



Science Arts & Métiers (SAM)

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers ParisTech researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <http://sam.ensam.eu>
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/8734>

To cite this version :

Mathieu HOBON, Nafissa LAKBAKBI EL YAAQOUBI, Gabriel ABBA - Marche quasi-optimale d'un robot bipède avec contact roulant au niveau des genoux - In: 20ème Congrès Français de Mécanique, Besançon, France, 2011-08-29 - Actes de CFM 2011 - 2011

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : archiveouverte@ensam.eu

Marche quasi-optimale d'un robot bipède avec contact roulant au niveau des genoux

M. HOBON^a, N. LAKBAKBI ELYAAQOUBI^{a,b}, G. ABBA^{a,b}

^a Laboratoire de Conception, Fabrication et Commande EA 4495, Arts et Métiers ParisTech 57078 Metz

^b Ecole Nationale d'Ingénieurs de Metz, Technopôle, 57078 Metz

Résumé :

L'article présente la méthodologie d'obtention de trajectoires optimales de marche pour une nouvelle classe de robot bipède. Le robot bipède est constitué de sept corps et possède des genoux anthropomorphes avec un contact roulant entre le fémur et le tibia. La marche est considérée comme une succession de phases de simple support suivi d'un impact. Une optimisation avec un critère énergétique ou sthénique est utilisée et le problème de recherche de trajectoires est transformé en une optimisation paramétrique. Les premiers résultats montrent que le robot étudié consomme moins d'énergie qu'un bipède conventionnel.

Abstract :

This article presents the methodology to obtain optimal trajectories of gait for a new class of biped robot. The new robot has seven links and has anthropomorphic knees with a rolling contact between the femur and the tibia. The gait is described like a succession of simple support phase followed by an impact. An optimization with an energetic or sthenic criterion is used and the problem of finding gait is changed in a parametric optimisation. Early results show that the robot studied using less energy than conventional robot.

Mots clés : robot bipède, optimisation, conception humanoïde anthropomorphe

1 Introduction

Ces dernières années, la conception est un enjeu majeur pour le développement de robots humanoïdes. La conception innovante [1],[2] doit permettre une meilleure adaptation du robot à son environnement, une plus grande adaptabilité aux tâches et une économie d'énergie. L'idée habituelle est de concevoir un robot se rapprochant d'une morphologie humaine [3]. Différentes structures de robot ont été développées dans ce sens, comme dans [4] où la cheville possède deux actionneurs parallèles qui contrôlent les deux degrés de liberté de l'articulation du pied. Gini et Scarfogliero dans [5] ont proposé une nouvelle cinématique avec un contact roulant entre le fémur et le tibia. Cette nouvelle architecture anthropomorphe du genou déjà utilisée sur les prothèses de genou n'a pas été étudiée d'un point de vue modélisation. De plus, on ne connaît pas ses performances énergétiques.

La minimisation de l'énergie durant la marche est étudiée depuis longtemps [6],[7]. L'apport de ces études porte sur :

- L'amélioration de la structure cinématique du robot [8],
- Les choix des actionneurs, de leur type (muscles artificiels, actionneurs électriques, hydrauliques ou pneumatiques) ainsi que du choix et de l'emplacement d'éventuels éléments de stockage d'énergie mécaniques (ressorts) ou autres [9] [3].
- La détermination de trajectoires minimisant l'énergie durant la marche [10] et de la commande [11]

Dans le cadre du projet ANR R2A2, une nouvelle cinématique du genou est recherchée. La conception, la motorisation, les trajectoires minimisant l'énergie et la stratégie de commande durant la marche font également partie du projet.

L'objet de cet article est à la fois de comparer les modèles géométrique et dynamique de deux structures cinématiques des jambes d'un robot humanoïde et de chercher les liens entre la structure cinématique et la consommation énergétique de ces structures.

Les modèles des deux structures de robots sont détaillés dans le paragraphe 2. La description et le paramétrage des trajectoires pour un mouvement de phase de simple support (SSP) suivi d'un impact sont donnés dans le paragraphe 3. Le paragraphe suivant montre les résultats obtenus en simulation pour une optimisation des trajectoires selon un critère sthénique. Enfin la conclusion permet de mettre en relief les principales idées et propose des pistes pour la suite de l'étude.

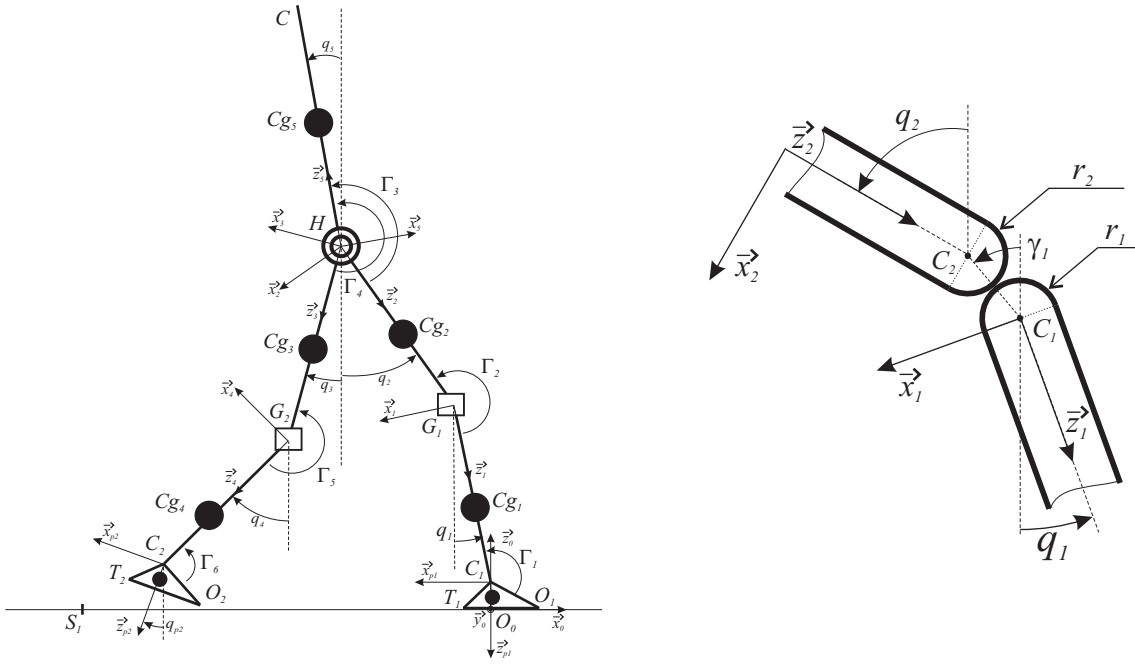


FIGURE 1 – Robot bipède 7 corps étudié et détail de la cinématique du genou roulant

2 Modélisation des deux structures cinématiques de bipèdes

Deux structures de robot bipède plan à sept corps incluant un tronc, deux cuisses, deux tibias et deux pieds sont étudiées. Chaque robot possède six actionneurs placés respectivement au niveau des hanches, des genoux et des chevilles. Le premier robot a une structure de genoux classique avec des liaisons pivots. La seconde structure de genoux fait intervenir un contact roulant entre le fémur et le tibia (figure (1)).

Les corps sont définis dans le plan sagittal par le vecteur articulaire $\mathbf{q} = [q_{p1}, q_{p2}, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, x_H, z_H]^T$ avec $q_i, i \in [p1, p2, 1, 2, 3, 4, 5]$ les angles d'orientation de chaque corps par rapport à la verticale et (x_H, z_H) les coordonnées cartésiennes de la hanche. Les paramètres géométriques sont les longueurs l_i des corps, leurs masses m_i , les positions s_i des centres de masses Cg_i . Les pieds sont définis par les longueurs $T_1O_1 = L_p$ et $T_1O_0 = l_p$ puis la hauteur $O_0C_1 = h_p$.

Le modèle géométrique pour le robot avec la structure classique des genoux est :

– position du talon du pied mobile :

$$x_{T_2} = x_H + l_1 \sin q_4 + l_2 \sin q_3 - l_p \cos q_{p2} + h_p \sin q_{p2} \quad (1)$$

$$z_{T_2} = z_H - l_1 \cos q_4 - l_2 \cos q_3 - l_p \sin q_{p2} - h_p \cos q_{p2} + h_p \quad (2)$$

– position des orteils du pied mobile :

$$x_{O_2} = x_H + l_1 \sin q_4 + l_2 \sin q_3 - (l_p - L_p) \cos q_{p2} + h_p \sin q_{p2} \quad (3)$$

$$z_{O_2} = z_H - l_1 \cos q_4 - l_2 \cos q_3 - (l_p - L_p) \sin q_{p2} - h_p \cos q_{p2} + h_p \quad (4)$$

La figure (1) présente la structure du genou à contact roulant. Ce contact cylindre sur cylindre est supposé sans glissement. Le roulement sans glissement conduit à une relation linéaire de couplage entre l'angle γ_1 (respectivement γ_2) définissant l'orientation du segment C_1C_2 et les angles q_1 du tibia et q_2 du fémur (respectivement q_4 et q_3). Il en résulte un modèle géométrique différent pour la nouvelle structure cinématique. On note r_1 et r_2 les distances respectivement entre le point de contact et les centres du cylindre C_1 pour le tibia et C_2 pour le fémur. Les deux structures à comparer doivent avoir la même stature verticale, donc on a $l'_i = l_i - r_i$ avec $i = 1, 2$ et $l = r_1 + r_2$.

Pour le modèle géométrique de l'architecture à genou à contact roulant et en notant $\gamma_1 = (r_1 q_1 + r_2 q_2)/l$ et $\gamma_2 = (r_1 q_4 + r_2 q_3)/l$, on obtient les équations suivantes :

– position du talon du pied mobile

$$x'_{T_2} = x'_H + l'_2 \sin q_3 + l \sin \gamma_2 + l'_1 \sin q_4 - l_p \cos q_{p2} + h_p \sin q_{p2} \quad (5)$$

$$z'_{T_2} = z'_H - l'_2 \cos q_3 - l \cos \gamma_2 - l'_1 \cos q_4 - l_p \sin q_{p2} - h_p \cos q_{p2} + h_p \quad (6)$$

– position des orteils du pied mobile

$$x'_{O_2} = x'_H + l'_2 \sin q_3 + l \sin \gamma_2 + l'_1 \sin q_4 - (l_p - L_p) \cos q_{p2} + h_p \sin q_{p2} \quad (7)$$

$$z'_{O_2} = z'_H - l'_2 \cos q_3 - l \cos \gamma_2 - l'_1 \cos q_4 - (l_p - L_p) \sin q_{p2} - h_p \cos q_{p2} + h_p \quad (8)$$

Les équations de Lagrange fournissent, en phase de simple support, le modèle dynamique suivant :

$$D(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + H(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + Q(\mathbf{q}) = B\Gamma + A_{c1}^T(\mathbf{q})F_e \quad (9)$$

avec $\Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6]^T$ le vecteur des couples, $D(9 \times 9)$ la matrice des masses et inerties, $H(9 \times 1)$ le vecteur des forces centrifuges et de Coriolis, $Q(9 \times 1)$ le vecteur des forces de gravité, $B(9 \times 6)$ la matrice de contrôle, $A_{c1}(3 \times 9)$ la matrice Jacobienne des réactions du sol sur le pied en support et $F_e(3 \times 1)$ le vecteur des forces et couple exercés sur le pied en support. La deuxième structure cinématique conduit à un modèle dynamique formellement identique mais avec des termes additionnels dans les matrices D, H, Q et A_{c1} dû aux couplages des angles du tibia et du fémur.

Lors d'un cycle de marche, il existe également des phases d'impact. Nous considérons un impact sans dissipation d'énergie entre corps supposés rigides. Le modèle d'impact s'écrit alors sous la forme :

$$D(\mathbf{q})(\dot{\mathbf{q}}^+ - \dot{\mathbf{q}}^-) = A_{c1}^T I_R \quad (10)$$

$$A_{c1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}^+ = 0 \quad (11)$$

avec $\dot{\mathbf{q}}^-$ et $\dot{\mathbf{q}}^+$ représentant respectivement le vecteur vitesse avant et après l'impact. Ce modèle nous fournit le torseur d'interaction I_R et le vecteur vitesse après impact utilisé pour initialiser les trajectoires quasi-optimales.

3 Optimisation

Un robot humanoïde étant un système mobile autonome, la recherche de mouvements optimaux est d'emblée justifiée. La question du choix du critère est plus complexe et suscite un débat entre chercheurs. Dans le cas du développement d'une nouvelle structure cinématique, le choix d'un critère sthénique est justifié par deux arguments : la nécessité de connaître les efforts et contraintes internes à la nouvelle structure et le besoin de choisir des actionneurs pour la motorisation. De plus, l'absence d'une connaissance précise des pertes par frottement rend impossible une optimisation directe d'un critère énergétique. Ainsi, le critère utilisé est la fonction quadratique des couples appelé aussi fonction sthénique. On retrouve ce critère dans plusieurs études [10], [12]. Il est proportionnel aux pertes par effet Joule dans les actionneurs.

Le contact unilatéral du pied fixe avec le sol impose une force de réaction F_z positive, sinon le contact est rompu. Les forces de réaction du sol sont obtenues grâce au modèle dynamique en coordonnées généralisées. Afin d'assurer une validité du modèle dynamique avec pied fixe à plat sur le sol, la position du ZMP obtenue par (12) doit donc rester à l'intérieur de la surface d'appui.

$$x_{ZMP} = \frac{\Gamma_1 - h_p F_x - m_p s_x g}{F_z} \quad (12)$$

Le non-enfoncement du pied mobile dans le sol durant la marche ajoute une contrainte. Le choix a été fait de chercher uniquement des mouvements d'allure anthropomorphe, ce qui ajoute une condition de non-fléchissement arrière des genoux. Le problème d'optimisation à résoudre revient alors à minimiser :

$$C_\Gamma = \frac{1}{d} \int_0^T \Gamma^T \Gamma dt \quad (13)$$

sous contrainte $\Psi_i \geq 0, i \in [1 \dots 7]$ avec $\Psi_1 = F_z, \Psi_2 = x_{ZMP} + l_p, \Psi_3 = -x_{ZMP} + (L_p - l_p), \Psi_4 = q_2 - q_1, \Psi_5 = q_3 - q_4$ et suivant la structure du robot, on aura soit $\Psi_6 = z_{H_2}$ ou $\Psi_6 = z'_{H_2}$ et $\Psi_7 = z_{T_2}$ ou $\Psi_7 = z'_{T_2}$ qui permettront de gérer le non-enfoncement du pied mobile dans le sol.

Le problème posé est complexe et la solution optimale n'a pas encore été trouvée. Plusieurs chercheurs ont alors proposé de paramétrer la trajectoire de marche en exprimant le vecteur articulaire dans un espace de fonctions orthogonales. Les séries de Fourier [6], les splines cubiques [13] et les polynômes [14] [15] ont été utilisés. Le problème initial d'optimisation est ainsi transformé en un problème d'optimisation paramétrique pour lequel de nombreuses méthodes de résolution ont été proposées par Fletcher [16] ou par Hajek [17]. Le choix a été fait d'utiliser comme algorithme d'optimisation la méthode du simplex de Nelder-Mead [18]. Cette méthode est utilisée pour résoudre les problèmes non-linéaires sans contraintes. Les contraintes $\Psi_i \geq 0$ doivent donc être ajoutées au critère avec l'aide de multiplicateurs de Lagrange. Nous pouvons donc réduire notre problème d'optimisation aux équations suivantes :

$$\min_{\mathbf{p}} C(\mathbf{p}) \quad (14)$$

avec \mathbf{p} le vecteur des paramètres et le critère exprimé par :

$$C_{\mathbf{p}} = \frac{1}{d} \int_0^T \left(\Gamma(\mathbf{p})^T \Gamma(\mathbf{p}) + k \sum_{i=1}^7 (e^{(|\Psi_i(\mathbf{p})| - \Psi_i(\mathbf{p}))} - 1) \right) d\tau + error_{MGI} \quad (15)$$

et k une constante réelle suffisamment grande ($\simeq 10^6$). La fonction $error_{MGI}$ permet de gérer les erreurs du modèle géométrique inverse et de les exclure de l'optimisation. Le paragraphe suivant présente la méthode de paramétrage des trajectoires.

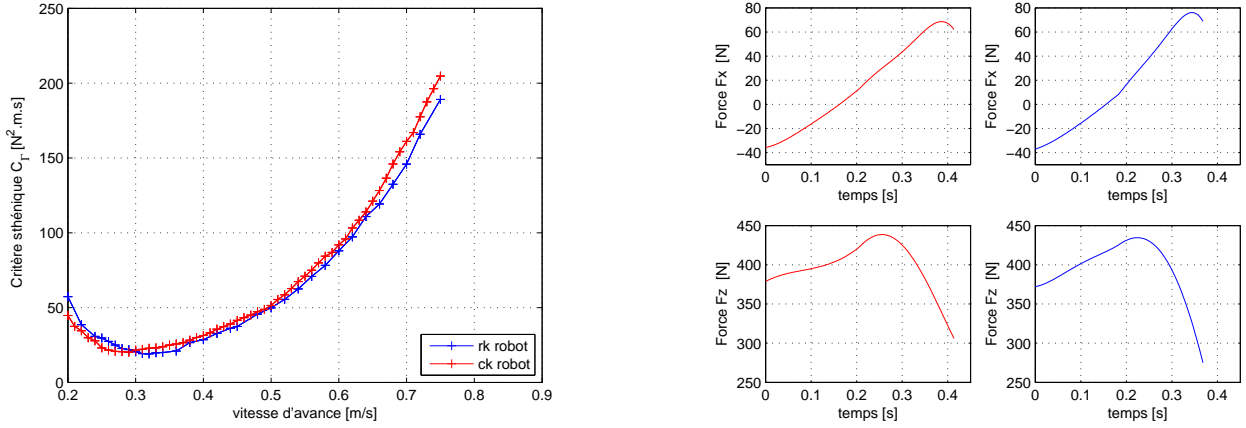


FIGURE 2 – Figure de gauche : critère sthénique fonction de la vitesse d'avance du robot (en rouge, le robot à genou rotoïde noté ck robot et en bleu le robot à genou roulant noté rk robot). Figure de droite : comparaison des forces de réaction du sol pour une vitesse d'avance de 0.75 m/s

4 Trajectoires

Pour paramétrer la trajectoire cyclique de marche à vitesse constante d'un robot bipède, plusieurs espaces de fonctions orthogonales ont été proposés : les séries de Fourier [6], les splines cubiques [13] et les polynômes [14] [15].

Dans ce travail, les trajectoires angulaires absolues sont paramétrées par deux fonctions splines cubiques définies sur deux demi-périodes et décrites par les équations suivantes :

$$0 \leq t_n \leq \frac{1}{2} \rightarrow f_{q_i}(t_n) = a_0 + a_1 t_n + a_2 t_n^2 + a_3 t_n^3 \quad (16)$$

$$\frac{1}{2} \leq t_n \leq 1 \rightarrow f'_{q_i}(t_n) = b_0 + b_1(1 - t_n) + b_2(1 - t_n)^2 + b_3(1 - t_n)^3 \quad (17)$$

avec $q_i = [q_{p2}, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5]$ les coordonnées angulaires, a_j et b_j pour $j = [0 \dots 3]$, les huit coefficients nécessaires pour paramétrer chaque fonction angulaire. Les vitesses et accélérations angulaires sont déterminées par dérivées successives. $t_n = t/T$ représente le temps normalisé et T la durée d'un pas.

Les hypothèses pour faire évoluer notre robot sont les suivantes :

- Les pieds sont à plat au début et à la fin du pas.
- L'angle du pied fixe est nul tout au long du mouvement.
- La vitesse du pied mobile est nulle à la fin du pas.
- Les angles du tronc et du pied mobile sont T périodique.
- Les angles des cuisses et des tibias sont $2T$ périodique.

Soit $S = \{p2, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $S_1 = \{p2, 5\}$ et $S_2 = \{1, 2\}$ trois ensembles d'indices des axes. Les conditions de cyclicité de période T et la continuité des positions aux instants initiaux et intermédiaires pour l'ensemble des variables articulaires imposent pour $\forall i \in S$, $f_{q_i}(0.5) = f'_{q_i}(0.5)$ et pour $\forall j \in S_1$, $f_{q_j}(0) = f'_{q_j}(1)$. La cyclicité de période $2T$ des deux jambes impose pour $\forall k \in S_2$, $f_{q_k}(0) = f'_{q_{4-k}}(1)$, $f_{q_{4-k}}(0) = f'_{q_k}(1)$. D'autre part, on impose également la continuité des vitesses et des accélérations aux instants intermédiaires, ce qui conduit pour $\forall i \in S$ à $\dot{f}_{q_i}(0.5) = \dot{f}'_{q_i}(0.5)$, et $\ddot{f}_{q_i}(0.5) = \ddot{f}'_{q_i}(0.5)$. Enfin, on considère que le pied mobile repose à plat à la fin du pas, donc $f_{q_{p2}}(0) = f'_{q_{p2}}(1) = 0$ et la vitesse du pied mobile est choisie nulle juste avant l'impact, d'où $\dot{f}'_{q_{p2}}(1) = 0$.

L'impact impose les conditions suivantes : sur la vitesse initiale du pied mobile $\dot{f}_{q_{p2}}(0) = \dot{f}'_{q_{p2}}(1) + \Delta_1$; sur les vitesses initiales des tibias $\dot{f}_{q_1}(0) = \dot{f}'_{q_1}(1) + \Delta_2$ et $\dot{f}_{q_4}(0) = \dot{f}'_{q_4}(1) + \Delta_4$; sur la vitesse initiale du tronc $\dot{f}_{q_5}(0) = \dot{f}'_{q_5}(1) + \Delta_6$ et sur les vitesses initiales des cuisses $\dot{f}_{q_2}(0) = \dot{f}'_{q_2}(1) + \Delta_2$ et $\dot{f}_{q_3}(0) = \dot{f}'_{q_3}(1) + \Delta_3$. L'expression des vitesses $\Delta_i \in \mathbb{R}^{9 \times 1}$ est donnée par :

$$\Delta_i = D^{-1} A_{c1}^T I_R = [\Delta_0 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 \Delta_5 \Delta_6 \Delta_x \Delta_z]^T \quad (18)$$

5 Simulations et résultats

Le robot étudié dans le cadre du projet est le robot HYDROiD. Il mesure 1.39 m pour 45 kg. Le tableau suivant résume les paramètres des corps de sa structure inférieure. Pour la cinématique avec genou roulant, les rayons

r_1 et r_2 sont identiques et choisis compatibles avec le corps de la cuisse du robot Hydroïd, à savoir une valeur de 0.05 m.

TABLE 1 – Paramètres du Robot HYDROïD

Corps	Longueurs [m]	Masses [kg]	Moments d'inerties [kg.m ²]	Positions des CdM [m]
pieds	$L_p = 0.207, l_p = 0.072$ $h_p = 0.06425$	0.678	0.001	$sx = 0.0135$ $sz = 0.0321$
Tibia	0.392	2.188	0.02765	0.1685
Cuisse	0.392	5.025	0.06645	0.1685
Tronc	0.5428	29.27	0.8149	0.19206

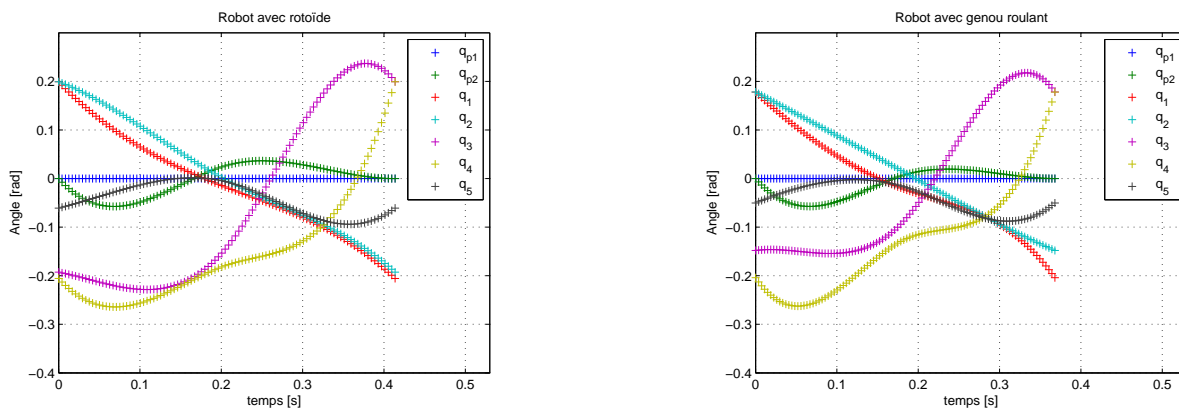


FIGURE 3 – Evolution des angles absolus pour une vitesse d'avance de 0.75 m/s

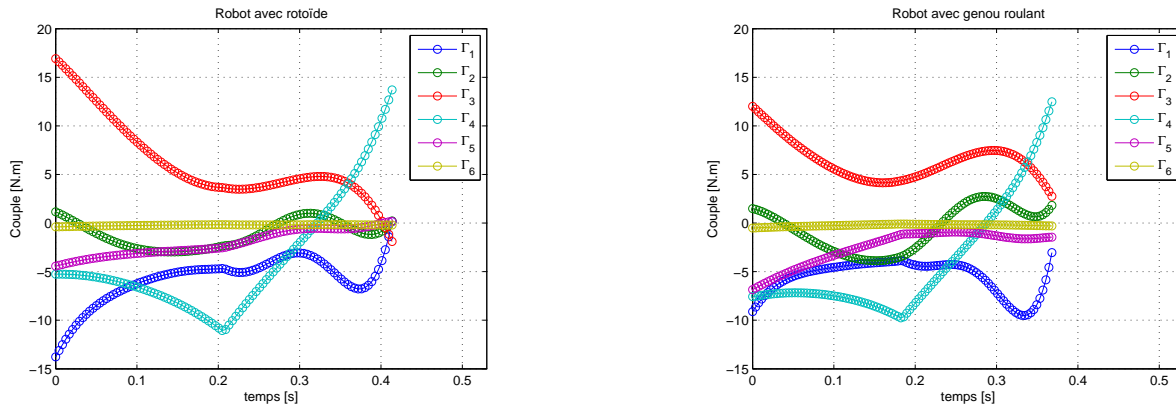


FIGURE 4 – Evolution des couples pour une vitesse d'avance de 0.75 m/s

Les résultats des algorithmes d'optimisation paramétrique appliqués aux deux modèles sont donnés sur les figures. La figure (2) représente l'évolution du critère sthénique optimal en fonction de la vitesse d'avance de chacun des robots. On constate que le robot à genou roulant conduit à un critère sthénique légèrement inférieur à celui de la structure classique. La réduction moyenne du critère est d'environ 7%. La figure de droite représente les forces de réaction du sol et confirme qu'il n'y a pas de glissement des pieds durant la phase de marche.

On observe que pour une vitesse d'avance du robot de 0.75 m/s (figure (3)), la période de marche du robot à genou rotoïde est plus faible (4 % de moins) que celle du robot à genou roulant. Les évolutions des angles pour les deux structures sont sensiblement les mêmes.

La figure (4) présente l'évolution des couples pour la vitesse d'avance de 0.75 m/s. On remarque que les couples de la hanche et de la cheville de support pour le robot à genou roulant sont plus faibles que ceux du robot à genou rotoïde.

6 Conclusion et Perspectives

Cette étude a permis d'établir les modèles géométrique, dynamique et d'impact pour un robot avec une nouvelle structure à genou dit roulant. L'utilisation d'une base de fonctions splines d'ordre 3 pour approximer les trajectoires a permis de résoudre le problème sous contraintes avec multiplicateurs de Lagrange en utilisant la méthode du Simplex de Nelder-Mead. Les résultats obtenus montrent que la cinématique avec genou roulant permet de minimiser les couples articulaires d'un cycle de marche et donc d'optimiser la conception et le choix de la motorisation.

Pour la suite de l'étude, les paramètres géométriques tel que les rayons des cylindres de contact au niveau du genou peuvent être optimisés. D'autres modèles cinématiques sont envisagés ainsi que des phases de double support ou des phases avec rotation du pied sur les orteils. La projection dans d'autres espaces de fonctions orthogonales fournit une voie pour l'optimisation de trajectoires. De même, l'utilisation de surfaces convexes non cylindriques pour le genou est également une piste d'étude intéressante. Aussi, la réalisation d'une telle liaison roulante nécessite l'utilisation d'éléments de liaison tels des ligaments.

7 Remerciements

Les auteurs remercient l'Agence Nationale de la Recherche pour le soutien financier du programme ANR-ARPEGE, projet ANR-09-SEGI-011- R2A2.

Références

- [1] Abba G. and Aoustin Y. Design of biped robots on the basis of the analysis of three and five bodies structures. In Proc. of Humanoid and Legged Robot, HLR 2006, Karlsruhe, Germany, Sept. 25-26 2006. University of Karlsruhe.
- [2] Ott C., C. B., Mayr J., Fuchs M., Burger R., Dongheui Lee Eiberger O., Albu-Schaffer A., Grebenstein M., and Hirzinger G. Development of a biped robot with torque controlled joints. In 10th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots, Humanoids 2010, pages 167–173, 2010.
- [3] Srinivasan M. Fifteen observations on the structure of energy-minimizing gaits in many simple biped models. *Journal of the Royal Society Interface*, 8(54), 74–98, 2011.
- [4] Sardain P., Rostami M., and Bessonnet G. An anthropomorphic biped robot : Dynamic concepts and technological design. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part A :Systems and Humans*, 28(6), 823–838, 1998.
- [5] Gini G., Scarfogliero U., and Folgheraiter M. New joint design to create a more natural and efficient biped. *Applied Bionics and Biomechanics*, 6(1), 27–42, 2009.
- [6] Cabodevila G. and Abba G. Quasi optimal gait for a biped robot using genetic algorithm. In Proceedings of the IEEE Int. Conf. on Systems, Man and Cybernetics, volume 4, pages 3960–3965, 1997.
- [7] Yang J.-S. and Shahabuddin A. Trajectory planning and control for a five-degree-of-freedom biped locomotion system. In Proc. of the American Control Conference, volume 3, pages 3105–3109, 1994.
- [8] Hamon A. and Aoustin Y. Study of different structures of the knee joint for a planar bipedal robot. In 9th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots, Humanoids'09, pages 113–120, 2009.
- [9] Iida F., Rummel J., and Seyfarth A. Bipedal walking and running with compliant legs. In Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 3970–3975, 2007.
- [10] Tlalolini D., Chevallereau C., and Aoustin Y. Optimal reference walking with rotation of the stance feet in single support for a 3d biped. In 2008 IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems, IROS'08, pages 1091–1096, 2008.
- [11] Plestan F., Grizzle J., Westervelt E., and Abba G. Stable walking of a 7-dof biped robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 19(4), 653–668, 2003.
- [12] Wu T.-Y. and Yeh T.-J. Optimal design and implementation of an energy-efficient, semi-active biped. In Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 1252–1257, 2008.
- [13] Chevallereau C. and Aoustin Y. Optimal reference trajectories for walking and running of a biped robot. *Robotica*, 19(5), 557–569, 2001.
- [14] Tlalolini D., Chevallereau C., and Aoustin Y. Optimal reference motions with rotation of the feet for a biped. In 2008 Proc. of 32nd Annual Mechanisms and Robotics Conf., MR2008, volume 2 :B, pages 1027–1036, 2008.
- [15] Roussel L., Canudas-de Wit C., and Goswami A. Generation of energy optimal complete gait cycles for biped robots. In Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, volume 3, pages 2036–2041, 1998.
- [16] Fletcher R. *Practical Method of Optimization*. John Wiley & Sons Ltd, 1987.
- [17] Hajek B. Cooling schedules for optimal annealing. *Mathematic of Operation Research*, 13(2), 311–329, May 1988.
- [18] Lagarias J. C., Reeds J. A., Wright M. H., and Wright P. E. Convergence properties of the nelder-mead simplex method in low dimensions. *SIAM J. Optim.*, 9, 112–147, 1998.