2 変数跳躍過程でのリアルオプション・モデル

著者	董　晶輝
著者別名	Dong Jinghui
雑誌名	経営力創成研究
巻	13
ページ	71-79
発行年	2017-03
URL	http://id.nii.ac.jp/1060/00008993/

2 変数跳躍過程でのリアルオプション・モデル

A Real Option Model under a Two-Dimensional Jump Process

東洋大学経営力創成研究センター　研究員　董　晶輝

要旨

本稿では、2 変数の跳躍過程におけるリアルオプション・モデルを提案する。ここでは、投資プロジェクトの期待現在価値が確率変数の n 次の同次関数であるときのモデルを取り上げ、最適閾値の明示的解を示す。さらに、投資閾値への初到達時間の平均値について、明示的計算式を示す。2 変数の跳躍過程の初到達時間の積率母関数を求める方法として、投資プロジェクトの期待現在価値を求める際の結果に対して$n = 0$とすることで得られることを示す。

キーワード（Keywords）：リアルオプション（Real Options）、投資実行基準（Investment Criterion）、不確実性（Uncertainty）、跳躍過程（Jump Processes）、初到達時間（The First Passage Times）

Abstract

In this paper, we propose a real option model under a 2-dimensional jump process which belongs to Lévy processes. We consider a situation that the expected present value of the investment project is a homogeneous function of degree n of two stochastic valuables, and derive a closed form solution for the optimal investment threshold. Furthermore, we derive a closed form formula for the expectation of the first passage times reach to the threshold. We show that the moment-generating function of the first passage time can be obtained from the result for solving the expected present value of the investment project by putting $n = 0$.

はじめに

リアルオプション理論の既存研究では、投資の意思決定に関わる確率変数について幾何ブラウン運動を仮定する場合が多い(1)。幾何ブラウン運動は連続的に変動する経路を持ち、市場性の金融資産価格の変動を表すことで広く使われている。しかし、実物資産への投資の場合、投資プロジェクトから発生するキャッシュフローは製品の価格や需要量などの状態変数から影響を受けて変化し、これらの状態変数の確率的な変動は経済状況の変化により影響を受けてしばしば不連続に変化する。このため、キャッシュフローが不連続的に変化することは自然である。このことから、リアルオプション理論において無条件に幾何ブラウン運動を適用することは適当ではないと言える。この論文では、こうした問題に対処するため、比較的に扱いが容易な確率過程として、不連続的な変化がポアソン過程に従って発生し、変動の幅もまた確率変数である複合ポアソン過程（跳躍過程）の適用を考え、複合ポアソン過程でのリアルオプション・モデルを提案する。

古典的リアルオプション・モデルでは、状態変数の１つのみを確率変数として捉える場合がほとんどである。実物資産への投資の場合、収入のみならず、費用なども不確実に変化する状況が多く見受けられる。収入と費用をもとに確率変数として捉える 2 変数モデルを最初に提案したのは McDonald and Siegel(1986)である。彼らは、投資プロジェクトの収入と投資費用が幾何ブラウン運動に従うと仮定し、2 変数の幾何ブラウン運動におけるリアルオプション・モデルを構築し、その数理的解法を確立した。そこでは、直接的に収入と投資費用を確率過程としているので、投資価値が収入と投資費用の 1 次の同次関数である場合の解法を提示している。実物資産への投資の場合、プロジェクトから収入と費用は不確実的変動する製品の価格や需要量および原材料の価格などから影響を受けるので、収入と費用のそのものを確率変数と考えるのではなく、それらを確率変数の関数と考えるのがより現実的である(2)。そこで、ここでは、投資プロジェクトの収入および費用がそれぞれ特定の状態変数に依存して変化する場合、とりわけ、収入および費用がそれぞれの依存する状態変数の n 乗の形となるときについて、リアルオプション・モデルを構築し、そこでの最適な投資基準を求める(3)。すなわち、ここでは、2 変数の複合ポアソン過程の下で、投資の期待現在価値がこれらの確率変数の n 次の同次関数であるときのリアルオプション・モデルを構築し、その数理的解法を確立することを試みる。

リアルオプション理論の研究では、通常、投資実行の最適閾値を示すことが主要な目的となっているが、実際の投資問題としてはどの時点で投資が実行されるのかに関心がある。確率変数が最初に特定の値以上になる時間（初到達時間）は確率変数となるため、一つの特定の数値を示すことができない。ここでは、投資実行の最適閾値への初到達時間の平均値を求めることにする。

本稿は次のように構成される。1 節では 2 変数複合ポアソン過程に関する必要な数理を概観する。2 節では投資問題をモデリングし、基本方程式を導出する。3 節で最適閾値を導出し、4 節では投資を実行するまでの平均待ち時間である最適

閾値への初到達時間の平均値を求める。5 節で結論を述べる。2 節に関する数学の詳細は付録にまとめる。

1. 確率過程に関する基本的事項

２変数確率過程$\{X_1(t), X_2(t)\}$はパラメータ$\kappa_i (i=1,2)$のポアソン過程にしたがって上方にシフトし、上方シフトが発生すると$X_i(t)$は$X_i(t)U_i$になり、パラメータ$\lambda_i (i=1,2)$のポアソン過程にしたがって下方にシフトし、下方のシフトが発生すると$X_i(t)$は$X_i(t)D_i$になる。ここで、U_i $(U_i > 1)$とD_i $(0 < D_i < 1)$は確率変数で、$X_i(t)$ $(i=1,2)$とシフト発生のポアソン過程およびU_i, D_i $(i=1,2)$はすべて相互に独立であるとする。このような 2 変数確率過程は 2 変数のレヴィ過程の 1 種であり、ここでは 2 変数跳躍過程と呼ぶことにする。

2 変数跳躍過程$\{X_1(t), X_2(t)\}$の無限小生成作用素は

$$
\begin{aligned}
LV(x_1, x_2) = {} & \kappa_1 E[V(x_1 U_1, x_2) - \mathrm{V}(x_1, x_2)] + \lambda_1 E[V(x_1 D_1, x_2) - \mathrm{V}(x_1, x_2)] \\
& + \kappa_2 E[V(x_1, x_2 U_2) - \mathrm{V}(x_1, x_2)] \\
& + \lambda_2 E[V(x_1, x_2 D_2) - \mathrm{V}(x_1, x_2)] \qquad (1)
\end{aligned}
$$

となる。また、$X_1(t)$と$X_2(t)$のレヴィ冪指数(Lévy Exponent)を$\mathrm{g}_1(\theta)$と$g_2(\theta)$で表しと、

$$\mathrm{g}_1(\theta) = \kappa_1 E\left[U_1^\theta - 1\right] + \lambda_1 E\left[D_1^\theta - 1\right] \qquad (2)$$

$$g_2(\theta) = \kappa_2 E\left[U_2^\theta - 1\right] + \lambda_2 E\left[D_2^\theta - 1\right] \qquad (3)$$

となる[4]。レヴィ冪指数の性質から、

$$E^{x_1}[[X_1(t)]^n] = x_1^n e^{g_1(n)t}, \qquad E^{x_2}[[X_2(t)]^n] = x_2^n e^{g_2(n)t}$$

となる。ここで、$E^{x_i}[\cdot]$は$X_i(0) = x_i$ $(i=1,2)$のときの条件付き期待値である。以下では、$g_1(1), g_2(1)$をg_1, g_2で表すことにする。

関数$\mathrm{V}(x_1, x_2)$がx_1, x_2の n 次の同次関数であるとき、$\mathrm{y} = x_1/x_2$, $\mathrm{W(y)} = \mathrm{V(y,1)}$とすると、

$$\mathrm{V}(x_1, x_2) = x_2^n W(y)$$

となる。$\mathrm{V}(x_1, x_2)$を投資プロジェクトからのキャッシュフローを割引率 r で割り引いた現在価値とし、$\{X_1(t), X_2(t)\}$が投資実行領域に到達以前にはキャッシュフローが発生しないとすると、投資実行領域に到達する以前の微小時間 dt に対し、$\mathrm{V}(x_1, x_2) = e^{-rdt} E[\mathrm{V}(X_1(dt), X_2(dt))]$が成り立つことから

$$LV(x_1, x_2) = r\mathrm{V}(x_1, x_2)$$

となる。$\mathrm{V}(x_1, x_2)$がx_1, x_2の n 次の同次関数であるとき、(1)式は

$$
\begin{aligned}
& \kappa_1 E^y[W(U_1 y) - \mathrm{W(y)}] + \lambda_1 E^y[W(D_1 y) - \mathrm{W(y)}] + \kappa_2 E^y[U_2^n W(y/U_2) - \mathrm{W(y)}] \\
& \quad + \lambda_2 E^x[D_2^n W(y/D_2) - \mathrm{W(y)}] = rW(y) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

となる。以下では、$\log U_i$と$\log(1/D_i)$ $(i=1,2)$の確率分布がパラメータζ_i $(\zeta_i > 0)$とη_i $(\eta_i > 0)$の指数分布であるとする。この場合、レヴィ冪指数は$-\eta_1 < \theta < \zeta_1$では

$$g_1(\theta) = \frac{\kappa_1\theta}{\zeta_1 - \theta} - \frac{\lambda_1\theta}{\eta_1 + \theta},$$

$-\eta_2 < \theta < \zeta_2$では

$$g_2(\theta) = \frac{\kappa_2\theta}{\zeta_2 - \theta} - \frac{\lambda_2\theta}{\eta_2 + \theta}$$

となり、ζ_1, ζ_2が 1 より大であると、

$$g_1 = \frac{\kappa_1}{\zeta_1 - 1} - \frac{\lambda_1}{\eta_1 + 1} \quad , \quad g_2 = \frac{\kappa_2}{\zeta_2 - 1} - \frac{\lambda_2}{\eta_2 + 1}$$

となる。

2. モデル

投資実行後のキャッシュフローが確率変数$X_1(t)$の関数で、$[X_1(t)]^n$で表せるとする。また、投資コストが確率変数$X_2(t)$の関数で、$\mathrm{K}[X_2(t)]^n$であるとする。$\{X_1(t), X_2(t)\}$が最初に投資実行領域に到達した時刻を T とし、その後、永続的にキャッシュフローが得られるとし、割引率をr $(\mathrm{r} > g_1(n))$とすると、その時点でのキャッシュフローの期待現在価値は

$$C_n[X_1(T)]^n - \mathrm{K}[X_2(T)]^n, \qquad C_n = \frac{1}{r - g_1(n)}$$

となる。現在時点 0 での期待現在価値$\mathrm{V}(x_1, x_2)$は

$$\mathrm{V}(x_1, x_2) = E^x[e^{-rT}(C_n[X_1(T)]^n - \mathrm{K}[X_2(T)]^n)]$$

となり、x_1, x_2の n 次の同次関数となる。したがって、

$$\mathrm{V}(x_1, x_2) = x_2^n W(y)$$

が成立し、$W(y)$が(4)式を満たす。ここで、x_i $(i = 1,2)$は時点 0 での$X_i(0)$の値である。

(4)式を満たす$\mathrm{W(y)}$の解が$\sum A_i y^{\alpha_i}$であるとし、境界条件として、$\mathrm{W}(0) = 0$とすると、$\alpha_i > 0$となる。また、閾値y_0についての境界条件を

$$\mathrm{W(y)} = \begin{cases} \sum A_i y^{\alpha_i} & y < y_0 \\ C_n y^n - K & y \geq y_0 \end{cases}$$

とすると、$\zeta_i > n$であると、

$$\mathrm{E}[\mathrm{W}(U_1 y)] = \sum A_i y^{\alpha_i} \frac{\zeta_1}{\alpha_i - \zeta_1}\left[\left(\frac{y_0}{y}\right)^{\alpha_i - \zeta_1} - 1\right] - C_n y^n \frac{\zeta_1}{n - \zeta_1}\left(\frac{y_0}{y}\right)^{n - \zeta_1}$$
$$- K\left(\frac{y_0}{y}\right)^{-\zeta_1},$$

$$\mathrm{E}[W(D_1 y)] = \sum A_i y^{\alpha_i} \frac{\eta_1}{\alpha_i + \eta_1} \ ,$$

$$\mathrm{E}[U_2^n W(y/U_2)] = -\sum A_i y^{\alpha_i} \frac{\zeta_2}{n-\alpha_i-\zeta_2},$$

$$\mathrm{E}[D_2^n W(y/D_2)] = \sum A_i y^{\alpha_i} \frac{\eta_2}{\alpha_i-n-\eta_2}\left[\left(\frac{y_0}{y}\right)^{\alpha_i-n-\eta_2}-1\right] + C_n y^n \left(\frac{y_0}{y}\right)^{-\eta_2} - K\frac{\eta_2}{n+\eta_2}\left(\frac{y_0}{y}\right)^{-n-\eta_2}$$

となる(5)。これらを先の(4)式に代入して整理すると、

$$\sum A_i y^{\alpha_i}\left[\frac{\kappa_1\alpha_i}{\zeta_1-\alpha_i}-\frac{\lambda_1\alpha_i}{\eta_1+\alpha_i}-\frac{\kappa_2(\alpha_i-n)}{\zeta_2+(\alpha_i-n)}+\frac{\lambda_2(\alpha_i-n)}{\eta_2-(\alpha_i-n)}-r\right]$$
$$-\kappa_1\zeta_1\left(\frac{y_0}{y}\right)^{-\zeta_1}\left[\sum A_i y_0^{\alpha_i}\frac{1}{\zeta_1-\alpha_i}-\frac{1}{\zeta_1-n}C_n y_0^n+\frac{1}{\zeta_1}K\right]$$
$$-\lambda_2\eta_2\left(\frac{y_0}{y}\right)^{-\eta_2-n}\left[\sum A_i y_0^{\alpha_i}\frac{1}{\eta_2-\alpha_i+n}-\frac{1}{\eta_2}C_n y_0^n+\frac{1}{\eta_2+n}K\right]$$
$$=0$$

となる。この式が任意の y について成立するためには、

$$\frac{\kappa_1\alpha_i}{\zeta_1-\alpha_i}-\frac{\lambda_1\alpha_i}{\eta_1+\alpha_i}-\frac{\kappa_2(\alpha_i-n)}{\zeta_2+(\alpha_i-n)}+\frac{\lambda_2(\alpha_i-n)}{\eta_2-(\alpha_i-n)}-r=0 \qquad (5a)$$

$$\sum A_i y_0^{\alpha_i}\frac{1}{\zeta_1-\alpha_i}-\frac{1}{\zeta_1-n}C_n y_0^n+\frac{1}{\zeta_1}K=0 \qquad (5b)$$

$$\sum A_i y_0^{\alpha_i}\frac{1}{\eta_2-\alpha_i+n}-\frac{1}{\eta_2}C_n y_0^n+\frac{1}{\eta_2+n}K=0 \qquad (5c)$$

を満たすことが必要になる。$r > g_1(n), r > g_2(n)$であると、(5a)式を満たす正のα_iは２個存在し、いずれも n より大になる。これらの正の解をそれぞれα_1とα_2で表し、$\alpha_1 < \alpha_2$であるとする。

(5a)式を満たす正のα_iは２個存在することにより、(5b)式と(5c)式のA_iも２個でなければならない。これらをA_1とA_2で表すことにする。A_1とA_2は(5b)式と(5c)式からなる連立方程式より求められる。また、A_1とA_2が投資実行の閾値y_0の関数であり、投資プロジェクトの期待現在価値を最大にすることは、A_1とA_2をy_0について最大にすることとなる。次の節では、A_1とA_2を求め、さらに、A_1とA_2を最大する最適閾値を求めることにする。

3. 最適閾値

(5b)式と(5c)式は

$$\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\zeta_1-\alpha_1} & \dfrac{1}{\zeta_1-\alpha_2}\\ \dfrac{1}{\eta_2+n-\alpha_1} & \dfrac{1}{\eta_2+n-\alpha_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1 y_0^{\alpha_1}\\ A_2 y_0^{\alpha_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\zeta_1-n} & \dfrac{1}{\zeta_1}\\ \dfrac{1}{\eta_2} & \dfrac{1}{\eta_2+n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_n y_0^n\\ -K\end{bmatrix}$$

と表されるので、上の式の左辺の行列の行列式を D で表すと

$$\mathrm{D}=\frac{(\alpha_2-\alpha_1)\big(\zeta_1-(\eta_2+n)\big)}{(\zeta_1-\alpha_1)(\zeta_1-\alpha_2)(\eta_2+n-\alpha_1)(\eta_2+n-\alpha_2)}$$

となり、

$$A_1y_0^{\alpha_1}=\frac{\alpha_2-n}{\alpha_2-\alpha_1}\frac{\zeta_1-\alpha_1}{\zeta_1-n}\frac{\eta_2+n-\alpha_1}{\eta_2}C_ny_0^n-\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}\frac{\zeta_1-\alpha_1}{\zeta_1}\frac{\eta_2+n-\alpha_1}{\eta_2+n}K \tag{6a}$$

$$A_2y_0^{\alpha_2}=\frac{\alpha_1-n}{\alpha_1-\alpha_2}\frac{\zeta_1-\alpha_2}{\zeta_1-n}\frac{\eta_2+n-\alpha_2}{\eta_2}C_ny_0^n-\frac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}\frac{\zeta_1-\alpha_2}{\zeta_1}\frac{\eta_2+n-\alpha_2}{\eta_2+n}K \tag{6b}$$

となる。

(6a)式と(6b)式の右辺の$C_ny_0^n$とKの係数をP_i,Q_i (i = 1,2)とすると、

$$A_i=\frac{P_iC_ny_0^n-Q_iK}{y_0^{\alpha_i}}$$

となり、A_iのy_0についての最大化の第1次条件

$$\mathrm{n}P_iC_ny_0^{*n}=\alpha_i(P_iC_ny_0^{*n}-Q_iK)$$

から

$$y_0^{*n}=\frac{\alpha_1}{\alpha_1-\mathrm{n}}\;\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\mathrm{n}}\;\frac{\zeta_1-\mathrm{n}}{\zeta_1}\;\frac{\eta_2}{\eta_2+\mathrm{n}}\frac{K}{C_n} \tag{7}$$

となる。

通常のリアルオプション理論の研究では上の(7)式で完結することになる。すなわち、$X_1(t),X_2(t)$の実現値を絶えずに観察し、これらの実現値の比のn乗が(7)式右辺で求められた値に到達または超えた時点で投資を実行するのが最適となる。しかし、実務では最適閾値がどのレベルになるよりも、どれだけ待てば投資を実行できるのかに関心ある。つまり、いつ最適閾値に到達できるのかが問題となる。確率変数の初到達時間も確率となるため、投資実行までの平均待ち時間として、次の節では2変数の跳躍過程の初到達時間の平均値を示す。

4. 最適閾値への初到達時間

yからy_0への初到達時間の積率母関数$\mathrm{E}[e^{-rT}]$は、

$$\lim_{T\to 0}\mathrm{E}[e^{-rT}]=1$$

となることから、x_1,x_2の0次の同次関数となる。閾値y_0についての境界条件

$$\mathrm{W(y)}=\begin{cases}\sum A_iy^{\alpha_i} & y<y_0\\ 1 & y\geq y_0\end{cases}$$

となる。このことから、(5b)と(5c)式で$\mathrm{n}=0, C_n=1, K=0$とすることにより

$$\mathrm{E}[e^{-rT}]=\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}\frac{\zeta_1-\alpha_1}{\zeta_1}\frac{\eta_2-\alpha_1}{\eta_2}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\alpha_1}+\frac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}\frac{\zeta_1-\alpha_2}{\zeta_1}\frac{\eta_2-\alpha_2}{\eta_2}\left(\frac{y}{y_0}\right)^{\alpha_2} \quad (8)$$

となる。ここで、α_1とα_2は(5a)式で n=0 とした方程式

$$\frac{\kappa_1\alpha_i}{\zeta_1-\alpha_i}-\frac{\lambda_1\alpha_i}{\eta_1+\alpha_i}-\frac{\kappa_2\alpha_i}{\zeta_2+\alpha_i}+\frac{\lambda_2\alpha_i}{\eta_2-\alpha_i}-r=0 \quad (9)$$

の正の解である。ただし、$\mathrm{r}>0$である。

初到達時間の平均値は、$\frac{\kappa_1}{\zeta_1}-\frac{\lambda_1}{\eta_1}-\frac{\kappa_2}{\zeta_2}+\frac{\lambda_2}{\eta_2}>0$のとき、

$$\mathrm{E}^{\mathrm{y}}[\mathrm{T}]=\frac{\log\frac{\mathrm{y}_0}{\mathrm{y}}+\frac{1}{\zeta_1}+\frac{1}{\eta_2}-\frac{1}{\widehat{\alpha}_2}\left(1-\frac{\zeta_1-\widehat{\alpha}_2}{\zeta_1}\frac{\eta_2-\widehat{\alpha}_2}{\eta_2}\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{y}_0}\right)^{\widehat{\alpha}_2}\right)}{\frac{\kappa_1}{\zeta_1}-\frac{\lambda_1}{\eta_1}-\frac{\kappa_2}{\zeta_2}+\frac{\lambda_2}{\eta_2}} \quad (10)$$

となる。ここで、$\widehat{\alpha}_2$は(9)式で$\mathrm{r}=0$としたとき、

$$\frac{\kappa_1\alpha_i}{\zeta_1-\alpha_i}-\frac{\lambda_1\alpha_i}{\eta_1+\alpha_i}-\frac{\kappa_2\alpha_i}{\zeta_2+\alpha_i}+\frac{\lambda_2\alpha_i}{\eta_2-\alpha_i}=0 \quad (9')$$

の正の解である。

5. 結論

この論文では、2 変数の跳躍過程でのリアルオプション・モデルを提案し、最適閾値の明示的解を示した。ここで提案した 2 変数モデルは、投資プロジェクトの期待現在価値が確率変数の 1 次の同次関数ではなく、n 次の同次関数に拡張したもので、より広範囲な投資問題に適用することができる。さらに、投資閾値への初到達時間の平均値を求め、明示的計算式を示すことができた。ここでは、2 変数の跳躍過程の初到達時間の積率母関数を求める方法として、投資プロジェクトの期待現在価値を求める際の結果に対して$\mathrm{n}=0$とすることで得られることを示した。

【注】

(1) リアルオプション理論の初期の研究を集成した文献としては Dixit and Pindyck (1994)、Schwartz and Trigeorgis (2001)がある。

(2) 例えば、製品の価格と需要量が線形関数となる場合でも、収入は需要量の 2 次関数となる。

(3) 状態変数が幾何ブラウン運動である場合については董・飯原(2014)で議論している。

(4) レヴィ冪指数(Lévy Exponent)は Lévy－Khintchine Formula とも呼ばれるもので、その詳細については Sato(2013)を参照する。

(5) 詳細は付録を参照する。

A. 付録

閾値y_0での境界条件が

$$\mathrm{W(y)} = \begin{cases} \sum A_i y^{\alpha_i} & y < y_0 \\ Cy - K & y \geq y_0 \end{cases}$$

であるとき、

$$\mathrm{W}(U_1 y) = \begin{cases} \sum A_i (U_1 y)^{\alpha_i} & U_1 y < y_0 \\ C\ U_1 y - K & U_1 y \geq y_0 \end{cases}$$

$$W(D_1 y) = \sum A_i (D_1 y)^{\alpha_i}$$

$$W\left(\frac{1}{U_2} y\right) = \sum A_i \left(\frac{1}{U_2} y\right)^{\alpha_i}$$

$$W\left(\frac{1}{D_2} y\right) = \begin{cases} \sum A_i \left(\frac{1}{D_2} y\right)^{\alpha_i} & \frac{1}{D_2} y < y_0 \\ C \frac{1}{D_2} y - K & \frac{1}{D_2} y \geq y_0 \end{cases}$$

となる。

U_1の確率分布関数が$F_1(z)$、D_1の確率分布関数が$G_1(z)$であると、

$$E^y[\mathrm{W}(U_1 y)] = \int_1^{\frac{y_0}{y}} \sum A_i (zy)^{\alpha_i}\, dF_1(z) + \int_{\frac{y_0}{y}}^{\infty} (C\ zy - K\ ) dF_1(z)$$

$$= E\left[\sum A_i (U_1 y)^{\alpha_i}\ \right] - \int_{\frac{y_0}{y}}^{\infty} \left(\sum A_i (zy)^{\alpha_i} - C\ zy + K\ \right) dF_1(z)$$

$$E^y[W(D_1 y)] = \int_0^1 \sum A_i (zy)^{\alpha_i}\, dG_1(z) = E\left[\sum A_i (D_1 y)^{\alpha_i}\right]$$

となり、U_2の確率分布関数が$F_2(z)$、D_2の確率分布関数が$G_2(z)$であると、

$$E^y\left[U_2 W\left(\frac{1}{U_2} y\right)\right] = \int_1^{\infty} z \sum A_i \left(\frac{1}{z} y\right)^{\alpha_i} dF_2(z) = E\left[U_2 \sum A_i \left(\frac{1}{U_2} y\right)^{\alpha_i}\right]$$

$$E^y\left[D_2W\left(\frac{1}{D_2}y\right)\right]=\int_{\frac{y}{y_0}}^{1}z\sum A_i\left(\frac{1}{D_2}y\right)^{\alpha_i}dG_2(z)+\int_0^{\frac{y}{y_0}}z\left(C\frac{1}{z}y-K\right)dG_2(z)$$
$$=E\left[D_2\sum A_i\left(\frac{1}{D_2}y\right)^{\alpha_i}\right]$$
$$-\int_0^{\frac{y}{y_0}}z\left(\sum A_i\left(\frac{1}{z}y\right)^{\alpha_i}-C\frac{1}{z}y+K\right)dG_2(z)$$

となる。

【参考文献】

Dixit, A. K. and R. Pindyck (1994), *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press.

McDonald, R. and D. Siegel (1986), ``The Value of Waiting to Invest," *Quarterly Journal of Economics*, Vol.101, 707--727.

Sato, K. (2013), *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions (Revised edition),* Cambridge University Press.

Schwartz, E. S. and L. Trigeorgis, ed. (2001), *Real Options and Investment under Uncertainty: Classical Readings and Recent Contributions*, the MIT Press.

董晶輝・飯原慶雄（2014）「2 次元リアルオプション・モデルに関連した微分方程式の解法」、『日本経営数学会誌』、第 35 巻第 1,2 号、pp.1-14。

特記：本稿の一部は平成 27 年度東洋大学井上円了記念研究助成による支援を受けた研究に基づくものである。