<論文>オプション・ペイオフの期待値計算とその応用

著者	飯原 慶雄
著者別名	Iihara Yoshio
雑誌名	経営論集
巻	55
ページ	41-50
発行年	2002-03-23
URL	http://id.nii.ac.jp/1060/00005530/

オプション・ペイオフの期待値計算とその応用

飯　原　慶　雄

オプション価格理論は、Black=Scholes (1973) と Merton (1973) 以来、無裁定条件を表す微分方程式を解いてオプションの価格を求めるという形で発展し、その後、その微分方程式の解は、オプションの基礎資産の確率過程のドリフトを修正したものについて、満期時のオプションのペイオフの期待値を求め、それを割り引いたものであることが明らかになった。したがって、オプション価格理論では、無裁定条件に対応した確率過程の修正が重要な問題となる。

コーポレート・ファイナンスの分野、特に資本予算の分野でも、オプション価格理論の応用が盛んに取り上げられているが、対象となるプロジェクトからのキャッシュフローのリスクの市場価格 (market price of risk) を正しく求めることができるかについて疑問がもたれている。しかし、それにもかかわらず、オプション理論の利用は、各種のフレキシビリティを考慮したプロジェクトの評価を可能にするという点から有用性が高い。そこで、この論文では、ドリフトの修正の問題は議論しないことにして、キャッシュフローが適切に修正されたものとして、将来のキャッシュフローの現在価値を求めることにする。その際、将来、キャッシュフローがある水準以上のときにだけ投資を実行することにすると、オプションのペイオフの期待値を求めることに対応する計算が必要になる。そこで、コール・オプションのペイオフの期待値の計算について考察する。Black=Scholes 式を変更することにより簡単に得られる結果についても、期待値の計算として求めてみることにする。こうした試みは Black=Scholes 式の理解のためにも役に立つと考えられる。

１．対数正規分布

最初に対数正規分布について考察する。確率変数 X の対数値が正規分布するのが対数正規確率変数である。そこで、X を対数正規確率変数とし、

$$x = \ln X \tag{1}$$

を平均 m 、分散 v の正規確率変数とする。(1)式はまた、

$$X = e^x \tag{2}$$

と表すことができる。

$$1_{X>b} = \begin{cases} 1 & X > b \\ 0 & X \le b \end{cases} \tag{3}$$

とし、

$$E_b(X) = E[X \cdot 1_{X>b}] \tag{4}$$

を X の部分期待値と呼ぶことにする。 X の部分期待値は $c = \ln b$ とすると、

$$E_b(X) = \int_c^{\infty} e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} dx \tag{5}$$

となるが、指数関数の指数部分は

$$x - \frac{(x-m)^2}{2v} = -\frac{(x-m-v)^2}{2v} + m + \frac{v}{2}$$

となるので、

$$E_b(X) = e^{m+\frac{v}{2}} \int_c^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m-v)^2}{2v}} dx$$

となる。 N (・)を標準正規分布関数とすると

$$E_b(X) = e^{m+\frac{v}{2}} N\left(\frac{m+v-c}{\sqrt{v}}\right) = e^{m+\frac{v}{2}} N\left(\frac{m+v-\ln b}{\sqrt{v}}\right) \tag{6}$$

となる。 b を $-\infty$ にすることにより、

$$E(X) = e^{m+\frac{v}{2}} \tag{7}$$

であることがわかる。(7)式から、

$$\ln E(X) = m + \frac{v}{2} \tag{8}$$

となる。(7)式と(8)式を使用すると、

$$E_b(X) = E(X)N\left(\frac{\ln[E(X)/b] + \frac{v}{2}}{\sqrt{v}}\right) \tag{9}$$

と表せる。これにたいして、X が b 以上である確率は、

$$E[1_{X>b}] = \int_{\ln b}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi v}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2v}} dx = N\left(\frac{m - \ln b}{\sqrt{v}}\right) \tag{10}$$

となる。(6)式、(8)式、(10)式から、X の部分期待値は、X の期待値に、X の期待値の対数値が v だけ増加したときの確率分布で X が b 以上になる確率をかけたものになっていることがわかる。(8)式を使って(10)式を書き直すと、

$$E(1_{X>b}) = N\left(\frac{\ln[E(X)/b] - v/2}{\sqrt{v}}\right) \tag{11}$$

となる。

次に、対数正規確率変数 X と Y について、

$$E[\max(X - Y, 0)] = E[(X - Y) \cdot 1_{X>Y}]$$

を求めてみる。

命題　2変量の対数正規確率変数 X 、Y について、$\ln(X/Y)$ の分散を v とすると

$$E[\max(X - Y, 0)] = E(X)N\left(\frac{\ln(E(X)/E(Y)) + v/2}{\sqrt{v}}\right) - E(Y)N\left(\frac{\ln(E(X)/E(Y)) - v/2}{\sqrt{v}}\right) \tag{12}$$

となる。

証明　求める値を A とし、$Z = X/Y$ とすると、

$$A = E[\max(X - Y, 0)] = E[Y \max(Z - 1, 0)]$$

となる。Z もまた対数正規確率変数である。$y = \ln Y$ 、$z = \ln Z$ とすると、

$$A = E\left[e^{y}\left(e^{z}-1\right)1_{z>0}\right]$$

となる。y と z は正規確率変数であるから、その平均、分散、共分散を μ_y、μ_z、σ_y^2、σ_z^2、σ_{yz} とすると、z が与えられたときの y の条件付確率分布は、平均が $\mu_y+\sigma_{yz}(z-\mu_z)/\sigma_z^2$、分散が $\sigma_y^2\left(1-\sigma_{yz}^2/\sigma_y^2\sigma_z^2\right)$ の正規分布になる。A の値を求めるため、y についての条件付期待値を求めた上で、z についての期待値を求めると、

$$\begin{aligned} A &= E\left[\exp\left(\mu_y+\sigma_{yz}(z-\mu_z)/\sigma_z^2+\sigma_y^2\left(1-\sigma_{yz}^2/\sigma_y^2\sigma_z^2\right)/2\right)\left(e^{z}-1\right)1_{z>0}\right] \\ &= \exp\left(\mu_y-\sigma_{yz}\mu_z/\sigma_z^2+\sigma_y^2\left(1-\sigma_{yz}^2/\sigma_y^2\sigma_z^2\right)/2\right) \\ &\qquad \times E\left\{\left[\exp\left(\left(1+\sigma_{yz}/\sigma_z^2\right)z\right)-\exp\left(\sigma_{yz}z/\sigma_z^2\right)\right]1_{z>0}\right\} \end{aligned} \tag{13}$$

となる。正規確率変数 x の期待値と分数を m と v とすると(7)式と(9)式から、

$$E_0\left(e^{ax}\right)=\exp\left(am+\frac{a^2v}{2}\right)N\left(\frac{m+av}{\sqrt{v}}\right)$$

となるので、(13)式の最後の式の期待値の部分は、

$$E_0\left[\exp\left(\left(1+\frac{\sigma_{yz}}{\sigma_z^2}\right)z\right)\right]=\exp\left(\left(1+\frac{\sigma_{yz}}{\sigma_z^2}\right)\mu_z+\frac{\left(\sigma_z^2+\sigma_{yz}\right)^2}{2\sigma_z^2}\right)N\left(\frac{\mu_z+\sigma_z^2+\sigma_{yz}}{\sigma_z}\right)$$

$$E_0\left[\exp\left(\frac{\sigma_{yz}}{\sigma_z^2}\right)z\right]=\exp\left(\frac{\sigma_{yz}}{\sigma_z^2}\mu_z+\frac{\sigma_{yz}^2}{2\sigma_z^2}\right)N\left(\frac{\mu_z+\sigma_{yz}}{\sigma_z}\right)$$

となる。これを代入して整理すると、

$$A=\exp\left(\mu_y+\frac{\sigma_y^2}{2}\right)\left[\exp\left(\mu_z+\frac{\sigma_z^2}{2}+\sigma_{yz}\right)N\left(\frac{\mu_z+\sigma_z^2+\sigma_{yz}}{\sigma_z}\right)-N\left(\frac{\mu_z+\sigma_{yz}}{\sigma_z}\right)\right] \tag{14}$$

となる。この式について、

$$E(X)=\exp\left(\mu_x+\frac{\sigma_z^2}{2}\right),\qquad E(Y)=\exp\left(\mu_y+\frac{\sigma_y^2}{2}\right)$$

$$z=x-y,\qquad \mu_z=\mu_x-\mu_y,\qquad \sigma_z^2=\sigma_x^2-2\sigma_{xy}+\sigma_y^2,\qquad \sigma_{yz}=\sigma_{xy}-\sigma_y^2$$

であることと、

$$v=\mathrm{var}\left[\ln(X/Y)\right]=\sigma_z^2$$

であることを使って整理すると(12)式が得られる。　　　　　　　　　　(証明終)

2．オプション・ペイオフの期待値とオプション価格

株式のようなオプションの基礎となる資産の価格を X とし、その動きが、

$$dX = \mu\, X dt + \sigma\, X dW \tag{15}$$

で表わされるものとする。W はウィーナー過程で、μ と σ は時間のみの関数であるとする。$x = \ln X$ とすると伊藤のレンマにより、

$$dx = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma\, dW \tag{16}$$

となるので、時点 t での x の値 x_t は、

$$x_t = x_0 + \int_0^t \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma\, dW \tag{17}$$

となり、x_t の期待値 m と分散 v は

$$m = x_0 + \int_0^t \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) ds, \qquad v = \int_0^t \sigma^2 ds$$

となる。$\mu(s,t)$ と $\sigma^2(s,t)$ を

$$\mu(s,t) = \int_s^t \mu\, d\tau, \qquad \sigma^2(s,t) = \int_s^t \sigma^2 d\tau \tag{18}$$

と定義すると、

$$m = x_0 + \mu(0,t) + \frac{\sigma^2(0,t)}{2}, \qquad v = \sigma^2(0,t) \tag{19}$$

となる。μ あるいは σ が定数であれば、$\mu(0,t) = \mu\, t$ あるいは $\sigma^2(0,t) = \sigma^2 t$ となる。X の時点 t での値を X_t とすると、時点 0 での X_t の期待値は

$$E(X_t) = \exp\left(m + \frac{v}{2}\right) = e^{x_0 + \mu(0,t)} = X_0 e^{\mu(0,t)} \tag{20}$$

となる。したがって、満期までの期間が t で行使価格が K のコール・オプションの満期でのペイオフの期待値は(9)式と(11)式から、

$$E[\max(X_t-K,0)]=Xe^{\mu(0,t)}N\left(\frac{\ln(X_0/K)+\mu(0,t)+\sigma^2(0,t)/2}{\sigma(0,t)}\right)$$
$$-KN\left(\frac{\ln(X_0/K)+\mu(0,t)-\sigma^2(0,t)/2}{\sigma(0,t)}\right) \qquad (21)$$

となる。μ と σ が定数の場合は $\mu(0,t)=\mu\, t$ 、$\sigma^2(0,t)=\sigma^2 t$ となり、危険中立的確率では X_t の期待値は X_0e^{rt} となるので、$\mu(0,t)$ を rt として、ペイオフの期待値を割り引くために e^{-rt} をかけてやれば、Black=Scholes 式が得られる。

次に交換オプションについて考えてみる。２つの資産があり、それらの資産価格 X と Y が、それぞれ、

$$dX=\mu_X Xdt+\sigma_X XdW_X \qquad (22)$$
$$dY=\mu_Y Ydt+\sigma_Y YdW_Y$$

で変動し、$\sigma_X\sigma_Y dW_X dW_Y=\sigma_{XY}dt$ であるとする。時点 t で価格 Y_t の資産を引渡し、価格 X_t の資産を受取る交換オプション(exchange option)を考える。このオプションの時点 t でのペイオフは、

$$\max(X_t-Y_t,0)$$

であり、$\ln(X_t/Y_t)$ の分散を $\sigma^2(0,t)$ 、$x_t=\ln X_t$ 、$y_t=\ln Y_t$ とすると、

$$dx_t-dy_t=\mu\, dt+\sigma_X dW_X-\sigma_Y dW_Y$$

となる（ドリフト μ は以下の議論に関係ないので計算を省略）ことから、

$$\sigma^2(0,t)=\int_0^t\left(\sigma_X^2-2\sigma_{XY}+\sigma_Y\right)ds$$

となるので、オプションのペイオフの時点0での期待値は(12)式から、

$$E(X_t)N\left(\frac{\ln(E(X_t)/E(Y_t)+\sigma^2(0,t)/2}{\sigma(0,t)}\right)-E(Y_t)N\left(\frac{\ln(E(X_t)/E(Y_t)-\sigma^2(0,t)/2}{\sigma(0,t)}\right) \qquad (23)$$
$$E(X_t)=X_0\exp\left(\int_0^t\mu_X ds\right), \qquad E(Y_t)=Y_0\exp\left(\int_0^t\mu_Y ds\right)$$

となる。

交換オプションのオプション価格は、資産価格については危険中立的確率ではドリフトが修正されるだけで、分散は同じであり、時点 t での資産価格の期待値は X_0e^{rt} と Y_0e^{rt} になるので、

$\ln(E(X_t)/E(Y_t)) = \ln(X_0/Y_0)$ となり、 $E(X_t)$ と $E(Y_t)$ を割引いたものはそれぞれ X_0 と Y_0 になるので、オプションの価格は

$$X_0 N\left(\frac{\ln(X_0/Y_0)+\sigma^2(0,t)/2}{\sigma(0,t)}\right) - Y_0 N\left(\frac{\ln(X_0/Y_0)-\sigma^2(0,t)/2}{\sigma(0,t)}\right) \quad (24)$$

となる。通常のオプションの場合、時点 t での行使価格 K の時点 0 での値は Ke^{-rt} であるから、(24)式の Y_0 に Ke^{-rt} を代入し、 $\sigma_Y^2 = 0$ 、 $\sigma_{xy} = 0$ とすると、(21)式で $\mu(0,t) = r\,t$ としたものと同じものになる。

3．債券オプション

時点 t で行使価格 K で満期 $t+T$ の純粋割引債を購入することができるコール・オプションを考えてみる。利子率が確率的に変動する債券価格モデルの中で、現在の瞬間利子率が r で、満期までの時間の長さが s のときの債券価格 $P(s,r)$ が

$$P(s,r) = \exp[A(s) - B(s)r] \quad (25)$$

となるものは、アフィン期間構造(affine term structure)を持つといわれる。このタイプのモデルには Vasicek モデルを始め、Ho=Lee モデル、Cox=Ingersoll=Ross モデルなどが含まれる。以下ではこのタイプの債券価格モデルに限定して考えることにする。

オプションの満期が t で、行使価格 K で満期 $t+T$ の純粋割引債を購入できるオプションは、時点 t で、満期が t で額面 K の純粋割引債を引渡し満期が $t+T$ で額面 1 の債券を受取る交換オプションと考えることができる。すなわち時点 t での利子率を r_t としたとき、

$$E[\max(P(T,r_t) - KP(0,r_t),0)]$$

がこのオプションの価格となる。交換オプションの価格式(24)から明らかのように、 $\sigma^2(0,t)$ がわかればオプション価格は容易に求めることができる。

満期が $t+T$ と t の債券の時点 $s(0 \le s \le t)$ の価格は $P(t+T-s,r_s)$ と $P(t-s,r_s)$ であり、その比を $Z(s,r_s)$ とすると、 $Z(s,r_s)$ は(25)式から、

$$Z(s,r_s) = \exp\{A(t+T-s) - A(t-s) - [B(t+T-s) - B(t-s)]r_s\}$$

となるので、利子率の変動が

$$dr_t = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dW_r \tag{26}$$

で表すことができるときには、

$$dZ = \mu_Z ds - [B(t+T-s) - B(t-s)]Z\sigma(r,s)\,dW_r$$

となる（μ_Z の値は以下の議論に関係ないので計算を省略した）。これから、(24)式の $\sigma^2(0,t)$ は

$$\sigma^2(0,t) = \int_0^t \sigma^2(r,s)[B(t+T-s) - B(t-s)]^2 ds \tag{27}$$

となる。Vasicek モデルでは、利子率の変動を

$$dr = a(r-\bar{r})dt + \sigma_r dW_r \tag{28}$$

としており、

$$B(t) = \left(1-e^{-at}\right)/a \tag{29}$$

となるので、

$$B(t+T-s) - B(t-s) = e^{-a(t-s)}\left(1-e^{-aT}\right)/a = e^{-a(t-s)}B(T)$$

となり、

$$\sigma^2(0,t) = \sigma_r^2[B(T)]^2 \int_0^t e^{-2a(t-s)}ds = \sigma_r^2[B(T)]^2\left(1-e^{-2at}\right)/2a \tag{30}$$

となる。したがってオプション価格は

$$P(t+T,r_0)N\left(\frac{\ln(P(t+T,r_0)/KP(t,r_0)) + \sigma^2(0,t)/2}{\sigma(0,t)}\right)$$
$$-KP(t,r_0)N\left(\frac{\ln(P(t+T,r_0)/KP(t,r_0)) - \sigma^2(0,t)/2}{\sigma(0,t)}\right) \tag{31}$$

となる。

4．プロジェクトの評価

T 期の寿命を持つプロジェクトについて、今から t 期後に状況に応じて投資を実行するかどうかを決定するときのプロジェクトの評価について考える。こうした状況はテスト・プラントでの小規

模な操業の後、大規模なプラントの建設を行うかどうかを考えるときや、Ｒ＆Ｄの結果、本格的な商品化生産を行うかどうかを考えるときに生じる。大規模な投資についての評価をテスト・プラントの実行前あるいはＲ＆Ｄの実行前に行うことが必要である。

利子率の変動は Vasicek 型で、キャッシュフローの変動と利子率の変動は独立であると仮定する。キャッシュフローはリスク修正済みで、その変動は

$$dC = \mu_C C dt + \sigma_C C dW_C \tag{32}$$

で表すことができるものとする。他方、時点 t でのプロジェクトの投資コストは、その時点のキャッシュフローに比例するものとする。すなわち、時点 t から $t+dt$ までのキャッシュフローが $C_t dt$ であるとき、投資コスト K_t は

$$K_t = \gamma C_t \tag{33}$$

であるとする。時点 t でプロジェクトを実行したときの正味現在価値

$$\int_t^{t+T} C_s \cdot P(s-t, r_t)\, ds - \gamma C_t$$

が正のとき投資が実行される。そこで、時点０でのこのプロジェクトの価値 V は

$$V = P(t, r_0) E\left\{\max\left[\int_t^{t+T} C_s \cdot P(s-t, r_t) ds - \gamma C_t, 0\right]\right\} \tag{34}$$

となる。利子率の変動とキャッシュフローの変動が独立であるという仮定から、先にキャッシュフローについての期待値を求めることにより、

$$V = P(t, r_0) C_0 e^{\mu_c(0,t)} E\left\{\max\left[\int_t^{t+T} e^{\mu_C(t,s)} P(s-t, r_t) ds - \gamma, 0\right]\right\}$$

となる。ただし、

$$\mu_C(t,s) = \int_t^s \mu_C\, d\tau$$

である。

$$\int_t^{t+T} e^{\mu_c(t,s)} P(s-t, r_t)\, ds \tag{35}$$

が γ に等しくなるような r を r^* とする。債券価格は利子率の単調減少関数で、利子率が大きくな

るにつれ零に近づくので、

$$\int_t^{t+T} e^{\mu_C(t,s)} ds > \gamma$$

である限り、r^* は一意に決まる。r^* を使うと

$$V = P(t,r_0)\, C_0 e^{\mu_C(0,t)} E\left\{\max\left[\int_t^{t+T} e^{\mu_C(t,s)}\left(P(s-t,r_t) - P(s-t,r^*)\right)ds, 0\right]\right\}$$

と表わすことができる。$r_t > r^*$ のとき、そしてそのときだけ(34)式の値は γ より小となる。また、すべての $s(t \le s \le t+T)$ について、$r_t > r^*$ のとき、そしてそのときだけ $P(s-t,r_t)$ は $P(s-t,r^*)$ より小となるので、

$$V = P(t,r_0)\, C_0 \int_t^{t+T} e^{\mu_C(0,s)} E\left[\max\left(P(s-t,r_t) - P(s-t,r^*), 0\right)\right] ds \tag{36}$$

と表すことができる。

$$P(t,r_0) E\left[\max\left(P(s-t,r_t) - P(s-t,r^*), 0\right)\right]$$

は現在の価格が $P(s,r_0)$ の債券に対するコール・オプションのオプション価格である。このオプションの行使価格は $P(s-t,r^*)$ であり、満期は t である。債券オプションの価格式(31)から

$$\begin{aligned} V = C_0 \int_t^{t+T} e^{\mu_C(0,s)} \Bigg[& P(s,r_0) N\left(\frac{\ln\left(P(s,r_0)/(P(t,r_0)P(s-t,r^*))\right) + \sigma_s^2(0,t)/2}{\sigma_s(0,t)}\right) \\ & - P(t,r_0) P(s-t,r^*) N\left(\frac{\ln\left(P(s,r_0)/(P(t,r_0)P(s-t,r^*))\right) - \sigma_s^2(0,t)/2}{\sigma_s(0,t)}\right)\Bigg] ds \end{aligned} \tag{37}$$

$$\sigma_s^2(0,t) = \sigma_r^2 [B(s)]^2 \left(1 - e^{-2at}\right)/2a$$

となる。

（2002年1月9日受理）