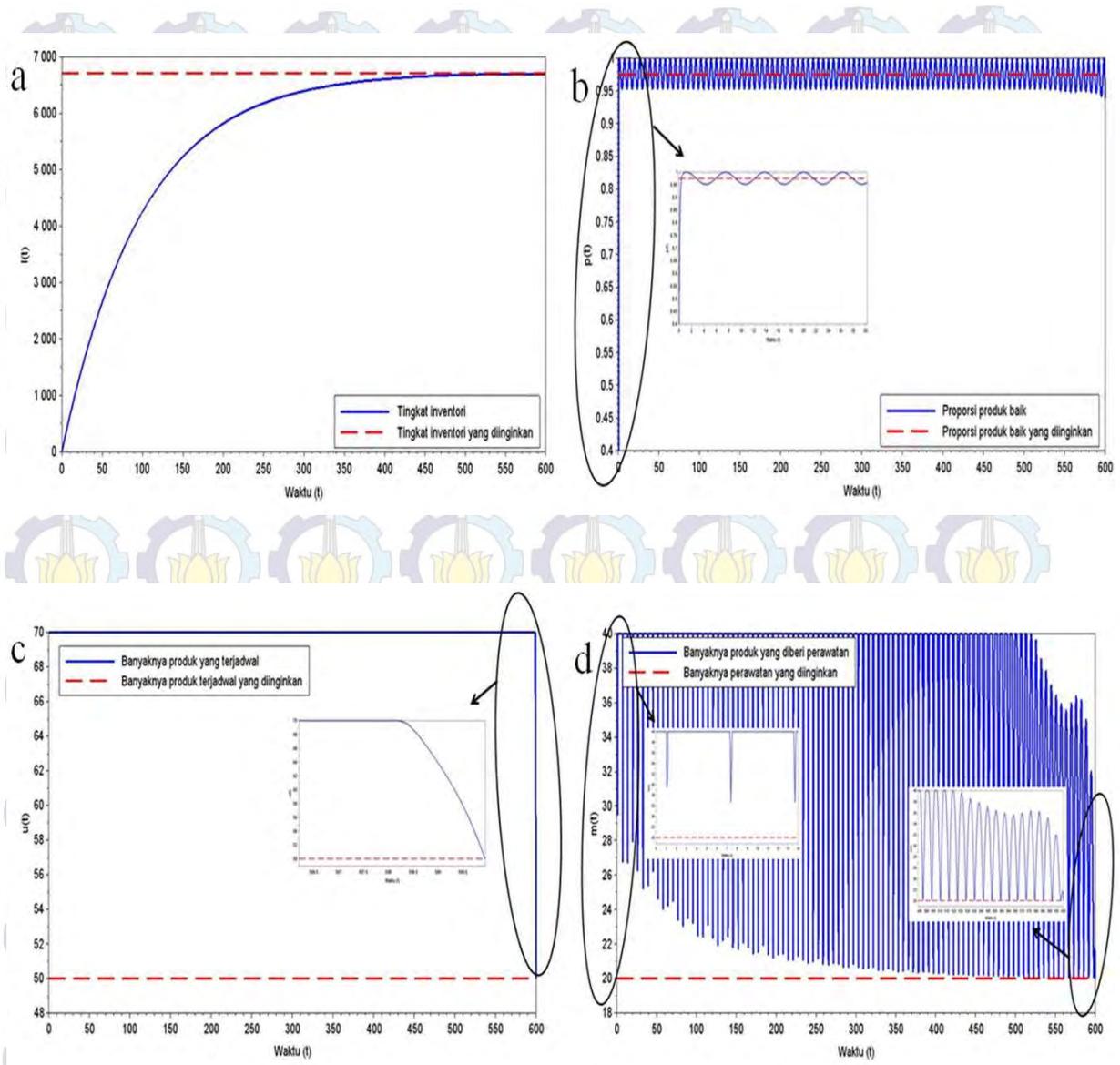
Gambar 4.18: Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu



Gambar 4.19: Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu

Pada Gambar 4.20 a dan c menunjukkan banyaknya produk yang terjadwal diawal konstan selanjutnya menurun. Hal ini disebabkan inventori digudang meningkat sehingga butuh perusahaan harus mengontrol produknya dengan menekan produk yang terjadwal semimumimum mungkin. Selain itu, hal ini juga disebabkan permintaan konsumen naik sehingga produk yang terjadwal diawal konstan selanjutnya menurun. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar.

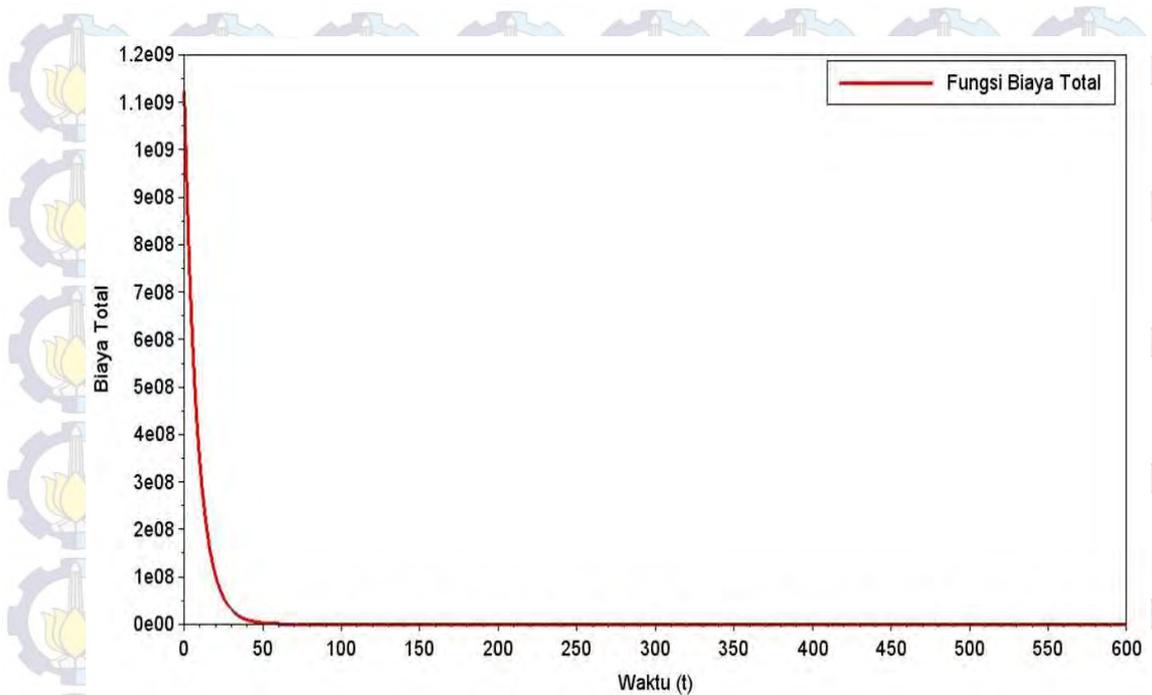
Pada Gambar 4.20 b dan d menunjukkan banyaknya produk yang diberi perawatan diawal konstan selanjutnya menurun kemudian naik dan konstan kembali. Grafik tersebut terjadi berulang-ulang. Hal ini disebabkan proporsi produk baik meningkat. Selain itu juga dipengaruhi oleh produk yang usang konstan selanjutnya turun maka produk yang diberi perawatan ada kalanya konstan, turun, dan naik. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar.



Gambar 4.20: a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan

Gambar 4.20 menunjukkan bahwa banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan menuju yang diinginkan (target). Hal tersebut, membuat biaya produksi total menjadi minimum. Berikut ini adalah grafik fungsi biaya produksi total yang dijelaskan pada Gambar 4.21.

Fungsi biaya produksi total pada Gambar 4.21 menunjukkan bahwa pada selang waktu 600 satuan waktu, fungsi biaya produksi total semakin menurun. Hal ini sesuai dengan kondisi yang diharapkan yaitu pada kasus kedua dimana permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) digunakan fungsi sinusoidal sehingga diperoleh biaya produksi total yang minimum.

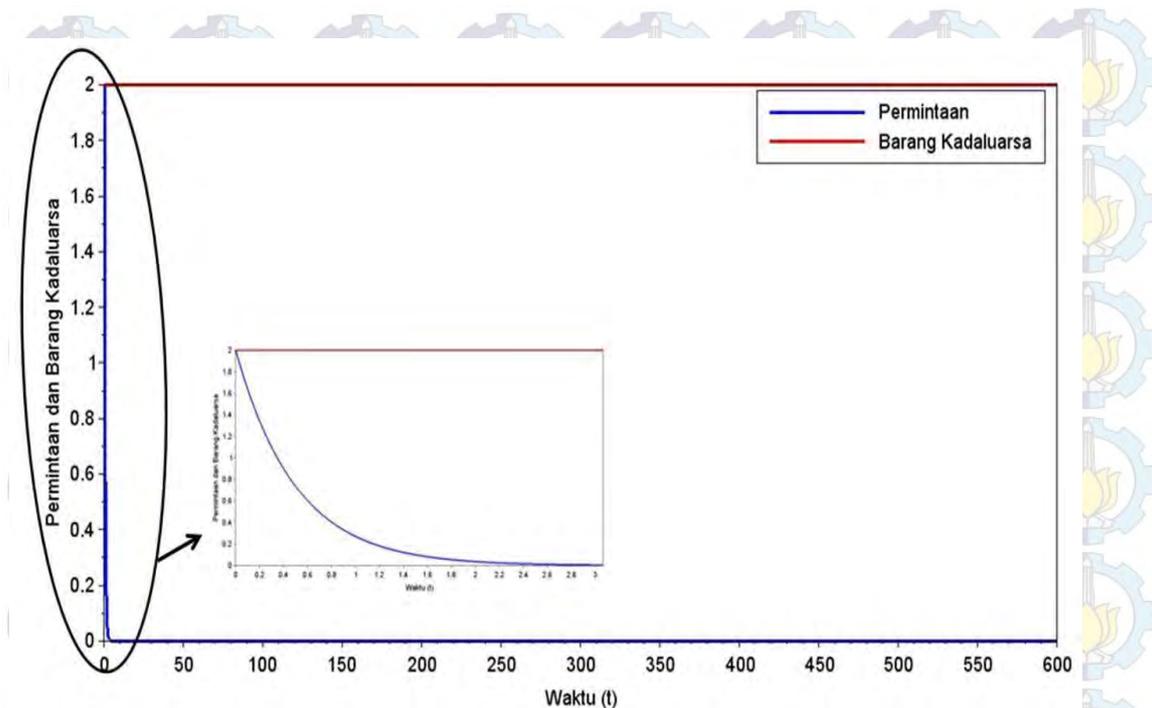


Gambar 4.21: Fungsi Biaya terhadap Waktu

#### 4.7.3 Permintaan Konsumen Menurun dan Banyaknya Produk Usang (Kadaluarsa) Konstan

Misalkan untuk kasus ketiga, suatu perusahaan merencanakan produksinya selama 600 satuan waktu, dengan *discounting* adalah 0.01, dan banyaknya inventori saat awal periode produksi adalah 6 unit dan proporsi produk baik sebesar 0.4. Biaya produksi total yang akan ditanggung perusahaan jika semakin besar *error* dari nilai sebenarnya dengan nilai yang diinginkan perusahaan tersebut yang terdiri dari biaya penyimpanan sebesar 60 dan 30, biaya inventori sebesar 50, dan biaya perawatan produksi sebesar 60. Banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, serta banyaknya produk yang diberi perawatan yang diinginkan (target) adalah  $\bar{I} = 6710$ ,  $\bar{p} = 0.955$ ,  $\bar{u} = 50$ , dan  $\bar{m} = 20$  sedangkan tingkat kerusakan produk saat berada pada gudang penyimpanan sebesar 0.01. Permintaan konsumen yang terjadi pada perusahaan ini berupa fungsi eksponensial yaitu  $S = 2e^{-2t}$  dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang terjadi berupa fungsi konstan yaitu 2.

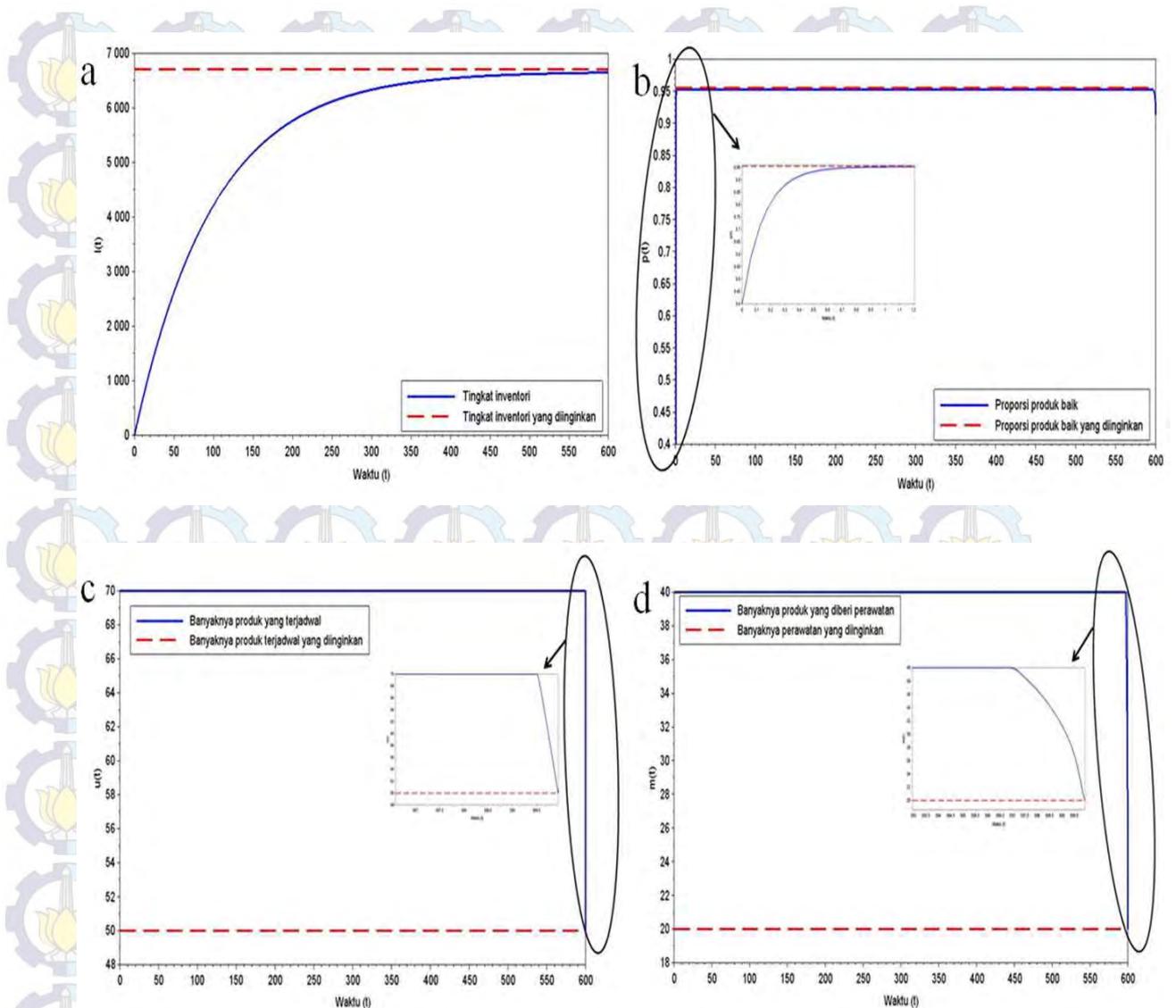
Gambar 4.22 menggambarkan grafik fungsi permintaan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) bentuk eksponensial dan konstan. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar. Dengan permintaan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang digambarkan oleh grafik tersebut maka diperoleh grafik tingkat inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan



Gambar 4.22: Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu ditunjukkan oleh Gambar 4.23.

Pada Gambar 4.23 a dan c menunjukkan banyaknya produk yang terjadwal diawal konstan selanjutnya menurun. Hal ini disebabkan inventori digudang meningkat sehingga butuh perusahaan harus mengontrol produknya dengan menekan produk yang terjadwal semimumimum mungkin. Selain itu, hal ini juga disebabkan permintaan konsumen menurun sehingga produk yang terjadwal konstan selanjutnya menurun. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar.

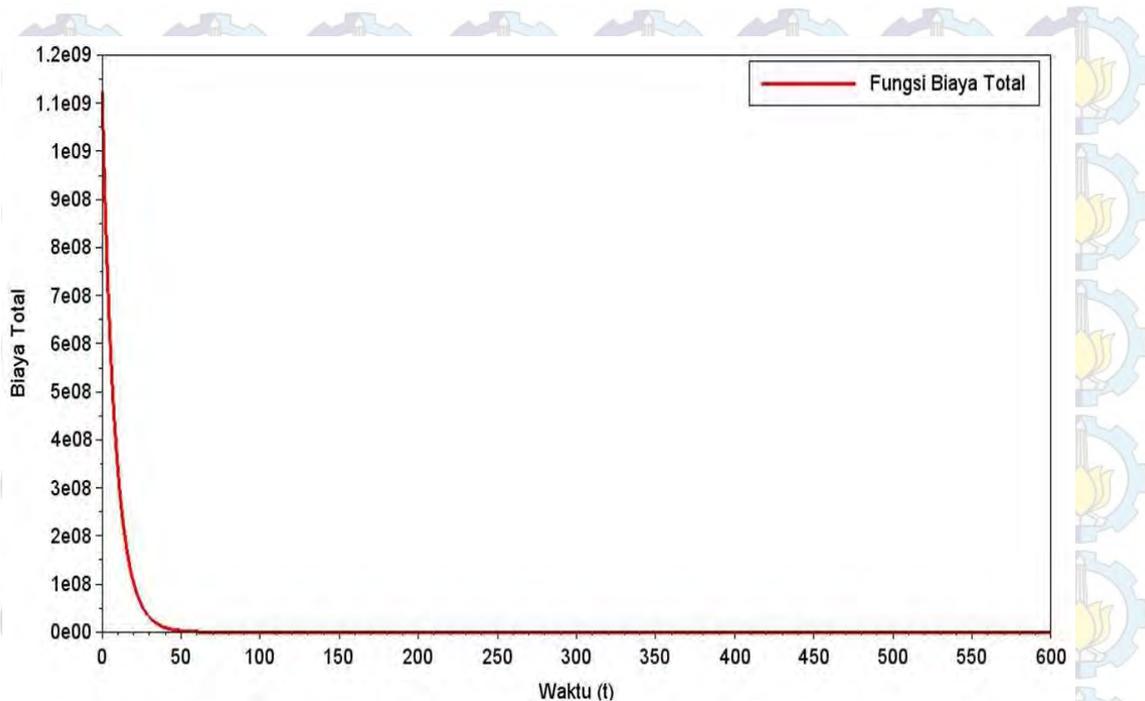
Pada Gambar 4.23 b dan d menunjukkan banyaknya produk yang diberi perawatan konstan selanjutnya menurun. Hal ini disebabkan proporsi produk baik meningkat drastis. Selain itu, juga dipengaruhi oleh produk yang usang yang konstan maka produk yang diberi perawatan konstan pula selanjutnya menurun. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar.



Gambar 4.23: a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan

Gambar 4.23 menunjukkan bahwa banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan menuju yang diinginkan (target). Hal tersebut membuat biaya produksi total menjadi minimum. Berikut ini adalah grafik fungsi biaya produksi total yang dijelaskan pada Gambar 4.24.

Fungsi biaya produksi total pada Gambar 4.24 menunjukkan bahwa pada selang waktu 600 satuan waktu, fungsi biaya produksi total semakin menurun. Hal ini sesuai dengan kondisi yang diharapkan yaitu pada kasus ketiga dimana permintaan konsumen menurun dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) konstan sehingga diperoleh biaya produksi total yang minimum.



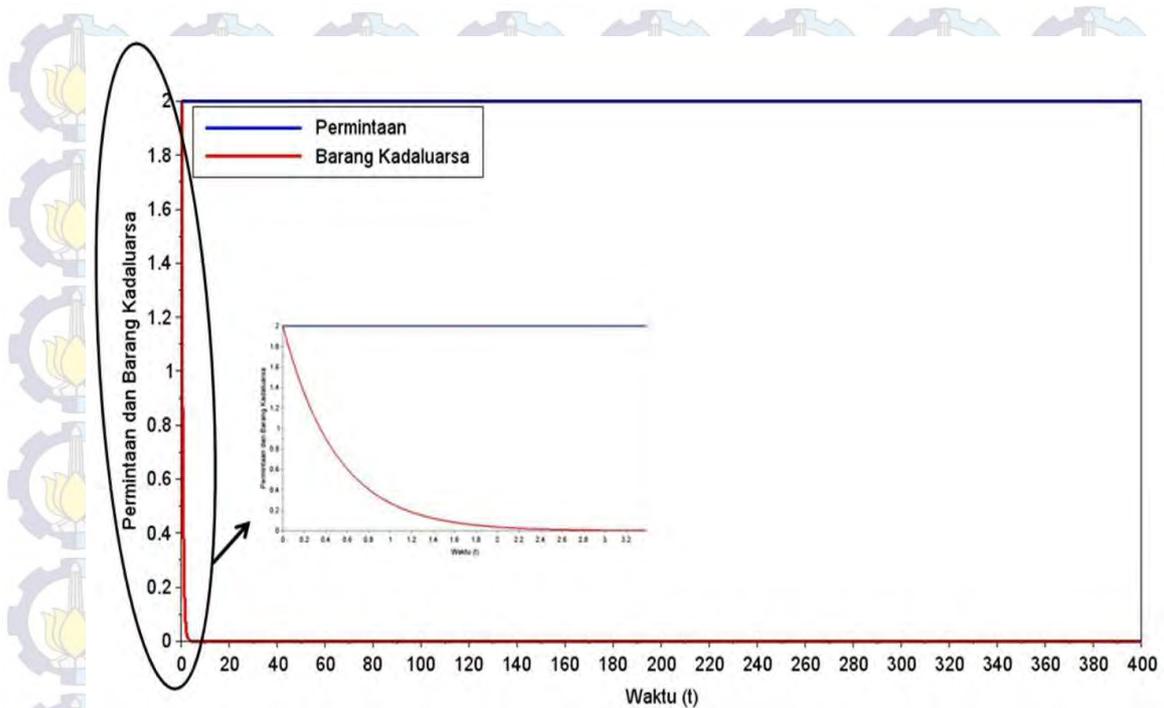
Gambar 4.24: Fungsi Biaya terhadap Waktu

#### 4.7.4 Permintaan Konsumen Konstan dan Banyaknya Produk Usang (Kadaluarsa)

##### Menurun

Misalkan untuk kasus keempat, suatu perusahaan merencanakan produksinya selama 400 satuan waktu, dengan *discounting* adalah 0.01, dan banyaknya inventori saat awal periode produksi adalah 6 unit dan proporsi produk baik sebesar 0.4. Biaya produksi total yang akan ditanggung perusahaan jika semakin besar *error* dari nilai sebenarnya dengan nilai yang diinginkan perusahaan tersebut yang terdiri dari biaya penyimpanan sebesar 60 dan 30, biaya inventori sebesar 50, dan biaya perawatan produksi sebesar 60. Banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, serta banyaknya produk yang diberi perawatan yang diinginkan adalah  $\bar{I} = 6710$ ,  $\bar{p} = 1$ ,  $\bar{u} = 50$ , dan  $\bar{m} = 20$  sedangkan tingkat kerusakan produk saat berada pada gudang penyimpanan sebesar 0.01. Permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang terjadi pada perusahaan ini berupa fungsi konstan dan eksponensial yaitu 2 dan  $2e^{-2t}$ .

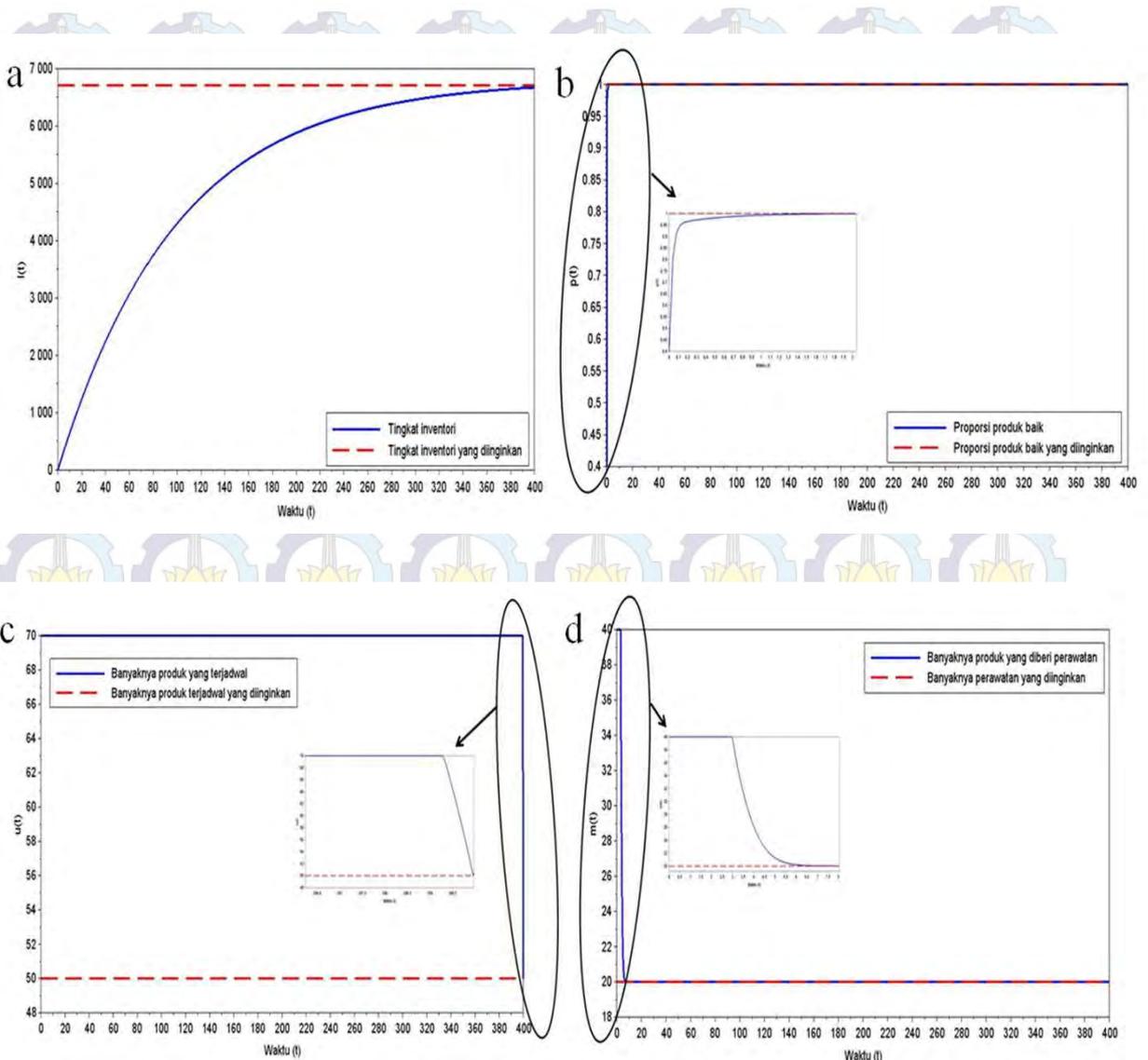
Gambar 4.25 menggambarkan grafik fungsi permintaan konstan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) bentuk eksponensial. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar. Dengan permintaan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang digambarkan oleh grafik tersebut maka diperoleh grafik tingkat inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan ditunjukkan oleh Gambar 4.26.



Gambar 4.25: Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu

Pada Gambar 4.26 a dan c menunjukkan banyaknya produk yang terjadwal diawal waktu konstan kemudian menurun. Hal ini disebabkan inventori digudang meningkat sehingga butuh perusahaan harus mengontrol produknya dengan menekan produk yang terjadwal seminimum mungkin. Selain itu, hal ini juga disebabkan permintaan konsumen meningkat sehingga produk yang terjadwal konstan dan selanjutnya menurun. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar.

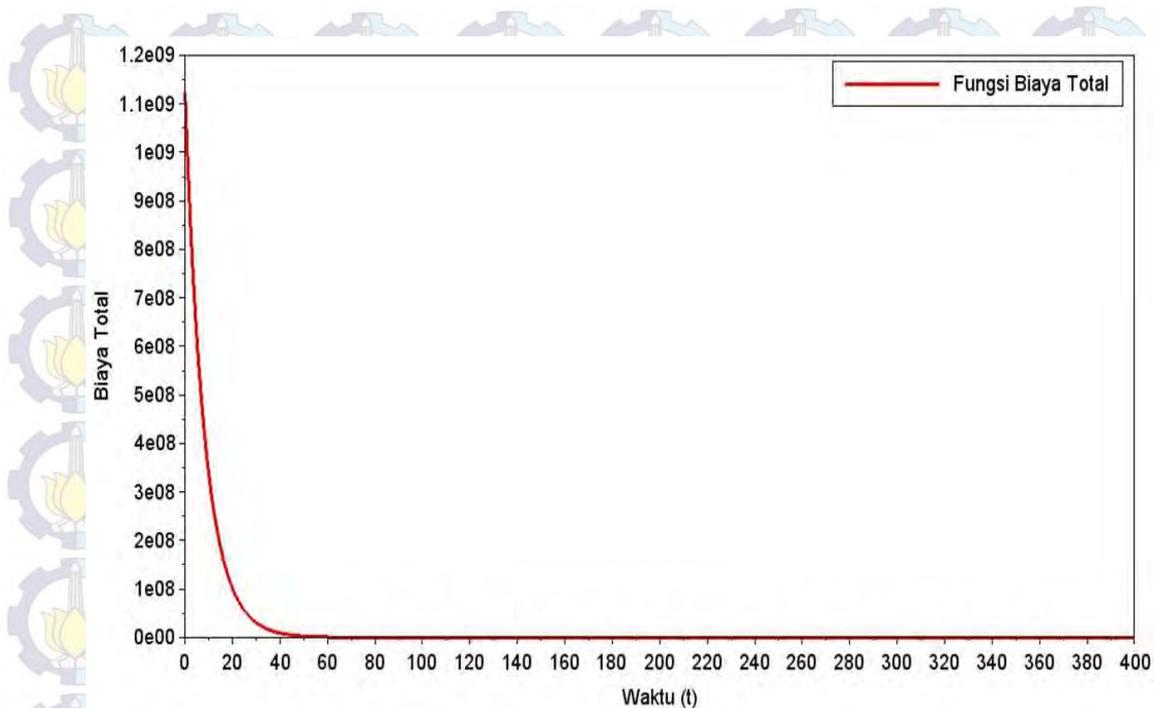
Pada Gambar 4.26 b dan d menunjukkan banyaknya produk yang diberi perawatan konstan dan selanjutnya menurun. Hal ini disebabkan proporsi produk baik meningkat drastis selanjutnya konstan. Selain itu, juga dipengaruhi oleh produk yang usang yang menurun maka produk yang diberi perawatan konstan dan selanjutnya menurun. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar.



Gambar 4.26: a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan

Gambar 4.26 menunjukkan bahwa banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan menuju yang diinginkan (target). Hal tersebut membuat biaya produksi total menjadi minimum. Berikut ini adalah grafik fungsi biaya produksi total yang dijelaskan pada Gambar 4.27.

Fungsi biaya produksi total pada Gambar 4.27 menunjukkan bahwa pada selang waktu 400 satuan waktu, fungsi biaya produksi total semakin menurun. Hal ini sesuai dengan kondisi yang diharapkan yaitu pada kasus keempat dimana permintaan konsumen konstan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) digunakan fungsi eksponensial sehingga diperoleh biaya produksi total yang minimum.

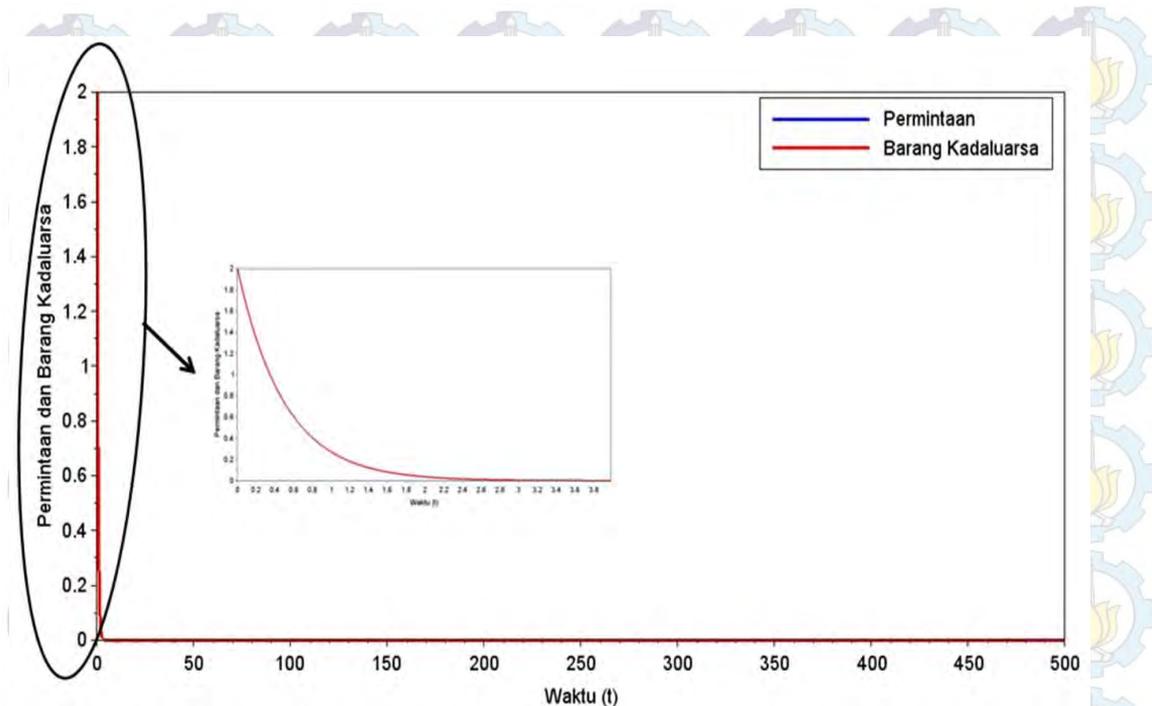


Gambar 4.27: Fungsi Biaya Produksi Total terhadap Waktu

#### 4.7.5 Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang (Kadaluarsa) Menurun

Misalkan untuk kasus kelima, suatu perusahaan merencanakan produksinya selama 500 satuan waktu, dengan *discounting* adalah 0.01, dan banyaknya inventori saat awal periode produksi adalah 6 unit dan proporsi produk baik sebesar 0.4. Biaya produksi total yang akan ditanggung perusahaan jika semakin besar *error* dari nilai sebenarnya dengan nilai yang diinginkan perusahaan tersebut yang terdiri dari biaya penyimpanan sebesar 60 dan 30, biaya inventori sebesar 50, dan biaya perawatan produksi sebesar 60. Banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, serta banyaknya produk yang diberi perawatan yang diinginkan (target) adalah  $\bar{I} = 6710$ ,  $\bar{p} = 1$ ,  $\bar{u} = 50$ , dan  $\bar{m} = 20$  sedangkan tingkat kerusakan produk saat berada pada gudang penyimpanan sebesar 0.01. Permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang terjadi pada perusahaan ini berupa fungsi eksponensial yaitu  $2e^{-2t}$ .

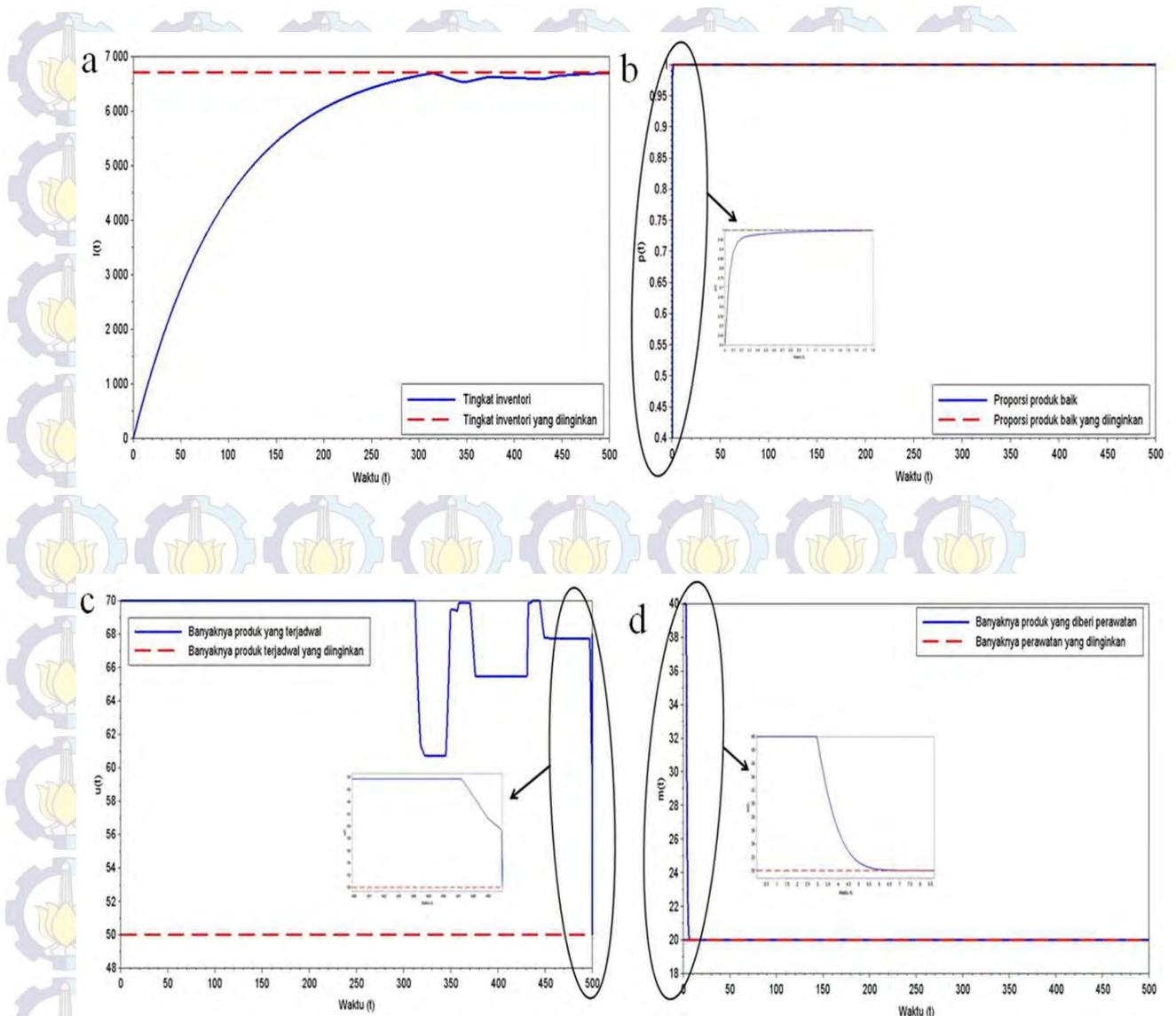
Gambar 4.28 menggambarkan grafik fungsi permintaan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) bentuk eksponensial. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar. Dengan permintaan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang digambarkan oleh grafik tersebut maka diperoleh grafik tingkat inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan ditunjukkan oleh



Gambar 4.28: Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluaarsa) terhadap Waktu Gambar 4.29.

Pada Gambar 4.29 a dan c menunjukkan banyaknya produk yang terjadwal diawal konstan kemudian menurun, konstan kembali selanjutnya naik dan kembali ke konstan. Grafik ini terjadi berulang-ulang. Hal ini disebabkan inventori digudang meningkat sehingga butuh perusahaan harus mengontrol produknya dengan menekan produk yang terjadwal seminimum mungkin. Selain itu, hal ini juga disebabkan permintaan konsumen menurun, sehingga produk yang terjadwal naik turun. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar.

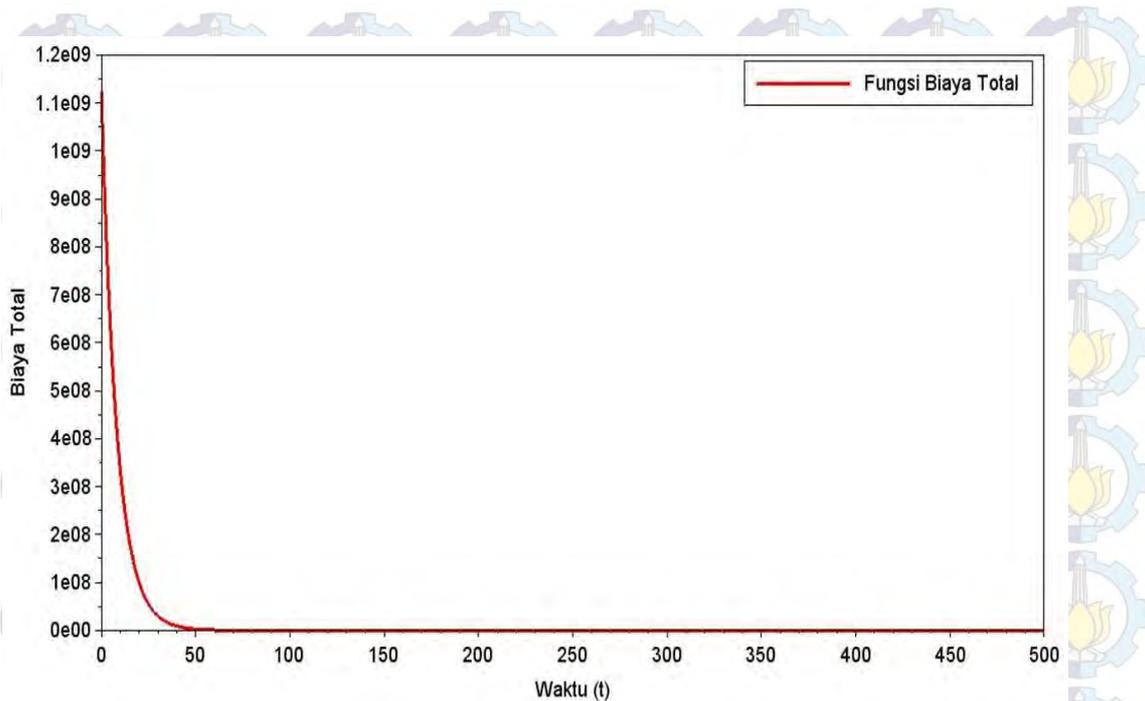
Pada Gambar 4.29 b dan d menunjukkan banyaknya produk yang diberi perawatan diawal waktu konstan selanjutnya semakin lama semakin menurun. Hal ini disebabkan proporsi produk baik meningkat drastis. Selain itu, hal ini juga dipengaruhi oleh produk yang usang yang menurun maka produk yang diberi perawatan menurun pula. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar.



Gambar 4.29: a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan

Gambar 4.29 menunjukkan bahwa banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan menuju yang diinginkan (target). Hal tersebut membuat biaya produksi total menjadi minimum. Berikut ini adalah grafik fungsi biaya produksi total yang dijelaskan pada Gambar 4.30.

Fungsi biaya produksi total pada Gambar 4.30 menunjukkan bahwa pada selang waktu 500 satuan waktu, fungsi biaya produksi total semakin menurun. Hal ini sesuai dengan kondisi yang diharapkan yaitu pada kasus ketujuh dimana permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) digunakan fungsi eksponensial sehingga diperoleh biaya produksi total yang minimum.



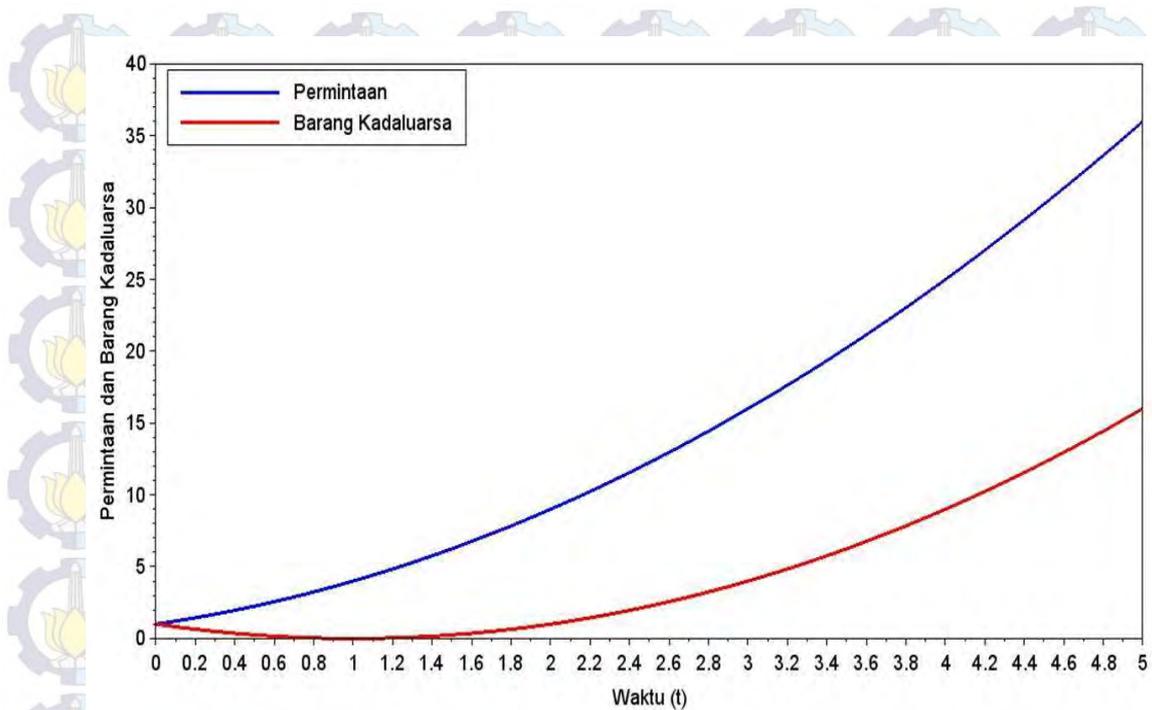
Gambar 4.30: Fungsi Biaya Produksi Total terhadap Waktu

#### 4.7.6 Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang (Kadaluarsa) Meningkat

Misalkan untuk kasus keenam, suatu perusahaan merencanakan produksinya selama 5 satuan waktu, dengan *discounting* adalah 0.01, dan banyaknya inventori saat awal periode produksi adalah 6 unit dan proporsi produk baik sebesar 0.4. Biaya produksi total yang akan ditanggung perusahaan jika semakin besar *error* dari nilai sebenarnya dengan nilai yang diinginkan perusahaan tersebut yang terdiri dari biaya penyimpanan sebesar 60 dan 30, biaya inventori sebesar 50, dan biaya perawatan produksi sebesar 60. Banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, serta banyaknya produk yang diberi perawatan yang diinginkan adalah  $\bar{I} = 210$ ,  $\bar{p} = 0.56$ ,  $\bar{u} = 50$ , dan  $\bar{m} = 20$  sedangkan tingkat kerusakan produk saat berada pada gudang penyimpanan sebesar 0.01. Permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang terjadi pada perusahaan ini berupa fungsi kuadrat yaitu  $S = t^2 + 2t + 1$  dan  $\alpha = t^2 - 2t + 1$ .

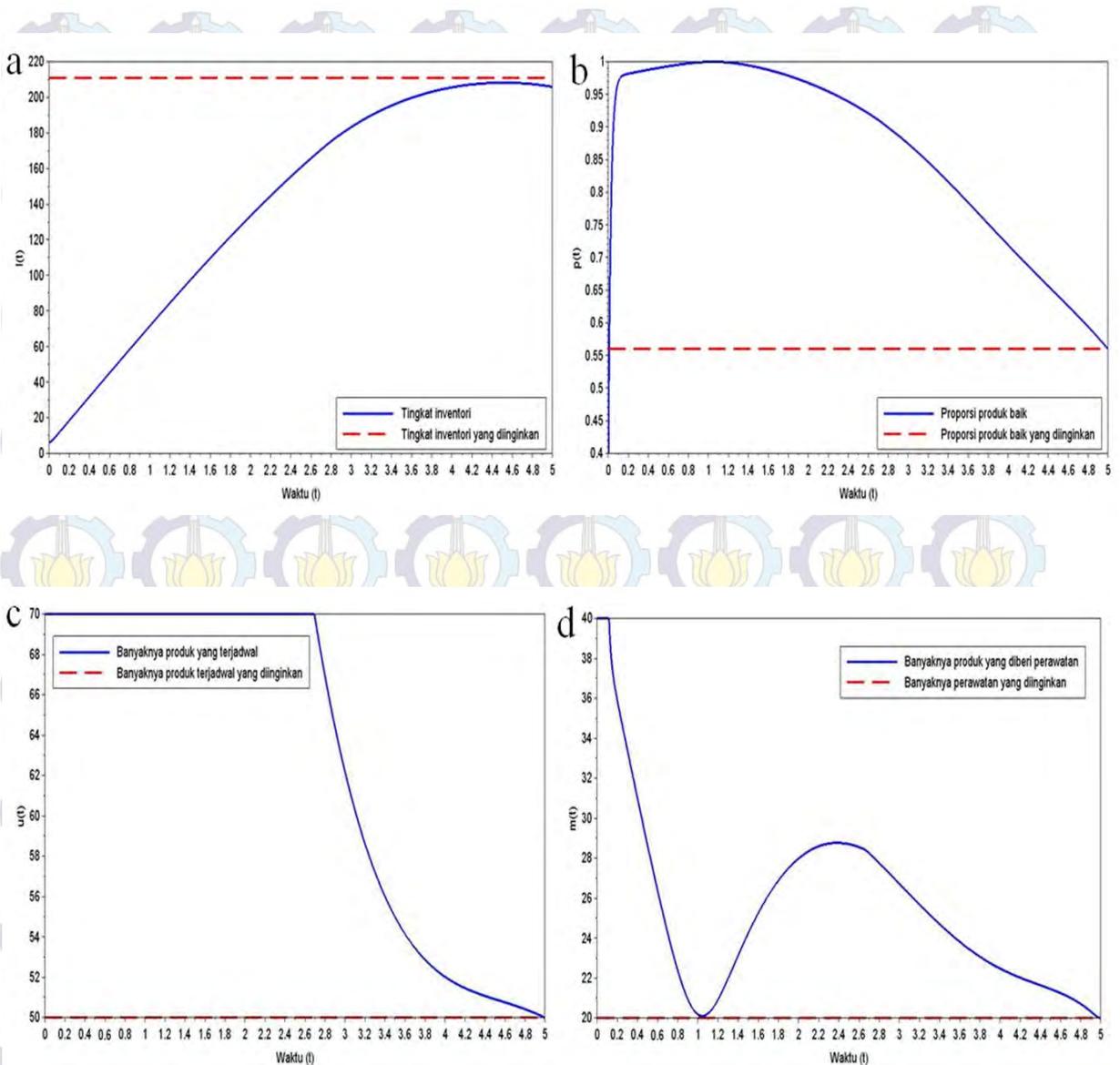
Gambar 4.31 menggambarkan grafik fungsi permintaan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) bentuk kuadrat. Dengan permintaan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang digambarkan oleh grafik tersebut maka diperoleh grafik tingkat inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan ditunjukkan oleh Gambar 4.32.

Pada Gambar 4.32 a dan c menunjukkan banyaknya produk yang terjadwal



Gambar 4.31: Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluausa) terhadap Waktu diawal konstan kemudian menurun. Hal ini disebabkan inventori digudang meningkat sehingga butuh perusahaan harus mengontrol produknya dengan menekan produk yang terjadwal semimum mungkin. Selain itu, hal ini juga disebabkan permintaan konsumen menurun, sehingga produk yang terjadwal menurun juga.

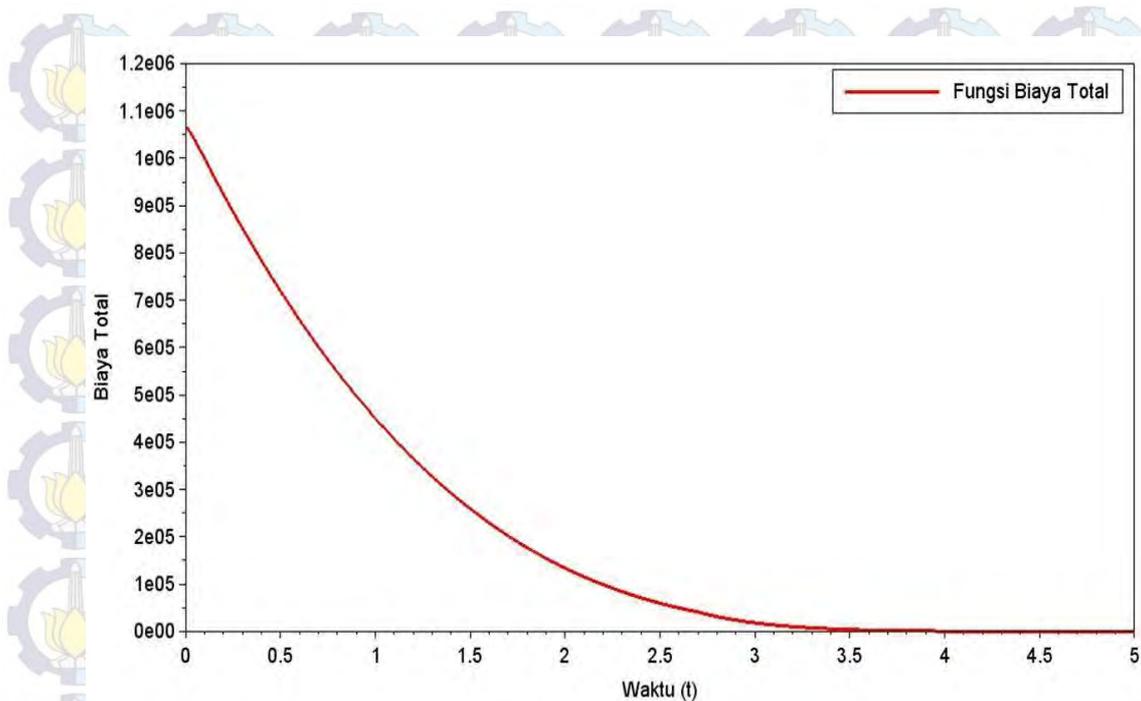
Pada Gambar 4.32 b dan d menunjukkan banyaknya produk yang diberi perawatan diawal waktu konstan selanjutnya semakin lama semakin menurun selanjutnya naik dan menurun kembali. Hal ini disebabkan proporsi produk baik meningkat drastis selanjutnya menurun. Selain itu, dipengaruhi oleh produk yang usang yang menurun maka produk yang diberi perawatan menurun pula.



Gambar 4.32: a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan

Gambar 4.32 menunjukkan bahwa banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan menuju yang diinginkan (target). Hal tersebut membuat biaya produksi total menjadi minimum. Berikut ini adalah grafik fungsi biaya produksi total yang dijelaskan pada Gambar 4.33.

Fungsi biaya produksi total pada Gambar 4.33 menunjukkan bahwa pada selang waktu 5 satuan waktu, fungsi biaya produksi total semakin menurun. Hal ini sesuai dengan kondisi yang diharapkan yaitu pada kasus keenam dimana permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) digunakan fungsi kuadrat sehingga diperoleh biaya produksi total yang minimum.

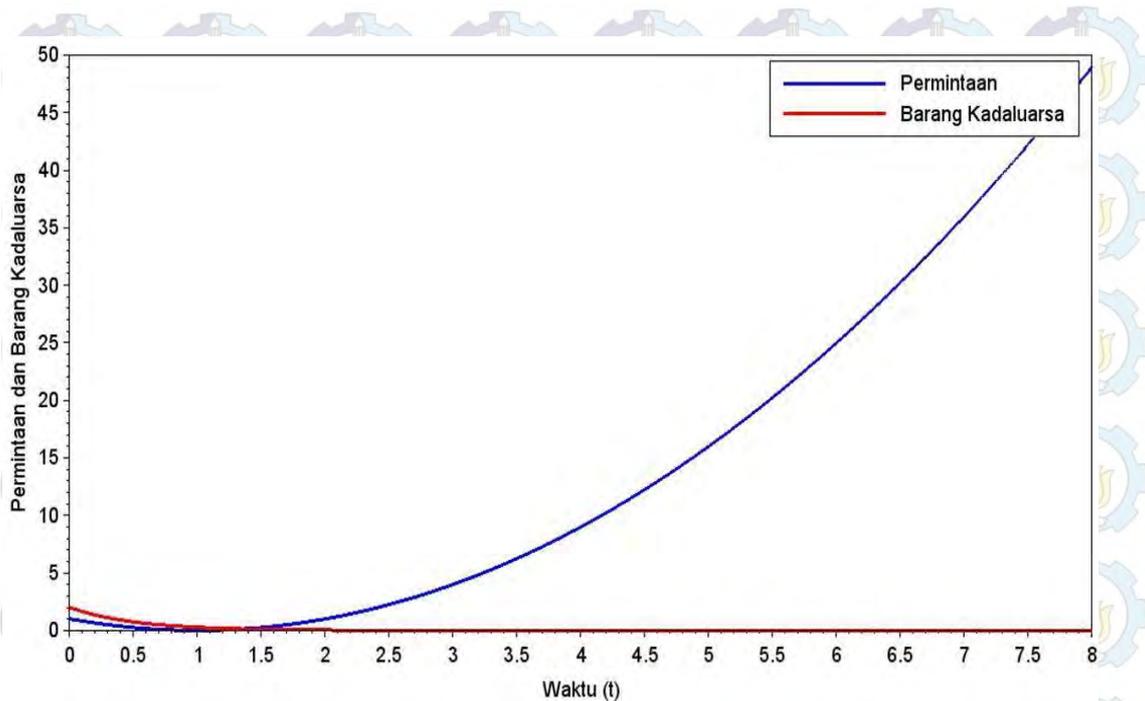


Gambar 4.33: Fungsi Biaya Produksi Total terhadap Waktu

#### 4.7.7 Permintaan Konsumen Meningkat dan Banyaknya Produk Usang (Kadaluarsa) Menurun

Misalkan untuk kasus ketujuh, suatu perusahaan merencanakan produksinya selama 8 satuan waktu, dengan *discounting* adalah 0.01, dan banyaknya inventori saat awal periode produksi adalah 6 unit dan proporsi produk baik sebesar 0.4. Biaya produksi total yang akan ditanggung perusahaan jika semakin besar *error* dari nilai sebenarnya dengan nilai yang diinginkan perusahaan tersebut yang terdiri dari biaya penyimpanan sebesar 60 dan 30, biaya inventori sebesar 50, dan biaya perawatan produksi sebesar 60. Banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, serta banyaknya produk yang diberi perawatan yang diinginkan (target) adalah  $\bar{I} = 400$ ,  $\bar{p} = 1$ ,  $\bar{u} = 50$ , dan  $\bar{m} = 20$  sedangkan tingkat kerusakan produk saat berada pada gudang penyimpanan sebesar 0.01. Permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang terjadi pada perusahaan ini berupa fungsi kuadrat dan eksponensial yaitu  $S = t^2 - 2t + 1$  dan  $\alpha = 2e^{-2t}$ .

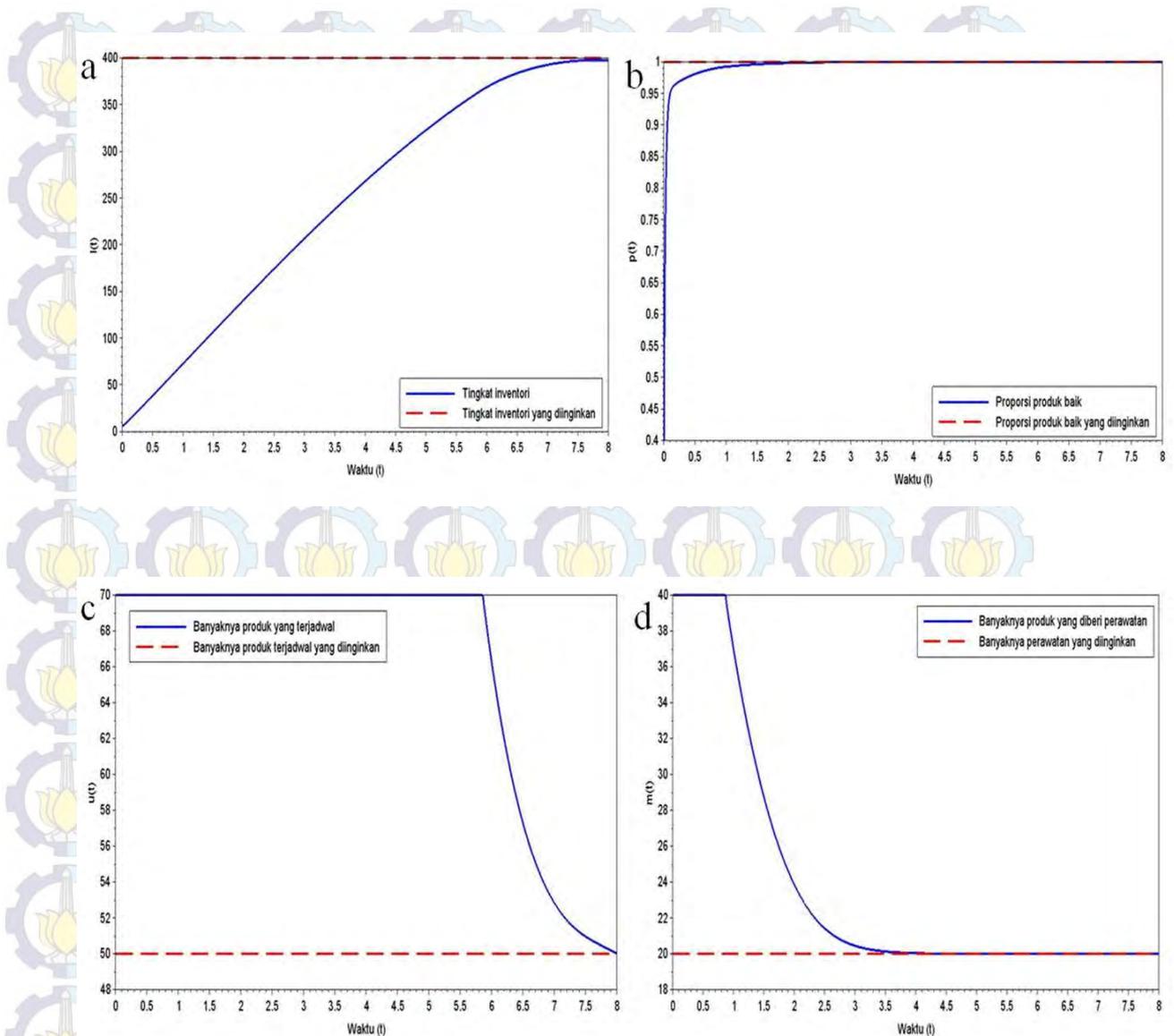
Gambar 4.34 menggambarkan grafik fungsi permintaan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) bentuk kuadrat dan eksponensial. Dengan permintaan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang digambarkan oleh grafik tersebut maka diperoleh grafik tingkat inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan ditunjukkan oleh Gambar



Gambar 4.34: Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu 4.35.

Pada Gambar 4.35 a dan c menunjukkan banyaknya produk yang terjadwal diawal meningkat selanjutnya menurun. Hal ini disebabkan inventori digudang meningkat sehingga butuh perusahaan harus mengontrol produknya dengan menekan produk yang terjadwal semimumimum mungkin. Selain itu, hal ini juga disebabkan permintaan konsumen, yang mana diawal waktu permintaannya meningkat sehingga produk yang terjadwal konstan selanjutnya menurun menuju ke target.

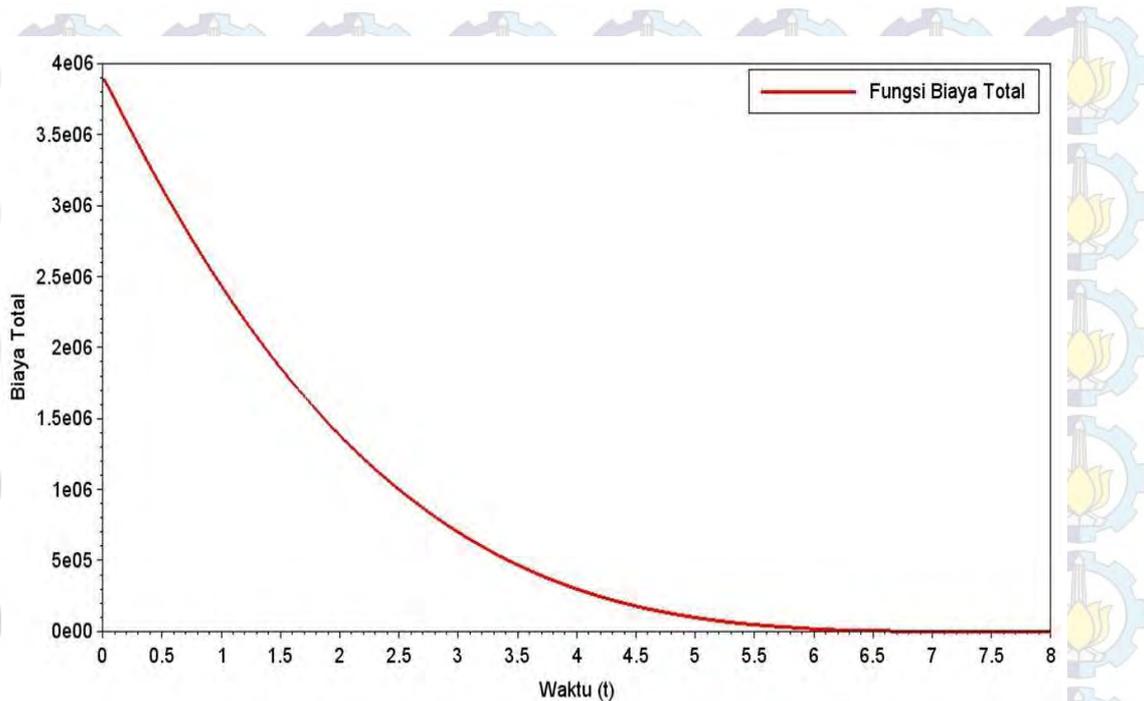
Pada Gambar 4.35 b dan d menunjukkan banyaknya produk yang diberi perawatan konstan selanjutnya menurun. Hal ini disebabkan proporsi produk baik meningkat drastis kemudian konstan ke target. Selain itu juga dipengaruhi oleh produk yang usang yang menurun maka produk yang diberi perawatan menurun.



Gambar 4.35: a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan

Gambar 4.35 menunjukkan bahwa banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan menuju yang diinginkan (target). Hal tersebut, membuat biaya produksi total menjadi minimum. Berikut ini adalah grafik fungsi biaya produksi total yang dijelaskan pada Gambar 4.36.

Fungsi biaya produksi total pada Gambar 4.36 menunjukkan bahwa pada selang waktu 8 satuan waktu, fungsi biaya produksi total semakin menurun. Hal ini sesuai dengan kondisi yang diharapkan yaitu pada kasus ketujuh dimana permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) digunakan fungsi kuadrat dan eksponensial sehingga diperoleh biaya produksi total yang minimum.

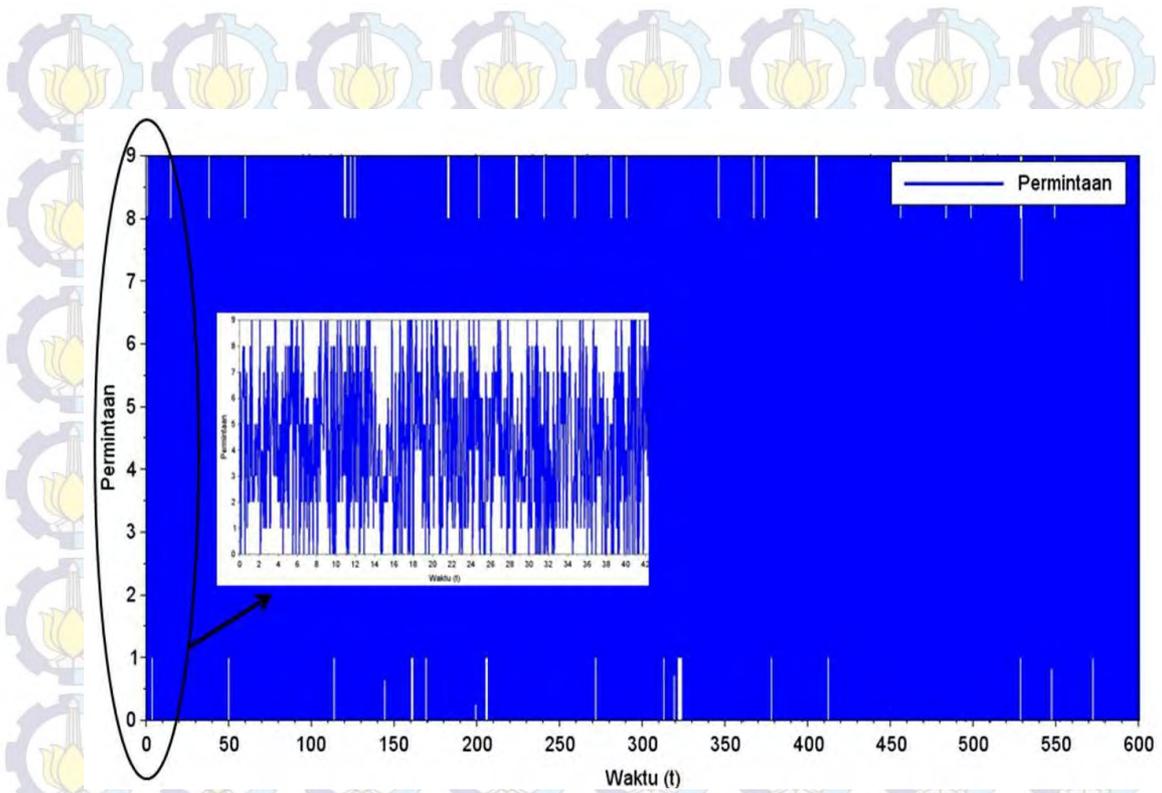


Gambar 4.36: Fungsi Biaya Produksi Total terhadap Waktu

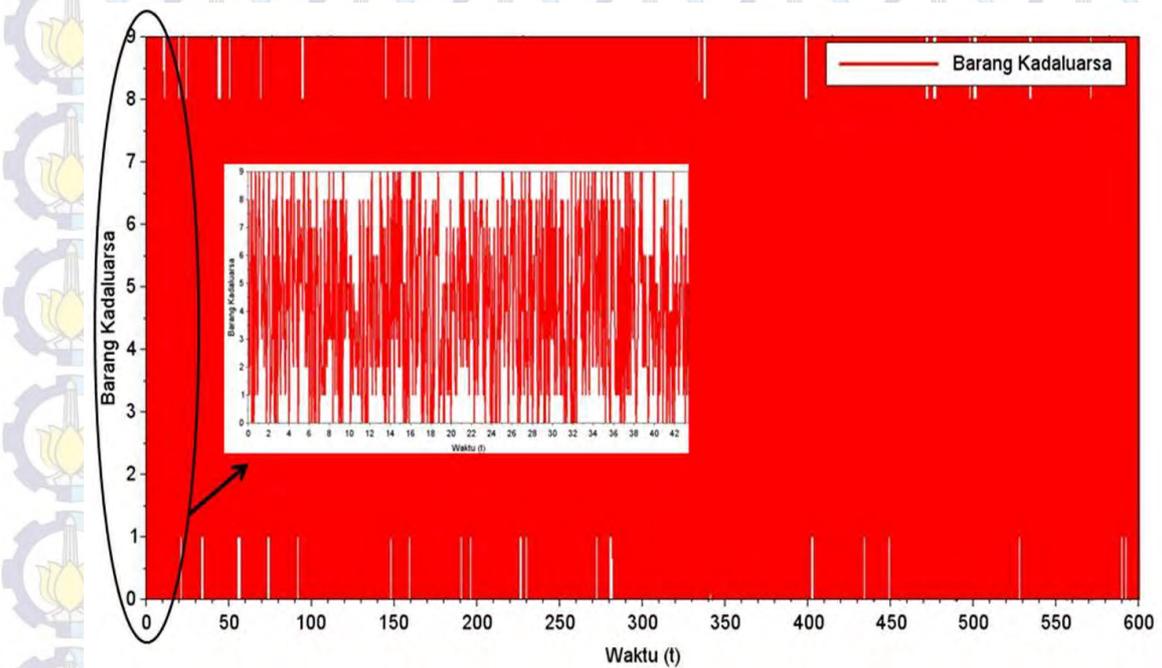
#### 4.7.8 *Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang (Kadaluarsa) Tidak Pasti*

Misalkan untuk kasus kedelapan, suatu perusahaan merencanakan produksinya selama 600 satuan waktu, dengan *discounting* adalah 0.01, dan banyaknya inventori saat awal periode produksi adalah 6 unit dan proporsi produk baik sebesar 0.4. Biaya produksi total yang akan ditanggung perusahaan jika semakin besar *error* dari nilai sebenarnya dengan nilai yang diinginkan perusahaan tersebut yang terdiri dari biaya penyimpanan sebesar 50 dan 60, biaya inventori sebesar 60, dan biaya perawatan produksi sebesar 30. Banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, serta banyaknya produk yang diberi perawatan yang diinginkan (target) adalah  $\bar{I} = 5900$ ,  $\bar{p} = 0.890$ ,  $\bar{u} = 50$ , dan  $\bar{m} = 20$ , sedangkan tingkat kerusakan produk saat berada pada gudang penyimpanan sebesar 0.01. Permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang terjadi berupa fungsi random.

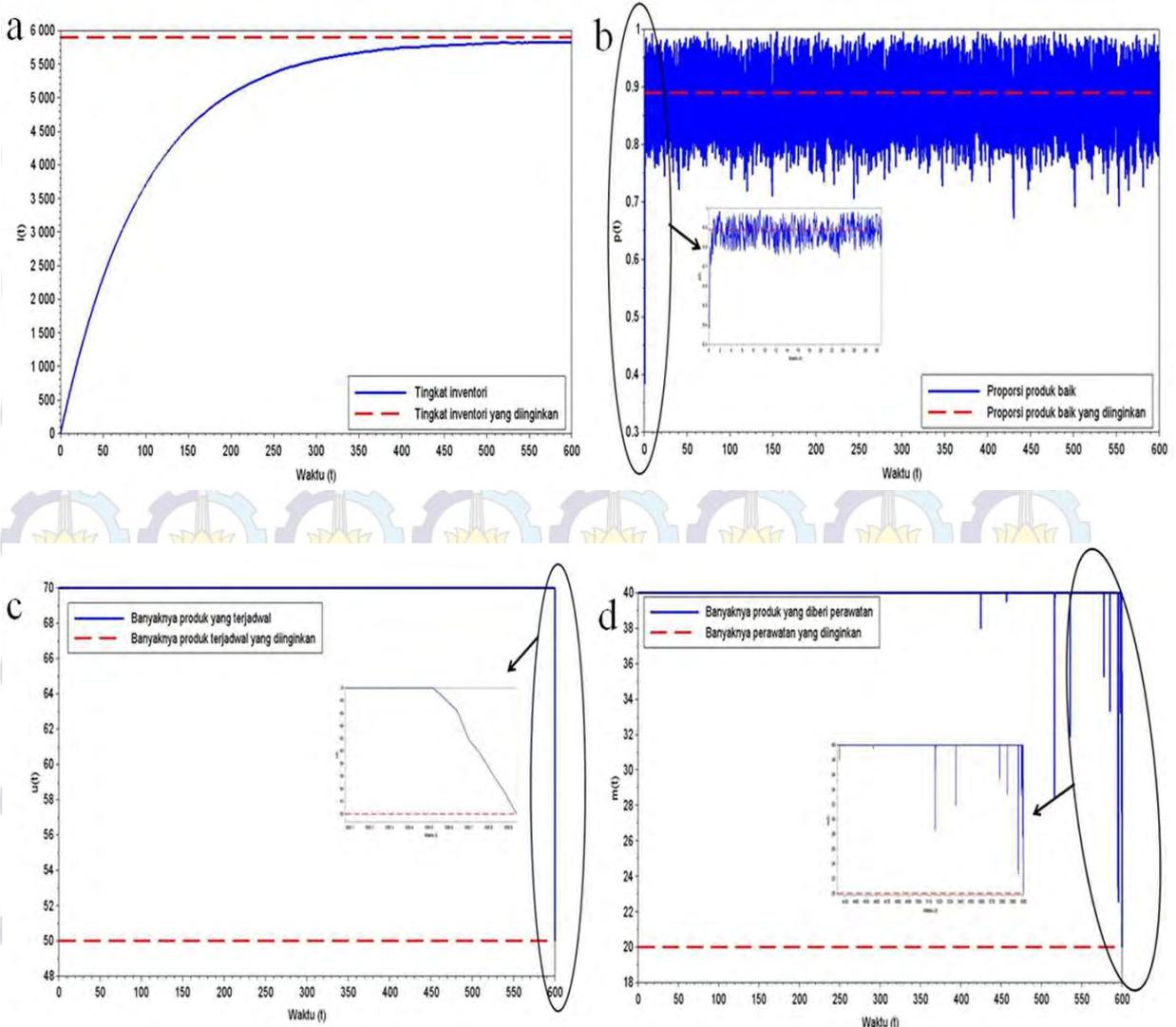
Gambar 4.37 dan Gambar 4.38 menggambarkan grafik fungsi permintaan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) bentuk random. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar. Grafik tersebut menunjukkan bahwa permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) random atau acak terhadap waktu. Dengan permintaan dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) yang digambarkan oleh grafik sebagai berikut.



Gambar 4.37: Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu



Gambar 4.38: Fungsi Permintaan dan Produk Usang (Kadaluarsa) terhadap Waktu



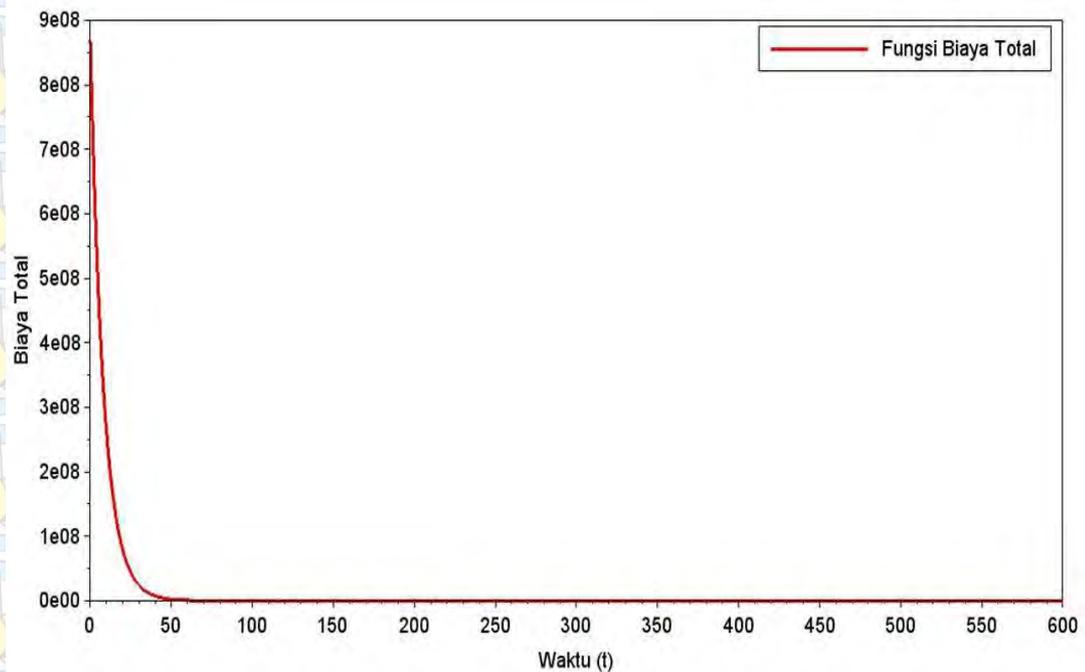
Gambar 4.39: a. Tingkat Inventori, b. Proporsi Produk Baik, c. Banyaknya Produk yang Terjadwal, d. Banyaknya Produk yang Diberi Perawatan

Pada Gambar 4.39 a dan c menunjukkan banyaknya produk yang terjadwal diawal waktu konstan selanjutnya menurun kemudian naik dan berulang kembali. Hal ini disebabkan inventori digudang meningkat sehingga butuh perusahaan harus mengontrol produknya dengan menekan produk yang terjadwal semimumimum mungkin. Selain itu, hal ini juga disebabkan permintaan konsumen yang acak, sehingga produk yang terjadwal acak pula. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar.

Pada Gambar 4.39 b dan d menunjukkan banyaknya produk yang diberi perawatan konstan selanjutnya menurun. Hal ini disebabkan proporsi produk baik meningkat drastis selanjutnya konstan pada proporsi produk baik yang diinginkan (target). Selain itu, hal ini juga dipengaruhi oleh produk yang usang yang acak maka

produk yang diberi perawatan acak pula. Untuk mengetahui bentuk dari bagian Gambar yang dilingkari dapat dilihat pada perbesaran Gambar.

Gambar 4.39 menunjukkan bahwa banyaknya inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan menuju yang diinginkan (target). Hal tersebut, membuat biaya produksi total menjadi minimum. Berikut ini adalah grafik fungsi biaya produksi total yang dijelaskan pada Gambar 4.40.



Gambar 4.40: Fungsi Biaya terhadap Waktu

Fungsi biaya produksi total pada Gambar 4.40 menunjukkan bahwa pada selang waktu 600 satuan waktu, fungsi biaya produksi total semakin menurun. Hal ini sesuai dengan kondisi yang diharapkan yaitu pada kasus kedelapan dimana permintaan konsumen dan banyaknya produk usang (kadaluarsa) digunakan fungsi random sehingga diperoleh biaya produksi total yang minimum.

## BAB V

### SIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini diberikan simpulan dari hasil pembahasan yang telah diuraikan pada bab sebelumnya. Selain itu, diberikan saran untuk penelitian berikutnya.

#### 5.1 Simpulan

Berdasarkan analisis dari hasil pembahasan, beberapa simpulan yang dapat diambil antara lain.

1. Model sistem perawatan produksi dengan memperhatikan kerusakan produk dan tingkat diskon adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\dot{I}(t) &= p(t)u(t) - \theta I(t) - S(t) \\ \dot{p}(t) &= -\alpha(t)p(t) + (1 - p(t))m(t)\end{aligned}$$

dengan kendala variabel sebagai berikut:

$$I(t) \geq 0, S(t) \geq 0, 0 \leq m(t) \leq M, 0 \leq p(t) \leq 1, \alpha(t) \geq 0, u(t) \geq 0$$

Fungsi objektif dari sistem perawatan produksi sebagai berikut:

$$2J = \min_{u(t), m(t) \geq 0} \int_0^T e^{-\rho t} [h_1(I(t) - \bar{I})^2 + h_2(p(t) - \bar{p})^2 + c_1(u(t) - \bar{u})^2 + c_2(m(t) - \bar{m})^2] dt$$

dimana  $t \in [0, T]$ ,  $h_i, c_i > 0, i = 1, 2$ .

2. Penentuan banyaknya produk yang terjadwal dan banyaknya produk yang diberi perawatan secara optimal dari model sistem perawatan produksi dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin adalah membentuk fungsi Hamiltonian dari sistem perawatan produksi dan fungsi objektifnya. Selanjutnya meminimumkan fungsi Hamiltonian terhadap vektor kontrol yaitu banyaknya produk yang terjadwal dan banyaknya produk yang diberi perawatan sehingga diperoleh banyaknya produk yang terjadwal dan banyaknya produk yang diberi perawatan yang optimal.

Maka diperoleh  $u(t)$  yang optimal yaitu  $u^*(t)$ .

$$u^*(t) = \frac{\lambda_1(t)p(t)}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u}$$

Sehingga persamaan  $u^*(t)$  diperoleh batasan sebagai berikut.

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \frac{\lambda_1(t)p(t)}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u} < 0 \\ \frac{\lambda_1(t)p(t)}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u} & 0 \leq \frac{\lambda_1(t)p(t)}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u} \leq u_{max} \\ u_{max} & \frac{\lambda_1(t)p(t)}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u} > u_{max} \end{cases}$$

dan  $m(t)$  yang optimal yaitu  $m^*(t)$

$$m^*(t) = \frac{\lambda_2(t)(1-p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m}$$

Sehingga persamaan  $m^*(t)$  diperoleh batasan sebagai berikut.

$$m^*(t) = \begin{cases} 0 & \frac{\lambda_2(t)(1-p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m} < 0 \\ \frac{\lambda_2(t)(1-p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m} & 0 \leq \frac{\lambda_2(t)(1-p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m} \leq M \\ M & \frac{\lambda_2(t)(1-p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m} > M \end{cases}$$

3. Dari hasil simulasi menunjukkan bahwa biaya total bernilai minimum ketika tingkat inventori, proporsi produk baik, banyaknya produk yang terjadwal, dan banyaknya produk yang diberi perawatan mencapai nilai yang optimal yaitu nilai yang diinginkan (target).

## 5.2 Saran

Pada penulisan selanjutnya, hal yang dapat dikembangkan dari tesis ini adalah model sistem perawatan produksi dengan penggunaan data permintaan konsumen yang sesungguhnya (studi kasus).

## DAFTAR PUSTAKA

Aminudin. (2005), *Prinsip-Prinsip Riset Operasi*, Erlangga, Jakarta.

Boyce, W. E., DiPrima, R. C. (2009), *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 9th edition*, John Willey and Sons, Inc, United State of America.

Bounkhel, M. dan Tadj, L. (2005), "Optimal Control of Deteriorating Production Inventory System", *Statistics and Operations Research*, Vol. 7, hal. 30-45.

Bukhari, F.A. dan El-Gohary, A. (2011), "Optimal Control of a Production-Maintenance System with Deteriorating Items", *Journal of King Saud University-Science*, Vol.24, hal. 351-357.

El-Gohary, A., Tadj, L., dan Al-Rasheedi, F. (2006), "Using Optimal Control to Adjust the Production Rate of a Deteriorating Inventory System", *Journal for Science of Taibah University*, Vol. 2, hal. 69-77.

Ginting, R. (2007), *Sistem Produksi*, Graha Ilmu, Yogyakarta.

Indayani, D. (2010), "Kendali Optimal pada Pengadaan Bahan Mentah dengan Kebijakan Pengadaan Tepat Waktu, Pergudangan, dan Penundaan", Jurusan Matematika, FMIPA-ITS.

Naidu, D. S. (2002), *Optimal Control Systems*. CRC Press, New York.

Pavela, V. (2015), *Kontrol Optimal Sistem Inventori dengan Memperhatikan Kerusakan Produk*, Tesis, FMIPA-ITS, Surabaya.

Ristono, A. (2009), *Manajemen Persediaan*, Graha Ilmu, Yogyakarta.

Subiono. (2013), *Sistem Linier dan Kontrol Optimal*, Jurusan Matematika, FMIPA ITS, Surabaya.

Sumayang, L. (2003), *Dasar-Dasar Manajemen Produksi dan Operasi*, Penerbit Salemba Empat, Jakarta.

## LAMPIRAN A. FORMAT *PROGRAMMING* MATLAB

### A.1 Format *Programming* Analisa Kontrol Optimal Sistem Perawatan Produksi dengan Permintaan Konsumen dan Banyaknya Produk Usang (Kadaluarsa) Menggunakan Fungsi Sinus

```
function [tree] = sci_sinusdem(tree)
// Copyright INRIA (Generated by M2SCI)
// Conversion function for Matlab inventory5()
// Input: tree = Matlab funcall tree
// Output: tree = Scilab equivalent for tree
tree.lhs(1).dims=list(7,-1)
tree.lhs(1).type=Type(Double,Real)
endfunction
```

```
y=[];
mode(0);
ieee(1);
clc;
clear;
u_bar=50;
m_bar=20;
umax = u_bar+20;
mmax = m_bar+20;
c1=60;
c2=30;
h1=50;
h2=60;
theta=0.01;
rho=0.1;
c = 0.5;
p_bar=0.975;
i_bar=6710;
P0=0.4;
I0=6;
test1 = -1;
test2 = -1;
```

```

test3 = -1;
test4 = -1;
N = 100;
delta = 1/N;
t0 = 0;
tf = 600;
t=(linspace(t0,tf,N+1));
k=(tf-t0)/N;
k2=k/2;
J=zeros(1,N+1);
U=zeros(1,N+1);
M=zeros(1,N+1);
P=zeros(1,N+1);
P(1)=P0;
I=zeros(1,N+1);
I(1)=I0;
lambda1=zeros(1,N+1);
lambda2=zeros(1,N+1);
lambda1(N+1)=0;
lambda2(N+1)=0;
while ((test1 < 0) & (test2 < 0))
while (and(test1 < 0) & and(test2 < 0))
oldU=U;
oldM=M;
oldP=P;
oldI=I;
oldlambda1=lambda1;
oldlambda2=lambda2;

for i=1:N
k11=P(i)*U(i)-theta*I(i)-(1+sin(5*t(i)));
k12=-((1+sin(5*t(i)));+M(i))*P(i)+M(i);
k21=(P(i)+k2*k12)*0.5*(U(i)+U(i+1))-theta*(I(i)+k2*k11)-(1+
sin(5*(t(i)+k2)));
k22=-((1+sin(5*(t(i)+k2)));+0.5*(M(i)+M(i+1)))*(P(i)+k2*k12)
+0.5*(M(i)+M(i+1));
k31=(P(i)+k2*k22)*0.5*(U(i)+U(i+1))-theta*(I(i)+k2*k21)-(1+

```

```

sin(5*(t(i)+k2)));
k32=-((1+sin(5*(t(i)+k2)))+0.5*(M(i)+M(i+1)))*(P(i)+k2*k22)
+0.5*(M(i)+M(i+1));
k41 = (P(i)+k*k32)*U(i+1)-theta*(I(i)+k*k31)-(1+sin(5*(t(i)+k)));
k42 = -((1+sin(5*(t(i)+k)))+M(i+1))*(P(i)+k*k32)+M(i+1);
I(i+1) =I(i)+(k/6)*(k11+2*k21+2*k31+k41);
P(i+1) =P(i)+(k/6)*(k12+2*k22+2*k32+k42);

U(i+1) = min(umax,
max(0,((lambda1(i+1)*P(i+1)*exp(rho*t(i+1))/c1)+u_bar)));
M(i+1) = min(mmax,
max(0,((lambda2(i+1)*(1-P(i+1))*exp(rho*t(i+1))/c2)+m_bar)));
end

for i=1:N
j=N+2-i;
k11 = (h1*(I(j)-i_bar)/exp(rho*t(j))+theta*lambda1(j);
k12=(h2*(P(j)-p_bar)/exp(rho*t(j)))-lambda1(j)*U(j)+
lambda2(j)*((1+sin(t(j)+2))+M(j))
k21=(h1*(0.5*(I(j)+I(j-1))-i_bar)/exp(rho*(t(j)-k2))+theta*
(lambda1(j)-k2*k11);
k22=(h2*(0.5*(P(j)+P(j-1))-p_bar)/exp(rho*(t(j)-k2))
-(lambda1(j)-k2*k11)*0.5*(U(j)+U(j-1))+(lambda2(j)-k2*k12)
*((1+sin((t(j)-k2)+2))+0.5*(M(j)+M(j-1))));
k31=(h1*(0.5*(I(j)+I(j-1))-i_bar)/exp(rho*(t(j)-k2))+theta*
(lambda1(j)-k2*k21);
k32=(h2*(0.5*(P(j)+P(j-1))-p_bar)/exp(rho*(t(j)-k2)))-
(lambda1(j)-k2*k21)*0.5*(U(j)+U(j-1))
+(lambda2(j)-k2*k22)*((1+sin((t(j)-k2)+2))+0.5*(M(j)+M(j-1)));
k41=(h1*(I(j-1)-i_bar)/exp(rho*(t(j)-k))+theta*(lambda1(j)
-k*k31);
k42=(h2*(P(j-1)-p_bar)/exp(rho*(t(j)-k)))-(lambda1(j)-k*k31)
*U(j-1)+(lambda2(j)-k*k32)*((1+sin((t(j)-k)+2))+M(j-1));

lambda1(j-1) =lambda1(j)-(k/6)*(k11+2*k21+2*k31+k41);
lambda2(j-1) =lambda2(j)-(k/6)*(k12+2*k22+2*k32+k42);
U(j-1) = min(umax,

```

```

max(0,((lambda1(j-1)*P(j-1)*exp(rho*t(j-1))/c1)+u_bar));
M(j-1) = min(mmax,
max(0,((lambda2(j-1)*(1-P(j-1))*exp(rho*t(j-1))/c2)+m_bar)));
end

U = U*(1-c)+oldU*c;
M = M*(1-c)+oldM*c;

temp1 = delta*sum(abs(U))-sum(abs(oldU-U));
temp2 = delta*sum(abs(M))-sum(abs(oldM-M));
temp3 = delta*sum(abs(I))-sum(abs(oldI-I));
temp4 = delta*sum(abs(P))-sum(abs(oldP-P));
temp5=delta*sum(abs(lambda1))-sum(abs(olddlambd1-lambda1));
temp6=delta*sum(abs(lambda2))-sum(abs(olddlambd2-lambda2));
test1 = min(temp1, min(temp3, temp5));
test2 = min(temp2, min(temp4, temp6));
end;
end;

for n=1:N+1
J(n)=((1/2)*exp(-rho*t(n))*((h1*(I(n)-i_bar).^2)+(h2*(P(n)
-p_bar).^2)+(c1*(U(n)-u_bar).^2)+(c2*(M(n)-m_bar).^2)));
end;

y(1,1:length(t)) = t;
y(2,:) = I;
y(3,:) = P;
y(4,:) = lambda1;
y(5,:) = lambda2;
y(6,:) = U;
y(7,:) = M;

for i = 1:N+1
ibar(i) = i_bar;
pbar(i) = p_bar;
ubar(i) = u_bar;
mbar(i) = m_bar;

```

```

end;

// Figure #1:
scf(1);
clf(1);
plot(t,I,b,LineWidth,2);
plot(t,ibar,--r,LineWidth,2);
set(gca(),auto_clear,off)
set(gca(),grid,[1,1])
xlabel('$Waktu (t)$,fontsize,3,color,black);
ylabel('$I(t)$,fontsize,3,color,black);
legend('Tingkat inventori','Tingkat inventori yang
diinginkan');

// Figure #2:
scf(2);
clf(2);
plot(t,P,b,LineWidth,2);
plot(t,pbar,--r,LineWidth,2);
set(gca(),auto_clear,off)
set(gca(),grid,[1,1])
xlabel('$Waktu (t)$,fontsize,3,color,black);
ylabel('$p(t)$,fontsize,3,color,black);
legend('Proporsi produk baik','Proporsi produk baik yang
diinginkan');

// Figure #3:
scf(3);
clf(3);
plot(t,U,b,LineWidth,2);
plot(t,ubar,--r,LineWidth,2);
set(gca(),auto_clear,off)
set(gca(),grid,[1,1])
xlabel('$Waktu (t)$,fontsize,3,color,black);
ylabel('$u(t)$,fontsize,3,color,black);
legend('Banyaknya produk yang terjadwal','Banyaknya produk
terjadwal yang diinginkan');

```

# Optimal Control of a Production Maintenance System by Considering Deteriorate Items and Discount Rate

Siska Aprilia Hardiyanti, Subiono

Department of Mathematics  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
apriliasiska14@mhs.matematika.its.ac.id  
subiono2008@matematika.its.ac.id

## Abstract

The main objectives of the company is improving the company's earning or profit by doing some efforts. The efforts are used to solve inventory problems. In this research, an inventory problem is a production maintenance by considering deteriorate items and discount rate. The other considered efforts are scheduled production rate and preventive maintenance rate. Beside that, the company determines the amount of the rate by its self so that the total cost can be obtained. Optimal control of production maintenance system is solved by using Pontryagin Maximum Principle. In addition the solution of the problem is illustrated by numerical simulation using Scilab software with Runge Kutta method of order 4.

**Mathematics Subject Classification:** Control Optimal problems

**Keywords:** Production Maintenance System, Optimal Control, Pontryagin Maximum Principle, Runge Kutta Method of Order 4.

## 1 Introduction

Optimal control is expansion of calculus of variations that is mathematics optimization method to reduce control decision. Optimal control theory is used to solve many problems in different fields. Many researches investigate about optimal control of inventory management such as. [1] Using optimal control to adjust the production rate of a deteriorating inventory system was studied by Gohary, Tadj, and Al-Rasheedi (2006). Optimal control of supplying raw materials by on time decision, warehouse, and lead time was studied by Darsih Indayani (2010)[2]. Optimal control of a production maintenance system with deteriorating items was studied by Bukhari and El-Gohary (2011)[3]. And optimal control of inventory system by considering the deteriorate items was studied by Vylida Pavela (2015)[4].

The problem of this paper is the production maintenance that is solved by considering the deteriorate items and discount rate. Beside that, the scheduled production rate and the preventive maintenance are considered. In this paper, the company determines the rate by its self so that the total cost can be obtained. The total cost includes the sum of the holding cost of inventory levels and the scheduled production cost will be minimized. Optimal control of production maintenance system is solved by using Pontryagin Maximum Principle. Then, the solution of the problem is illustrated by numerical simulation using Scilab software with Runge Kutta method of order 4.

## 2 Mathematical Model Formulation

We consider in this paper a production maintenance system that produces a single product. The following variables and parameters are used through this paper to formulate the model.

$I(t)$	The inventory level at time t
$\bar{I}$	The inventory goal level
$u(t)$	Scheduled production rate at time t
$\bar{u}$	Scheduled production goal rate
$\alpha(t)$	Obsolescence rate at time t
$m(t)$	Preventive maintenance rate at time t
$\bar{m}$	Preventive maintenance goal rate
$S(t)$	The demand rate at time t
$h_1$	Holding cost
$h_2$	Production cost
$c_1$	Scheduled production cost
$c_2$	Preventive maintenance cost
$\theta$	The natural deterioration rate
$p(t)$	Proportion of good items at time t
$\bar{p}$	Proportion goal of good items
$\rho$	Discount rate

In this paper, the assumption are adopted from deterioration rate occurs after the items enter the warehouse, the initial inventory rate ( $I(0) = I_0 > 0$ ) and the proportion of the initial good items ( $p(0) = p_0 > 0$ ) are positive, the mathematical model that is used in this paper is continuous production maintenance model, and the assumption that the warehouse can accomodate all ordered items. The differential equation models of the production maintenance system are:

$$\dot{I}(t) = p(t)u(t) - \theta I(t) - S(t) \quad (1)$$

$$\dot{p}(t) = -[\alpha(t) + m(t)]p(t) + m(t) \quad (2)$$

The optimal control problem consists of two state variables which are the inventory level and proportion of good item rate and two control variables which are the scheduled production rate and the production maintenance. The objective function of this problem is used to minimize the total cost given by.

$$2J = \min_{u(t), m(t) \geq 0} \int_0^T e^{-\rho t} [h_1(I(t) - \bar{I})^2 + h_2(p(t) - \bar{p})^2 + c_1(u(t) - \bar{u})^2 + c_2(m(t) - \bar{m})^2] dt \quad (3)$$

$$\text{with : } I(t) \geq 0, S(t) \geq 0, 0 \leq m(t) \leq M, 0 \leq p(t) \leq 1, \alpha(t) \geq 0, u(t) \geq 0 \quad (4)$$

where  $t \in [0, T]$ ,  $h_i, c_i > 0, i = 1, 2$ . The objective function represents the total cost incurred in a production and maintenance system by considering deteriorate items. From equations (1),(2), and (3) we obtain the Hamiltonian function H:

$$H = \left[ -\frac{1}{2} e^{-\rho t} [h_1(I(t) - \bar{I})^2 + h_2(p(t) - \bar{p})^2 + c_1(u(t) - \bar{u})^2 + c_2(m(t) - \bar{m})^2] \right] + \lambda_1(p(t)u(t) - \theta I(t) - S(t)) + \lambda_2(-[\alpha(t) + m(t)]p(t) + m(t)) \quad (5)$$

To obtain the optimal scheduled production rate  $u(t)$  and production maintenance rate  $m(t)$ , we will differentiate the Hamiltonian function with respect to  $u(t)$  and  $m(t)$ . The following we get the optimal scheduled production rate and production maintenance rate.

$$u^*(t) = \frac{\lambda_1 p(t)}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u}, m^*(t) = \frac{\lambda_2(1-p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m} \quad (6)$$

Based on equations (4) and (6), we can write such as.

$$u^*(t) = \max\left[0, \frac{\lambda_1 p(t)}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u}\right] \quad (7)$$

$$= \begin{cases} 0 & \frac{\lambda_1 p(t)}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u} < 0 \\ \frac{\lambda_1 p(t)}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u} & 0 \leq \frac{\lambda_1 p(t)}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u} \leq u_{max} \\ u_{max} & \frac{\lambda_1 p(t)}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u} > u_{max} \end{cases} \quad (8)$$

$$m^*(t) = \max\left[0, \frac{\lambda_2(1-p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m}\right] \quad (9)$$

$$= \begin{cases} 0 & \frac{\lambda_2(1-p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m} < 0 \\ \frac{\lambda_2(1-p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m} & 0 \leq \frac{\lambda_2(1-p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m} \leq M \\ M & \frac{\lambda_2(1-p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m} > M \end{cases} \quad (10)$$

Then we determine state equations by differential of equation (5) respect to  $\lambda_i$  with  $i = 1, 2$  and costate equations by respect to inventory levels (I) and proportion of good items (p).

$$\dot{I}^*(t) = \frac{\lambda_1 p^2(t)}{c_1 e^{-\rho t}} + \bar{u}p(t) - \theta I(t) - S(t) \quad (11)$$

$$\dot{p}^*(t) = -[\alpha(t) + \frac{\lambda_2(1-p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m}]p(t) + \frac{\lambda_2(1-p(t))}{c_2 e^{-\rho t}} + \bar{m} \quad (12)$$

$$\lambda_1^*(t) = e^{-\rho t} h_1(I(t) - \bar{I}) + \theta \lambda_1 \quad (13)$$

$$\lambda_2^*(t) = e^{-\rho t} h_2(p(t) - \bar{p}) - \lambda_1 u(t) + \lambda_2(\alpha(t) + m(t)) \quad (14)$$

### 3 Main Results

This section we discuss the numerical integration of the system of differential equations. Numerical integration of state and costate at equations (11)-(14) using forward backward sweep Runge Kutta method order 4 are.

- *Forward Sweep*

Based on equations (11) and (12), we can get the new equations as following.

$$\dot{I}_{n+1} = \dot{I}_n + \frac{h}{6}(k_{1,I} + 2k_{2,I} + 2k_{3,I} + k_{4,I}) \quad (15)$$

$$\dot{p}_{n+1} = \dot{p}_n + \frac{h}{6}(k_{1,p} + 2k_{2,p} + 2k_{3,p} + k_{4,p}) \quad (16)$$

with  $k_{1,I} = f(t_n, I_n, p_n, S_n, \alpha_n, u_n, m_n)$ ,  $k_{2,I} = f(t_n + \frac{h}{2}, I_n + \frac{k_{1,I}}{2}, p_n + \frac{k_{1,p}}{2}, \frac{1}{2}(S_n + S_{n+1}, \alpha_n + \alpha_{n+1}, u_n + u_{n+1}, m_n + m_{n+1}))$ ,  $k_{3,I} = f(t_n + \frac{h}{2}, I_n + \frac{k_{2,I}}{2}, p_n + \frac{k_{2,p}}{2}, \frac{1}{2}(S_n + S_{n+1}, \alpha_n + \alpha_{n+1}, u_n + u_{n+1}, m_n + m_{n+1}))$ ,  $k_{4,I} = f(t_n + h, I_n + k_{3,I}, p_n + k_{3,p}, S_{n+1}, \alpha_{n+1}, u_{n+1}, m_{n+1})$ .

And  $k_{1,p} = g(t_n, I_n, p_n, S_n, \alpha_n, u_n, m_n)$ ,  $k_{2,p} = g(t_n + \frac{h}{2}, I_n + \frac{k_{1,I}}{2}, p_n + \frac{k_{1,p}}{2}, \frac{1}{2}(S_n + S_{n+1}, \alpha_n + \alpha_{n+1}, u_n + u_{n+1}, m_n + m_{n+1}))$ ,  $k_{3,p} = g(t_n + \frac{h}{2}, I_n + \frac{k_{2,I}}{2}, p_n + \frac{k_{2,p}}{2}, \frac{1}{2}(S_n + S_{n+1}, \alpha_n + \alpha_{n+1}, u_n + u_{n+1}, m_n + m_{n+1}))$ ,  $k_{4,p} = g(t_n + h, I_n + k_{3,I}, p_n + k_{3,p}, S_{n+1}, \alpha_{n+1}, u_{n+1}, m_{n+1})$ .

- *Backward Sweep*

Based on equations (13) and (14), we can get the new equations given by.

$$\dot{\lambda}_{1,n-1} = \dot{\lambda}_{1,n} - \frac{h}{6}(k_{1,\lambda_1} + 2k_{2,\lambda_1} + 2k_{3,\lambda_1} + k_{4,\lambda_1}) \quad (17)$$

$$\dot{\lambda}_{2,n-1} = \dot{\lambda}_{2,n} - \frac{h}{6}(k_{1,\lambda_2} + 2k_{2,\lambda_2} + 2k_{3,\lambda_2} + k_{4,\lambda_2}) \quad (18)$$

with  $k_{1,\lambda_1} = f(t_n, \lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, I_n, p_n, S_n, \alpha_n, u_n, m_n)$ ,  $k_{2,\lambda_1} = f(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}, \frac{1}{2}(I_n + I_{n-1}, p_n + p_{n-1}, S_n + S_{n-1}, \alpha_n + \alpha_{n-1}, u_n + u_{n-1}, m_n + m_{n-1}))$ ,  $k_{3,\lambda_1} = f(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}, \frac{1}{2}(I_n + I_{n-1}, p_n + p_{n-1}, S_n + S_{n-1}, \alpha_n + \alpha_{n-1}, u_n + u_{n-1}, m_n + m_{n-1}))$ ,  $k_{4,\lambda_1} = f(t_n - h, \lambda_{1,n} - k_{3,\lambda_1}, \lambda_{2,n} - k_{3,\lambda_2}, I_{n-1}, p_{n-1}, S_{n-1}, \alpha_{n-1}, u_{n-1}, m_{n-1})$ .

And  $k_{1,\lambda_2} = g(t_n, \lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, I_n, p_n, S_n, \alpha_n, u_n, m_n)$ ,  $k_{2,\lambda_2} = g(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{k_{1,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{k_{1,\lambda_2}}{2}, \frac{1}{2}(I_n + I_{n-1}, p_n + p_{n-1}, S_n + S_{n-1}, \alpha_n + \alpha_{n-1}, u_n + u_{n-1}, m_n + m_{n-1}))$ ,  $k_{3,\lambda_2} = g(t_n - \frac{h}{2}, \lambda_{1,n} - \frac{k_{2,\lambda_1}}{2}, \lambda_{2,n} - \frac{k_{2,\lambda_2}}{2}, \frac{1}{2}(I_n + I_{n-1}, p_n + p_{n-1}, S_n + S_{n-1}, \alpha_n + \alpha_{n-1}, u_n + u_{n-1}, m_n + m_{n-1}))$ ,  $k_{4,\lambda_2} = g(t_n - h, \lambda_{1,n} - k_{3,\lambda_1}, \lambda_{2,n} - k_{3,\lambda_2}, I_{n-1}, p_{n-1}, S_{n-1}, \alpha_{n-1}, u_{n-1}, m_{n-1})$ .

The Numerical simulation is using Scilab *software*. And the following set of parameter values is assumed:

Table 1: Parameter Values (Bukhari, F.A. and El-Gohary, A.,2011)

par.	$\bar{u}$	$\bar{m}$	$c_1$	$c_2$	$h_1$	$h_2$	$\theta$	$\bar{p}$	$I$	$\rho$	$I_0$	$p_0$
val.	40	50	60	30	50	60	0.02	0.72	16	0.01	5	0.5

The numerical solution of system is discussed for different cases of the system parameters. And from that two cases, we conclude that both the inventory level and proportion of good items tend to its goal level and its rate.

- Constant demand and absence rates

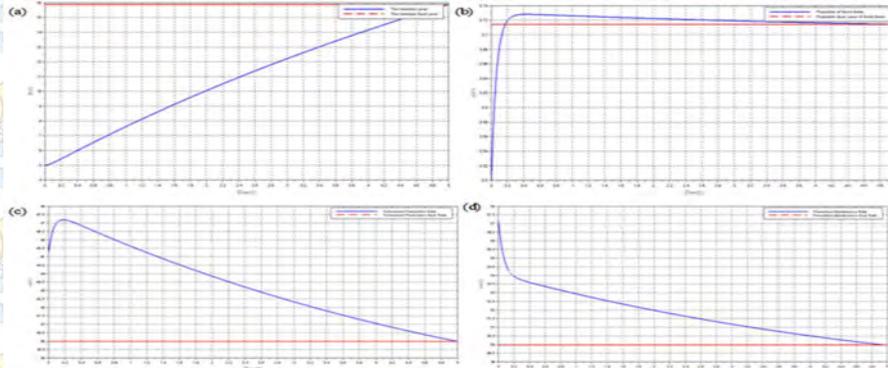


Figure 1: (a) Inventory level, (b) proportion of good items, (c) scheduled production, (d) preventive maintenance

- Time dependent demand and absence rates

The equations of demand and absence rates using  $S(t) = t^2 + 4$  and  $\alpha(t) = 10e^{-t} + 10$ .

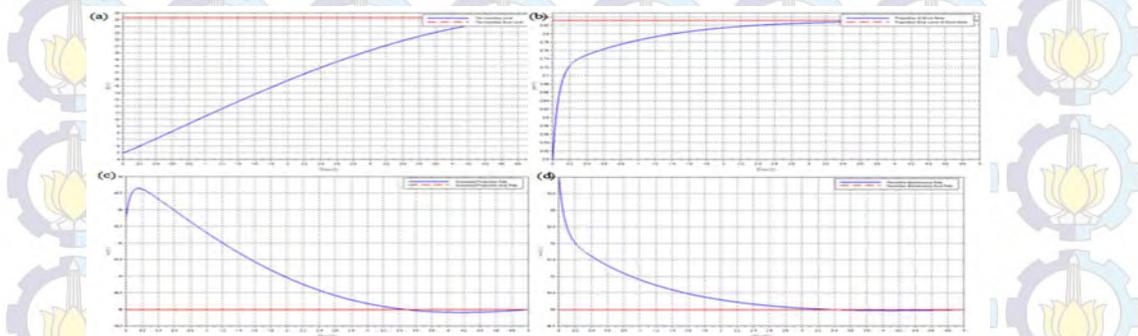


Figure 2: (a) Inventory level, (b) proportion of good items, (c) scheduled production, (d) preventive maintenance

## 4 Conclusion

The optimal control problem consists of two state variables which are the inventory level and proportion of good item rate and two control variables which are the scheduled production rate and the production maintenance was studied. The optimality conditions of them are derived. In addition, the optimal solution of the control system is presented numerically for different cases of both demand and absence rates.

## References

- [1] El-Gohary, A., Tadj, L., and Al-Rasheedi, F. Using Optimal Control to Adjust the Production Rate of a Deteriorating Inventory System, *Journal for Science of Taibah University* Vol. 2 (2006) 69-77.
- [2] Indayani, D. Optimal Control of Supplying Raw Materials by On Time Decision, Warehouse, and Lead Time, Mathematics Department, FMIPA-ITS, Surabaya (2010).
- [3] Bukhari, F.A. and El-Gohary, A. Optimal Control of a Production Maintenance System with Deteriorating Items, *Journal of King Saud University-Science* vol. 24 (2011) 351-357.
- [4] Pavela, V. Optimal Control of Inventory System by Considering The Deteriorate Items, Thesis, FMIPA-ITS, Surabaya (2015).
- [5] Bounkhel, M. and Tadj, L. Optimal Control of Deteriorating Production Inventory System, *Statistics and Operations Research* vol. 7 (2005) 30-45.
- [6] Naidu, D. S. Optimal Control Systems, CRC Press, New York (2002).

## BIODATA PENULIS



Penulis yang memiliki nama lengkap Siska Aprilia Hardiyanti lahir di Banyuwangi, 1 April 1992. Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari TK Dharma Wanita 1 Kembiritan, SDN Kembiritan 2, SMP Negeri 1 Genteng, dan SMA Negeri 1 Genteng. Setelah lulus dari SMA, penulis melanjutkan studi S1 di FKIP Matematika

Universitas Jember (2010-2014) melalui jalur PMDK dan diterima sebagai mahasiswa angkatan 2010. Penulis lulus sarjana dengan tujuh semester dan wisuda pada bulan Maret 2014 dengan mendapat gelar Sarjana Pendidikan. Penulis melanjutkan studi S2 di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya pada tahun 2014 dengan NRP. 1214 201 018. Untuk membentuk jaringan atau membutuhkan informasi yang berhubungan dengan tesis ini, penulis dapat dihubungi melalui email [siskaapriahardiyanti@gmail.com](mailto:siskaapriahardiyanti@gmail.com).