

TESIS - SM 142501

PEMODELAN INSTALASI PENGOLAHAN AIR BERSIH MENGUNAKAN *HYBRID PETRI NET*

DENY MURDIANTO
NRP 1214 201 027

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016



TESIS - SM 142501

**PEMODELAN INSTALASI PENGOLAHAN AIR BERSIH
MENGUNAKAN *HYBRID PETRI NET***

DENY MURDIANTO
1214 201 027

DOSEN PEMBIMBING
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

PROGRAM MAGISTER
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER
SURABAYA
2016



THESIS - SM 142501

MODELING OF A WATER TREATMENT PLANT USING HYBRID PETRI NETS

DENY MURDIANTO
NRP 1214 201 027

SUPERVISOR
Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

MASTER'S DEGREE
MATHEMATICS DEPARTMENT
FACULTY OF MATHEMATICS AND NATURAL SCIENCES
SEPULUH NOPEMBER INSTITUTE OF TECHNOLOGY
SURABAYA
2016

PEMODELAN INSTALASI PENGOLAHAN AIR BERSIH MENGUNAKAN *HYBRID PETRI NET*

Tesis disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Magister Sains (M.Si.)
di
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

oleh:
DENY MURDIANTO
NRP. 1214 201 027

Tanggal Ujian : 20 Mei 2016
Periode Wisuda : September 2016

Disetujui oleh:


1. Dr. Dicky Adzkiya, S.Si., M.Si. (Pembimbing)
NIP. 19830517 200812 1 003


2. Dr. Subiono, M.S. (Penguji)
NIP. 19570411 198403 1 001


3. Dr. Mahmud Yunus, M.Si. (Penguji)
NIP. 19620407 198703 1 005


4. Prof. Dr. Erna Apriliani, M.Si. (Penguji)
NIP. 19660414 199102 2 001

Direktur Program Pascasarjana,



Prof. H. Djauhar Manfaat, M.Sc., Ph.D.
NIP. 19601202 198701 1 001

PEMODELAN INSTALASI PENGOLAHAN AIR BERSIH MENGUNAKAN *HYBRID PETRI NET*

Nama Mahasiswa : Deny Murdianto
NRP : 1214 201 027
Pembimbing : Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

ABSTRAK

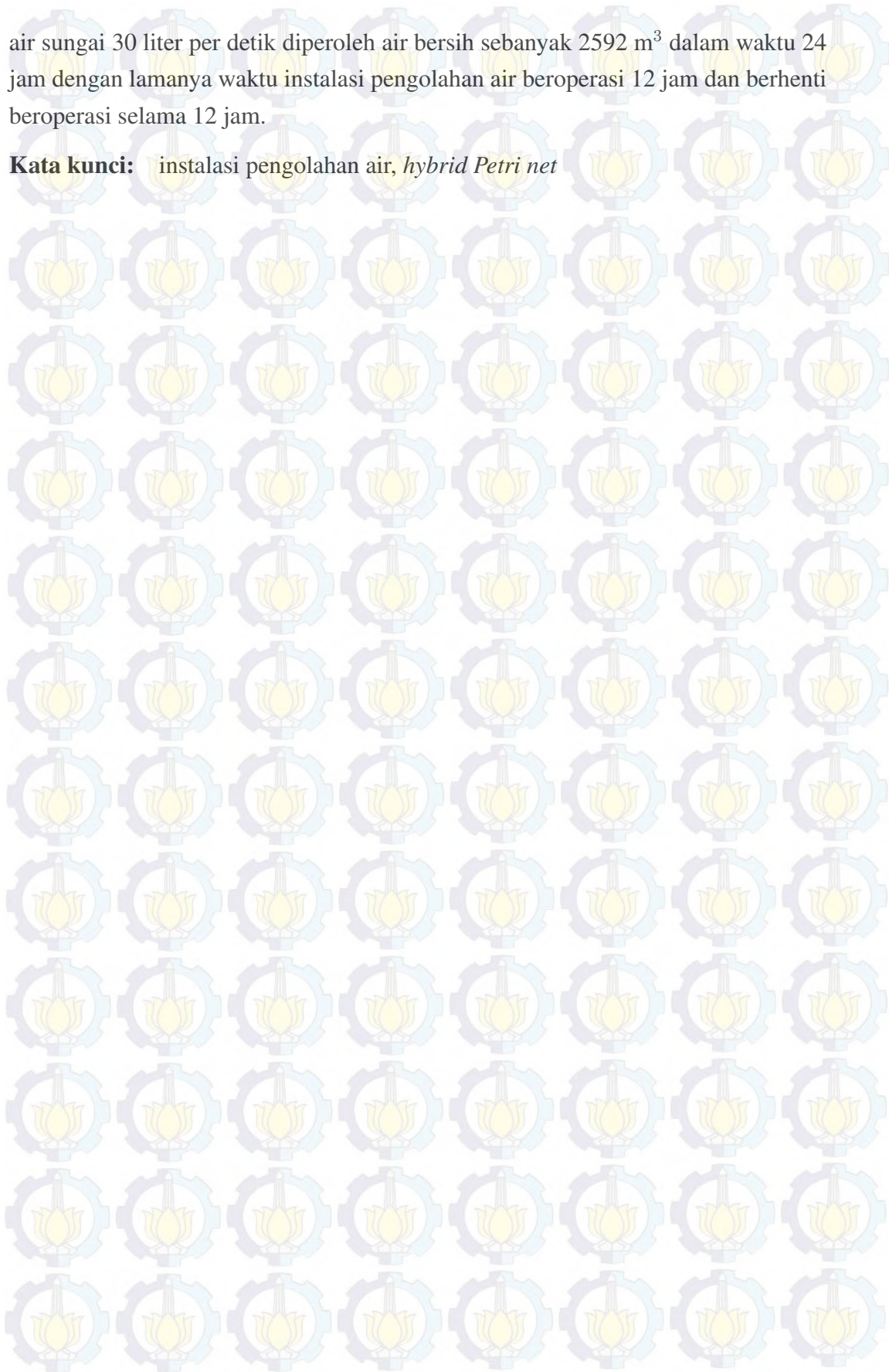
Unit instalasi pengolahan air memegang peranan penting bagi Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) untuk dapat menghasilkan air bersih bagi konsumen. Kualitas air bersih yang dihasilkan dan kontinuitas ketersediaan air bersih merupakan permasalahan yang harus diatasi PDAM demi terjaminnya proses distribusi air bersih kepada konsumen. Instalasi pengolahan air tidak dapat beroperasi secara terus-menerus tanpa berhenti. Suatu waktu instalasi pengolahan air harus berhenti beroperasi untuk mengistirahatkan pompa, selain itu bak-bak pengolahan juga perlu dibersihkan secara berkala agar kualitas air bersih yang dihasilkan dapat terjamin.

Sistem pengolahan air bersih merupakan sistem *event* diskrit yang dapat dimodelkan menggunakan *Petri net*. *Petri net* biasa menggunakan bilangan bulat positif untuk menggambarkan keadaan yang terjadi. Untuk sistem pengolahan air, selain dengan bilangan bulat positif juga diperlukan bilangan rasional positif untuk dapat merepresentasikan model dengan baik. Oleh karena itu, digunakan *hybrid Petri net* yang terdiri dari bagian diskrit dan bagian kontinu. Bagian diskrit yang menggunakan bilangan bulat positif untuk menyatakan keadaan digunakan untuk menggambarkan keadaan pompa. Bagian kontinu yang menggunakan bilangan rasional positif untuk menyatakan keadaan digunakan untuk menggambarkan volume yang tersedia di bak pengolahan dan volume air di bak pengolahan. Dengan menggunakan pendekatan *hybrid Petri net*, komponen yang ada dalam instalasi pengolahan air dapat disimulasikan untuk menentukan lamanya waktu instalasi pengolahan air beroperasi dan lamanya waktu instalasi pengolahan air berhenti beroperasi, sedemikian hingga air bersih yang dihasilkan tetap dapat memenuhi kebutuhan konsumen.

Pada studi kasus dengan debit air sungai 60 liter per detik diperoleh air bersih sebanyak 4536 m³ dalam waktu 24 jam dengan lamanya waktu instalasi pengolahan air beroperasi 21 jam dan berhenti beroperasi selama 3 jam. Kemudian dengan debit

air sungai 30 liter per detik diperoleh air bersih sebanyak 2592 m³ dalam waktu 24 jam dengan lamanya waktu instalasi pengolahan air beroperasi 12 jam dan berhenti beroperasi selama 12 jam.

Kata kunci: instalasi pengolahan air, *hybrid Petri net*



MODELING OF A WATER TREATMENT PLANT USING HYBRID PETRI NETS

Name : Deny Murdianto
NRP : 1214 201 027
Supervisor : Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si.

ABSTRACT

Water treatment plant unit plays an important role for the Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) to produce clean water for consumers. The quality and continuity supply of clean water is a problem that must be overcome for the sake of ensuring the process of water distribution to consumers. Water treatment plant cannot be operated continuously without stopping. One time the water treatment plant had to stop operating so that the pump can take a rest. Additionally, the processing tanks also need to be cleaned regularly so that the quality of water produced can be guaranteed.

Water treatment system is a discrete event system that can be modeled using Petri nets. Regular Petri nets use positive integers to describe the state. In water treatment systems, in addition to the positive integers, positive rational numbers are also required to be able to represent the water volume. Therefore, we use hybrid Petri net which comprises of a discrete and a continuous part. Discrete parts that use positive integers are used to describe the state of the pump. Continuous parts that use positive rational numbers are used to describe the available volume of the plant and the volume of water at the plant. By using hybrid Petri net approach, the components in the water treatment plant can be simulated to determine the active and inactive duration of the water treatment plant, such that the resulting clean water can still supply the needs of consumers.

In the case study, the river water flow is 60 liters per second. Clean water obtained is 4536 m³ within 24 hours, where the water treatment plant operates for 21 hours and stop operating for 3 hours. Then the case study with river water flow of 30 liters per second, the clean water obtained is 2592 m³ within 24 hours, where the water treatment plant operates for 12 hours and stopped operating for 12 hours.

Keywords: water treatment plant, hybrid Petri nets

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil'alamin, segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang memiliki semua ilmu dan karena limpahan rahmat, kasih sayang serta petunjuk-NYA penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul:

”Pemodelan Instalasi Pegolahan Air Bersih Menggunakan *Hybrid Petri Net*”

sebagai salah satu syarat kelulusan program Magister Matematika FMIPA ITS.

Penulisan tesis ini terselesaikan dengan baik atas bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Disampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu atas terselesaikannya tesis ini:

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si., M.T., selaku ketua jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
2. Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si., selaku ketua program studi Pascasarjana Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember
3. Bapak Dr. Dieky Adzkiya, S.Si., M.Si., selaku pembimbing tesis yang telah banyak membimbing, mengarahkan serta memberi petunjuk dan saran yang sangat berharga bagi penulisan tesis ini.
4. Bapak Ibu dosen serta seluruh staf Tenaga Kependidikan jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
5. Direktur beserta staf PDAM Kota Tarakan yang telah memberikan pendampingan, penjelasan, dan data-data yang diperlukan selama penelitian.
6. Kedua orang tua penulis, Bapak Misdi dan Ibu Riang Kustini yang selalu memberikan doa, kasih sayang, serta semangat dan motivasi selama pengerjaan tesis ini.
7. Istriku yang selalu setia mendampingi dan menjadi tempat penulis berkeluh kesah selama pengerjaan tesis ini.
8. Seluruh pihak yang telah memberikan saran, dukungan dan motivasi dalam menyelesaikan tesis ini.

Semoga Allah SWT senantiasa memberikan berkat dan anugrah yang berlimpah bagi beliau-beliau yang tersebut di atas. Sangat disadari dalam tesis ini terdapat banyak kekurangan, kesalahan dan jauh dari sempurna, oleh karena itu semua saran dan kritik penulis terima dengan lapang dada demi kesempurnaan penulisan tesis ini. Akhirnya harapan penulis semoga tesis ini bermanfaat bagi kita semua.

Surabaya, Mei 2016

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR SIMBOL	xix
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
BAB II DASAR TEORI DAN TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Sistem Pengolahan Air Bersih	5
2.1.1 <i>Intake</i>	5
2.1.2 <i>Water Treatment Plant</i>	5
2.1.3 <i>Reservoir</i>	7
2.2 <i>Hybrid Petri Net</i>	7
2.3 <i>Hybrid Petri Net</i> Berwaktu	10
BAB III METODE PENELITIAN	15
3.1 Tahapan Penelitian	15
3.2 Diagram Alir Penelitian	16
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	17
4.1 Pemodelan Instalasi Pengolahan Air Bersih Menggunakan <i>Hybrid Petri Net</i>	17

4.2	Penyederhanaan Model <i>Hybrid Petri Net</i> Dari Instalasi Pengolahan Air Bersih	23
4.3	Analisis Model <i>Hybrid Petri Net</i> Dari Instalasi Pengolahan Air Bersih	24
4.4	Contoh Kasus Model Instalasi Pengolahan Air Bersih Dengan <i>Hybrid Petri Net</i> Berwaktu	30
4.4.1	Debit sungai 60 liter/detik	31
4.4.2	Debit sungai 30 liter/detik	33
BAB V	Kesimpulan dan Saran	37
5.1	Kesimpulan	37
5.2	Saran	38

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Ilustrasi proses pengolahan air (Kania, 2009).....	6
Gambar 2.2	(a) <i>Hybrid Petri net</i> bertanda; (b) Graf <i>reachability</i>	9
Gambar 2.3	<i>Hybrid Petri net</i> berwaktu	11
Gambar 2.4	Graf evolusi	12
Gambar 2.5	Ruang <i>reachable</i>	12
Gambar 3.1	Diagram alir penelitian	16
Gambar 4.1	Instalasi pengolahan air Kampung Bugis (PDAM Kota Tarakan, 2015)	18
Gambar 4.2	Tampak atas bak flokulasi	19
Gambar 4.3	Penampang bak sedimentasi (Vipriyanti dan Suprpto, 2013)	19
Gambar 4.4	Model <i>hybrid Petri net</i> dari instalasi pengolahan air lengkap	21
Gambar 4.5	Penyederhanaan model <i>hybrid Petri net</i> dari instalasi pengolahan air	23
Gambar 4.6	Model <i>hybrid Petri net</i> dari instalasi pengolahan air	25
Gambar 4.7	Makro <i>marking</i>	27
Gambar 4.8	Makro <i>marking</i> lengkap	29
Gambar 4.9	HPN berwaktu IPA dengan debit sungai 60 liter/detik	31
Gambar 4.10	Grafik simulasi IPA dengan debit sungai 60 liter/detik	32
Gambar 4.11	HPN berwaktu IPA dengan debit sungai 30 liter/detik	34
Gambar 4.12	Grafik simulasi IPA dengan debit sungai 30 liter/detik	35



DAFTAR TABEL

Tabel 4.1	Makro <i>marking</i> dan representasi keadaan IPA	30
-----------	---	----

DAFTAR SIMBOL

P	Himpunan <i>place</i>
P_i	<i>Place</i> ke- i dari <i>Petri net</i>
P^D	Himpunan <i>place</i> diskrit
P^C	Himpunan <i>place</i> kontinu
T	Himpunan transisi
T_j	Transisi ke- j dari <i>Petri net</i>
T^D	Himpunan transisi diskrit
T^C	Himpunan transisi kontiu
$m(P_i)$ atau m_i	<i>Marking</i> dari <i>place</i> P_i
\mathbf{m} atau \mathbf{m}_k	<i>Marking</i> dari <i>Petri net</i>
\mathbf{m}_0	Keadaan awal dari <i>Petri net</i>
\mathbf{m}_l^*	<i>Makro marking</i> ke- l dari <i>Petri net</i>
Q	<i>Petri net</i> tak bertanda
R	<i>Petri net</i> bertanda: $R = \langle Q, \mathbf{m}_0 \rangle$
W	Matriks insiden
$Pre(P_i, T_j)$	Matriks <i>input</i> insiden
$Post(P_i, T_j)$	Matriks <i>output</i> insiden
s	Vektor pemfirean
${}^{\circ}P_i$	Himpunan transisi <i>input</i> dari <i>place</i> P_i
P_i°	Himpunan transisi <i>output</i> dari <i>place</i> P_i
${}^{\circ}T_j$	Himpunan <i>place input</i> dari transisi T_j
T_j°	Himpunan <i>place output</i> dari transisi T_j
$[T_j]^{\alpha}$	Pemfirean transisi T_j dengan kuantitas <i>fire</i> sebesar α
$\mathbf{m}_1 \xrightarrow{T_j} \mathbf{m}_2$	Pemfirean transisi T_j yang mengubah \mathbf{m}_1 ke \mathbf{m}_2

$\mathbf{m}_1 \xrightarrow{[T_j]^\alpha} \mathbf{m}_2$	Pemfirean transisi T_j dengan kuantitas <i>fire</i> sebesar α yang mengubah \mathbf{m}_1 ke \mathbf{m}_2
$D(T_j, \mathbf{m})$	Derajat <i>enable</i> dari transisi diskrit T_j untuk <i>marking</i> \mathbf{m}
$T(T_j, \mathbf{m})$	Derajat <i>enable</i> dari transisi kontinu T_j untuk <i>marking</i> \mathbf{m}
d_j	Waktu yang berkaitan dengan transisi diskrit T_j
U_j	<i>Flow rate</i> atau debit yang berkaitan dengan transisi kontinu T_j

BAB I

PENDAHULUAN

Pada bab ini dibahas latar belakang penelitian yang membahas tentang pengolahan air yang dilakukan Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) secara umum serta beberapa penelitian tentang instalasi pengolahan air. Kemudian dibahas beberapa penelitian tentang *hybrid Petri net* yang telah dilakukan beberapa peneliti. Berdasarkan uraian tersebut, dirumuskan masalah yang akan diteliti. Selanjutnya dituliskan batasan masalah, tujuan yang ingin dicapai, serta manfaat yang ingin diperoleh dari penelitian ini.

1.1 Latar Belakang

Kontinuitas aliran air bersih merupakan suatu hal yang harus bisa dijamin oleh Perusahaan Daerah Air Minum (PDAM) kepada setiap konsumen. Air bersih harus selalu tersedia untuk konsumen setiap saat. Ada tiga bagian penting yang harus diperhatikan untuk mengatasi masalah tersebut, yaitu ketersediaan air baku, proses pengolahan air bersih, dan proses distribusi. Ketersediaan air baku adalah hal pertama yang harus bisa dipastikan sebelum membangun sebuah instalasi pengolahan air. Air baku biasanya diperoleh dari aliran sungai dan waduk atau bendungan. PDAM harus bisa memperkirakan dan menganalisis ketersediaan air baku dengan perkembangan jumlah penduduk dan rencana pembukaan jaringan distribusi baru untuk jangka waktu tertentu. Jaringan distribusi harus dibuat sedemikian rupa sehingga mampu menjangkau dan melayani semua konsumen. Lamanya waktu pengolahan air merupakan suatu hal yang berpengaruh dalam proses distribusi air bersih kepada konsumen. Semakin lama waktu yang dibutuhkan, maka akan semakin lama juga air dapat dimanfaatkan oleh konsumen. Oleh karena itu dibutuhkan performa yang maksimal agar air bersih yang diproduksi dapat memenuhi standar kualitas air bersih dengan waktu yang minimum.

Pengolahan air yang dilakukan oleh PDAM terdiri dari beberapa proses, seperti pengolahan air pada umumnya. Setiap proses pengolahan dilakukan pada bak penampungan yang berbeda. Secara umum terdapat enam bak dalam sistem pengolahan air bersih, yaitu bak air baku, bak koagulasi, bak flokulasi, bak sedimentasi, bak filtrasi, dan bak air bersih/*reservoir*. Masing-masing bak pengolahan memiliki kapasitas dan lamanya waktu pengolahan yang berbeda. Pompa-pompa yang

digunakan dalam instalasi pengolahan air juga memiliki keterbatasan waktu dalam pengoperasiannya. Setiap komponen yang saling berkaitan tersebut harus didesain sedemikian rupa sehingga dapat mengolah air baku dan menghasilkan air bersih sesuai dengan kebutuhan konsumen.

Beberapa peneliti telah melakukan penelitian tentang instalasi pengolahan air di beberapa tempat berbeda. Penelitian yang dilakukan biasanya mengevaluasi performa dari instalasi pengolahan air, salah satunya adalah (Arifiani dan Hadiwidodo, 2007) yang melakukan uji kualitas air berdasarkan parameter tertentu. (Wu, 2013) dan (Mostafa, dkk, 2015) menggunakan teori optimasi dalam penelitian mereka mengenai instalasi pengolahan air dalam hal yang berbeda. (Wu, 2013) menggunakan teori optimasi untuk desain bangunan instalasi pengolahan air yang optimal, sedangkan (Mostafa, dkk, 2015) menggunakan teori optimasi untuk meminimumkan biaya operasional tahunan dari suatu instalasi pengolahan air.

Instalasi pengolahan air tidak bisa beroperasi secara terus-menerus karena sewaktu-waktu bak-bak pengolahan harus dikosongkan dan dibersihkan dari flok-flok air. Apabila flok-flok air yang terbentuk telah banyak, maka akan menghambat debit air di bak-bak pengolahan dan mempengaruhi kualitas air bersih yang dihasilkan. Oleh karena itu, perlu diketahui lamanya waktu pengoperasian yang tepat sehingga air bersih yang dihasilkan sesuai dengan kebutuhan pelanggan dalam jangka waktu tertentu.

Sistem pengolahan air bersih merupakan sistem *event* diskrit yang dapat dimodelkan menggunakan *Petri net*. Pada *Petri net*, *event* berkaitan dengan transisi. Agar suatu *event* dapat terjadi, beberapa keadaan harus dipenuhi terlebih dahulu. Informasi mengenai *event* dan keadaan ini masing-masing dinyatakan dengan transisi dan *place*. *Place* dapat berfungsi sebagai *input* atau *output* suatu transisi. *Place* sebagai *input* menyatakan keadaan yang harus dipenuhi agar transisi dapat terjadi. Setelah transisi terjadi maka keadaan akan berubah. *Place* yang menyatakan keadaan tersebut adalah *output* dari transisi (Subiono, 2015).

Petri net biasa menggunakan bilangan bulat positif untuk menggambarkan keadaan yang terjadi. Untuk sistem pengolahan air, selain dengan bilangan bulat positif juga diperlukan bilangan rasional positif untuk dapat merepresentasikan model dengan baik. Oleh karena itu, digunakan *hybrid Petri net* yang terdiri dari bagian diskrit dan bagian kontinu. Bagian diskrit yang menggunakan bilangan bulat positif untuk menyatakan keadaan digunakan untuk menggambarkan keadaan pompa. Bagian kontinu yang menggunakan bilangan rasional positif untuk menyatakan keadaan digunakan untuk menggambarkan kapasitas bak pengolahan dan volume air di bak pengolahan.

Pemodelan dan analisis menggunakan *hybrid Petri net* telah dilakukan oleh (Ghomri dan Alla, 2007) dengan menyajikan model *Petri net* kontinu yang diperoleh dari *Petri net* diskrit melalui proses *fluidification* pada *marking*. Kemudian disajikan dua model *hybrid Petri net* untuk persoalan *hybrid dynamic systems*, yaitu model deterministik dan non deterministik. *Hybrid Petri net* juga telah digunakan oleh (Gudino, dkk, 2011) untuk memodelkan dan mensimulasikan sistem distribusi air. Metodologi yang diusulkan untuk membangun *hybrid Petri net* adalah dengan menurunkan himpunan persamaan massa dan persamaan energi yang menentukan perilaku distribusi air. Sebuah teknik simulasi untuk menentukan *firing speed* suatu transisi ditetapkan dari konservasi pelinearan persamaan energi.

Berdasarkan latar belakang tersebut, pada penelitian ini akan dibahas pemodelan instalasi pengolahan air bersih menggunakan *hybrid Petri net*. *Hybrid Petri net* yang mengandung bagian diskrit dan kontinu dipilih karena dirasa mampu untuk memodelkan permasalahan ini. Token pada bagian diskrit yang berupa bilangan bulat positif akan digunakan untuk menggambarkan keadaan beroperasi atau tidak beroperasinya suatu pompa, sedangkan *marking* pada bagian kontinu yang berupa bilangan rasional positif akan digunakan untuk menggambarkan volume air di bak-bak pengolahan dan kapasitas bak pengolahan. Model *hybrid Petri net* dari instalasi pengolahan air yang diperoleh akan dianalisis menggunakan makro *marking* untuk mengetahui keadaan yang dapat dicapai/*reachable*. Selanjutnya dibuat studi kasus model *hybrid Petri net* dari instalasi pengolahan air dengan menggunakan *hybrid Petri net* berwaktu.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana memodelkan instalasi pengolahan air dengan menggunakan *hybrid Petri net*?
2. Bagaimana menganalisis makro *marking* model *hybrid Petri net* dari instalasi pengolahan air?
3. Bagaimana menentukan volume air bersih yang dihasilkan dengan *hybrid Petri net* berwaktu untuk beberapa contoh kasus?

1.3 Batasan Masalah

Permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini dibatasi pada instalasi pengolahan air konvensional di PDAM Kampung Bugis Kota Tarakan.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mendapatkan model *hybrid Petri net* dari instalasi pengolahan air.
2. Mendapatkan makro *marking* untuk model *hybrid Petri net* dari instalasi pengolahan air.
3. Mendapatkan volume air bersih yang dihasilkan instalasi pengolahan air bersih dengan menggunakan *hybrid Petri net* berwaktu.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Dapat dijadikan contoh penggunaan *hybrid Petri net* untuk memodelkan suatu sistem.
2. Dapat digunakan sebagai bahan masukan bagi PDAM untuk menentukan lamanya waktu pengoperasian instalasi pengolahan air.

BAB II

DASAR TEORI DAN TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, akan dijelaskan mengenai sistem pengolahan air bersih yang berisi penjelasan tentang bagian-bagian dari proses pengolahan air, yaitu bak-bak pengolahan yang harus dilalui air baku hingga menjadi air bersih siap konsumsi. Kemudian akan dijelaskan juga mengenai *hybrid Petri net* dan *hybrid Petri net* berwaktu yang akan digunakan untuk memodelkan instalasi pengolahan air bersih.

2.1 Sistem Pengolahan Air Bersih

PDAM biasanya melakukan pengolahan secara fisika dan kimiawi dalam proses penyediaan air bersih. Secara umum, terdapat tiga bagian penting dalam sistem pengolahannya (Kania, 2009).

2.1.1 Intake

Bangunan *intake* berfungsi sebagai bangunan pertama untuk masuknya air dari sumber air. Pada umumnya, sumber air untuk pengolahan air bersih, diambil dari sungai. Pada bangunan *intake* terdapat *bar screen* yang berfungsi untuk menyaring benda-benda yang ikut tergenang dalam air. Selanjutnya, air akan masuk ke dalam sebuah bak yang nantinya akan dipompa ke bangunan selanjutnya, yaitu *Water Treatment Plant* (WTP).

2.1.2 Water Treatment Plant

Water Treatment Plant (WTP) adalah bangunan utama pengolahan air bersih. Biasanya bangunan ini terdiri dari empat bagian, yaitu: bak koagulasi, bak flokulasi, bak sedimentasi, dan bak filtrasi.

Koagulasi

Dari bangunan intake, air akan dipompa ke bak koagulasi. Pada proses koagulasi dilakukan proses destabilisasi partikel koloid, karena pada dasarnya air sungai atau air-air kotor biasanya berbentuk koloid dengan berbagai partikel koloid yang terkandung di dalamnya. Destabilisasi partikel koloid ini bisa dengan penambahan bahan kimia berupa tawas, ataupun dilakukan secara fisik dengan *rapid mixing* (pengadukan cepat), hidrolis (terjunan atau *hydrolic jump*), maupun secara mekanis (menggunakan batang pengaduk). Biasanya pada WTP dilakukan dengan cara hidrolis berupa *hydrolic jump*. Lamanya proses adalah 30-90 detik.

Flokulasi

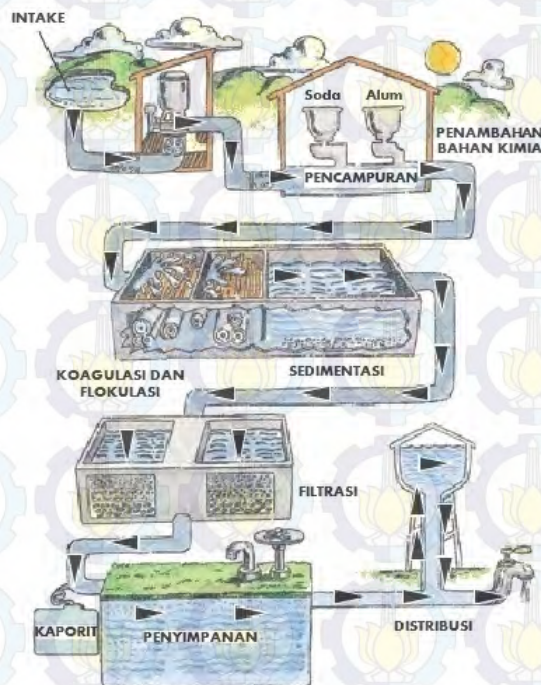
Setelah dari unit koagulasi, selanjutnya air akan masuk ke dalam unit flokulasi. Unit ini ditujukan untuk membentuk dan memperbesar flok. Teknisnya adalah dengan dilakukan pengadukan lambat (*slow mixing*).

Sedimentasi

Setelah melewati proses destabilisasi partikel koloid melalui unit koagulasi dan unit flokulasi, selanjutnya perjalanan air akan masuk ke dalam unit sedimentasi. Unit ini berfungsi untuk mengendapkan partikel-partikel koloid yang sudah didestabilisasi oleh unit sebelumnya. Unit ini menggunakan prinsip berat jenis. Berat jenis partikel koloid (biasanya berupa lumpur) akan lebih besar daripada berat jenis air. Dalam bak sedimentasi, akan terpisah antara air dan lumpur.

Filtrasi

Setelah proses sedimentasi, proses selanjutnya adalah filtrasi, dilakukan secara gravitasi. Unit filtrasi ini, sesuai dengan namanya, adalah untuk menyaring dengan media berbutir. Media berbutir ini biasanya terdiri dari antrasit, pasir silica, dan kerikil silica dengan ketebalan berbeda. Untuk proses tambahan, dilakukan disinfeksi berupa penambahan chlor, ozonisasi, UV, pemabasan, dan lain-lain sebelum masuk ke bangunan selanjutnya, yaitu reservoir.



Gambar 2.1: Ilustrasi proses pengolahan air (Kania, 2009)

2.1.3 Reservoir

Setelah dari WTP dan berupa *clear water*, sebelum didistribusikan, air masuk ke dalam *reservoir*. *Reservoir* ini berfungsi sebagai tempat penampungan sementara air bersih sebelum didistribusikan melalui pipa-pipa secara gravitasi. Karena kebanyakan distribusi menggunakan gravitasi, maka *reservoir* biasanya diletakkan di tempat dengan elevasi lebih tinggi daripada tempat-tempat yang menjadi sasaran distribusi.

Gabungan dari unit-unit pengolahan air ini disebut Instalasi Pengolahan Air (IPA) seperti yang ditunjukkan Gambar 2.1. Untuk menghemat biaya pembangunan, biasanya *Intake*, WTP, dan *Reservoir* dibangun dalam satu kawasan dengan ketinggian yang cukup tinggi, sehingga tidak diperlukan *pumping station* dengan kapasitas pompa dorong yang besar untuk menyalurkan air dari WTP ke *reservoir*. Dari *reservoir* air bersih siap untuk didistribusikan melalui pipa-pipa dengan berbagai ukuran ke tiap daerah distribusi.

2.2 Hybrid Petri Net

Penjelasan mengenai *hybrid Petri net* dijelaskan melalui beberapa definisi berikut:

Definisi 1. Sebuah *hybrid Petri net* bertanda adalah 6-tuple

$$R = \langle P, T, Pre, Post, \mathbf{m}_0, h \rangle \quad (2.1)$$

dimana, P adalah himpunan *place* yang berhingga dan merupakan himpunan tak kosong, T adalah himpunan transisi yang berhingga dan merupakan himpunan tak kosong, $Pre : P \times T \rightarrow Q^+$ atau N adalah fungsi *input incidence*, $Post : P \times T \rightarrow Q^+$ atau N adalah fungsi *output incidence*, $\mathbf{m}_0 : P \rightarrow R^+$ atau N , adalah *marking* awal, $h = P \cup T \rightarrow \{D, C\}$, disebut fungsi *hybrid* yang menggambarkan sebuah *node* adalah kontinu (himpunan P^C dan T^C atau $C - place$ dan $C - transisi$) atau diskrit (himpunan P^D dan T^D atau $D - place$ dan $D - transisi$).

Fungsi Pre dan $Post$ harus memenuhi kriteria sebagai berikut: untuk setiap *place* $P_i \in P^D$ dan transisi $T_j \in T^C$, maka $Pre(P_i, T_j) = Post(P_i, T_j)$.

Definisi 2. Sebuah transisi diskrit di *hybrid Petri net* adalah *enable* jika setiap *place* *input* P_i dari transisi T_j memenuhi kondisi dimana

$$m(P_i) \geq Pre(P_i, T_j) \quad (2.2)$$

Derajat *enable* dari transisi diskrit T_j untuk *marking* \mathbf{m} , dinotasikan oleh q atau $q(T_j, \mathbf{m})$ adalah bilangan bulat q dimana:

$$q \leq \min_{i:P_i \in {}^\circ T_j} \left(\frac{m(P_i)}{Pre(P_i, T_j)} \right) < q + 1 \quad (2.3)$$

Jika $q > 0$, transisi T_j adalah *enable*, dikatakan $q - enable$

Definisi 3. Sebuah transisi kontinu di *hybrid Petri net* adalah *enable* jika setiap *place input* P_i dari transisi T_j memenuhi kondisi dimana

$$m(P_i) \geq Pre(P_i, T_j), \text{ jika } P_i \text{ adalah D-place} \quad (2.4)$$

atau

$$m(P_i) > 0, \text{ jika } P_i \text{ adalah C-place.} \quad (2.5)$$

Derajat *enable* dari transisi kontinu T_j untuk *marking* \mathbf{m} , dinotasikan oleh q atau $q(T_j, \mathbf{m})$ adalah bilangan *real* q dimana:

$$q = \min_{i:P_i \in {}^\circ T_j} \left(\frac{m(P_i)}{Pre(P_i, T_j)} \right) \quad (2.6)$$

Jika $q > 0$, transisi T_j adalah *enable*, dikatakan $q - enable$

Definisi 4. Sebuah makro *marking* untuk *hybrid Petri net* adalah himpunan *marking* $m^* = (m^D, m^{C*})$ dimana:

1. *marking* m^D adalah *marking* dari bagian diskrit atau makro *marking* dari bagian diskrit jika bagian diskrit tidak terbatas.
2. *marking* m^C adalah makro *marking* dari bagian kontinu.

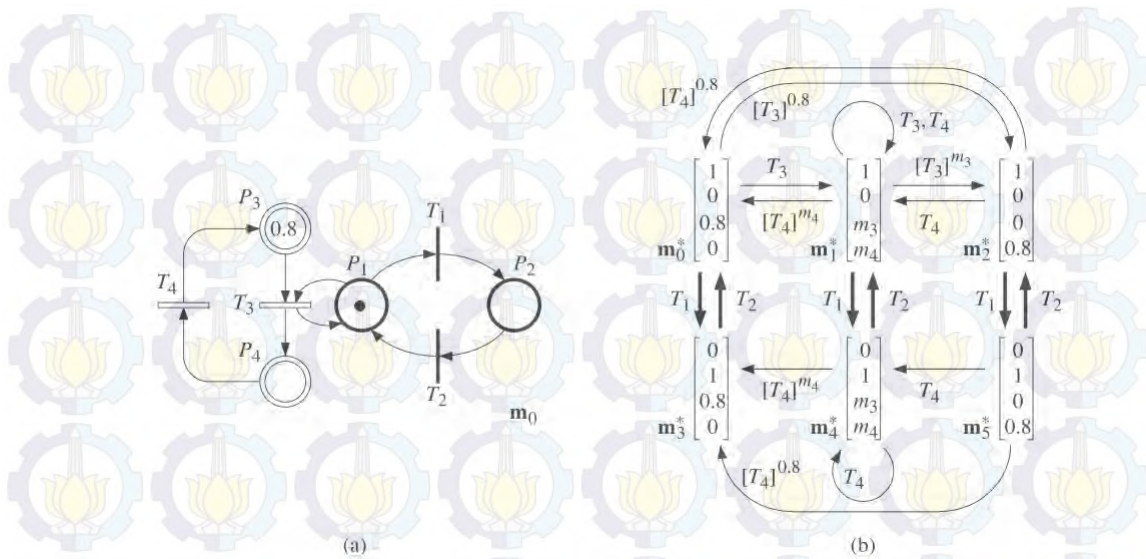
Dalam *hybrid Petri net* perubahan makro *marking* akan mengakibatkan perubahan himpunan transisi *enable* atau derajat *enable* dari D-transisi, dapat terjadi hanya jika sebuah *event* salah satu jenis berikut terjadi.

C1-event: *marking* dari C-place bertanda menjadi nol

C2-event: C-place tak bertanda menjadi bertanda

D1-event: *Firing* dari D-transisi

D2-event: derajat *enable* dari D-transisi berubah karena *marking* dari C-place



Gambar 2.2: (a) *Hybrid Petri net* bertanda; (b) Graf *reachability*

Diberikan contoh *Petri net* (David dan Alla, 2010) pada Gambar 2.2. Himpunan *place* dari *Petri net* tersebut adalah $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, dimana P_1 dan P_2 merupakan *place* diskrit dan P_3 dan P_4 merupakan *place* kontinu. Dalam *Petri net* tersebut terdapat 4 transisi yaitu $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$, T_1 dan T_2 merupakan transisi diskrit dan T_3 dan T_4 merupakan transisi kontinu. Dari gambar *Petri net* tersebut juga dapat kita ketahui bahwa *marking* awal $m_0 = (1, 0, 0.8, 0)$, dimana $m^D = (1, 0)$ dan $m^C = (0.8, 0)$.

Dari *marking* awal tersebut dapat diketahui bahwa transisi T_1 dan T_3 *enable* pada keadaan awal. Apabila transisi T_1 *difire* maka T_3 menjadi tidak *enable* dan token pada P_1 berpindah ke P_2 , dalam keadaan ini hanya transisi T_2 yang *enable*. Kemudian apabila transisi T_2 *difire* maka *marking* akan kembali ke *marking* awal.

Di lain sisi apabila dari keadaan awal, transisi yang *difire* adalah transisi T_3 maka kita harus mengetahui terlebih dahulu besarnya kuantitas *fire* yang dapat dilakukan, yaitu sebesar 0.8. Apabila transisi T_3 *difire* dengan kuantitas *fire* 0.8 maka *marking* pada *place* P_3 menjadi nol dan *marking* sebesar 0.8 terdapat di *place* P_4 , sedangkan pada *place* P_1 tidak terjadi perubahan token karena *place* P_1 merupakan *place input* sekaligus *place output* dari transisi T_3 . Perubahan *marking* dari masing-masing *place* sesuai dengan besarnya kuantitas *fire* dapat dilihat pada Gambar 2.2 (b). Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa terdapat enam makro *marking*, yaitu $m_0^*, m_1^*, m_2^*, m_3^*, m_4^*, m_5^*$.

Persamaan fundamental untuk komputasi dari perubahan *marking* adalah sama untuk model *Petri net* diskrit, yaitu $m_{i+1} = m_i + W \cdot s$, dimana m_i adalah

vektor untuk *marking* ke- i , W adalah matriks *incidence*, $W = Post - Pre$, dan s adalah vektor pemfirean, dimana setiap elemen adalah kuantitas *fire* dari setiap transisi. Vektor m_{i+1}, m_i, s dapat berupa bilangan *real* atau bilangan bulat positif, dan elemen matriks W dapat berupa bilangan rasional atau bilangan bulat positif. Dari Petri net Gambar 2.2 (a) tersebut kita dapat memperoleh matriks *incidence* W dengan terlebih dahulu mencari fungsi *Pre* dan *Post* sebagai berikut:

$$Pre = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Post = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

maka,

$$W = Post - Pre = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2.3 Hybrid Petri Net Berwaktu

Penjelasan mengenai *hybrid Petri net* berwaktu akan dijelaskan melalui beberapa definisi berikut:

Definisi 5. Sebuah *hybrid Petri net* berwaktu adalah pasangan $\langle R, Tempo \rangle$, dimana: R adalah *hybrid Petri net* bertanda dan $Tempo$ adalah fungsi yang memetakan himpunan transisi T ke himpunan bilangan rasional positif atau nol:

1. Jika $T_j \in T^D$, $d_j = tempo(T_j) =$ waktu yang terkait dengan transisi T_j .
2. Jika $T_j \in T^C$, $U_j = \frac{1}{tempo(T_j)} =$ laju alir yang terkait dengan transisi T_j .

Definisi 6. Derajat *D-enable* dari *C*-transisi T_j untuk *marking* \mathbf{m} , dinotasikan dengan $D(T_j, \mathbf{m})$, adalah derajat *enable* dari T_j setelah semua busur dari *C-place* untuk *C*-transisi telah dihapus. Kemudian,

$$D(T_j, \mathbf{m}) = \min_{P_i \in {}^\circ T_j \cup P^D} \left[\frac{m_i}{Pre(P_i, T_j)} \right] \quad (2.7)$$

Definisi 7. Dalam *hybrid Petri net* berwaktu:

- a. laju alir U_j terkait dengan transisi T_j berkoresponden ke *maximal speed* jika derajat *D-enable*-nya adalah satu.
- b. *Maximal firing speed* dari transisi T_j adalah hasil kali dari laju alir dengan derajat *D-enable*:

$$V_j = U_j \cdot D(T_j, \mathbf{m}) \quad (2.8)$$

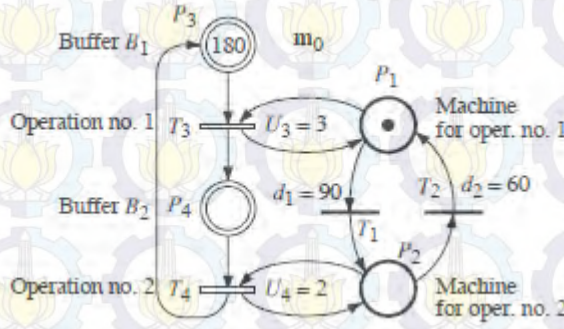
Definisi 8. Di *hybrid Petri net* berlaku:

- a. C-Transisi T_j tak langsung di *hybrid Petri net* adalah *enable* saat t jika

$$D(T_j, \mathbf{m}(t)) > 0, \text{ dan } m_i(t) > 0 \text{ untuk setiap } P_i \in {}^\circ T_j \cap P^C \quad (2.9)$$

Jika transisi T_j *enable*, transisi T_j adalah *strongly enable* jika $m_i(t) > 0$ untuk setiap *place* $P_i \in {}^\circ T_j \cap P^C$, dan *weakly enable* untuk lainnya.

- b. C-Transisi T_j langsung di *hybrid Petri net* adalah *weakly enable* saat t jika $D(T_j, \mathbf{m}(t)) > 0$, dan semua *place* $P_i \in {}^\circ T_j \cap P^C$ dimana $m_i(t) = 0$ sehingga $I_i(t) > 0$

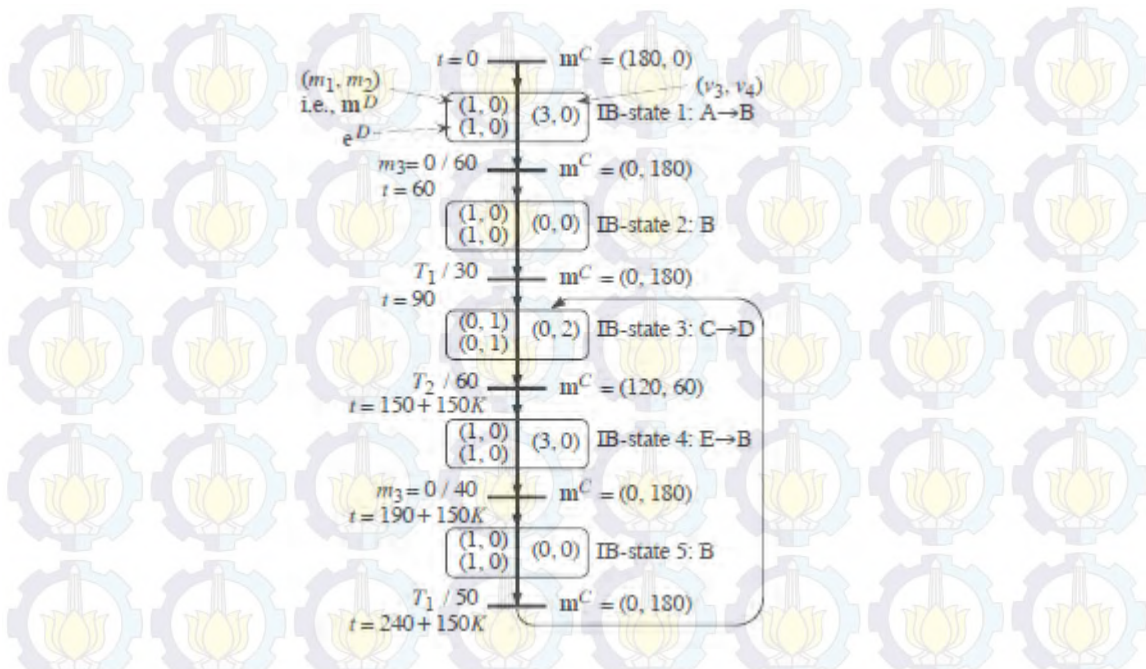


Gambar 2.3: *Hybrid Petri net* berwaktu

Gambar 2.3 merupakan contoh dari *hybrid Petri net* berwaktu (David dan Alla, 2010). Pada *hybrid Petri net* tersebut terdapat himpunan *place* $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$. Himpunan *place* diskrit dan kontinu adalah $P^D = \{P_1, P_2\}$ dan $P^C = \{P_3, P_4\}$. Begitu juga himpunan transisi, yaitu $T = \{T_1, T_2, T_3, T_4\}$, $T^D = \{T_1, T_2\}$ dan $T^C = \{T_3, T_4\}$. *Marking* awal adalah $\mathbf{m}_0 = (\mathbf{m}_0^D, \mathbf{m}_0^C)$ dimana $\mathbf{m}_0^D = (1, 0)$ dan $\mathbf{m}_0^C = (180, 0)$. Waktu yang berkaitan dengan transisi diskrit adalah $d_1 = 90$ dan $d_2 = 60$ dan *flow rate* yang berasosiasi dengan transisi kontinu adalah $U_3 = 3$ dan $U_4 = 2$.

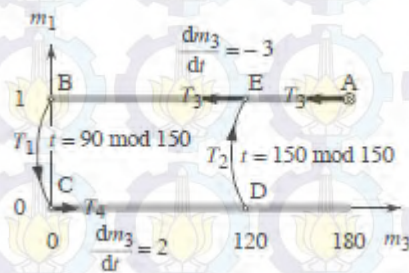
Evolusi dari *hybrid Petri net* dapat dianalisis dengan graf evolusi di Gambar 2.4.

Graf ini terdiri dari IB-state (perilaku invarian) dan transisi diantaranya. IB-state adalah *marking* bagian diskrit dan vektor *instantaneous speed* dari bagian kontinu selama IB-state yang sama. IB-state 1 di Gambar 2.4 berkaitan dengan perilaku dari keadaan awal di Gambar 2.3. *Marking* dari bagian diskrit adalah $\mathbf{m}^D = (m_1, m_2) = (1, 0)$ dan vektor *instantaneous speed* adalah $(v_3, v_4) = (3, 0)$, transisi T_3 *strongly enable* dan transisi T_4 tidak *enable* karena $m_2 = 0$. *Marking* kontinu berubah secara



Gambar 2.4: Graf evolusi

kontinu dan linier selama sistem ini dalam IB-state, saat $t = 60$, m_3 menjadi nol dan transisi T_3 tidak bisa difire lagi. Selama IB-state 1, \mathbf{m}^C berubah secara kontinu dari $(180, 0)$ menuju ke $(0, 180)$, ditunjukkan oleh titik A ke titik B dari Gambar 2.5. Selama m_3 mencapai nilai 0, saat $t = 60$, yaitu titik B Gambar 2.5, marking membuat nilai yang sama, yaitu $v_3 = v_4 = 0$; IB-state 2.



Gambar 2.5: Ruang *reachable*

Event selanjutnya adalah pemfirean T_1 , terjadi saat $t = 90$. Di Gambar 2.5, ditunjukkan oleh titik B ke titik C. Saat $t = 90$, T_4 menjadi *strongly enable* dan $v_4 = V_4 = U_4 = 2$. Perilaku ini sesuai dengan IB-state 3. Dari IB-state 2 ke IB-state 3 dilambangkan dengan $T_1/30$ di Gambar 2.4, yang berarti bahwa Pemfirean T_1 terjadi 30 satuan waktu setelah waktu ketika IB-state 2 dicapai. IB-state 3 sesuai dengan evolusi dari titik C ke titik D di Gambar 2.5.

Event selanjutnya adalah pemfirean T_2 , terjadi saat $t = 90 + 60 = 150$ (yaitu sebelum m_4 menjadi nol). Di Gambar 2.5, ditunjukkan oleh perpindahan dari titik D ke titik E. Saat $t = 150$, T_4 menjadi tidak *enable* sementara T_3 menjadi *enable*. Perilaku ini sesuai dengan IB-state 4, yaitu evolusi dari titik E ke titik B di Gambar 2.5 dan seterusnya.

Perilaku ini berkala, periode sesuai dengan IB-state 3, 4, dan 5 pada Gambar 2.4 (K adalah jumlah periode ini telah dilakukan). IB-state 5 mirip dengan IB-state 2, kecuali ia tidak memiliki durasi yang sama (karena waktu yang tersisa untuk pemfirean T_1 tidak sama ketika kedua IB-state tercapai).

Untuk *hybrid Petri net* tanpa waktu dan kecepatan *fire* yang sesuai dengan Gambar 2.3, ruang *reachable* sesuai dengan dua segmen abu-abu dari garis pada Gambar 2.5. Untuk *hybrid Petri net* berwaktu pada Gambar 2.3, ruang *reachable* lebih kecil, yaitu segmen garis di sisi kanan dari titik D tidak pernah tercapai.

BAB III METODE PENELITIAN

Pada bab ini diuraikan langkah-langkah penelitian yang dilakukan untuk mencapai tujuan penelitian.

3.1 Tahapan Penelitian

Tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Studi literatur

Pada tahap ini dikumpulkan informasi mengenai instalasi pengolahan air dan *hybrid Petri net*. Informasi-informasi tersebut akan didapatkan dari buku, jurnal ilmiah, dan artikel yang terkait dengan instalasi pengolahan air dan *hybrid Petri net*.

2. Observasi dan pengumpulan data

Observasi dilakukan untuk mendapatkan gambaran umum proses pengolahan air dengan menggunakan instalasi pengolahan air konvensional. Selanjutnya dilakukan pengumpulan data yang dibutuhkan untuk memodelkan instalasi pengolahan air, yaitu besarnya kapasitas bak pengolahan dan lamanya waktu pengisian bak pengolahan.

3. Konstruksi model

Setelah mempelajari model *hybrid Petri net* dan mendapatkan data penelitian, desain instalasi pengolahan air akan dikonstruksi ke model *hybrid Petri net*.

4. Penyederhanaan model

Model *hybrid Petri net* dari instalasi pengolahan air disederhanakan untuk mendapatkan *hybrid Petri net* yang lebih sederhana. Penyederhanaan model dilakukan karena model yang sederhana sudah mampu merepresentasikan model *hybrid Petri net* lengkap dan memudahkan analisis makro *marking*.

5. Analisis makro *marking*

Model *hybrid Petri net* dari instalasi pengolahan air yang telah diperoleh kemudian dianalisis menggunakan makro *marking* untuk mengetahui keadaan yang mungkin dicapai/*reachable*.

6. Contoh Kasus

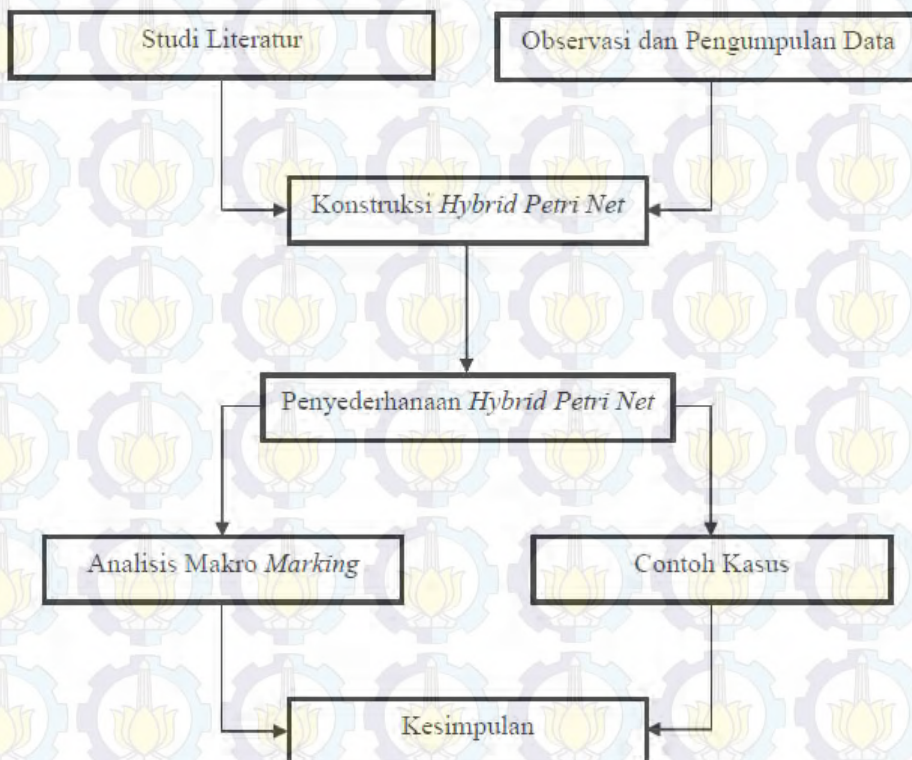
Selanjutnya diberikan contoh kasus untuk mendapatkan volume air bersih yang dihasilkan instalasi pengolahan air dengan menggunakan *hybrid Petri net* berwaktu.

7. Menyusun Laporan

Tahap terakhir adalah penyusunan laporan yang berisi hasil-hasil yang diperoleh dan kesimpulan dalam penelitian ini.

3.2 Diagram Alir Penelitian

Berikut merupakan gambar diagram alir penelitian ini.



Gambar 3.1: Diagram alir penelitian

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas model *hybrid Petri net* (HPN) dari instalasi pengolahan air (IPA). Akan dijelaskan secara singkat gambaran umum IPA yang dikelola PDAM Kota Tarakan, kemudian akan dijelaskan IPA yang akan dimodelkan dalam tesis ini. Selanjutnya akan dikonstruksi model HPN dari IPA. Kemudian untuk mempermudah analisis makro *marking* dari HPN, *Petri net* akan disederhanakan. Selanjutnya akan dibuat contoh kasus dengan menggunakan HPN berwaktu.

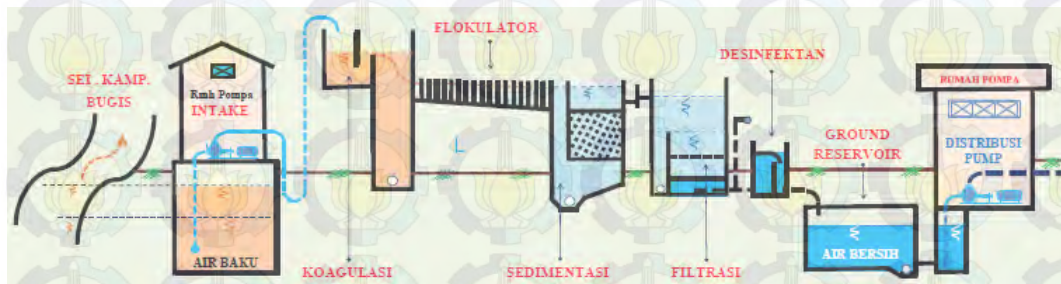
4.1 Pemodelan Instalasi Pengolahan Air Bersih Menggunakan *Hybrid Petri Net*

Instalasi pengolahan air (IPA) yang dikelola oleh PDAM Kota Tarakan mempunyai kapasitas total 900 liter/detik yang terdapat di empat lokasi berbeda, yaitu IPA Kampung Bugis, IPA Persemaian, IPA Kampung Satu, dan IPA Juata Laut. Namun, karena keterbatasan ketersediaan air baku dan kendala teknis lainnya PDAM Kota Tarakan hanya mampu memproduksi air bersih sekitar 366.52 liter/detik. Bangunan IPA yang dimiliki PDAM Kota Tarakan ada dua jenis, yaitu IPA konvensional dan IPA paket fiber. Pada penelitian ini IPA yang akan dimodelkan adalah IPA konvensional yang terdapat di Kampung Bugis.

IPA Kampung Bugis menggunakan air baku yang berasal dari Sungai Kampung Bugis dan Embung Binalatung. Air baku yang berasal dari Sungai Kampung Bugis langsung dimanfaatkan dengan cara membuat bak *intake* di samping aliran sungai dengan posisi yang lebih rendah dari sungai, sehingga aliran air akan selalu dapat tertampung di bak *intake* tersebut dengan debit 30-60 liter/detik. Sedangkan air baku yang berasal dari Embung Binalatung dimanfaatkan secara situasional ketika debit Sungai Kampung Bugis berkurang dengan cara memompa terlebih dahulu air yang tersedia di *intake* Embung Binalatung ke *reservoir* bukit yang terletak di Gunung Selatan.

IPA Kampung Bugis mempunyai kapasitas produksi 120 liter/detik dari dua IPA, yaitu IPA konvensional dan IPA paket fiber. IPA konvensional dan IPA paket fiber masing-masing mempunyai kapasitas produksi 60 liter/detik. Perbedaan dari kedua IPA ini terletak pada perbedaan struktur bangunan, material bangunan, jangka waktu ketahanan bangunan, luas lahan yang dibutuhkan, perawatan instalasi,

dan nilai investasi. Pada penelitian ini akan dimodelkan IPA konvensional pada Gambar 4.1. IPA konvensional dipilih karena proses pengolahan air dan struktur bangunan IPA dapat dilihat dengan jelas. Hal ini tidak memungkinkan untuk IPA paket fiber karena struktur bangunannya mengakibatkan kita tidak dapat melihat proses pengolahan air secara langsung.



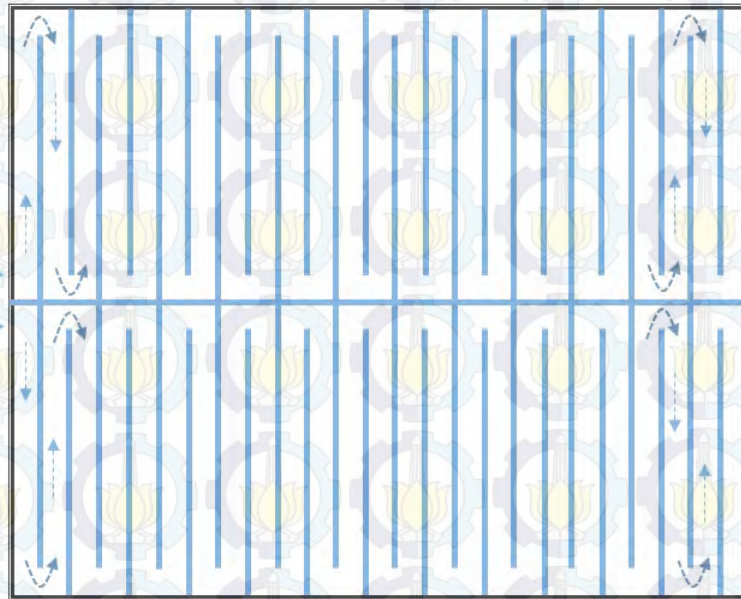
Gambar 4.1: Instalasi pengolahan air Kampung Bugis (PDAM Kota Tarakan, 2015)

Pada Gambar 4.1 terdapat pompa yang terletak di bak *intake* dan bak *reservoir*. Pompa ini hanya dapat digunakan jika terdapat air pada masing-masing bak tersebut, sebaliknya jika tidak terdapat air maka pompa tidak dioperasikan. Kemudian terdapat tujuh bak yang digunakan untuk mengambil air baku, mengolah air baku dan menyimpan air bersih, yaitu bak *intake*, bak koagulasi, bak flokulasi, bak sedimentasi, bak filtrasi, bak desinfektan, dan bak *ground reservoir*. Masing-masing bak tersebut mempunyai ukuran dan fungsi yang berbeda.

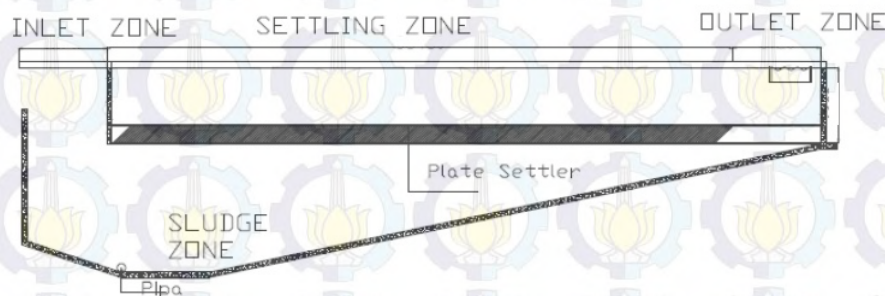
Bak *intake* merupakan bak pertama yang harus dilalui air baku yang akan diolah menjadi air bersih, ukuran bak ini sekitar 64 m^3 . Setelah terdapat air di bak *intake*, maka pompa dapat dioperasikan. Kemudian air dari bak *intake* ini dipompa ke bak koagulasi. Di bak koagulasi air baku dicampur dengan bahan kimia yang telah ditentukan konsentrasinya terlebih dahulu sebelum proses pengolahan air berlangsung. Penambahan bahan kimia ini menggunakan pipa kecil yang terletak di bagian atas bak koagulasi. Volume bak koagulasi ini adalah 24 m^3 . Dengan menggunakan beda tinggi air selanjutnya menuju ke bak flokulasi. Di dalam bak ini terdapat sekat-sekat berjarak sekitar 10 cm sehingga air akan mengalir secara *zig-zag* dan perlahan sehingga membentuk flok. Volume air yang mampu tertampung dalam bak flokulasi ini sekitar 44.5 m^3 .

Selanjutnya air akan masuk ke bak sedimentasi, di IPA ini bak sedimentasi dibagi menjadi tiga bak dengan ukuran yang sama, yaitu sebesar 33 m^3 . Namun di dalam bak sedimentasi ini terdapat *tube settler* yang digunakan untuk memisahkan kotoran flok yang telah terbentuk di bak sebelumnya dengan air bersih, sehingga

volume air yang dapat tertampung di bak ini hanya sekitar 25 m³.



Gambar 4.2: Tampak atas bak flokulasi



Gambar 4.3: Penampang bak sedimentasi (Vipriyanti dan Suprpto, 2013)

Kemudian air akan mengalir ke bak filtrasi dengan menggunakan beda tinggi dari bak sebelumnya. Terdapat empat bak filtrasi dengan ukuran yang sama yaitu sebesar 37.5 m³. Di bak ini terjadi proses penyaringan air dengan menggunakan batu koral, pasir silika, dan karbon aktif. Selanjutnya air dari bak filtrasi akan mengalir ke bak desinfektan yang mempunyai volume relatif lebih kecil dibandingkan dengan bak-bak pengolahan lainnya yaitu sebesar 18 m³. Di bak desinfektan air hasil pengolahan ditambahkan lagi dengan bahan kimia untuk menjamin kualitas air hasil pengolahan. Air bersih hasil pengolahan selanjutnya disimpan di

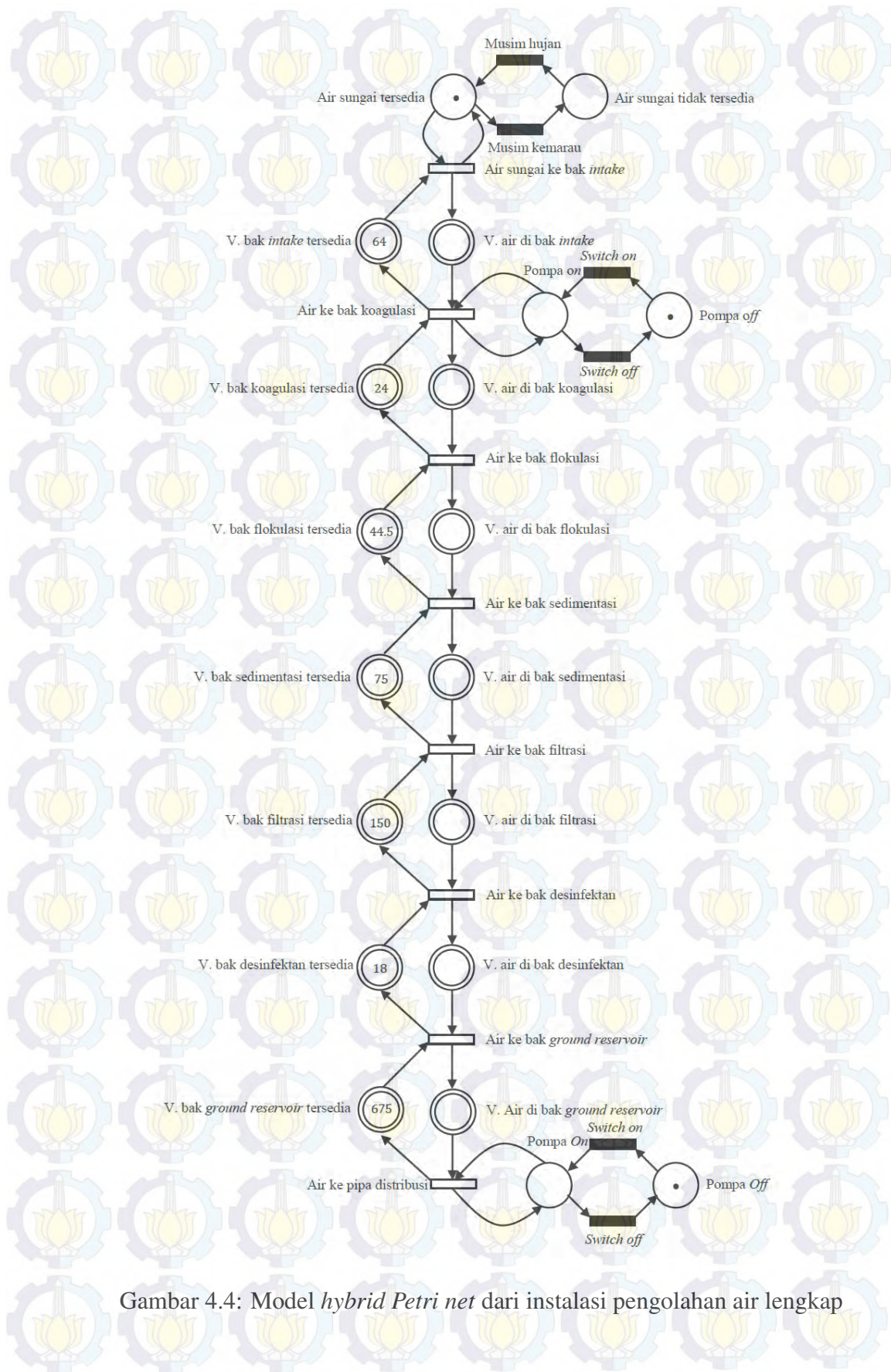
bak *ground reservoir*. Bak *ground reservoir* ini terbagi menjadi dua bagian dengan volume total 675 m³.

Pada bak *ground reservoir* terdapat pompa distribusi yang digunakan untuk mendistribusikan air bersih ke konsumen. Ada dua cara yang digunakan PDAM Kota Tarakan untuk mendistribusikan air bersih, yaitu dengan metode langsung dan metode tidak langsung. Metode langsung dilakukan dengan cara mengalirkan langsung air bersih dari *ground reservoir* ke pipa konsumen. Metode tidak langsung dilakukan dengan cara memompa terlebih dahulu air bersih dari bak *ground reservoir* ke bak *elevated reservoir* yang terletak di Gunung Karang Anyar agar memiliki gaya tekan yang lebih besar untuk selanjutnya dialirkan ke rumah konsumen.

Berdasarkan Gambar 4.1 dan prosedur pengolahan air yang telah dijelaskan, akan dikonstruksi HPN dengan enam *place* diskrit, enam transisi diskrit, empat belas *place* kontinu, dan delapan transisi kontinu. Bagian diskrit dari *Petri net* akan digunakan untuk menggambarkan ketersediaan air di sungai dan keadaan pompa. *Place* menggambarkan ketersediaan air sungai dan keadaan *on/off* dari pompa, sedangkan transisi menggambarkan *event* yang dapat membuat air sungai tersedia atau tidak tersedia dan *switch* yang dapat merubah keadaan pompa dari *on* menjadi *off* dan sebaliknya. Bagian kontinu dari *Petri net* akan digunakan untuk menggambarkan keadaan bak-bak pengolahan air. *Place* digunakan untuk menggambarkan volume air dalam bak pengolahan dan volume yang masih tersedia dalam bak pengolahan. Sedangkan transisi digunakan untuk menggambarkan perpindahan air dari satu bak pengolahan ke bak pengolahan lainnya.

Berdasarkan Gambar 4.4 himpunan *place* dapat dibagi menjadi dua, yaitu himpunan *place* yang bernilai nol dan himpunan *place* yang bernilai lebih besar dari nol. Himpunan *place* diskrit yang bernilai (token) nol adalah *place-place* yang menyatakan air sungai dalam keadaan tidak tersedia (kering) dan pompa dalam keadaan *on*, sedangkan himpunan *place* diskrit yang bernilai (token) lebih besar dari nol adalah *place-place* yang menyatakan air sungai dalam keadaan tersedia dan pompa dalam keadaan *off*. Berdasarkan gambar, token yang terdapat di *place* "Air sungai tersedia" berarti bahwa terdapat air sungai yang dapat digunakan sebagai air baku. Kemudian, token yang terdapat di *place* "Pompa *off*" adalah satu. Hal ini mempunyai arti bahwa terdapat masing-masing satu pompa di bak *intake* dan bak *ground reservoir* yang sedang dalam kondisi *off* atau dapat diartikan bahwa instalasi pengolahan air sedang dalam keadaan tidak beroperasi.

Selanjutnya untuk bagian kontinu, himpunan *place* yang bernilai (*marking*) nol adalah *place-place* yang menyatakan volume air di bak *intake*, bak pengo-



Gambar 4.4: Model *hybrid Petri net* dari instalasi pengolahan air lengkap

lahan, dan bak *ground reservoir*. *Marking* yang bernilai nol pada *place-place* ini menyatakan bahwa tidak terdapat air di semua bak instalasi pengolahan air pada keadaan awal. Kemudian himpunan *place* yang bernilai (*marking*) lebih besar dari nol adalah *place-place* yang menyatakan volume yang tersedia dari masing-masing bak. Artinya masing-masing bak dapat diisi air sebanyak volume tersedia tersebut. *Marking* awal pada masing-masing *place* tersebut juga merepresentasikan besarnya kapasitas/*volume* setiap bak pada instalasi pengolahan air.

Himpunan *place* kontinu yang menyatakan volume tersedia pada bak pengolahan digunakan untuk membatasi volume air yang dapat terisi di masing-masing bak pengolahan, sehingga jumlah masing-masing pasangan *place* haruslah sama dengan nilai *marking* awal. Pada bak *sedimentasi* misalnya, volume bak *sedimentasi* yang tersedia pada keadaan awal adalah 75 m^3 . Maka jumlah *marking* dari *place* "V. bak *sedimentasi* tersedia" dan *place* "V. air di bak *sedimentasi*" haruslah selalu sama dengan 75.

Himpunan transisi diskrit pada Gambar 4.4 menyatakan perubahan keadaan sungai dan *switch* yang dapat mengubah keadaan pompa dari keadaan *off* menjadi *on* dan sebaliknya. Pada keadaan awal, transisi *enable* adalah transisi "Musim kemarau" yang apabila *difire* akan mengubah keadaan air di sungai dari keadaan tersedia menjadi tidak tersedia. Selain itu, transisi yang *enable* pada keadaan awal adalah transisi *switch on* yang apabila *difire* akan mengubah pompa dari keadaan *off* menjadi *on*. Jika pompa dalam keadaan *on* maka transisi selanjutnya yang *enable* adalah transisi *switch off*. Kemudian apabila transisi ini *difire* akan mengubah pompa dari keadaan *on* menjadi *off*.

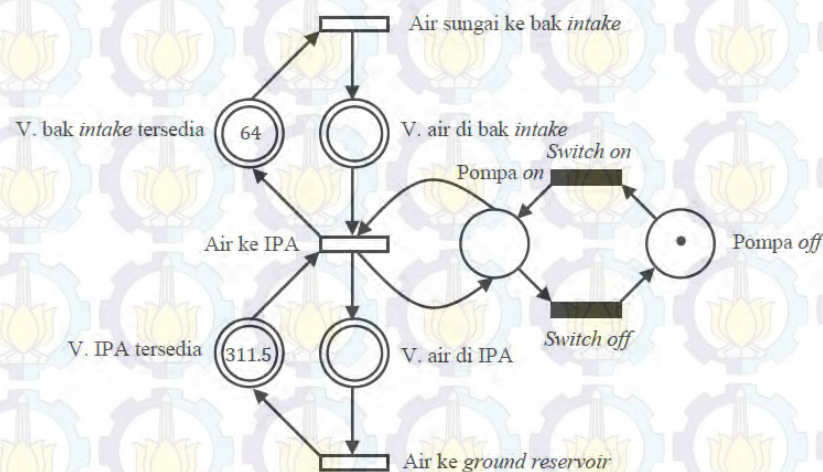
Himpunan transisi kontinu pada Gambar 4.4 menyatakan perpindahan air dari satu bak ke bak lainnya pada instalasi pengolahan air. Pada keadaan awal transisi *enable* adalah transisi pertama yang memindahkan/mengalirkan air sungai ke bak *intake*. Pada keadaan awal transisi lainnya tidak *enable* karena belum ada *marking* pada *place input* dari masing-masing transisi tersebut. Transisi akan *enable* jika semua *place input* dari transisi itu mempunyai nilai (*marking*). Transisi "Air ke bak filtrasi" misalnya, akan *enable* jika terdapat *marking* di *place* "V. air di bak *sedimentasi*" dan *place* "V. bak filtrasi tersedia". Pada kondisi nyata hal ini menjelaskan bahwa air dapat berpindah ke bak filtrasi apabila terdapat air di bak sebelumnya atau bak *sedimentasi* dan masih ada volume tersedia di bak filtrasi itu sendiri.

Pemfirean/*firing* dari setiap transisi *enable* untuk transisi diskrit hanya dapat dilakukan satu kali. Pada keadaan awal misalnya, terdapat satu token di *place* "Pompa *off*" sehingga transisi "Switch *on*" *enable*. Transisi ini hanya bisa *difire*

satu kali yang mengakibatkan satu token berpindah dari *place* "Pompa off" ke *place* "Pompa on". Hal ini tidak berlaku untuk transisi kontinu. Setiap transisi kontinu yang *enable* dapat di*fire* sesuai dengan kuantitas *fire* yang ditentukan. Misal pada keadaan awal, transisi "Air sungai ke bak intake" di*fire* dengan kuantitas *fire* sebesar 0.5. Maka terjadi pengurangan *marking* sebesar 0.5 pada *place* "V. bak intake tersedia" dan terjadi penambahan *marking* sebesar 0.5 pada *place* "V. air di bak intake". Sehingga *marking* di *place* "V. bak intake tersedia" menjadi 63.5 dan *marking* di *place* "V. air di bak intake" menjadi 0.5.

4.2 Penyederhanaan Model *Hybrid Petri Net* Dari Instalasi Pengolahan Air Bersih

Analisis dari HPN yang telah diperoleh akan sulit dilakukan karena memuat banyak *place* dan transisi. Oleh karena itu akan dilakukan penyederhanaan model untuk memudahkan analisis makro *marking*. Bagian pengolahan akan dijadikan satu *place* karena memiliki perilaku yang sama, yaitu bak koagulasi, bak flokulasi, bak sedimentasi, bak filtrasi, dan bak desinfektan. Bak-bak pengolahan tersebut akan dijadikan satu *place* dengan nama *place* "Instalasi Pengolahan Air (IPA)". Kemudian bak penampungan air bersih/*ground reservoir* tidak diperhatikan lagi sehingga HPN dari IPA menjadi seperti berikut.



Gambar 4.5: Penyederhanaan model *hybrid Petri net* dari instalasi pengolahan air

HPN ini terdiri dari dua transisi diskrit, tiga transisi kontinu, dua *place* diskrit, dan empat *place* kontinu. Pada keadaan awal diasumsikan bahwa IPA sedang dalam keadaan *off* atau belum beroperasi sehingga dari *marking* dapat dilihat bahwa

keadaan pompa di bak *intake* dalam keadaan *off*. Begitu juga bak *intake* dan di bak IPA yang masih dalam keadaan nol, yang berarti belum ada air yang diolah. Volume bak *intake* tersedia adalah sama dengan HPN sebelumnya yaitu 64 m^3 dan volume IPA tersedia adalah gabungan dari volume bak-bak pengolahan tersedia, yaitu 311.5 m^3 .

4.3 Analisis Model *Hybrid Petri Net* Dari Instalasi Pengolahan Air Bersih

Pada bagian ini akan digunakan makro *marking* untuk menganalisa HPN yang telah disederhanakan. Dengan menggunakan makro *marking* kita dapat melihat kemungkinan yang dapat terjadi pada IPA. Selanjutnya akan digunakan simbol-simbol sebagai berikut.

$P_1 = \text{Pompa on}$

$P_2 = \text{Pompa off}$

$P_3 = \text{Kapasitas air dalam bak intake}$

$P_4 = \text{Volume air dalam bak intake}$

$P_5 = \text{Kapasitas air di IPA}$

$P_6 = \text{Volume air di IPA}$

$T_1 = \text{Switch on pompa}$

$T_2 = \text{Switch off pompa}$

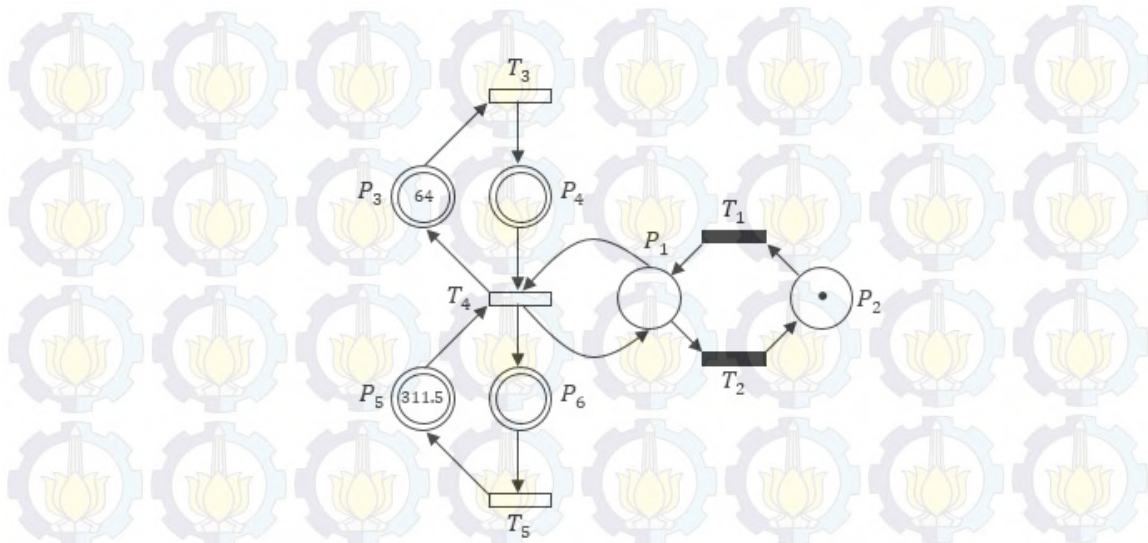
$T_3 = \text{Air baku dari sungai menuju ke bak intake}$

$T_4 = \text{Air dari bak intake menuju ke IPA}$

$T_5 = \text{Air dari IPA menuju ke bak ground reservoir}$

Himpunan *place* $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$, dapat dibagi menjadi himpunan *place* diskrit $P^D = \{P_1, P_2\}$ dan himpunan *place* kontinu $P^C = \{P_3, P_4, P_5, P_6\}$. Himpunan transisi $T = \{T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$, dapat dibagi menjadi himpunan transisi diskrit $T^D = \{T_1, T_2\}$ dan himpunan transisi kontinu $T^C = \{T_3, T_4, T_5\}$. Keadaan awal dapat dilihat dari token yang terdapat pada *place* diskrit dan *marking* yang terdapat pada *place* kontinu sebagai berikut.

$$m^D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$



Gambar 4.6: Model *hybrid Petri net* dari instalasi pengolahan air

$$m^C = \begin{bmatrix} 64 \\ 0 \\ 311.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(64 \ 0 \ 311.5 \ 0 \right)^T$$

Makro *marking* yang merupakan gabungan dari bagian diskrit dan kontinu adalah sebagai berikut.

$$\mathbf{m}_0^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 64 \\ 0 \\ 311.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(0 \ 1 \ 64 \ 0 \ 311.5 \ 0 \right)^T$$

Selanjutnya dapat juga diketahui matriks *input* dan *output* insiden sebagai berikut.

$$Pre = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Post = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks *Pre* dan *Post* maka matriks bobot dapat dihitung sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
W &= Post - Pre \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Untuk mengetahui transisi *enable* pada keadaan awal digunakan Definisi 2 dan Definisi 3. Definisi 2 digunakan untuk mengetahui *enable* atau tidaknya transisi diskrit, yaitu harus memenuhi $m(P_i) \geq Pre(P_i, T_j)$. Transisi diskrit dalam HPN ini adalah transisi T_1 dan transisi T_2 . *Place input* untuk transisi T_1 adalah *place* P_2 , sehingga $m(P_2) \geq Pre(P_2, T_1)$ harus dipenuhi, sedangkan *place input* untuk transisi T_2 adalah *place* P_1 , sehingga $m(P_1) \geq Pre(P_1, T_2)$ harus dipenuhi. Berdasarkan perhitungan, untuk transisi T_1 tidak memenuhi persamaan karena $m(P_2) \not\geq Pre(P_2, T_1)$, yaitu $0 \not\geq 1$, sedangkan untuk transisi T_2 , memenuhi persamaan $m(P_1) \geq Pre(P_1, T_2)$, yaitu $1 \geq 0$. Maka transisi diskrit yang *enable* pada keadaan awal adalah transisi T_2 .

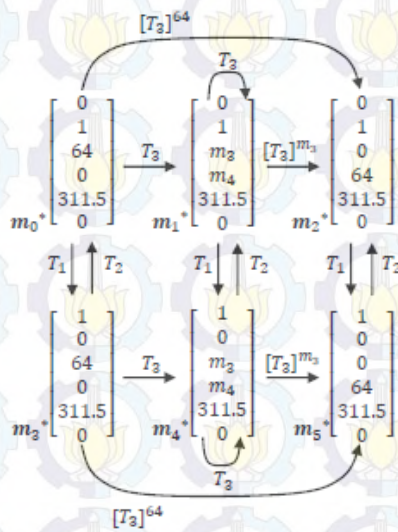
Selanjutnya digunakan Definisi 3 untuk mengetahui *enable* atau tidaknya transisi kontinu. Transisi kontinu dalam HPN ini adalah $T^C = \{T_3, T_4, T_5\}$. *Place input* untuk transisi T_3 adalah *place* P_3 , yang merupakan *place* kontinu sehingga $m(P_3) > 0$ harus dipenuhi. Karena $m(P_3) = 64 > 0$ maka pada keadaan awal transisi T_3 *enable*. *Place input* untuk transisi T_4 adalah *place* P_1, P_4 dan P_5 . Untuk mengetahui *enable* atau tidaknya transisi ini harus memenuhi syarat, $m(P_1) \geq Pre(P_1, T_4)$, $m(P_4) > 0$ dan $m(P_5) > 0$. Transisi T_4 tidak *enable* karena hanya satu syarat yang dipenuhi, yaitu $m(P_5) = 311.5 > 0$. Sedangkan syarat lainnya tidak dipenuhi, yaitu $m(P_1) = 0 \not\geq 1 = Pre(P_1, T_4)$ dan $m(P_4) = 0 \not> 0$. Selanjutnya transisi T_5 , yang memiliki *place input* P_6 . Transisi ini *enable* jika $m(P_6) > 0$. Karena pada keadaan awal $m(P_6) = 0$ maka transisi T_5 tidak *enable*.

Pada keadaan awal transisi *enable* yang dapat *difire* adalah transisi diskrit T_1 dan transisi kontinu T_3 . Apabila transisi diskrit *difire* maka akan terjadi perpindahan token dari *place* P_2 ke *place* P_1 , sehingga terjadi perubahan keadaan dari $\mathbf{m}_0^* = (0 \ 1 \ 64 \ 0 \ 311.5 \ 0)^T$ menjadi $\mathbf{m}_3^* = (1 \ 0 \ 64 \ 0 \ 311.5 \ 0)^T$. Dengan menggunakan rumus perubahan *marking*, \mathbf{m}_3^* diperoleh dari $\mathbf{m}_0^* + W \cdot s$, dimana $s = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ merupakan matriks yang menyatakan pemfirean transisi T_1 dengan kuantitas *fire* bernilai satu.

$$\mathbf{m}_3^* = \mathbf{m}_0^* + W \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 64 \\ 0 \\ 311.5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 64 \\ 0 \\ 311.5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sedangkan jika dari keadaan awal transisi yang *difire* adalah transisi kontinu T_3 maka terdapat dua kemungkinan, yaitu $\mathbf{m}_1^* = (0 \ 1 \ m_3 \ m_4 \ 311.5 \ 0)^T$ yang berarti terdapat air di bak *intake* namun tidak sampai melebihi kapasitas sehingga masih dapat dilakukan pemfirean atau pengisian bak dan $\mathbf{m}_2^* = (0 \ 1 \ 0 \ 64 \ 311.5 \ 0)^T$ yang berarti bak *intake* dalam keadaan penuh dan tidak dapat diisi lagi atau transisi T_3 menjadi tidak *enable*. Berikut ini adalah graf *reachability* yang mungkin terjadi dari keadaan awal jika transisi yang *difire* adalah T_1 dan T_3 .



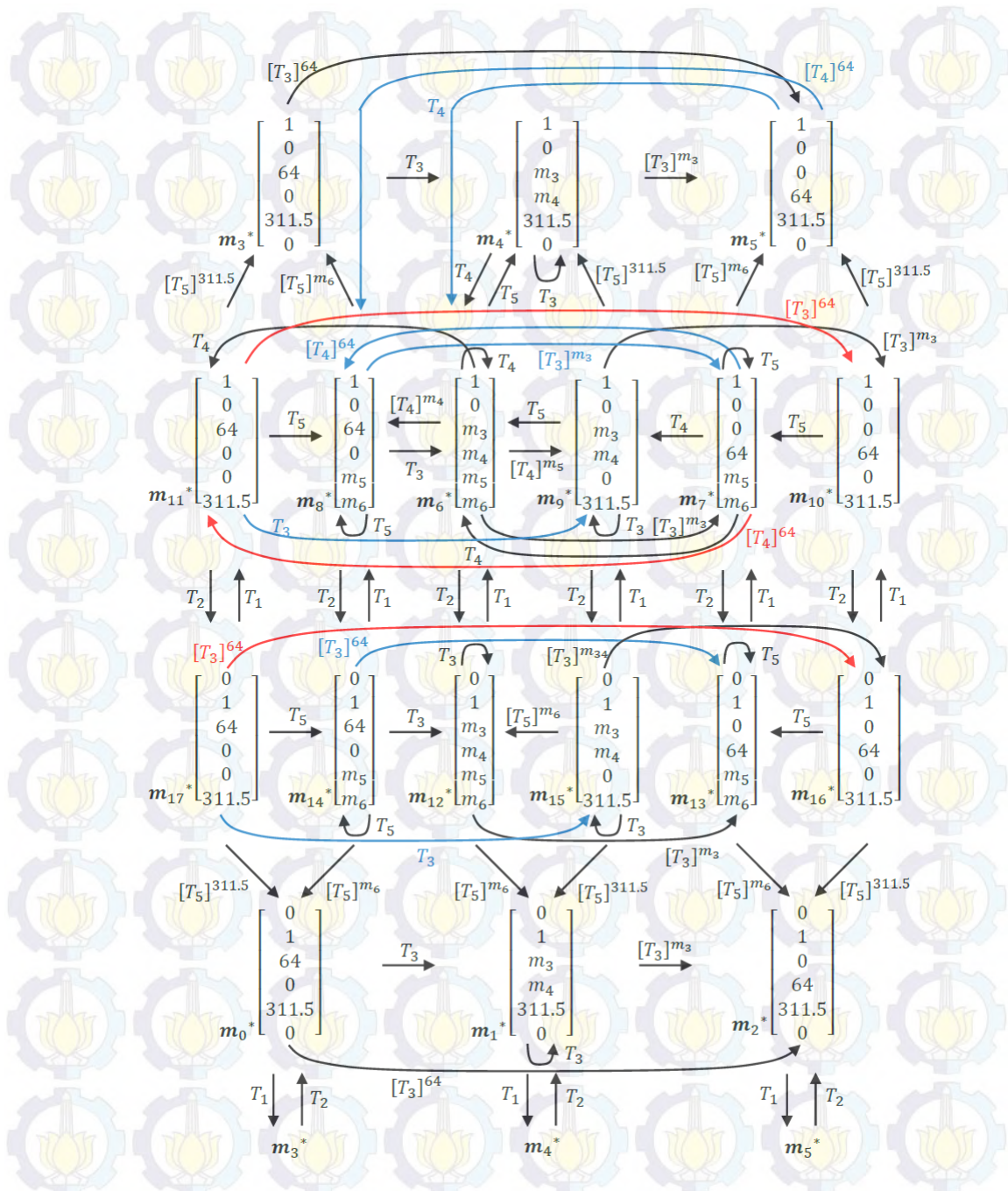
Gambar 4.7: Makro *marking*

Berdasarkan Gambar 4.7 dapat diketahui bahwa makro *marking* \mathbf{m}_0^* , \mathbf{m}_1^* , dan \mathbf{m}_2^* menunjukkan token pada bagian diskrit berada pada *place* P_2 , hal ini mengakibatkan transisi T_4 menjadi tidak *enable* saat \mathbf{m}_0^* , \mathbf{m}_1^* dan \mathbf{m}_2^* . Keadaan ini mempunyai arti bahwa pompa pada bak *intake* dalam posisi *off*, sehingga air di bak *intake* tidak dapat dialirkan ke bak IPA. Perubahan dari \mathbf{m}_0^* ke \mathbf{m}_1^* , \mathbf{m}_0^* ke \mathbf{m}_2^* , dan \mathbf{m}_1^* ke \mathbf{m}_2^* menunjukkan perpindahan air dari sungai ke bak *intake* atau dengan kata lain pengisian bak *intake*. Makro *marking* \mathbf{m}_0^* adalah saat bak *intake* dalam kondisi kosong, makro *marking* \mathbf{m}_1^* adalah saat bak *intake* dalam kondisi terisi sebagian, dan makro *marking* \mathbf{m}_2^* adalah saat bak *intake* dalam kondisi penuh. Hal yang sama juga terjadi pada makro *marking* \mathbf{m}_3^* , \mathbf{m}_4^* , dan \mathbf{m}_5^* , dimana terjadi pengisian bak *intake* dari keadaan kosong (\mathbf{m}_3^*), sebagian (\mathbf{m}_4^*), dan penuh (\mathbf{m}_5^*). Bedanya adalah token bagian diskrit yang berada pada *place* P_1 . Hal ini membuat transisi T_4 menjadi *enable* ketika \mathbf{m}_4^* dan \mathbf{m}_5^* , yang berarti bahwa air dari bak *intake* dapat dialirkan atau dipompa ke bak IPA.

Berdasarkan Gambar 4.7 dapat dilihat juga bahwa makro *marking* terbagi menjadi tiga bagian, yaitu makro *marking* \mathbf{m}_0^* dan \mathbf{m}_3^* , \mathbf{m}_1^* dan \mathbf{m}_4^* , serta \mathbf{m}_2^* dan \mathbf{m}_5^* . Makro *marking* \mathbf{m}_0^* dan \mathbf{m}_3^* menunjukkan bahwa *marking* pada *place* P_3 bernilai 64 dan *marking* pada *place* P_4 bernilai 0 yang artinya bak *intake* dalam keadaan kosong. Makro *marking* \mathbf{m}_1^* dan \mathbf{m}_4^* menunjukkan bahwa *marking* pada *place* P_3 bernilai m_3 dan *marking* pada *place* P_4 bernilai m_4 , serta harus memenuhi $m_3 + m_4 = 64$. Keadaan ini menunjukkan bahwa bak *intake* terisi sebagian. Makro *marking* \mathbf{m}_2^* dan \mathbf{m}_5^* menunjukkan bahwa *marking* pada *place* P_3 bernilai 0 dan *marking* pada *place* P_4 bernilai 64 yang artinya bak *intake* terisi penuh.

Makro *marking* pada Gambar 4.7 sebenarnya masih bisa diperluas lagi, yaitu pada saat \mathbf{m}_4^* dan \mathbf{m}_5^* . Ketika \mathbf{m}_4^* dan \mathbf{m}_5^* dicapai, transisi T_4 menjadi *enable*. Misal, dari keadaan \mathbf{m}_4^* selain dapat menuju ke \mathbf{m}_5^* , juga dapat menuju ke \mathbf{m}_6^* jika transisi yang *difire* adalah transisi T_4 . Gambar 4.8 merupakan makro *marking* lengkap yang dapat dicapai/*reachable* dari model HPN IPA. Terdapat delapan belas keadaan yang mungkin terjadi dengan kombinasi keadaan pompa (*on* atau *off*) dan keadaan bak (kosong, terisi sebagian, dan terisi penuh).

Berdasarkan Gambar 4.8 terdapat dua bagian yang sama pada makro *marking*, yaitu $\mathbf{m}_6, \mathbf{m}_7, \mathbf{m}_8, \mathbf{m}_9, \mathbf{m}_{10}, \mathbf{m}_{11}$ dan $\mathbf{m}_{12}, \mathbf{m}_{13}, \mathbf{m}_{14}, \mathbf{m}_{15}, \mathbf{m}_{16}, \mathbf{m}_{17}$. Hal yang membedakan dari kedua himpunan makro *marking* tersebut hanyalah keadaan pompa. Pada himpunan pertama pompa dalam keadaan *on*, sedangkan pada himpunan kedua pompa dalam kondisi *off*. Makro *marking* yang sama tersebut yaitu, \mathbf{m}_6 dan \mathbf{m}_{12} , \mathbf{m}_7 dan \mathbf{m}_{13} , \mathbf{m}_8 dan \mathbf{m}_{14} , \mathbf{m}_9 dan \mathbf{m}_{15} , \mathbf{m}_{10} dan \mathbf{m}_{16} , \mathbf{m}_{11} dan \mathbf{m}_{17} .



Gambar 4.8: Makro *marking* lengkap

Gambar 4.8 merupakan perluasan dari Gambar 4.7. Oleh karena itu, kita perlu melihat Gambar 4.7 sebelum memahami himpunan makro *marking* pada Gambar 4.8. Himpunan makro *marking* di Gambar 4.7 terdapat pada bagian paling atas dan paling bawah Gambar 4.8. Dimana terdapat transisi yang memungkinkan dari m_0^* ke m_3^* misalnya.

Berikut adalah tabel makro *marking* beserta transisi *enable* saat makro *marking* tersebut dicapai dan representasi keadaan IPA sebenarnya.

Tabel 4.1: Makro *marking* dan representasi keadaan IPA

No.	Makro <i>Marking</i>	Transisi <i>Enable</i>	Keadaan		
			Pompa	Bak <i>Intake</i>	Bak IPA
1.	$m_0^* = (0 \ 1 \ 64 \ 0 \ 311.5 \ 0)^T$	T_1, T_3	<i>Off</i>	Kosong	Kosong
2.	$m_1^* = (0 \ 1 \ m_3 \ m_4 \ 311.5 \ 0)^T$	T_1, T_3	<i>Off</i>	Sebagian	Kosong
3.	$m_2^* = (0 \ 1 \ 0 \ 64 \ 311.5 \ 0)^T$	T_1	<i>Off</i>	Penuh	Kosong
4.	$m_3^* = (1 \ 0 \ 64 \ 0 \ 311.5 \ 0)^T$	T_1, T_3	<i>On</i>	Kosong	Kosong
5.	$m_4^* = (1 \ 0 \ m_3 \ m_4 \ 311.5 \ 0)^T$	T_1, T_3, T_4	<i>On</i>	Sebagian	Kosong
6.	$m_5^* = (1 \ 0 \ 0 \ 64 \ 311.5 \ 0)^T$	T_1, T_4	<i>On</i>	Penuh	Kosong
7.	$m_6^* = (1 \ 0 \ m_3 \ m_4 \ m_5 \ m_6)^T$	T_2, T_3, T_4, T_5	<i>On</i>	Sebagian	Sebagian
8.	$m_7^* = (1 \ 0 \ 0 \ 64 \ m_5 \ m_6)^T$	T_2, T_4, T_5	<i>On</i>	Penuh	Sebagian
9.	$m_8^* = (1 \ 0 \ 64 \ 0 \ m_5 \ m_6)^T$	T_2, T_3, T_5	<i>On</i>	Kosong	Sebagian
10.	$m_9^* = (1 \ 0 \ m_3 \ m_4 \ 0 \ 311.5)^T$	T_2, T_3, T_5	<i>On</i>	Sebagian	Penuh
11.	$m_{10}^* = (1 \ 0 \ 0 \ 64 \ 0 \ 311.5)^T$	T_2, T_5	<i>On</i>	Penuh	Penuh
12.	$m_{11}^* = (1 \ 0 \ 64 \ 0 \ 0 \ 311.5)^T$	T_2, T_3, T_5	<i>On</i>	Kosong	Penuh
13.	$m_{12}^* = (0 \ 1 \ m_3 \ m_4 \ m_5 \ m_6)^T$	T_1, T_3, T_4, T_5	<i>Off</i>	Sebagian	Sebagian
14.	$m_{13}^* = (0 \ 1 \ 0 \ 64 \ m_5 \ m_6)^T$	T_1, T_4, T_5	<i>Off</i>	Penuh	Sebagian
15.	$m_{14}^* = (0 \ 1 \ 64 \ 0 \ m_5 \ m_6)^T$	T_1, T_3, T_5	<i>Off</i>	Kosong	Sebagian
16.	$m_{15}^* = (1 \ 0 \ m_3 \ m_4 \ 0 \ 311.5)^T$	T_1, T_3, T_5	<i>Off</i>	Sebagian	Penuh
17.	$m_{16}^* = (0 \ 1 \ 0 \ 64 \ 0 \ 311.5)^T$	T_2, T_5	<i>Off</i>	Penuh	Penuh
18.	$m_{17}^* = (0 \ 1 \ 64 \ 0 \ 0 \ 311.5)^T$	T_2, T_3, T_5	<i>Off</i>	Kosong	Penuh

4.4 Contoh Kasus Model Instalasi Pengolahan Air Bersih Dengan *Hybrid Petri Net Berwaktu*

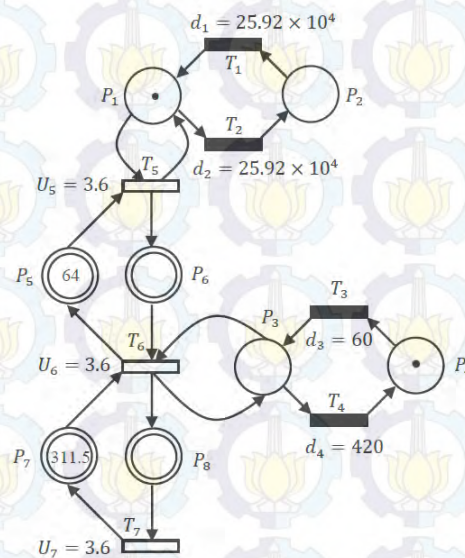
Pada bagian ini akan diberikan contoh kasus dengan debit air 30 liter/detik dan 60 liter/detik. Debit 30 liter/detik merupakan debit minimal yang dapat digunakan untuk dapat mengolah air baku menjadi air bersih. Sedangkan debit 60 liter/detik merupakan debit air yang memang telah diperhitungkan dan sesuai dengan kapasitas IPA.

Berdasarkan data yang diperoleh dari PDAM Kota Tarakan, rata-rata air bersih yang dihasilkan setiap hari di IPA Kampung Bugis adalah sebesar 91.17 liter/detik. Air bersih yang dihasilkan tersebut berasal dari dua IPA, yaitu IPA konvensional dan IPA paket fiber yang masing-masing memiliki kapasitas produksi sebesar 60 liter/detik. Oleh karena itu, karena IPA memiliki kapasitas produksi yang sama maka diasumsikan masing-masing IPA menghasilkan air bersih sebanyak 45.585 liter/detik atau 3938.544 m³/hari.

4.4.1 Debit sungai 60 liter/detik

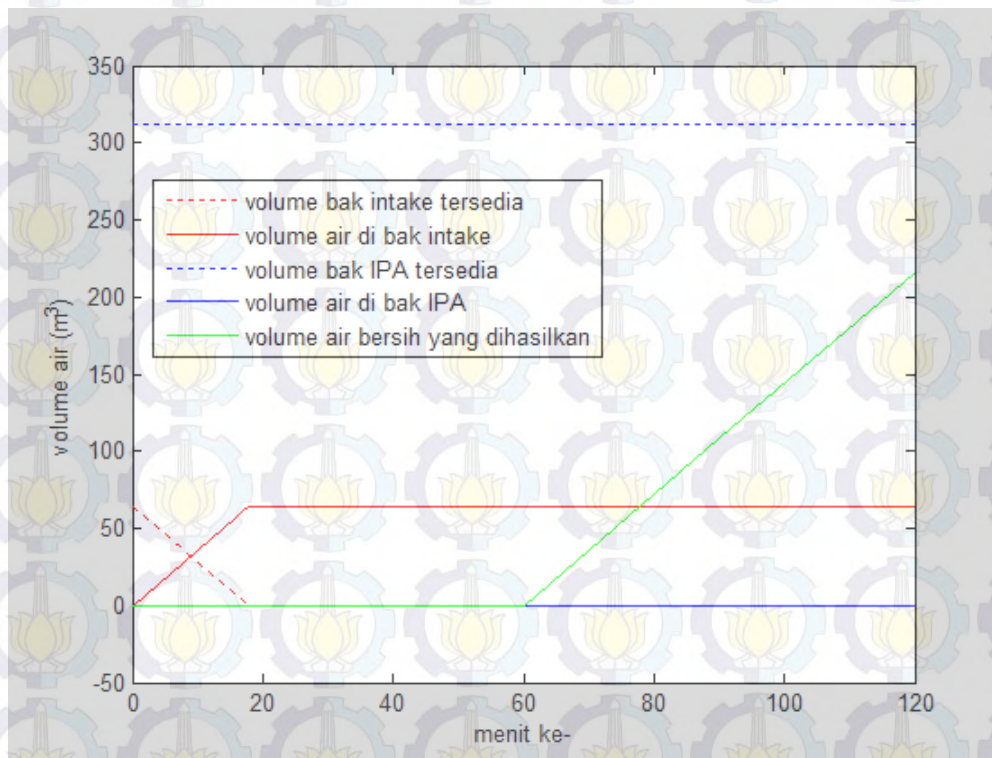
Satuan waktu yang digunakan pada contoh kasus ini adalah menit. Jika debit air sungai 60 liter/detik, maka sama dengan 3600 liter/menit. Karena kapasitas bak pengolahan dalam meter kubik maka dalam satu menit air sungai yang dapat terisi ke bak *intake* sebanyak $U_5 = 3.6 \text{ m}^3$. Kemudian karena spesifikasi pompa di bak *intake* juga 60 liter/detik, maka dalam satu menit air yang dapat terisi di bak IPA juga sebanyak $U_6 = 3.6 \text{ m}^3$. $U_7 = 3.6 \text{ m}^3$ menyatakan debit air bersih yang dihasilkan.

Selanjutnya diasumsikan bahwa air sungai dalam keadaan tersedia selama enam bulan dan kemudian tidak tersedia selama enam bulan atau sama dengan $d_1 = d_2 = 25.92 \times 10^4$. Karena dalam contoh kasus ini hanya akan dihitung banyaknya air bersih yang dihasilkan selama sehari, maka air baku yang akan diolah menjadi air bersih selalu tersedia. Kemudian lamanya waktu IPA berhenti mengolah air adalah $d_3 = 60$ menit, yaitu lamanya waktu yang dibutuhkan untuk membersihkan bak-bak pengolahan (bak IPA). Saat IPA berhenti mengolah air, pompa pada bak *intake* akan diposisikan pada kondisi *off* sehingga air dari bak *intake* tidak dapat dialirkan ke bak IPA. Bak *intake* tetap dapat diisi jika masih memungkinkan walaupun pompa dalam keadaan *off*. IPA beroperasi selama $d_4 = 420$ menit. Dalam simulasi ini lamanya waktu IPA beroperasi adalah 24 jam, dengan 3 kali pembersihan. Sehingga IPA akan beroperasi selama 420 menit atau 7 jam dan berhenti selama 60 menit atau 1 jam, kemudian beroperasi lagi dan berhenti lagi, dan seterusnya.



Gambar 4.9: HPN berwaktu IPA dengan debit sungai 60 liter/detik

Dalam kondisi pompa *off* maka air di bak *intake* akan terisi penuh sebelum pompa menjadi *on* karena untuk mengisi penuh bak *intake* hanya dibutuhkan waktu sekitar 17-18 menit, sedangkan pompa baru akan *on* setelah menit ke 60. Setelah menit ke 60 pompa menjadi *on* sehingga transisi T_4 menjadi *enable*. Kemudian transisi T_3 , T_4 , dan T_5 dapat *fire* bersamaan selama 420 menit. Air yang dapat dihasilkan saat menit ke 480 adalah sebanyak 1512 m^3 . Pada menit ke 480 pompa menjadi *off* dan di bak *intake* masih terdapat air sebanyak 64 m^3 . Kejadian ini berulang terus menerus selama 24 jam. Total air bersih yang dihasilkan selama 24 jam adalah 4536 m^3 . Berikut adalah grafik volume air di masing-masing bak pengolahan dan air yang dihasilkan dalam satuan menit.



Gambar 4.10: Grafik simulasi IPA dengan debit sungai 60 liter/detik

Pada Gambar 4.10 garis merah menyatakan volume air di bak *intake*, garis putus-putus merah menyatakan volume bak *intake* yang tersedia, garis biru menyatakan volume air di bak IPA, garis putus-putus biru menyatakan volume IPA yang tersedia dan garis hijau menyatakan volume air bersih yang dihasilkan. Garis merah dan garis putus-putus merah yang menunjukkan volume air di bak *intake* dan volume bak *intake* yang masih tersedia saling berkaitan. Jumlah volume keduanya harus selalu sama dengan 64. Hal yang sama juga berlaku pada garis biru dan garis

putus-putus biru, dimana jumlah volume keduanya harus selalu sama dengan 311.5.

Total waktu yang ditunjukkan grafik adalah selama 120 menit, yaitu dengan waktu 60 menit IPA dalam keadaan tidak beroperasi dan 60 menit IPA dalam keadaan beroperasi. Saat $t = 0$, bak *intake*, bak IPA, maupun air bersih yang dihasilkan masih belum ada atau sama dengan nol. Kemudian terjadi pengisian bak *intake*, sebelum $t = 20$ bak *intake* telah terisi penuh. Selanjutnya hingga $t = 60$ tidak terjadi perubahan volume di bak pengolahan.

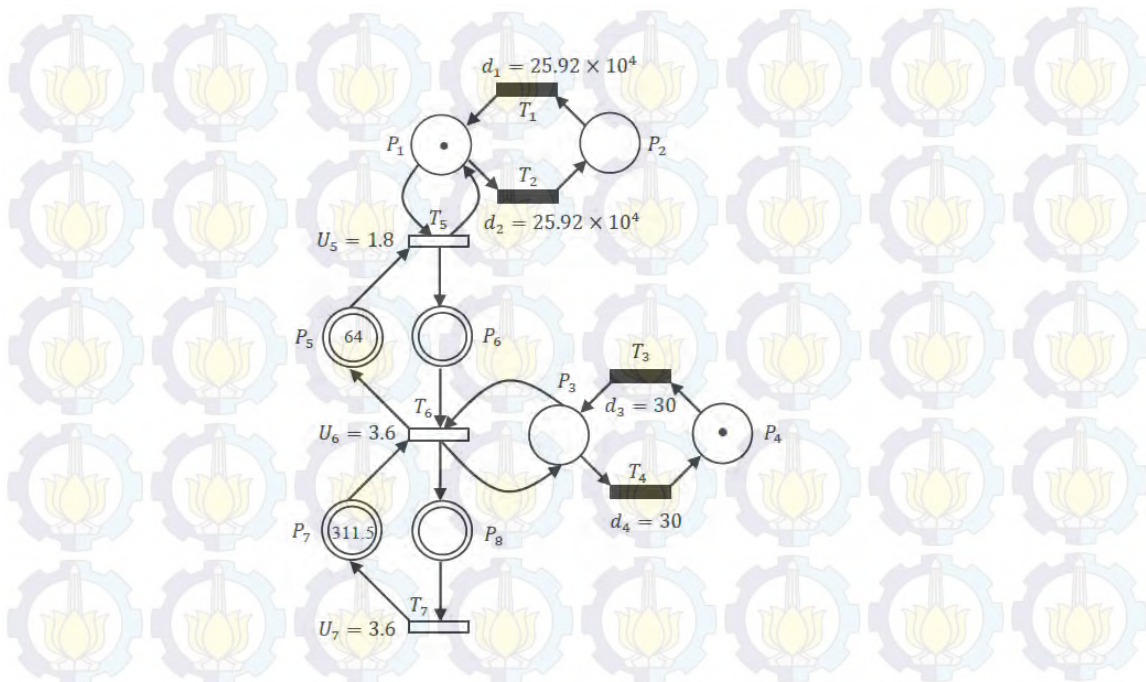
Saat $t = 60$ garis merah dan garis biru tidak mengalami perubahan, namun dalam kenyataan sebenarnya terjadi perpindahan air dengan jumlah yang sama. Bak *intake* mendapat *input* sebesar 3.6 m^3 dari sungai, namun dalam waktu bersamaan bak *intake* juga memindahkan air ke bak IPA dengan jumlah yang sama. Sehingga pada grafik terlihat tidak ada perubahan. Hal yang sama juga terjadi pada bak IPA, sebenarnya terjadi perpindahan air sebesar 3.6 m^3 . Namun karena besarnya *input* dan *output* adalah sama, maka pada grafik terlihat tidak ada perubahan.

Saat $t = 60$ garis hijau mengalami perubahan, yaitu air bersih mulai dihasilkan sebanyak 3.6 m^3 setiap menitnya. Sehingga diperoleh air bersih sebanyak 216 m^3 saat $t = 120$.

Berdasarkan hasil perhitungan dengan menggunakan *hybrid Petri net* berwaktu terdapat perbedaan banyaknya air bersih yang dihasilkan. Hasil perhitungan menggunakan *hybrid Petri net* berwaktu lebih besar daripada data di lapangan. Hal ini dikarenakan pada perhitungan dengan menggunakan *hybrid Petri net* berwaktu, debit air sungai dianggap selalu konstan. Pada kenyataannya debit air sungai selalu berubah-ubah. Selain itu, pada perhitungan dengan menggunakan *hybrid Petri net* berwaktu ini, lamanya waktu instalasi berhenti beroperasi diatur sedemikian rupa sehingga waktu yang digunakan selalu sama, yaitu 1 jam. Pada kenyataannya waktu instalasi berhenti beroperasi tidak selalu sama, bisa kurang dari atau lebih dari 1 jam.

4.4.2 Debit sungai 30 liter/detik

Pada contoh kasus ini besarnya debit air sungai ke bak *intake* adalah 30 liter/detik atau jika diubah ke meter kubik/menit sama dengan $U_5 = 1.8 \text{ m}^3/\text{menit}$. Sedangkan untuk spesifikasi lainnya sama seperti contoh kasus sebelumnya, dimana pompa mampu memindahkan air dari bak *intake* ke bak IPA sebesar $U_6 = 3.6 \text{ m}^3/\text{menit}$ dan banyaknya air bersih yang dihasilkan sebanyak $U_7 = 3.6 \text{ m}^3/\text{menit}$. Namun, waktu beroperasinya IPA menjadi lebih singkat karena debit air dari bak *intake* ke bak IPA dua kali lebih besar daripada debit air sungai yang masuk ke bak *intake*.



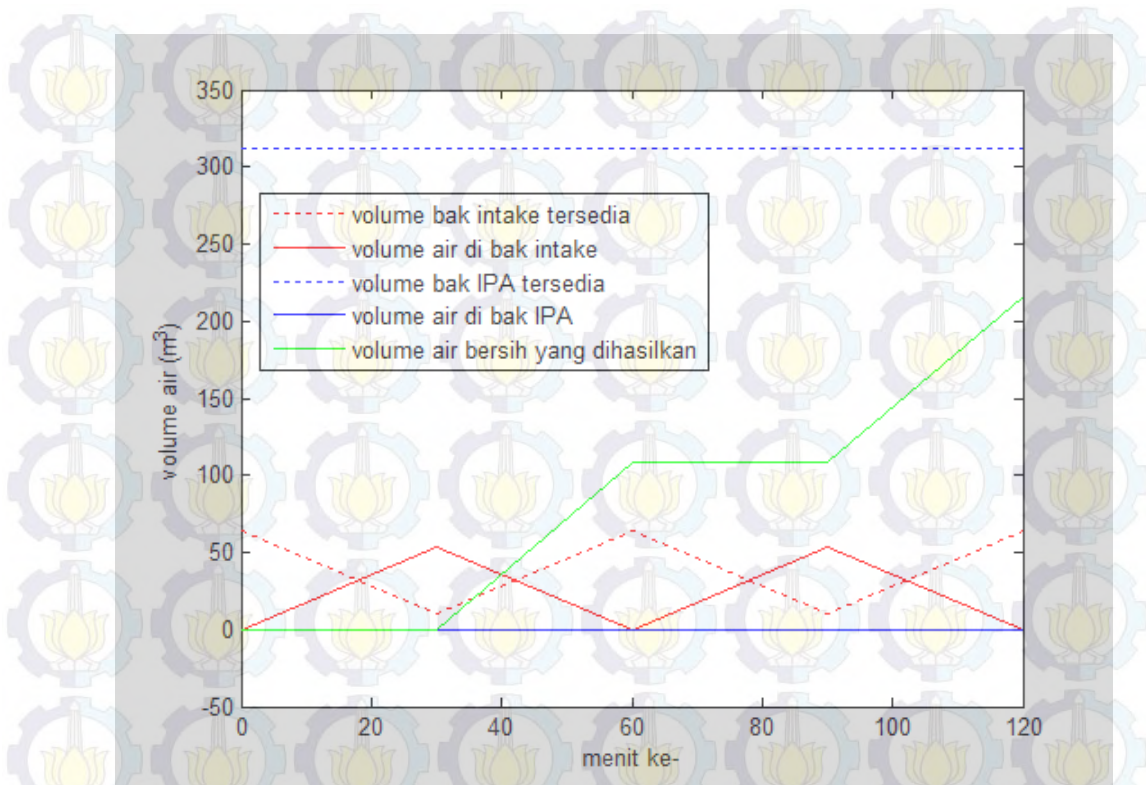
Gambar 4.11: HPN berwaktu IPA dengan debit sungai 30 liter/detik

Pada keadaan awal pompa dalam keadaan *off*, sehingga terjadi pengisian bak *intake* sebanyak 54 m^3 selama $d_3 = 30$ menit. Kemudian lamanya pompa di bak *intake* bekerja adalah $d_4 = 30$ menit. Diperoleh 108 m^3 selama total waktu 60 menit, sehingga dalam 24 jam diperoleh air sebanyak 2592 m^3 .

Pada Gambar 4.12 garis merah menyatakan volume air di bak *intake*, garis putus-putus merah menyatakan volume bak *intake* yang tersedia, garis biru menyatakan volume air di bak IPA, garis putus-putus biru menyatakan volume bak IPA yang tersedia dan garis hijau menyatakan volume air bersih yang dihasilkan. Sama seperti simulasi sebelumnya, garis merah dan garis putus-putus merah yang menunjukkan volume air di bak *intake* dan volume bak *intake* yang masih tersedia saling berkaitan. Jumlah volume keduanya harus selalu sama dengan 64. Hal yang sama juga berlaku pada garis biru dan garis putus-putus biru, dimana jumlah volume keduanya harus selalu sama dengan 311.5.

Total waktu yang ditunjukkan grafik adalah selama 120 menit, yaitu dengan waktu 30 menit IPA dalam keadaan tidak beroperasi dan 30 menit IPA dalam keadaan beroperasi, kemudian berhenti beroperasi selama 30 menit dan beroperasi lagi selama 30 menit. Saat $t = 0$, bak *intake*, bak IPA, maupun air bersih yang dihasilkan masih belum ada atau sama dengan nol. Kemudian terjadi pengisian bak *intake*, saat $t = 30$ bak *intake* telah terisi air sebesar 54 m^3 .

Saat $t = 30$ garis biru tidak mengalami perubahan, namun dalam kenyataan



Gambar 4.12: Grafik simulasi IPA dengan debit sungai 30 liter/detik

sebenarnya terjadi perpindahan air dengan jumlah yang sama. Bak IPA mendapat *input* sebesar 3.6 m^3 dari bak *intake*, namun dalam waktu bersamaan bak IPA juga memindahkan air ke bak penyimpanan air bersih dengan jumlah yang sama. Sehingga pada grafik terlihat tidak ada perubahan.

Saat $t = 30$ garis merah mulai turun karena pada bak *intake* terjadi pengurangan volume sebesar 1.8 m^3 tiap menitnya karena pada bak *intake* terjadi pengisian sebesar 3.6 m^3 namun secara bersamaan terjadi perpindahan air ke bak IPA sebesar 1.8 m^3 . Sehingga saat $t = 60$ volume air di bak *intake*=0. Saat $t = 30$ garis hijau juga mengalami perubahan, yaitu air bersih mulai dihasilkan sebanyak 3.6 m^3 setiap menitnya. Sehingga diperoleh air bersih sebanyak 108 m^3 saat $t = 60$.

Saat $t = 60$ hingga $t = 90$ IPA berhenti beroperasi, garis hijau mendatar menyatakan tidak terjadi penambahan banyaknya air bersih yang dihasilkan. Saat $t = 60$ hingga $t = 90$ terjadi pengisian bak *intake* sebesar 54 m^3 yang ditunjukkan oleh garis merah. Selanjutnya terjadi proses yang sama seperti sebelumnya, yaitu IPA kembali beroperasi saat $t = 90$ dan dihasilkan air bersih sebanyak 216 m^3 saat $t = 120$.

Berdasarkan hasil perhitungan dengan menggunakan *hybrid Petri net* berwaktu

terdapat perbedaan banyaknya air bersih yang dihasilkan. Hasil perhitungan menggunakan *hybrid Petri net* berwaktu lebih kecil daripada data di lapangan. Hal ini dikarenakan pada perhitungan dengan menggunakan *hybrid Petri net* berwaktu, debit air sungai adalah debit minimal yang dapat dimanfaatkan untuk mengolah air. Selain itu, pada perhitungan dengan menggunakan *hybrid Petri net* berwaktu ini, lamanya waktu instalasi beroperasi dan berhenti beroperasi tidak sama dengan keadaan di lapangan.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

Pada bab ini, diberikan kesimpulan berdasarkan hasil yang diperoleh dari pemodelan instalasi pengolahan air menggunakan *hybrid Petri net*. Diberikan juga saran berdasarkan hasil penelitian agar dapat dilakukan kajian yang lebih mendalam untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berikut ini merupakan kesimpulan yang diperoleh berdasarkan penelitian yang telah dilakukan.

1. Model *hybrid Petri net* dari instalasi pengolahan air terdiri dari 20 *place* dan 14 transisi. Himpunan *place* terdiri dari 6 *place* diskrit dan 14 *place* kontinu. Himpunan transisi terdiri dari 6 transisi diskrit dan 8 transisi kontinu.
2. Penyederhanaan model *hybrid Petri net* dari instalasi pengolahan air terdiri dari 6 *place* dan 5 transisi. Himpunan *place* terdiri dari 2 *place* diskrit dan 4 *place* kontinu. Himpunan transisi terdiri dari 2 transisi diskrit dan 3 transisi kontinu.
3. Berdasarkan analisis makro *marking* terdapat delapan belas keadaan yang mungkin terjadi. Namun, keadaan yang mungkin terjadi sebenarnya masih banyak karena analisis makro *marking* dilakukan pada model yang telah disederhanakan.
4. Pada contoh kasus dengan debit sungai 60 liter/detik dihasilkan air bersih sebanyak 4536 m³ selama 24 jam, dengan 21 jam waktu instalasi pengolahan air beroperasi dan 3 jam waktu instalasi pengolahan air berhenti beroperasi.
5. Pada contoh kasus dengan debit sungai 30 liter/detik dihasilkan air bersih sebanyak 2592 m³ selama 24 jam, dengan 12 jam waktu instalasi pengolahan air beroperasi dan 12 jam waktu instalasi pengolahan air berhenti beroperasi.

5.2 Saran

Berikut ini merupakan saran yang dapat digunakan sebagai bahan penyempurnaan penelitian ini dan untuk penelitian selanjutnya.

1. Pada penelitian ini dilakukan penyederhanaan model, sehingga untuk analisis makro *marking* belum dapat menjelaskan secara keseluruhan kondisi yang mungkin terjadi di lapangan. Pada penelitian selanjutnya dapat dibuat suatu program yang dapat menganalisis makro *marking* untuk *hybrid Petri net* yang memuat banyak *place* dan transisi.
2. Debit air sungai dan debit air di bak pengolahan yang digunakan dalam simulasi bernilai konstan. Pada keadaan sebenarnya, debit air tidaklah konstan. Debit air sungai selalu berubah-ubah, begitu juga debit air di bak pengolahan. Debit air di bak flokulator misalnya, akan terjadi perlambatan jika kualitas air baku kurang baik dan menghasilkan banyak flok air.
3. Pada penelitian selanjutnya dapat dipertimbangkan penggunaan *inhibitor arc* yang dapat membuat suatu transisi menjadi *enable* justru ketika tidak terdapat *marking* di *place input* dari transisi tersebut. *Inhibitor arc* ini dapat digunakan pada bak *intake* dan bak *ground* yang terdapat pompa di dalamnya. Sehingga jika ditambahkan *inhibitor arc*, pompa akan otomatis *off* jika tidak terdapat air pada bak-bak tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Arifiani, N. F., Hadiwidodo, M. (2007), "Evaluasi Desain Instalasi Pengolahan Air PDAM Ibu Kota Kecamatan Prambanan Kabupaten Klaten", *Jurnal Presipitasi*, Vol. 3.2, No. 2, hal. 78-85.

David, R., Alla, H., (2010), *Discrete, Continuous, and Hybrid Petri Nets*, 2nd edition, Springer, Berlin.

Ghomri, L., Alla, H. (2007), "Modeling and Analysis using Hybrid Petri Nets", *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, Vol. 1, No. 2, hal. 141-153.

Gudino-Mendoza, B., Lopez-Melladoa, E., Alla, H. (2011). "Modelling and Simulation of Water Distribution Systems using Timed Hybrid Petri Nets", *Simulation-Transactions of the Society Modeling and Simulation International*, Vol. 1.00, hal. 1-19.

Kania, D. (2009), *Pengantar Pengolahan Air*, Bahan kuliah: Rekayasa Lingkungan, ITB, Bandung.

Mostafa, K. S., Bahareh, G., Elahe, D., Pegah, D. (2015), "Optimization of Conventional Water Treatment Plant using Dynamic Programming", *Toxicology and Industrial Health*, Vol. 31, No. 12, hal. 1078-1086.

Subiono, (2015), *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya*, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.

Vipriyanti, Y., Suprpto, H. (2013). "Perencanaan Bangunan Pengolahan Air Pejompongan II Dengan Metode Konvensional", *Prosiding PESAT*, Vol 5, hal. 26-33.

Wu, E. M. Y., (2013), *Optimal Design of The Water Treatment Plants*, INTECH Open Access Publisher.

BIODATA PENULIS



Penulis bernama lengkap Deny Murdianto, lahir di Kota Tarakan pada tanggal 19 Desember 1988. Penulis merupakan anak kedua dari dua bersaudara dari pasangan Bapak Misdi dan Ibu Riang Kustini.

Memulai pendidikan dasar di SD Negeri 001 Kota Tarakan pada tahun 1994. Setelah menyelesaikan pendidikan dasar pada tahun 2000, penulis melanjutkan pendidikan menengah di SMP Negeri 2 Kota Tarakan hingga tahun 2003. Kemudian melanjutkan pendidikan di SMA Negeri 1 Tarakan. Pada tahun 2006 melanjutkan pendidikan di Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Borneo Tarakan. Pada tahun 2011 berhasil menyelesaikan pendidikan dan memperoleh gelar Sarjana Pendidikan.

Setelah menyelesaikan pendidikan S1 penulis berkarya sebagai guru matematika di salah satu sekolah swasta di Kota Tarakan. Banyak pengalaman berharga yang tidak dapat dilupakan selama mengabdikan diri di sekolah tersebut. Pada tahun 2013 penulis mendapatkan kesempatan untuk mengajar di salah satu sekolah tinggi di Kota Tarakan. Mata kuliah matematika diskrit merupakan mata kuliah yang diajarkan penulis selama satu semester di sekolah tinggi tersebut.

Pada tahun 2013 penulis memperoleh beasiswa Pra S2-S2 Saintek yang diberikan oleh Dikti dengan rekomendasi dari Universitas Borneo Tarakan. Pra S2 diselesaikan selama satu tahun di Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Pada tahun 2014 penulis melanjutkan pendidikan di Program Pascasarjana Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.