ベンチャー・キャピタルの投資計画 ： 2変量リアルオプション・モデルによる投資タイミングの決定 (ベンチャーの創造と国際的企業家育成研究グループ)

著者	董 晶輝
雑誌名	経営力創成研究
号	11
ページ	95-106
発行年	2015-03
URL	http://id.nii.ac.jp/1060/00007592/

ベンチャー・キャピタルの投資計画

— 2変量リアルオプション・モデルによる投資タイミングの決定 —

Investment Plans of Venture Capitals: Determining the Optimal Investment Timing by Using a Two-Dimensional Real Options Model

東洋大学経営力創成研究センター　研究員　董　晶輝

要旨

この論文では、ベンチャー・キャピタルがベンチャー企業へ投資する際の投資評価手法として、リアルオプション法を応用する場合に関して、その問題点と解決策について検討する。ここでは、広く利用されている1変数モデルを利用する代わりに2変数モデルの適用を考え、その効果として、投資実行までの期待待ち時間が大幅に短縮する場合があることを明らかにする。2 変数モデルは複雑であると考えられがちであるが、1 変数モデルとの対応関係を整理することにより、２つのモデルをほとんど同じように利用できることを示す。したがって、2 変数モデルは、単に、より現実的なモデルというだけではなく、より柔軟な投資案作成のためにも役立つものであることが明らかになった。

キーワード（Keywords）：ベンチャー・キャピタル（venture capital）、投資（investment）、最適タイミング（the optimal timing）、期待待ち時間（expected waiting time）、2次元幾何ブラウン運動（2-dimensional geometric Brownian motion）、リアルオプション・モデル（real options model）

Abstract

In this paper, we examine the problems and solutions of using the real options method to evaluate venture firms when venture capitals make investment plans intending to invest in the equities of venture firms. We consider to employ a two-dimensional real options model instead of a one-dimensional real options model which is widely used in business practice, and show that it has effective to shorten the expected waiting time to invest by a large amount. It is apt to be thought that a two-dimensional model is more complex than a one-dimensional model, we show that the procedures of using the two models are almost the same by putting the relation of the two models in order. Thus, we argue that a two-dimensional model is not only more realistic, but also useful for making more flexible investment plans.

はじめに

ベンチャー・キャピタルがベンチャー企業へ投資を行う際の投資評価手法として、リアルオプション法の利用が増えてきている。投資リスクの高いベンチャー企業の評価法として、リアルオプション法は従来の正味現在価値法より適切であることは広く認識されるようになり、実務での応用が広がっている。しかし、リアルオプション・モデルを実際の投資案件に応用する際に生じる諸問題についてはまだ十分議論されていない。たとえば、リアルオプション・モデルでは、閾値や期待現在価値については議論されるが、実際の投資案件として、実務で重要な判断要素となる閾値に到達するまでの時間（以下では投資実行するまでの「平均待ち時間」と呼ぶことにする）についてはあまり議論されていない。ベンチャー企業の不確実性が高いため、投資評価を行う際に、リスクを考慮した割引率はかなり高い(1)。この場合、実務で広く利用されている 1 変数のリアルオプション・モデルを応用すると投資実行するまでの平均待ち時間がかなり長くなるという問題が生じる。投資実行するまでの待ち時間があまりに長い投資案は、投資実行するまでの間に、当初考えた事情に変化が生じる可能性が大きくなり、適切な投資案と考えられない可能性が大である。しかし、このような投資案件を簡単に却下することは賢明な意思決定ではなく、将来の状況変化の次第では、価値のある投資案件となるかもしれない。状況変化を考える際、ひとつのリスク要因、例えば、将来の収益の不確実性しか考慮しないのが 1 変数モデルである。投資費用の不確実性も同時に考慮する 2 変数モデルでは状況変化による効果が変わることが予想される。そこで、この論文では、こうした問題の解決策として 2 変数モデルの応用を考えてみる。答えを見出すため、まず状況の変化（パラメータ値の変化）がもたらす効果について調べてみる。

リアルオプション理論では、投資の閾値と期待現在価値について、1 変数モデルでのパラメータの変化の効果についてはよく議論されているが、2 変数モデルでのパラメータの変化の効果についてはあまり議論されていなく、さらには、誤った議論も見受けられる(2)。そこで、この論文では、2 変数モデルについての比較静学を 1 変数モデルと比較しながら検討する。また、この論文では、投資を実行するまでの期待待ち時間にも焦点を当て、比較静学分析を行う。比較静学から予想されるように、投資費用を一定とする代わりにゆるい形の変動を仮定することにより、投資実行までの平均待ち時間はかなり短縮される。

論文は以下のように構成される。1 節では、記号の説明を兼ねて、1 変数モデルと 2 変数モデルを要約する。2 節では、各パラメータの変化が閾値、期待現在価値、平均待ち時間にどのような影響を与えるかについて、1 変数モデルと比較しながら見てみる。この節では単調な減少または増加関数となるものだけを取り上げ、やや複雑な動きをするものについては、次の 3 節で検討する。4 節では、数値例をもとに、適切な要求収益率についての検討と、その結果から生じる期待待ち時間の急激な上昇に対処するための 2 変数モデルの利用について述べる。

1. 1変数および2変数モデルの要約

ネット・キャッシュフロー$X_1(t)$ の変動が

$$dX_1(t) = \mu_1 X_1(t)dt + \sigma_1 X_1(t)dW_1(t) \qquad X_1(0) = x \tag{1}$$

に従うとし、投資費用がK、割引率を$r\ (> \mu_1)$とすると、投資実行の閾値は

$$x^* = \frac{\alpha}{\alpha - 1}(r - \mu_1)K \tag{2}$$

となり、現在のネット・キャッシュフローの水準$x < x^*$のときの投資プロジェクトの期待現在価値は

$$V(x) = \frac{K}{\alpha - 1}\left(\frac{x}{x^*}\right)^{\alpha} \tag{3}$$

となる。ここで、α は2次方程式

$$\frac{1}{2}{\sigma_1}^2 z(z-1) + \mu_1 z - r = 0 \tag{4}$$

の正の解である。また、1次元幾何ブラウン運動$X_1(t)$について、x から x^* に最初に到達するまでの初到達時間（first passage time）の期待値（以下では、これを投資実行までの平均待ち時間と呼ぶ）は

$$E_1^x[\tau] = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_1 - \sigma_1^2/2}\log\left(\dfrac{x^*}{x}\right) & \mu_1 - \sigma_1^2/2 > 0 \\ \infty & \mu_1 - \sigma_1^2/2 \le 0 \end{cases} \tag{5}$$

となる(3)。

投資費用も確率的に変動する場合を考え、投資費用$X_2(t)$も幾何ブラウン運動に従うとして、ネット・キャッシュフローと投資コストを$\{X_1(t), X_2(t)\}$の2次元幾何ブラウン運動とし、その確率的変動が

$$dX_i(t) = \mu_i X_i(t)dt + \sigma_i X_i(t)dW_i(t) \qquad (i = 1,2) \tag{6}$$

で表わされるとして、$E[dW_1(t)dW_2(t)] = \rho dt$とする。$Y(t) = X_1(t)/X_2(t)$とし、$r > \mu_1, r > \mu_2$ であると、投資実行の閾値は

$$y^* = \frac{\alpha}{\alpha - 1}(r - \mu_1) \tag{7}$$

となる。

$$\sigma^2 = {\sigma_1}^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + {\sigma_2}^2 \tag{8}$$

とすると、αは2次方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2 z(z-1)z + (\mu_1 - \mu_2)z - (r - \mu_2) = 0 \tag{9}$$

の正の解となる(4)。現在のネット・キャッシュフロー$X_1(0)$と投資費用$X_2(0)$の水準がそれぞれx_1とx_2であるとき、$x_1/x_2 = y < y^*$とすると、プロジェクトの期待現在価値は

$$V(x_1, x_2) = x_2 W(y) \qquad W(y) = \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{y}{y^*}\right)^{\alpha} \tag{10}$$

となる。2次元幾何ブラウン運動での投資を実行するまでの平均待ち時間は

$$E_2^y[\tau] = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_1 - \mu_2 - \dfrac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{2}} \log\left(\dfrac{y^*}{y}\right) & \mu_1 - \mu_2 - \dfrac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{2} > 0 \\ \infty & \mu_1 - \mu_2 - \dfrac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{2} \leq 0 \end{cases} \quad (11)$$

となる(5)。

2. 比較静学分析 I

各パラメータの変化の効果を表1に示す（＋符号は増加関数、－符号は減少関数を表わす)。1変数モデルのパラメータの x^* と $V(x)$ についての効果はよく知られているが(6)、1 変数モデルと 2 変数モデルの対応関係を明瞭にするため、両方の比較静学の結果を示した (2変数についての証明は付録A参照)。2変数モデルの場合、σ, μ_1 および r の変化の効果は、σ の期待待ち時間に対する効果を除いて、1変数モデルのσ_1, μ_1 および r のそれと等しくなる。μ_2の変化の閾値と期待現在価値に対する効果は μ_1 の変化に効果の逆になる。σ^2 は ρ の減少関数で、(11)式の分母は ρ と無関係であるので、閾値、期待現在価値、期待待ち時間はすべて、ρ の減少関数となる。

σ_1, σ_2 の変化の効果と μ_2の変化の期待待ち時間に対する効果については次節で取り上げる。

表1　パラメータの効果

1変数モデル				2変数モデル			
	x^*	V(x)	$E_1^x[\tau]$		y^*	W(y)	$E_2^y[\tau]$
σ_1	+	+	+	σ	+	+	
μ_1	−	+	−	μ_1	−	+	−
K	+	−	+	μ_2	−	−	
r	+	−	+	r	+	−	+
				ρ	−	−	−

3. 感度分析比較静学分析 II

σ_1, σ_2, ρ の変化の効果は、これらの変数の σ に対する効果によって決まる。(8)式から明らかのように、$\sigma_1 < \rho\sigma_2$ のとき σ^2 は σ_1 の減少関数となり、$\sigma_1 > \rho\sigma_2$ のとき σ^2 は σ_1の増加関数となる。 ρ の各種の値に対する σ^2 と σ_1の関係を図 1 に示した。σ_2 についても、σ_1と同様の関係が成り立つ。

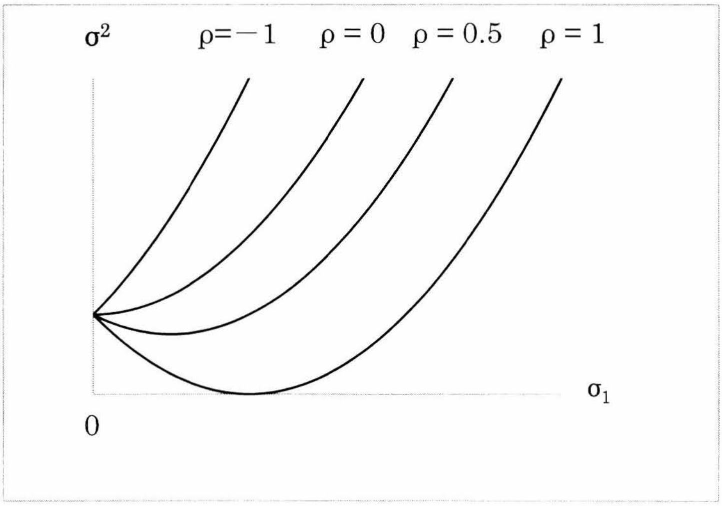

図 1　各種の ρ に対する σ_1 の σ^2 への効果

σ_1 の変化の閾値、期待現在価値、期待待ち時間に対する効果は、図 2a のようになり、σ_2 の変化の効果は図 2b のようになる（縦軸の尺度は閾値、期待現在価値、期待待ち時間で異なる)。すなわち、閾値と期待現在価値は、$\sigma_1 < \rho\sigma_2$ のとき σ_1 の減少関数となり、$\sigma_1 > \rho\sigma_2$ のとき σ_1 の増加関数となる。。期待待ち時間の最小点は $\rho\sigma_2$ より小となる（σ_2 のときは $\rho\sigma_1$ より大となる)。（補足は付録 B 参照）

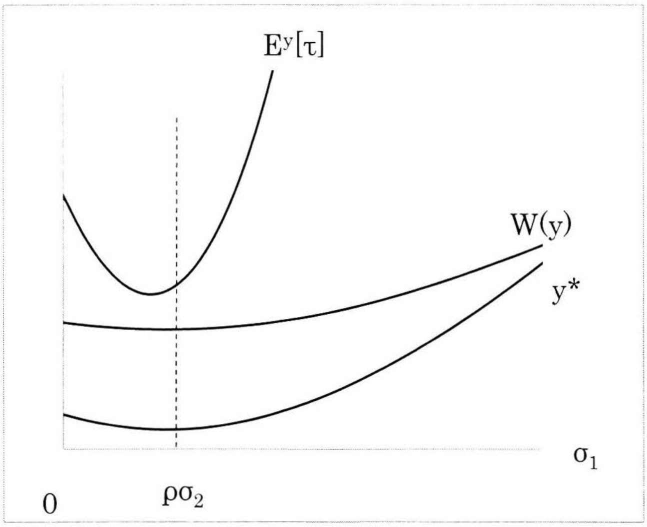

図 2a　σ_1 の変化の効果

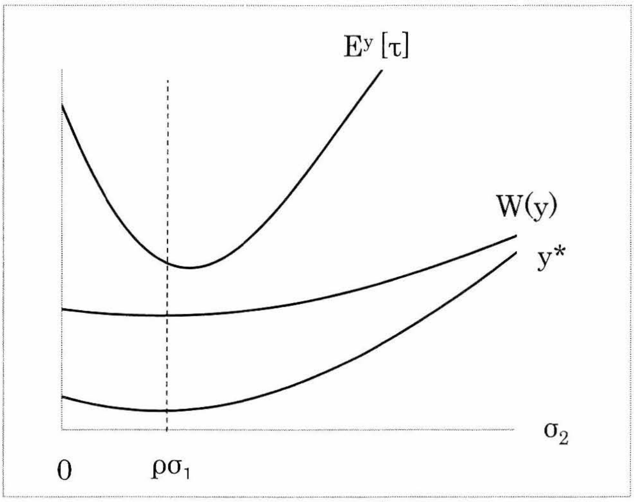

図 2b. σ_2 の変化の効果

μ_2 の変化の期待待ち時間に与える効果は現時点での y の値によって異なる。(11) 式から明らかなように、期待待ち時間 $E_2^y[\tau]$ は y の減少関数で、(11) 式で、$y < y^*$ で、期待待ち時間が非負であることを無視すると、(11) 式の分母が零になり点では、上下に発散する。すなわち、$\bar{\mu}_2 = \mu_1 - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2$ とし、$\mu_2 = \bar{\mu}_2$ での y^* を $\bar{y}^*$ とすると、μ_2 が $\bar{\mu}_2$ へ接近するにつれ、$y < \bar{y}^*$ のときには、$E_2^y[\tau]$ は上方へ発散し、$y = \bar{y}^*$ のときには、有限な値に収束し、$y > \bar{y}^*$ のときには下方に発散する（図 3)。(補足は付録 B 参照)

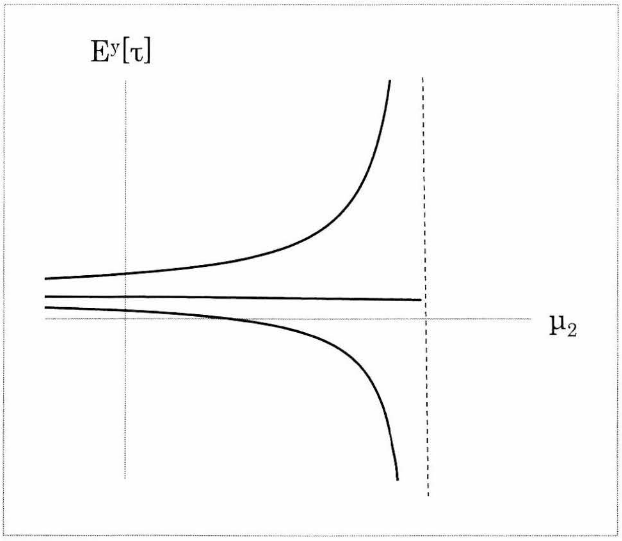

図 3　μ_2 の変化の期待待ち時間に与える効果

4. 2変量モデルの応用

ベンチャー･キャピタルがあるベンチャー企業への投資を検討しているとする。ここでは、ベンチャー・キャピタルが既存のベンチャー企業への出資によって部分的な所有権を取得するか、または、新規のベンチャー企業を立ち上げる際に部分的あるいは全額の資本金を拠出する場合を考える。したがって、ベンチャー・キャピタルの投資収益は出資比率に応じた出資先のベンチャー企業の将来キャッシュフローの期待現在価値から出資金額を引いたものとなる。ベンチャー企業の将来キャッシュフローの不確実性はかなり高いことから、ベンチャー・キャピタルはリアルオプション法を適用して、ベンチャー企業への出資のタイミングを決めることを考える。単純化にするため、以下では出資比率を1として議論を進めていく（出資比率が1以下の場合を考えるには、キャッシュフロー水準に出資比率を掛けることで同様に議論を進めることができる）。ここで、ベンチャー企業のネット・キャッシュフローの変動が幾何ブラウン運動に従うと仮定し、その期待成長率が3%、ボラティリティが20%と推測されたとする。また、出資規模の見積額は 10 であるとする。ベンチャー・キャピタルは当該ベンチャー企業の収益の向上を見込んで、投資実行する時点での正味現在価値を現時点で評価した期待現在価値（以下これを投資の期待現在価値と呼ぶことにする）が最大になるように、投資のタイミングを計って投資を実行しようとする。リスク調整済み割引率を12%として、リアルオプション・モデルを適用すると、投資実行のタイミングはキャッシュフローの水準が 1.6424 に達したときとなり、現在のキャッシュフローの水準が1.6であると、投資の期待現在価値は7.7852となり、投資実行するまでの平均待ち時間は2.62年となる（表2の中間の列)。

表2　1次元モデルにおける検討の結果

	$r = 0.12$	$r = 0.16$
x^*	1.6424	2.1179
$V(x)$	7.7852	3.0437
$E_1^x[\tau]$	2.62	28.04

パラメータ値：$\mu_1 = 0.03,\ \sigma_1 = 0.2,\ K = 10,\ x = 1.6$

この結果はリアルオプション・モデルを適用した場合の極普通なものであると思われるが、よく考えてみると、リスクの高いベンチャー企業への投資評価としては、割引率の12%が低すぎないかという疑問が生じる。そこで、リスクを再評価し、割引率を16%とする。その結果、投資実行水準が 2.1179 で、投資価値が3.0437となり、期待待ち時間が28.04年となる（表2の右の列)。割引率を4%引き上げたことで、期待待ち時間が 10 倍以上になった。ベンチャー企業への投資を評価する際、リスクを考慮した要求収益率はこれよりも高いであることを考えると、リアルオプション・モデルを適用することで、投資の期待現在価値がさら

に低く、期待待ち時間はさらに長くなる。割引率に対する投資の期待現在価値と期待待ち時間を図 4 と図 5 で示している。割引率と期待待ち時間の関係を示す図 5 から分かるように、割引率が増加すると、期待待ち時間が急速に伸びる。このような結果から、リアルオプション理論を実際のベンチャー企業への投資決定際に適用することは困難と考えてしまうかもしれない。

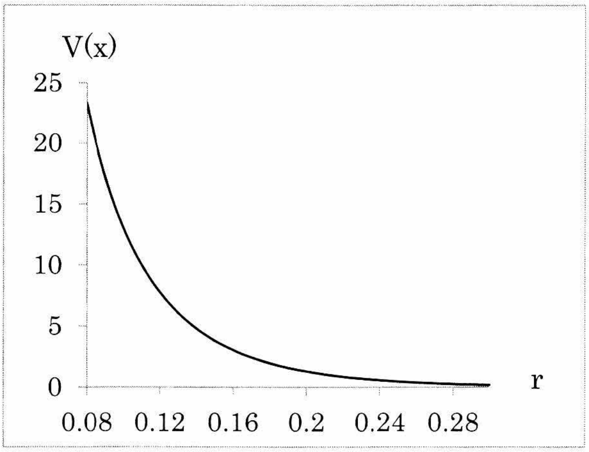

図 4　割引率と期待現在価値

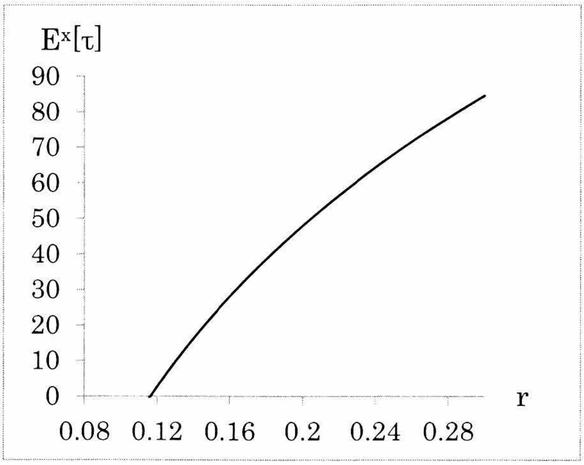

図 5　割引率と期待待ち時間

しかし、上の結果はベンチャー企業への出資金額が出資のタイミングの推移に対して変化しないと考え、1 変数のリアルオプション・モデルを適用したものである。実際の投資案件については、株式市場で上場している同業種企業の株価の変化やベンチャー・キャピタル間の出資競争などの影響で、ベンチャー企業への出資比率が変わらなくでも出資金額は変化する。したがって、2 変数モデルを利用することが望ましいと考えられる。1 変数モデルは比較的に理解しやすいこと

から、広く利用されているが、1節でまとめた2変数モデルと1変数モデルの対応関係を理解しておけば、2変数モデルの利用が1変数モデルの利用とほとんど変わらない。そこで、2変数モデルを利用して上の投資案件を再考してみる。表3は2変数モデルでの検討の結果を示している。[0]の列は比較のため、1次元モデルの結果を2次元モデルで表現したものである。[1]の列は投資費用の変動はトレンドなしで、わずかな変動があるものとして、ボラティリティを10%、キャッシュフローの変動との相関係数を0.5としている。その結果、期待待ち時間は半分に近い15.56年となる。[2]の列は投資コストがさらに緩やかに減少していくと考え、投資コストの期待変化率を−1%とした。この場合、期待待ち時間が10.79年となる。この数値例では、μ_2の変化の効果が図3の上方のグラフに対応するものになっているが、数値例が異なる場合には図3の下方のグラフに対応するものになるので、μ_2の変化については注意する必要がある。

表3　2次元モデルにおける検討の結果

	[0]	[1]	[2]
σ_2	0	0.1	0.1
ρ		0.5	0.5
μ_2	0	0	-0.01
$E_2^y[\tau]$	28.04	15.56	10.79
y^*	0.21179	0.2021	0.2095
$W(y)$	0.30437	0.2881	0.3006

パラメータ値：$\mu_1 = 0.03, \sigma_1 = 0.2, r = 0.16, y = 0.16$

上の例では、1変数モデルで検討の結果、期待待ち時間が数十年になるであれば、プロジェクト案としては諦めざるをえないことになるかもしれない。しかし、投資費用の変動について、比較的緩やかな変化のシナリオを検討することにより、1変数モデルでの期待待ち時間より大幅に短縮されることを示した。

5. 結論

この論文では、ベンチャー・キャピタルがベンチャー企業へ投資する際の投資評価手法として、リアルオプション法を応用する場合に関して、その問題点と解決策について検討した。ここでは、1変数モデルを利用する代わりに2変数モデルの適用を考え、投資実行までの期待待ち時間が大幅に短縮する効果があることを明らかにした。2変数モデルの各パラメータの変化の閾値、期待現在価値、期待待ち時間に与える影響を調べた結果、2変数モデルでは、各変数のボラティリティの単独の比較的小さな増加は、1変数のときのボラティリティの増加と逆の効果をもち、投資費用のドリフトの変動は他のパラメータの値によりやや複雑な効果をもつことを明らかにした。これらの結果をもとに、数値例を使いながら、

２変数モデルを利用することにより、多くの人に納得してもらうことができるような投資案が作成できることを示した。このように、2 変数モデルは、単に、より現実的なモデルというだけではなく、より柔軟な投資案作成のためにも役立つものであることが明らかになった。

【注】

(1) 小椋(2013)の調査によると 15%－25%がもっとも多く、35%までに設定するベンチャー・キャピタルも存在する。

(2) McDonald and Siegel(1986)および Dixit and Pindyck(1996)では、２変数のボラティリティ（σ_1とσ_2)の増加は閾値と期待現在価値を増加させると述べているが、これは３節に示すように正しくない。

(3) 1 次元幾何ブラウン運動での平均初到達時間については Ingersoll (1987, p353-354), Wilmott (2006, p175-178)で取り上げている。

(4) 2 次元幾何ブラウン運動でのモデルは、McDonald and Siegel(1986)より初めて扱われ、Dixit and Pindyck (1996)でも取り上げている。

(5) 2 次元幾何ブラウン運動での平均初到達時間の導出については董・飯原(2014)を参照。

(6) 例えば、Dixit and Pindyck (1996)ではパラメータの投資実行水準とプロジェクトの期待現在価値についての効果を示している。

【付録】

A　比較静学Ｉの証明

$r > \mu_1, r > \mu_2$ のとき、２次方程式

$$\sigma^2\alpha(\alpha-1)/2 + (\mu_1-\mu_2)\alpha - (r-\mu_2) = 0 \tag{A1}$$

を満たす正のαは１個で、かつ、αは１より大となる。また、各パラメータσ^2, μ_1, μ_2, r を、p で表すことにし、(A1)の左辺を$F(\alpha, p)$とすると、

$$\partial\alpha/\partial p = -F_p/F_\alpha$$

$$F_\alpha = \sigma^2\alpha + \mu_1 - \mu_2 - \sigma^2/2$$

$$= ((\sigma\alpha)^2/2 + r - \mu_2)/\alpha = \left(\left(\sigma(\alpha-1)\right)^2/2 + r - \mu_1\right)/(\alpha-1) \tag{A2}$$

となることから、ただちに

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\sigma^2} < 0, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial\mu_1} < 0, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial\mu_2} > 0, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial r} > 0$$

が得られる。　また、(7)から、

$$\frac{\partial \log y^*}{\partial p} = \left(\frac{-1}{\alpha(\alpha-1)}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial p} + \frac{1}{r-\mu_1}\frac{\partial(r-\mu_1)}{\partial p}$$

となり、ただちに

$$\frac{\partial \log y^*}{\partial\sigma^2} > 0, \quad \frac{\partial \log y^*}{\partial\mu_2} < 0$$

が得られ、(A2)から、

$$\frac{\partial \log y^*}{\partial \mu_1} = \frac{1}{\left(\sigma(\alpha-1)\right)^2/2 + r - \mu_1} - \frac{1}{r-\mu_1} < 0$$

$$\frac{\partial \log y^*}{\partial r} = \frac{-1}{\alpha\left(\left(\sigma(\alpha-1)\right)^2/2 + r - \mu_1\right)} + \frac{1}{r-\mu_1} > 0$$

となる。さらに、(8)から、

$$\frac{\partial \log W(y)}{\partial p} = \left(\frac{-1}{\alpha-1} + \log\frac{y}{y^*}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial p} - \alpha\frac{\partial \log y^*}{\partial p} = \log\frac{y}{y^*}\frac{\partial \alpha}{\partial p} - \frac{\alpha}{r-\mu_1}\frac{\partial (r-\mu_1)}{\partial p}$$

となるので、

$$\frac{\partial \log W(y)}{\partial \sigma^2} > 0, \qquad \frac{\partial \log W(y)}{\partial \mu_1} > 0, \qquad \frac{\partial \log W(y)}{\partial \mu_2} < 0, \qquad \frac{\partial \log W(y)}{\partial r} < 0$$

が得られる。

平均待ち時間 $E_2^y[\tau]$ は、μ_1については、分子は減少、分母は非減少であるから、減少関数となり、r については、分子は増加、分母は非増加であるから、増加関数となる。

B 比較静学 II の補論

期待待ち時間については、

$$\frac{\partial E_2^y[\tau]}{\partial \sigma_1} = \frac{\dfrac{\partial \log y^*}{\partial \sigma_1} + E_2^y[\tau]\sigma_1}{\mu_1 - \mu_2 - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2}, \qquad \frac{\partial E_2^y[\tau]}{\partial \sigma_2} = \frac{\dfrac{\partial \log y^*}{\partial \sigma_2} - E_2^y[\tau]\sigma_2}{\mu_1 - \mu_2 - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2}$$

から $E_2^y[\tau]$ の σ_1 についての最小点は y^* について最小点のより左に、 $E_2^y[\tau]$ の σ_2 についての最小点は y^* について最小点のより右になる。

投資実行するまでの平均待ち時間 $E_2^y[\tau]$ は $y = \bar{y}^*$ のときには

$$\lim_{\mu_2 \to \bar{\mu}_2} E_2^{\bar{y}^*}[\tau] = \frac{1}{\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 + r - \bar{\mu}_2}$$

となり、$\bar{\mu}_2$ では $E_2^{\bar{y}^*}[\tau]$ の傾きは零になる。また、$y > y^*$ では、$E_2^y[\tau] = 0$ で、$E_2^y[\tau]$ の傾きは負になる。

【付記】

本研究の一部は平成 24 - 26 年度科学研究費補助金・基盤研究 (C)[24530426] より補助を受けた。また、2 名の匿名のレフェリーよりコメントを頂き、感謝を申し上げます。

【参考文献】

小椋康宏(2013), 「日本のベンチャー・キャピタルおよびコーポレート・ベンチャー・キャピタルの投資行動に関する経営財務論的考察―アンケート調査を中心として―」『青山経営論集』第82巻第3号、21－39。

董晶輝・飯原慶雄(2014), 「2次元リアルオプション・モデルに関連した微分方程式の解法」『日本経営数学会誌』第35巻第1,2号、1-14。

Arkin, V. I. and A. D. Slastnikov (2009), "A Variation Approach to Optimal Stopping Problems for Diffusion Processes", *Theory of Probability & Its Applications*, Vol. 53, No. 3, 467-480.

Dixit, A. K. and R. Pindyck (1994), *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press. (『投資決定理論とリアルオプション』川口有一郎等訳、エコノミスト社、2002)

Hu, Y. and B. Øksendal (1998), "Optimal Time to Invest when the Price Processes are Geometric Brownian Motions", *Finance and Stochastics*, Vol. 2, No. 3, 295-310.

Ingersoll, J. E. (1987), *Theory of Financial Decisions making*, Rowman & Littlefield Publishers.

McDonald, R. and D. Siegel (1986), "The Value of Waiting to Invest," *Quarterly Journal of Economics*, Vol.101, 707-727.

Wilmott, P. (2006), *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, Second ed., Vol. 1, John Wiley & Sons Ltd.

受付日：2015年1月15日　受理日：2015年2月10日