

構造システムの感度解析理論ならびに最適設計への 応用に関する研究

著者	榎本 覚雄
学位授与大学	東洋大学
取得学位	博士
学位の分野	工学
報告番号	甲第49号
学位授与年月日	1997-03-25
URL	http://id.nii.ac.jp/1060/00000141/



博士論文

構造システムの感度解析理論ならびに
最適設計への応用に関する研究

1997年

榎本 覚 雄

Contents

	Page
1. 序 論	1
2. FEM 構造解析理論	5
2-1. 骨組構造物の静的構造解析	6
2-2. 骨組構造物の動的構造解析	8
2-2-1. 固有値・固有ベクトル	8
2-2-2. 動的応答解析	8
2-3. 弾性平面モデルの静的構造解析	11
2-4. 剛性・質量・座標変換マトリクス	18
3. 感度解析理論	29
3-1. 骨組構造物の静的感度解析	30
3-1-1. 断面定数に関する感度解析	30
3-1-2. 形状感度解析	34
3-2. 骨組構造物の動的感度解析	38
3-2-1. 固有値・固有ベクトルの感度解析	38
3-2-2. 動的応答感度解析	41
3-3. 弾性平面モデルの静的感度解析	44
4. 感度係数特性	47
4-1. 骨組構造物の静的感度係数特性	48
4-1-1. 断面定数に関する感度係数特性	48
4-1-2. 平面ラーメンにおける感度変数について	51
4-1-3. 形状に関する感度係数特性	53
4-2. 骨組構造物固有値・固有ベクトルの感度係数特性	57
4-3. 骨組構造物の動的応答解析における感度係数特性	62
4-4. 弾性平面モデルの感度係数特性	68

Contents

	Page
5. 骨組構造物の応答感度係数特性に基づく感度解析	69
5-1. 適合法に基づく静的感度解析	70
5-1-1. 適合条件	73
5-1-2. 計算効率	76
6. 逆解析問題	89
6-1. 変位指定下におけるトラス構造物の形状逆解析	90
6-1-1. 逆解析問題の定式化（変位値を直接指定する場合）	91
6-1-2. 逆解析問題の定式化（変位モード指定による場合）	96
6-2. 弾性平面ひずみモデルの逆解析問題	100
6-2-1. 感度係数特性に基づく剛性推定法（提案法）	101
6-2-2. Gauss-Newton 法に基づく方法	102
6-2-3. 推定値の信頼性	104
6-2-4. 提案法と Gauss-Newton 法との相違点	104
6-2-5. 解析例（地層モデル）	105
7. トラス構造物の最小重量設計と最大剛性設計	108
7-1. トラス構造の最小重量設計と最大剛性設計	109
7-2. 感度係数特性を用いた最適化問題の定式化	111
7-3. スケーリング	115
7-4. 提案法と SLP 法との相違点	118
7-5. 解析例	119
8. 結 論	122
Appendix	126
A-1. 補足事項	127
A-2. 参考文献	129
A-3. FORTRAN program	132

1. 序 論

1. 序 論

感度解析は、最適設計、システム同定、設計改善等、工学問題の広範にわたり利用されてきている。構造物の最適設計の立場から見ると、応力や変位などの静的特性、あるいは固有振動数、固有モードなどの動的特性に関する制約条件とそれらの設計変数に関する偏微分、すなわち設計感度係数の計算に多大な時間および計算資源を要することが、最適設計を実務に適用する際の大きな問題点ともなっている。通常は変位、応力の計算あるいは固有値解析や動的応答解析などの構造解析にはF E Aが用いられ、そして最も直接的でかつ頻繁に用いられる感度解析は差分法に基づくものである。このため、最適設計では数百回、場合によっては数千回の構造解析が必要となりそれだけの回数のF E Aを繰返し行うことは実務上難しく、効率的な感度解析手法が要求されている。

構造最適設計に必要なF E Aの回数を軽減するために、2種類の方法が用いられてきている。1つは、近似構造再解析であり、もう1つは感度解析である。静的な荷重を受け、線形弾性挙動を示す骨組構造物の感度解析には直接法と随伴法とがある。設計変数が少ないとき直接法が効率的であり、変数の数が多く、アクティブな制約条件が少ないとき、また、複数の荷重の組合わせに対して最適設計を行う場合随伴法がより効率的であると考えられる¹⁾。固有値問題における感度解析については、Fox等が関数の直交性を利用した、方程式を直接偏微分する方法を示している²⁾。動的解析問題の感度解析については様々な考え方が提案されているが未だにその方法については確立していない。数多くの提案の中でほとんどは、固有モードの感度解析を必要とする方法であるが、菊田等は時刻歴応答解析を前提として、運動方程式を解いてから感度解析を行うのではなく、両者を平行して解く方法を提案している³⁾。

線形弾性挙動を示す骨組構造物の設計問題において、変数としては部材断面積 A 、断面2次モーメント I 、ねじり定数 J およびそれらの逆数が用いられている。本論文においても文

献4)と同様に感度解析に用いる変数を,設計に関する変数と区別する意味で感度変数と呼んでいる.

本論文では,骨組構造物の感度解析理論に着目し,上述の感度解析手法について再度見直しを行った結果,感度係数の各次数でその間に特別な関係があることを見つけだした.すなわち,各次数で基準化した感度係数の和が特性値を有し,その値は選択した感度変数により異なることを示した.つぎに,この感度係数特性に基づいた不静定平面骨組構造物の新しい静的感度解析手法を提案し,従来法との計算効率を比較し提案した手法の有用性を検証している⁵⁾.これは,本論文の主たる部分となっている.感度係数特性の応用例としては,変位指定下におけるトラス構造の形状逆解析問題¹⁹⁾²⁰⁾,弾性平面ひずみモデルにおける逆解析問題²³⁾²⁴⁾および平面トラス構造の最適設計問題²⁶⁾²⁷⁾を示している.各章の具体的な内容については以下に述べる.

2章では,本論文の基本となる有限要素法について,構造物の静的解析,固有値解析,そして動的解析に分けて概説している.

3章では,2章で述べた有限要素解析に基づいた感度解析法を列挙している¹⁰⁾.ここでは感度変数として,それぞれ静的解析においては部材断面定数と節点座標,固有値問題と動的解析については部材断面定数,平面ひずみモデルについてはヤング係数,平面応力モデルについては板厚を考えている.

4章では,3章で示した感度解析理論を再度見直しし,感度係数に設計変数を乗じ対応する応答で除したもの(無次元化感度係数)を,感度変数全体について総和をとったものが常に定数となるという,感度係数特性について述べている.

5章では,感度係数特性を利用した従来法とは異なる不静定構造物の感度解析法を示している.この新しい感度解析法は適合法的な考え方に基づいているが,以下に述べるような顕著な特徴を有している.逐次的に感度解析を行う場合,まず静定基本系に対して節点変位の感度係数を求めておけば,重ね合せにより原不静定構造の節点変位の感度係数が得

られ、次回以降の感度係数は感度変数の値を代入した不静定次数だけの次元を持つ、適合方程式を解くだけで求められることにある。また、本手法によれば節点変位の感度係数の他に節点変位、部材断面力、そして部材断面力の感度係数も従来の変位法を用いずに計算することができることも示している。また、従来法との計算効率を比較し提案した手法の有用性を検証している。ここで、比較対象とする従来法としては、差分法および直接微分法を考えている。

6章では、感度係数特性を利用した逆解析問題への応用を試みている。ここでの解析法は最小2乗法に基づくものである。1つは、形状の感度係数特性を利用した変位指定下のトラス構造物の形状逆解析問題を示し、ホモロガス変形を制約条件とした構造形態のいくつかの解を得ている。もう1つは、弾性平面ひずみモデルを対象に多層地盤のヤング係数を地表面の測定変位から逆解析している。数値計算の結果、一般的な Gauss-Newton 法に比べて収束性の優れた解析法となっている。

7章では感度係数特性を最適設計問題に応用している。平面トラス構造物を対象として、本来非線形である制約条件または目的関数を感度係数特性に基づき線形化し、線形計画法を繰り返すことにより構造物を最適化することが可能であることを定式化により示している。この定式化された最適設計問題において、最小重量設計と最大剛性設計の比較を行い2つの設計の等価性を検証している。

巻末の Appendix では、補足事項と本研究で用いた計算プログラムのアルゴリズムフローチャートおよび各モジュールの解説を行っている。

2. FEM 構造解析理論

2. FEM 構造解析理論

本論文で取り扱う構造解析理論は変位法に基づくものである。以下に骨組構造物と平面モデルの有限要素法について定式化を行なっておく。

2-1. 骨組構造物の静的構造解析

骨組構造物を有限個の要素（部材）に分割し，部材座標系（Local coordinate）における部材端（節点）でのつり合い条件式を次式とする。

$$\begin{aligned} f'_1 &= k_{11}z'_1 + k_{12}z'_2 \\ f'_2 &= k_{21}z'_1 + k_{22}z'_2 \end{aligned} \quad (2-1-1)$$

ここで， f' を部材端荷重ベクトル， z' を部材端変位ベクトル， k_{ij} を部材剛性マトリクスとする。各部材を節点で接続して構造物を形成するためには，節点で断面力がつり合い，変形が連続する必要がある。そこで，部材座標系で表現されたつり合い条件式を構造全体に共通な一つの座標系，つまり全体座標系（Global coordinate）に変換すれば，それぞれの節点に集る部材の端断面力の合力はその代数和を考えればよいことになる。部材座標系による節点変位 z' を全体座標系の節点変位 z を用いて表現すれば，

$$z' = Tz \quad (2-1-2)$$

となる。ここで T は座標変換マトリクスである。同様に節点荷重 f' も次式の形で変換する。

$$f' = Tf \quad (2-1-3)$$

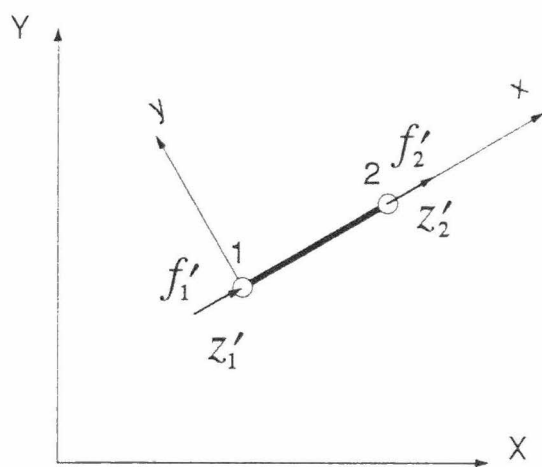


Fig.2-1

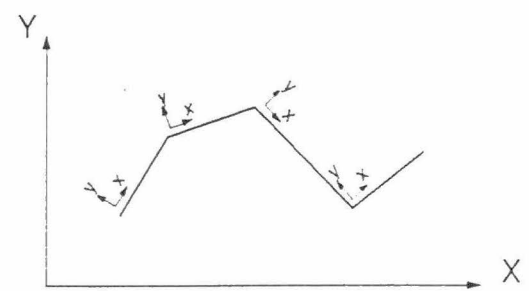


Fig.2-2

部材座標系の剛性方程式(2-1-2)をマトリクス表示すれば,

$$\mathbf{f}' = \mathbf{kz}' \quad (2-1-4)$$

となる. 式(2-1-4)に式(2-1-2~3)を代入すれば,

$$\mathbf{Tf} = \mathbf{kTz} \quad (2-1-5)$$

となる. 式(2-1-5)の両辺に左から \mathbf{T}^{-1} をかければ,

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{kTz} \quad (2-1-6)$$

となる. ここで, $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$ となるので式(2-1-6)は式(2-1-7)となる.

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T\mathbf{kTz} \quad (2-1-7)$$

式(2-1-7)の右辺の $\mathbf{T}^T\mathbf{kT}$ を \mathbf{K} おけば変位法による一般的なつり合い条件式が得られる.

$$\mathbf{Kz} = \mathbf{F} \quad (2-1-8)$$

式(2-1-8)の \mathbf{K} は($n \times n$)の全体剛性マトリクスと呼ぶ. ここで n は構造全体の自由度数である. 節点変位 \mathbf{z} を未知数とする連立方程式(2-1-8)の解法はマトリクス \mathbf{K} が対称マトリクスであることからコレスキー法を用いている.

2-2. 骨組構造物の動的構造解析

2-2-1. 固有値・固有ベクトル

線形多自由度系における非減衰自由振動の運動方程式をマトリクス表示すれば、

$$[M]\{\ddot{z}\} + [K]\{z\} = \{0\} \quad (2-2-1)$$

ここで、 M, K, \ddot{z}, z はそれぞれ質量マトリクス、剛性マトリクス、加速度ベクトル、および変位ベクトルである。 $\{z\} = \{y\} \sin(\omega t - \alpha)$ とおけば、

$$\mathbf{K} \mathbf{y}_r = \lambda_r \mathbf{M} \mathbf{y}_r \quad (2-2-2)$$

となり、多自由度系の固有値問題が得られる。ここで、 ω は固有円振動数、 $\lambda_r = \omega^2$ は第 r 次の固有値、 \mathbf{y}_r は第 r 次の固有ベクトルを表わす。なお、固有ベクトルは次に示す直交条件式を満足するものとする。

$$\mathbf{y}_r^T \mathbf{M} \mathbf{y}_p = \begin{cases} 0 & (p \neq r) \\ 1 & (p = r) \end{cases} \quad (2-2-3)$$

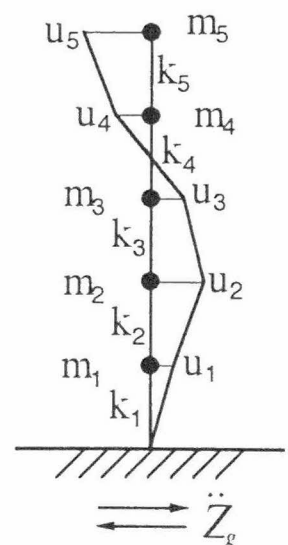
2-2-2. 動的応答解析

動的外力を受ける線形多自由度系の運動方程式は一般にマトリクス表示を用いて次のように表わすことができる。

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{Q\} \quad (2-2-4)$$

ここで、 $[M], [C], [K]$ はそれぞれ $(n \times n)$ の質量マトリクス、減数マトリクスおよび剛性マトリクスで、 \ddot{u}, \dot{u}, u はそれぞれ $(n \times 1)$ の加速度ベクトル、速度ベクトルおよび変位ベクトルである。

モーダル解析法に基づき、振動モードを重ね合わせる割合を第 j 次の基準振動に対して q_j で表わせば q_j は基準座標となり、変位ベクトル u_i は固有ベクトル ϕ_{ij} を用いて次のように表わされる。



$$\{u\} = [\phi] \{q\} \quad (2-2-5)$$

ここに,

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix}, \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix}$$

いま, 構造物の基礎の加速度 \ddot{Z}_g に比例する各質点の慣性力 $(-m_i \ddot{Z}_g)$ が外力として作用する強制振動を考えれば式 (2-2-4) の $\{Q\}$ は

$$\{Q\} = -\ddot{Z}_g [M] \{1\} \quad (2-2-6)$$

となる. 式 (2-2-4) に式 (2-2-5) を代入し両辺に固有ベクトル $\{\phi_j\}^T$ を左からかけると振動方程式が次式のように得られる.

$$\ddot{q}_j + 2h_j \omega_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = -\beta_j \ddot{Z}_g \quad (2-2-7)$$

ここに, β_j は第 j 次の振動の刺激係数である.

$$\beta_j = \frac{\{\phi_j\}^T [M] \{1\}}{\{\phi_j\}^T [M] \{\phi_j\}} = \frac{\sum_{r=1}^n m_r \phi_{rj}}{\sum_{r=1}^n m_r \phi_{rj}^2} \quad (2-2-8)$$

式 (2-2-7) において $h_j \omega_j$ は第 j 次の減衰定数および固有円振動数である. 以上より, 式 (2-2-7) の解はデュアメル積分を用いて次のように表わされる.

$$q_j = \beta_j q_{j0} \quad (2-2-9)$$

$$q_{j0}(t) = e^{-h_j \omega_j t} [\bar{A}_j \cos \omega'_j t + \bar{B}_j \sin \omega'_j t] - \frac{1}{\omega'_j} \int_0^t \ddot{Z}_g(\tau) e^{-h_j \omega_j (t-\tau)} \sin \{\omega'_j (t-\tau)\} d\tau \quad (2-2-10)$$

ここで, $\omega'_j = \sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j$ である. 初めに系が静止している状態を考えれば, 式 (2-2-10) の第 1 項目は無視できるため次式のようになる.

$$q_{j0}(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j} \int_0^t \ddot{Z}_g(\tau) e^{-h_j \omega_j (t-\tau)} \sin \{\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j (t-\tau)\} d\tau = \frac{1}{\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j} \left\{ -\sin(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t) z_{cj}(t) + \cos(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t) z_{sj}(t) \right\} \quad (2-2-11)$$

式(2-2-9)が計算されれば、変位は式(2-2-5)によって求められる。

ここで、式(2-2-11)のデュアメル積分の計算を示す。

Duhamel Integration1

$$\begin{cases}
 z_{cj}(t) = e^{-h_j \omega_j \Delta t} z_{cj}(t - \Delta t) + \ddot{Z}_g(t) \cos(\sqrt{1 - h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t) \cdot \Delta t \\
 z_{sj}(t) = e^{-h_j \omega_j \Delta t} z_{sj}(t - \Delta t) + \ddot{Z}_g(t) \sin(\sqrt{1 - h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t) \cdot \Delta t \\
 \text{when } t_1 = \Delta t \\
 \begin{cases}
 z_{cj}(\Delta t) = \ddot{Z}_g(t_1) \cos(\sqrt{1 - h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t_1) \cdot \Delta t \\
 z_{sj}(\Delta t) = \ddot{Z}_g(t_1) \sin(\sqrt{1 - h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t_1) \cdot \Delta t
 \end{cases} \\
 \text{when } t_2 = 2\Delta t \\
 \begin{cases}
 z_{cj}(2\Delta t) = e^{-h_j \omega_j \Delta t} z_{cj}(\Delta t) + \ddot{Z}_g(t_2) \cos(\sqrt{1 - h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t_2) \cdot \Delta t \\
 z_{sj}(2\Delta t) = e^{-h_j \omega_j \Delta t} z_{sj}(\Delta t) + \ddot{Z}_g(t_2) \sin(\sqrt{1 - h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t_2) \cdot \Delta t
 \end{cases} \\
 \text{at programming} \\
 z_{cj}(t_0) = \ddot{Z}_g(t_0) \cos(\sqrt{1 - h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t_1) \cdot \Delta t \\
 z_{sj}(t_0) = \ddot{Z}_g(t_0) \sin(\sqrt{1 - h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t_1) \cdot \Delta t \\
 z_{cj}(t) = e^{-h_j \omega_j \Delta t} z_{cj}(t - \Delta t) + \frac{\ddot{Z}_g(t - \Delta t) + \ddot{Z}_g(t)}{2} \cos\left\{\sqrt{1 - h_j^2} \cdot \omega_j \cdot \left(t_2 - \frac{\Delta t}{2}\right)\right\} \cdot \Delta t \cdot e^{-\frac{h_j \omega_j \Delta t}{2}} \\
 z_{sj}(t) = e^{-h_j \omega_j \Delta t} z_{sj}(t - \Delta t) + \frac{\ddot{Z}_g(t - \Delta t) + \ddot{Z}_g(t)}{2} \sin\left\{\sqrt{1 - h_j^2} \cdot \omega_j \cdot \left(t_2 - \frac{\Delta t}{2}\right)\right\} \cdot \Delta t \cdot e^{-\frac{h_j \omega_j \Delta t}{2}}
 \end{cases}$$

(2-2-12)

2-3. 弾性平面モデルの静的構造解析

本節では二次元連続体における有限要素の特性を導く方法について数学的に述べることにする。ここでは薄い板の平面応力場の解析例をとって、一般的関係式を表示する。

2-3-1. 変位関数

Fig.2-3に示すような直線境界を有する代表的な三角形要素 e を考え、その節点を i, j, m, \dots とする。要素内の任意の点における変位を列ベクトル $\{f(x, y)\}$ で表すと

$$\{f\} = [N]\{\delta\}^e = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_m & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (2-3-1)$$

ここで、 $[N]$ の成分は一般に座標 (x, y) の関数であり、 $\{\delta\}^e$ は要素 e に関する全ての節点の変位を表している。

Fig.2-3の平面応力場を例にとれば、

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2-3-2)$$

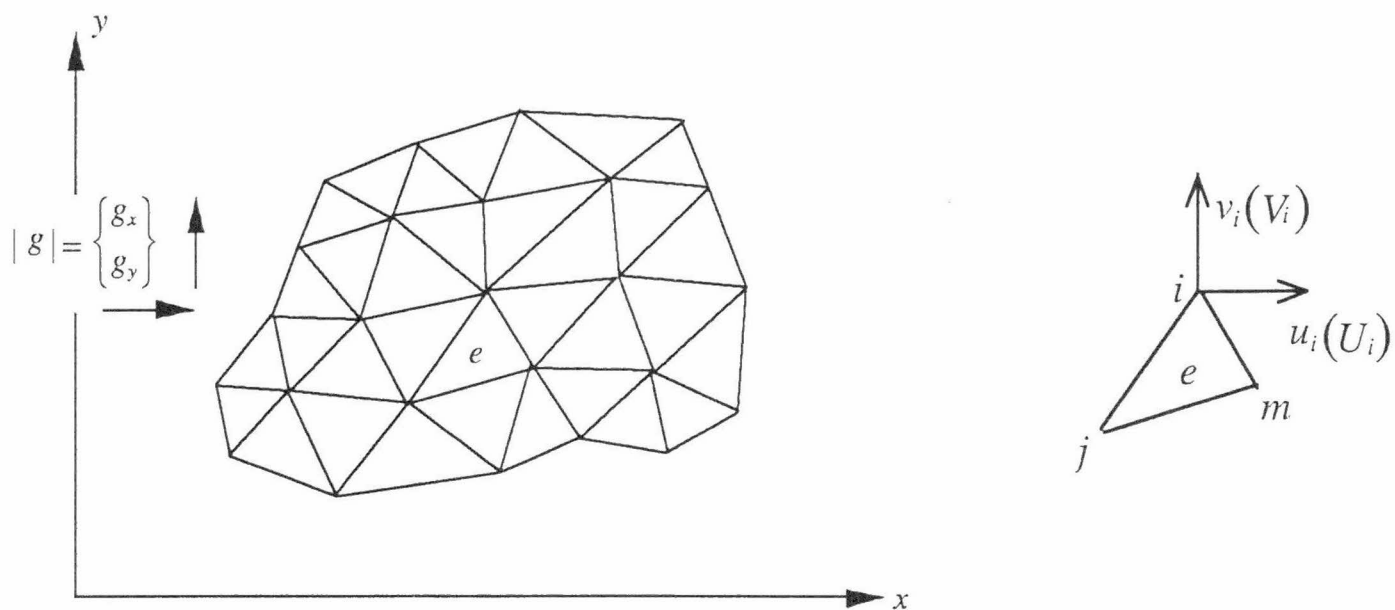


Fig.2-3

は要素内の任意の点 (x, y) における変面の x, y （水平および垂直）成分を表す。また

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (2-3-3)$$

は節点 i の変位成分を表す。

関数 $\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j, \mathbf{N}_m$ は対応する節点の座標 $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_m, y_m)$ をそれぞれ式(2-3-3)に代入した場合、その節点の変位を与えるように選ばなければならない。すなわち一般的に表示すれば、

$$\mathbf{N}_i(x_i, y_i) = \mathbf{I} \text{ (単位マトリクス)} \quad (2-3-4)$$

$$\mathbf{N}_i(x_j, y_j) = \mathbf{N}_i(x_m, y_m) = 0 \quad (2-3-5)$$

これらの関係は、 x, y の適当な一次関数をとれば簡単に満足される。もし、変位成分をすべて同じ形に内挿するのであれば、

$$\mathbf{N}_i = N_i \mathbf{I}$$

となる。ここで、 N_i は x_i, y_i で1、他の頂点で0となるスカラー量である。関数 \mathbf{N} は一般に形状関数(shape function)とよばれる。

2-3-2. 歪み

要素内の全ての点で変位が与えられれば、任意の点における歪みを求めることができる。

その関係をマトリックス記号を用い表記すると、

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}^e \quad (2-3-6)$$

平面応力の場合歪みは変位の関数として次のように与えられる。

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} \quad (2-3-7)$$

式(2-3-7)と、既に決定した $\mathbf{N}_i, \mathbf{N}_j, \mathbf{N}_m$ などの関数によりマトリックス $[B]$ が容易に求められる。これらの関数に一次関数を採用すると、歪みは要素内で一定となる。

2-3-3. 応力

一般に、要素の材料は温度変化、収縮、結晶の成長などによって生じる初期歪みを受ける。このような歪みを $\{\varepsilon_0\}$ で表せば、実際の歪みと初期歪み ε_0 の差によって応力が発生することになる。さらに、ある既知の系の影響を受けて、解析の初めから、物体が初期残留応力 $\{\sigma_0\}$ は、測定できる場合もあるが、材料の履歴が十分に分からないと、その値を予測することができない。なお、この応力は、一般的な応力-歪み関係式にただ加えるだけでよい。以上を考慮すると、一般的な弾性挙動を仮定したときの線形応力と歪みの関係式は、次のようになる。

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad (2-3-8)$$

ここに、 $[D]$ は適当な材料定数を含んだ弾性マトリックスである。

再び平面応力場について説明すると、

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-3-9)$$

と表せる。マトリックス $[D]$ は等方性弾性体の関係式を用いて、以下のように求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x - (\varepsilon_x)_0 &= \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y \\ \varepsilon_y - (\varepsilon_y)_0 &= -\frac{\nu}{E} \sigma_x - \frac{1}{E} \sigma_y \\ \gamma_{xy} - (\gamma_{xy})_0 &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} = G \tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2-3-10)$$

これより、

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2-3-11)$$

2-3-4. 等価節点力

要素に働く境界上の応力や要素内の分布荷重（物体力，body force）と静的に等価な節点力を，次のように表す。

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_m \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (2-3-12)$$

ここで，各節点の力 $\{F_i\}$ は，それに対応する節点変位 $\{\delta_i\}$ と同じ数だけの成分を有し，変位と対応をつけて，正しい順序に並んでいなければならない。一方，物体力 $\{p\}$ は，要素内の単位体積当たりについて作用すると，力として定義され，その作用方法は同じ点における変位 $\{f\}$ の方向に対応している。

例えば，平面応力場の場合，節点力は

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix} \quad (2-3-13)$$

であり，成分UおよびVは変位uおよびvの方向に対応している。また，物体力は，

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (2-3-14)$$

で，XおよびYをその成分としている。

節点力を，実際の境界応力や物体と静的に等価にする最も簡単な方法は，任意の（仮想）節点変位を与え，それによって種々の力や応力のなす内部仕事とを等置することである。節点に与えるこのような仮想変位を $d\{\delta\}^e$ で表すと，式(2-3-1)および式(2-3-6)により，要素内に生じる変位および歪みは，各々次のように与えられる。

$$\begin{aligned} d\{f\} &= [N]d\{\delta\}^e \\ d\{\varepsilon\} &= [B]d\{\delta\}^e \end{aligned} \quad (2-3-15)$$

節点のなす仕事は，個々の力の成分と対応する仮想変位成分の積の和に等しく，マトリッ

クス表示で書くと

$$(d\{\delta\}^e)^T \{F\}^e \quad (2-3-16)$$

同様に、応力および物体力による内部仕事は、単位体積当たり

$$d\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} - d\{f\}^T \{p\} \quad (2-3-17)$$

または、式(2-3-15)を代入して

$$(d\{\delta\}^e)^T ([B]^T \{\sigma\} - [N]^T \{p\}) \quad (2-3-18)$$

式(2-3-16)で与えられる外部仕事を、要素の全容積にわたる積分として与えられる全内部仕事に等置すると

$$(d\{\delta\}^e)^T \{F\}^e = (d\{\delta\}^e)^T \left(\int [B]^T \{\sigma\} d(vol) - \int [N]^T \{p\} d(vol) \right) \quad (2-3-19)$$

この関係はいかなる仮想変位 $d\{\delta\}^e$ に対しても成立するので、次の等価節点力の式が得られる。即ち、上の式から得られる結果に、式(2-3-6)および式(2-3-8)を代入して

$$\begin{aligned} \{F\}^e = & \left(\int [B]^T [D] \{B\} d(vol) \right) \{\delta\}^e \\ & - \int [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} d(vol) + \int [B]^T \{\sigma_0\} d(vol) - \int [N]^T \{p\} d(vol) \end{aligned} \quad (2-3-20)$$

要素剛性マトリックスは

$$[k]^e = \int [B]^T [D] \{B\} d(vol) \quad (2-3-21)$$

となり、物体と等価な節点力は

$$[F]_p^e = - \int [N]^T \{p\} d(vol) \quad (2-3-22)$$

初期歪みによる節点力は

$$[F]_{\varepsilon_0}^e = - \int [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} d(vol) \quad (2-3-23)$$

また、解析の最初から存在する初期応力によって生じる節点力は、次のようである。

$$[F]_{\sigma_0}^e = \int [B]^T \{\sigma_0\} d(vol) \quad (2-3-24)$$

普通の残留応力のように、初期応力が自己平衡系であれば、式(2-3-24)によって与えられる力は、系を組み立てた後に、常に零となる。したがって、この力の成分の評価は省略されることが多い。

平面応力場における三角形要素の特性を求めるには、既に得た $[B]$ 、 $[D]$ 、 $[N]$ および与えられた物体力 $\{p\}$ ならびに初期歪み $\{\varepsilon_0\}$ と初期応力 $\{\sigma_0\}$ を、式(2-3-21)、式(2-3-24)に代入すればよい。平面応力場の三角形要素では、マトリックス $[B]$ が座標に無関係であったので、積分は特に簡単になる。

一般に、各節点には集中外力が作用している。したがって、各節点の釣り合いを考える場合に、次のマトリックスを加えなければならない。

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix} \quad (2-3-25)$$

境界が単位面積当たり $\{g\}$ で与えられる分布荷重を受ける場合には、境界上に面を持つ要素の節点に、それに対応する等価外力を加えなければならない。仮想仕事の原理から、等価外力として簡単に

$$\{F\}_p^e = -\int [N]^T \{g\} d(\text{area}) \quad (2-3-26)$$

が得られる。ここに、積分は要素の境界面全体にわたって行なうもので、 $\{g\}$ は変位 $\{f\}$ と同じだけの力の成分を有していなければならない。

構成モデルの全体の剛性方程式を解き、節点変位が求められると、要素内の任意の点における応力は、式(2-3-8)および式(2-3-9)から、次のように与えられる。

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}^e - [D]\{\varepsilon_0\} + \{\sigma_0\} \quad (2-3-27)$$

即ち、要素の応力マトリックスは

$$[S]^e = [D][B] \quad (2-3-28)$$

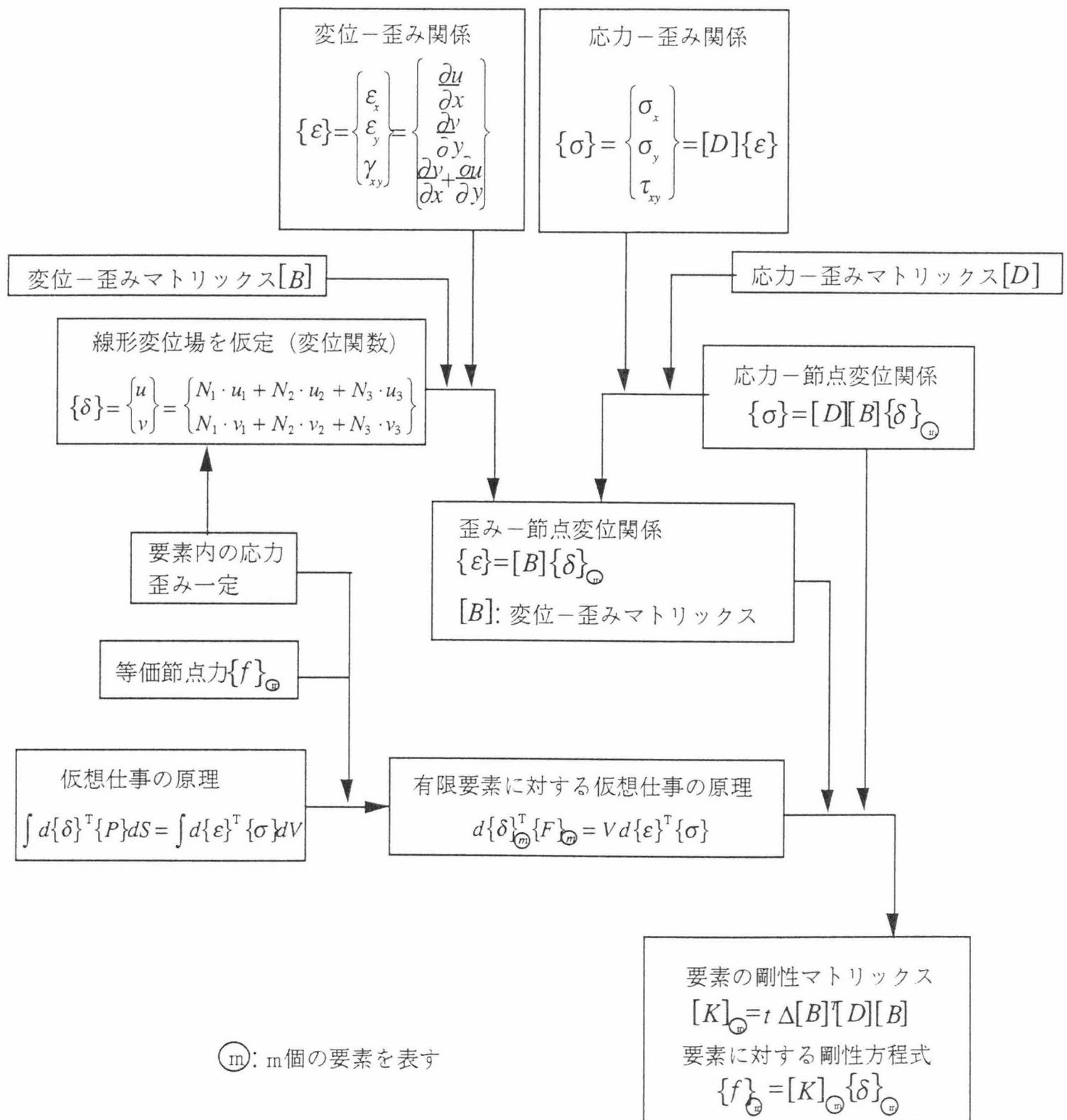
これに、次に示す初期応力

$$\begin{aligned} \{\sigma_{e_0}\} &= -[D]\{\varepsilon_0\} \\ \{\sigma_{c_0}\} &= -[D]\{\sigma_0\} \end{aligned} \tag{2-3-29}$$

がつけ加わっている。

ここで、式(2-3-27)では、物体力による応力の項 $\{\sigma\}_p^e$ がないのは、要素内については釣り合いを考慮することなく、全体としての釣り合いを考えているからである。

弾性理論のまとめ



2-4. 剛性・質量・座標変換マトリクス

FEM構造解析のための、要素の剛性・質量・座標変換マトリクスを示す。

記号の説明

x, y, z : 全体座標系の座標軸

u : 部材軸方向 (部材座標系)

v : 部材軸直角方向 (部材座標系)

ω : u - v 平面直角方向 (部材座標系)

\mathbf{k}_i : i 番目の要素剛性マトリクス

${}^c\mathbf{m}_i$: i 番目の要素質量マトリクス (コンシステントマス)

${}^L\mathbf{m}_i$: i 番目の要素質量マトリクス (ランプトマス)

\mathbf{T}_i : i 番目の座標変換マトリクス

A : 部材断面積

I_ω : ω 軸まわりの断面 2 次モーメント

I_v : v 軸まわりの断面 2 次モーメント

J : St. Venant ねじり定数

r : 断面 2 次半径 ($=\sqrt{I/A}$)

E : 縦弾性係数

G : せん断弾性係数

ρ : 単位体積重量

ℓ : 部材長

2-4-1. 平面トラス

剛性マトリクス

$$\mathbf{k}_i = \frac{A_i E_i}{\ell_i} \begin{matrix} N_a & S_{va} & N_b & S_{vb} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{matrix} u_a \\ v_a \\ u_b \\ v_b \end{matrix} \end{matrix} \quad (2-4-1)$$

質量マトリクス

$${}^C \mathbf{m}_i = \frac{\rho A_i \ell_i}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 140 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad {}^L \mathbf{m}_i = \rho A_i \ell_i \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C: Consistent mass, L: Lumped mass

(2-4-2), (2-4-3)

座標変換マトリクス

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{x_b - x_a}{\ell} \\ \mu = \frac{y_b - y_a}{\ell} \end{array} \right. \quad (2-4-4)$$

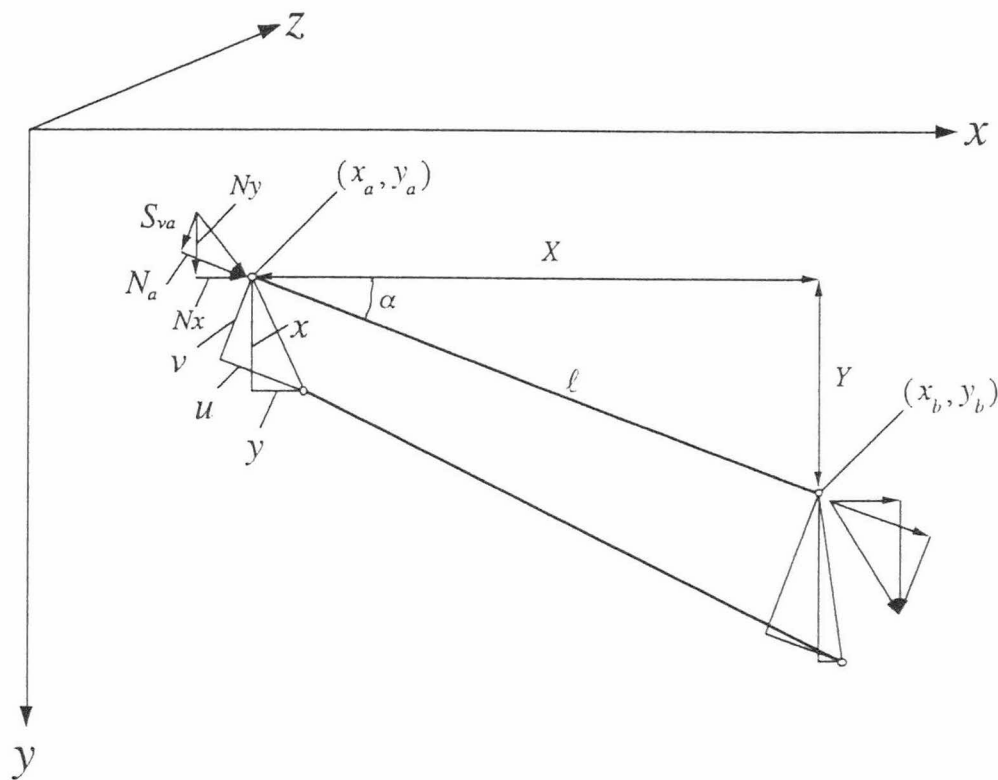


Fig.2-4-1 平面トラスの記号の定義

2-4-2. 平面ラーメン

剛性マトリクス

$$\mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} N_a & S_{va} & M_{\omega a} & N_b & S_{vb} & M_{\omega b} \\ \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_w}{\ell^3} & \frac{6EI_w}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI_w}{\ell^3} & \frac{6EI_w}{\ell^2} \\ & & \frac{4EI_w}{\ell} & 0 & -\frac{6EI_w}{\ell^2} & \frac{2EI_w}{\ell} \\ & & & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ & sym. & & & \frac{12EI_w}{\ell^3} & -\frac{6EI_w}{\ell^2} \\ & & & & & \frac{4EI_w}{\ell} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_a \\ v_a \\ \theta_{\omega a} \\ u_b \\ v_b \\ \theta_{\omega b} \end{matrix} \quad (2-4-5)$$

質量マトリクス

$${}^c \mathbf{m}_i = \frac{\rho A \ell_i}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22\ell & 0 & 54 & -13\ell \\ & & 4\ell^2 & 0 & 13\ell & -3\ell^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & sym. & & & 156 & -22\ell \\ & & & & & 4\ell^2 \end{bmatrix} \quad (2-4-6)$$

$${}^L \mathbf{m}_i = \rho A \ell_i \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & I/A & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/2 & 0 & 0 \\ & sym. & & & 1/2 & 0 \\ & & & & & I/A \end{bmatrix} \quad (2-4-7)$$

座標変換マトリクス

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{x_b - x_a}{\ell} \\ \mu = \frac{y_b - y_a}{\ell} \end{array} \right. \quad (2-4-8)$$

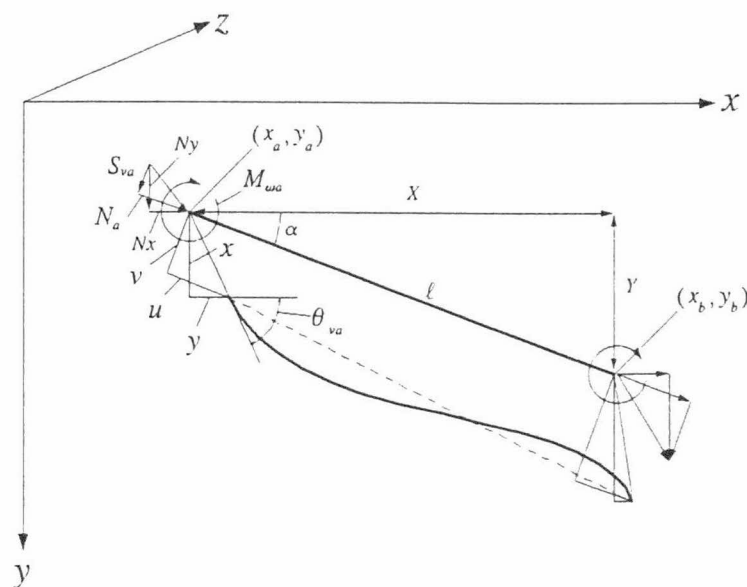


Fig.2-4-2 平面ラーメンの記号の定義

2-4-3. 面外ラーメン

剛性マトリクス

$$\mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} T_a & M_{va} & S_{\omega a} & T_b & M_{vb} & S_{\omega b} \\ \frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_v}{\ell} & -\frac{6EI_v}{\ell^2} & 0 & \frac{2EI_v}{\ell} & \frac{6EI_v}{\ell^2} \\ & & \frac{12EI_v}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EI_v}{\ell^2} & -\frac{12EI_v}{\ell^3} \\ & & & \frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 \\ & \text{sym.} & & & \frac{4EI_v}{\ell} & \frac{6EI_v}{\ell^2} \\ & & & & & \frac{12EI_v}{\ell^3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \varphi_a \\ \theta_{va} \\ \omega_a \\ \varphi_b \\ \theta_{vb} \\ \omega_b \end{matrix} \quad (2-4-9)$$

質量マトリクス

$${}^c \mathbf{m}_i = \rho A_i \ell_i \begin{bmatrix} \frac{r^2}{3} & 0 & 0 & \frac{r^2}{6} & 0 & 0 \\ & \frac{\ell^2}{105} & -\frac{11}{210}\ell & 0 & -\frac{\ell^2}{140} & -\frac{13}{420}\ell \\ & & \frac{13}{35} & 0 & \frac{13}{420}\ell & \frac{9}{70} \\ & & & \frac{r^2}{3} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{\ell^2}{105} & \frac{11}{210}\ell \\ & \text{sym.} & & & & \frac{13}{35} \end{bmatrix} \quad (2-4-10)$$

座標変換マトリクス

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{x_b - x_a}{\ell} \\ \mu = \frac{y_b - y_a}{\ell} \end{array} \right. \quad (2-4-11)$$

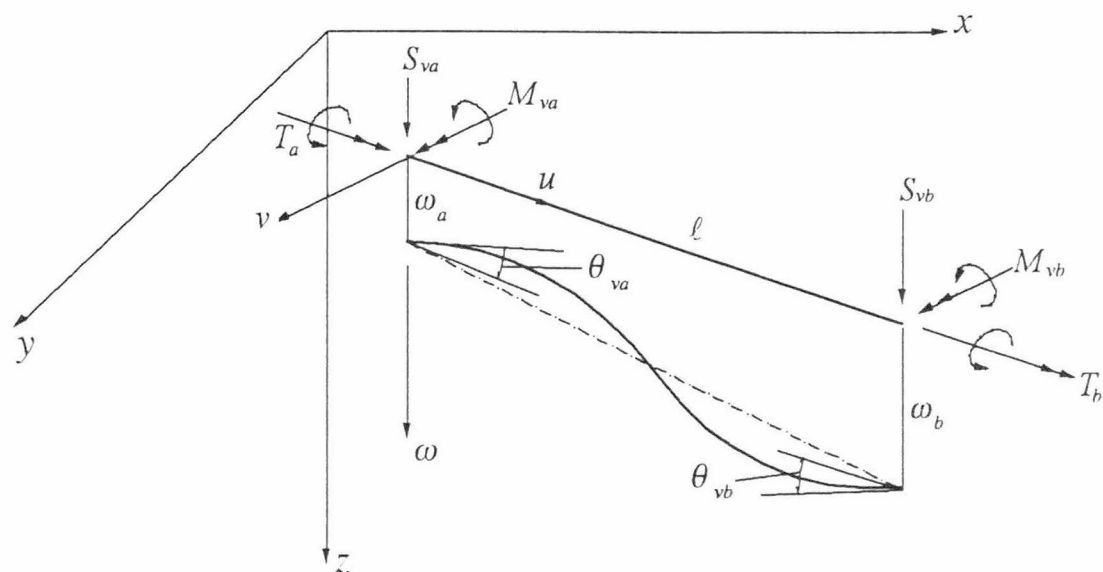


Fig.2-4-3 面外ラーメンの記号の定義

$$\begin{bmatrix}
 N_a & S_{va} & S_{\omega a} & T_a & M_{va} & M_{\omega a} & N_b & S_{vb} & S_{\omega b} & T_b & S_{cb} & M_{vb} & M_{cb} \\
 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 13/35 & 0 & 0 & 0 & 22/420 & 0 & 54/420 & 0 & 0 & 0 & 0 & -13/420 \\
 0 & 0 & 13/35 & 0 & -11/210 & 0 & 0 & 0 & 9/70 & 0 & 0 & 11/210 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & r^2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r^2/6 & 0 & \ell^2/140 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \ell^2/105 & 0 & 0 & 0 & 11/210 & 0 & 11/210 & -\ell^2/140 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ell^2/105 & 0 & 13/420 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/420 \\
 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 54/420 & 0 & 0 & 0 & 13/420 & 0 & 13/35 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22/420 \\
 0 & 0 & 13/35 & 0 & 11/210 & 0 & 0 & 13/35 & 0 & 0 & 13/35 & 11/210 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & r^2/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r^2/3 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 11/210 & 0 & -\ell^2/140 & 0 & 0 & 0 & 11/210 & 0 & 11/210 & \ell^2/105 & 0 \\
 0 & 13/420 & 0 & 0 & 0 & 3/420 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ell^2/105 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3/420 & 0 & -22/420 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -13/420 & 0 & 0 & 0 & -3/420 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

$$c \mathbf{m}_i = \rho A \ell_i$$

(2-4-13)

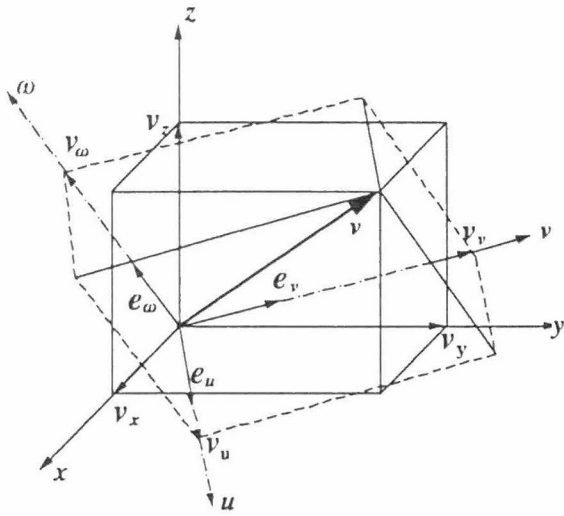


Fig.2-4-4

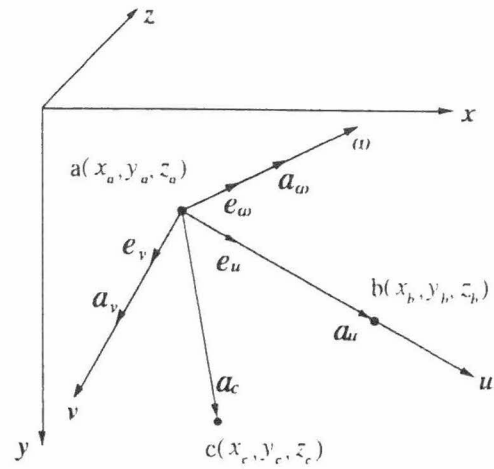


Fig.2-4-5

立体ラーメンの座標変換³²⁾

Fig.2-4-4 に示すように、任意の三次元ベクトル \mathbf{V} の u, v, w 座標軸方向の成分を (V_u, V_v, V_w) とし、同じベクトル \mathbf{V} の x, y, z 座標軸方向の成分を (V_x, V_y, V_z) とすると、この二つの座標系の間の変換は次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_u \\ V_v \\ V_w \end{Bmatrix} \quad (2-4-15)$$

上式の座標変換行列の要素 C_{ij} の物理的意味を知るために、三次元ベクトル \mathbf{V} として、特に u 軸方向の単位ベクトル e_u を取上げる。 e_u の u, v, w 軸方向の成分は、 $(1, 0, 0)$ であるから、これを式 (2-4-15) の右辺ベクトルに代入して掛合わせると、 (c_{11}, c_{21}, c_{31}) が e_u の x, y, z 軸方向の成分であることがわかる。同様に、 (c_{12}, c_{22}, c_{32}) が v 軸方向の単位ベクトル e_v の、また (c_{13}, c_{23}, c_{33}) が w 軸方向の単位ベクトル e_w の x, y, z 軸方向の成分である。すなわち、式 (2-4-15) の座標変換行列の第 1, 第 2, 第 3 列は、それぞれ変換前の座標軸 u, v, w 方向の単位ベクトルを変換後の座標系 x, y, z の成分で表したものになっている。

上記の事実を用いて、Fig.2-4-5 に示す立体骨組要素 ab の座標変換行列を求める。要素の軸 ab 方向に部材座標の u 軸を取り、 a 端における断面の二つの断面主軸の方向を v, w 軸に

すると、この u, v, ω 軸方向の単位ベクトルの成分を全体座標 x, y, z で表すことができれば、部材座標系から全体座標系への座標変換行列が得られたことになる。このために以下の計算を行う。

部材端 a, b の座標 (x_a, y_a, z_a) および (x_b, y_b, z_b) は図面から読みとることができる。この他に、 u, v 軸を含む平面内に座標値がわかっている点 c を選び、その座標を (x_c, y_c, z_c) とする。点 c は、 v 軸に近い方が好ましいが、 u 軸上にさえなければ、 uv 面のどこにあっても差支えない。さて、点 a, b を結ぶベクトルを \mathbf{a}_u 、点 a, c を \mathbf{a}_c とすると、これらのベクトルの x, y, z 座標系内での成分は

$$\mathbf{a}_u = \begin{Bmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} a_{ux} \\ a_{uy} \\ a_{uz} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{a}_c = \begin{Bmatrix} x_c - x_a \\ y_c - y_a \\ z_c - z_a \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} a_{cx} \\ a_{cy} \\ a_{cz} \end{Bmatrix} \quad (2-4-16)$$

で計算される。次に、 \mathbf{a}_u と \mathbf{a}_c のベクトル積を作ると、両者に直交する方向すなわち ω 軸方向のベクトルが得られるので、これを計算して \mathbf{a}_ω とおくとする

$$\mathbf{a}_\omega = \begin{Bmatrix} a_{ux} \\ a_{uy} \\ a_{uz} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} a_{cx} \\ a_{cy} \\ a_{cz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{uy}a_{cz} - a_{uz}a_{cy} \\ a_{uz}a_{cx} - a_{ux}a_{cz} \\ a_{ux}a_{cy} - a_{uy}a_{cx} \end{bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} a_{\omega x} \\ a_{\omega y} \\ a_{\omega z} \end{Bmatrix} \quad (2-4-17)$$

となる。さらに、 v 軸方向ベクトルを得るために、 \mathbf{a}_ω と \mathbf{a}_u のベクトル積を求め、これを \mathbf{a}_v とする。

$$\mathbf{a}_v = \begin{Bmatrix} a_{\omega x} \\ a_{\omega y} \\ a_{\omega z} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} a_{ux} \\ a_{uy} \\ a_{uz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\omega y}a_{uz} - a_{\omega z}a_{uy} \\ a_{\omega z}a_{ux} - a_{\omega x}a_{uz} \\ a_{\omega x}a_{uy} - a_{\omega y}a_{ux} \end{bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} a_{vx} \\ a_{vy} \\ a_{vz} \end{Bmatrix} \quad (2-4-18)$$

以上で、 u, v, ω 軸方向のベクトル $\mathbf{a}_u, \mathbf{a}_v, \mathbf{a}_\omega$ を求めることができた。これらを単位ベクトルにするには、それぞれのベクトルの成分をそのベクトルの長さで割ればよいから、次式で計算すればよい。

$$\mathbf{e}_u = \begin{Bmatrix} a_{ux}/\ell_u \\ a_{uy}/\ell_u \\ a_{uz}/\ell_u \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} e_{ux} \\ e_{uy} \\ e_{uz} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{e}_v = \begin{Bmatrix} a_{vx}/\ell_v \\ a_{vy}/\ell_v \\ a_{vz}/\ell_v \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} e_{vx} \\ e_{vy} \\ e_{vz} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{e}_\omega = \begin{Bmatrix} a_{\omega x}/\ell_\omega \\ a_{\omega y}/\ell_\omega \\ a_{\omega z}/\ell_\omega \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} e_{\omega x} \\ e_{\omega y} \\ e_{\omega z} \end{Bmatrix} \quad (2-4-19)$$

ただし

$$\ell_u = \sqrt{a_{ux}^2 + a_{uy}^2 + a_{uz}^2} \quad \ell_v = \sqrt{a_{vx}^2 + a_{vy}^2 + a_{vz}^2} \quad \ell_\omega = \sqrt{a_{\omega x}^2 + a_{\omega y}^2 + a_{\omega z}^2}$$

したがって、局所座標から全体座標への三次元の座標変換行列 \mathbf{c}_3 は、次のようになる。

$$\mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} e_{ux} & e_{vx} & e_{\omega x} \\ e_{uy} & e_{vy} & e_{\omega y} \\ e_{uz} & e_{vz} & e_{\omega z} \end{bmatrix} \quad (2-4-20)$$

局所座標の成分で書かれた立体骨組構造物の基本式(2-4-12)は、断面力、変位ともに、三次元のベクトルを上下に並べた六次元のベクトルとなっているので、立体骨組構造物の座標変換行列は、次に示すように式(2-4-20)の 3×3 行列 \mathbf{c}_3 を対角上に並べた 6×6 の行列にしなければならない。

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}_3 \end{bmatrix} \quad (2-4-21)$$

ただし、上式で $\mathbf{0}$ は、 3×3 の零行列である。

2-4-5. 弾性平面応力および弾性平面歪みの剛性マトリクス

本節では平面応力および平面歪みの剛性マトリクスを示す。なお、記号の意味はFig.2-3に示している。前節でも示したように、要素の剛性マトリクスは、

$$[K]^e = \iint [B]^T [D] [B] t dx dy \quad (2-4-20)$$

で与えられる。

ここで t は要素の厚さを表し、積分は要素三角形の全域について行う。ここで、平面応力および平面歪みの剛性マトリクス $[D]$ を示すと、

平面応力—等方性材料では、

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2-4-21)$$

また、平面歪み—等方性材料では、

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (2-4-22)$$

ここで、 E は縦弾性係数（ヤング率）、 ν はポアソン比である。

三角形要素でのマトリクス $[B]$ は、要素の面積を Δ とすれば次式で表される。

$$[B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_m}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_m}{\partial y} & \frac{\partial N_m}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2-4-23)$$

$$= \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_j - y_m & 0 & y_m - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_m - x_j & 0 & x_i - x_m & 0 & x_j - x_i \\ x_m - x_j & y_j - y_m & x_i - x_m & y_m - y_i & x_j - x_i & y_i - y_j \end{bmatrix}$$

$[B]$ の転置マトリックス $[B]^T$ は次式で表される.

$$[B]^T = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} y_j - y_m & 0 & x_m - x_j \\ 0 & x_m - x_j & y_j - y_m \\ y_m - y_i & 0 & x_i - x_m \\ 0 & x_i - x_m & y_m - y_i \\ y_i - y_j & 0 & x_j - x_i \\ 0 & x_j - x_i & y_i - y_j \end{bmatrix} \quad (2-4-24)$$

剛性マトリックス $[K]$ は,

$$[K] = t\Delta[B]^T[D][B] \quad (2-4-25)$$

である.

変位法によるつり合い方程式 (状態方程式) は一般に,

$$[K]\{v\} = \{F\} \quad (2-4-26)$$

と表すことができる. よって変位は,

$$\{\delta\} = [K]^{-1}\{F\} \quad (2-4-27)$$

である. また 応力は,

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\} \quad (2-4-28)$$

となる.

3. 感度解析理論

3. 感度解析理論

3-1. 骨組構造物の静的感度解析^{4) 5) 10)}

3-1-1. 断面定数に関する感度解析

変位法による静的な状態方程式は一般に

$$\mathbf{K}(\mathbf{X})\mathbf{z} = \mathbf{F} \quad (3-1-1)$$

で与えられる。線形弾性挙動を示す骨組構造物の設計問題において、変数としては部材断面積 A 、断面 2 次モーメント I 、ねじり定数 J およびそれらの逆数が用いられている。本論文においても文献 4) と同様に感度解析に用いる変数を、設計に関する変数と区別する意味で感度変数と呼んでいる。ここで、部材数を m 、構造の自由度数を n 、 $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_m)^T$ は感度変数ベクトル、 $\mathbf{z}=(z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ は応答節点変位を表すベクトルで、挙動変数ベクトルと呼ぶ。また、 $\mathbf{F}=(F_1, F_2, \dots, F_n)^T$ は節点外力ベクトル、 \mathbf{K} は剛性マトリクス ($n \times n$) で感度変数 X_j , $j=1, 2, \dots, m$ の関数である。骨組構造物の場合、断面レベルでの感度変数 X_j は部材断面の断面積 A_j 、断面二次モーメント I_j 、ねじり定数 J_j 等が考えられるが、これらの感度変数は互いに独立である場合を考える³¹⁾。ここで、互いに独立である感度変数の種類の数を s とすれば、下記に示す各構造における X_i は

・トラス構造の場合：

$$s=1, \quad X_i=A_j \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

・平面梁構造の場合：

$$s=1, \quad X_i=I_j \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

・平面ラーメン構造の場合：

$$s=2, \quad X_i=A_j \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad X_i=I_j \quad (i=m+1, m+2, \dots, s \cdot m), \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

・面外ラーメン構造の場合：

$$s=2, \quad X_i=I_j \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad X_i=J_j \quad (i=m+1, m+2, \dots, s \cdot m), \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

・立体ラーメン構造の場合：

$$s=3, \quad X_i=A_j \quad (i=1, 2, \dots, m), \quad X_i=I_j \quad (i=m+1, m+2, \dots, 2 \cdot m), \quad X_i=J_j \quad (i=2 \cdot m+1, 2 \cdot m+2, \dots, s \cdot m), \\ , \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

となる。

また、右辺の外力ベクトル \mathbf{F} は自重や温度変化の影響を考慮する場合、感度変数の関数となる。

e 部材の断面力 \mathbf{r}_e は

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{r}_{0e}(\mathbf{X}) + \mathbf{k}_e \mathbf{z}_e \quad (3-1-2)$$

で表される。右辺の1項目は自重や温度変化による断面力を示し、2項目は外力による節点変位に伴う断面力を示す。 \mathbf{k}_e は e 部材の要素剛性マトリクス、また、 \mathbf{z}_e は e 部材の節点変位ベクトルを表す。

(1) 差分法による感度解析 (FDM)

差分法 (Finite Difference Method) による近似的な感度解析は以下のように示される。

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial X_i} \approx \frac{\mathbf{g}(X_i + \Delta X_i) - \mathbf{g}(X_i)}{\Delta X_i} \quad (3-1-3)$$

ここに、 \mathbf{g} は変位や断面力などの応答を表す。

(2) 直接微分法による1次感度解析 (DDM)

直接微分法 (Direct Differentiation Method) により解析的に感度係数が計算される。感度変数 X_i の変動 δX_i , $i=1, 2, \dots, s \cdot m$ に対して式(3-1-1)は

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{z} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} \mathbf{z} \delta X_i = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial X_i} \delta X_i \quad (3-1-4)$$

となる。ここで、挙動変数ベクトル \mathbf{z} を従属変数と考え、独立な感度変数 \mathbf{X} で表すと $\delta \mathbf{z}$ は $(\partial \mathbf{z} / \partial X_i) \delta X_i$ と表されるので式(3-1-4)は次のようになる。

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial X_i} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial X_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} \mathbf{z}, \quad (i=1, 2, \dots, s \cdot m) \quad (3-1-5)$$

式(3-1-5)において左辺の $\partial \mathbf{z} / \partial X_i$ は i 番目の感度変数 X_i の微小変動に対する各節点変位の変動量、すなわち節点変位の感度係数ベクトルを示す。式(3-1-5)は式(3-1-1)と同じように剛性マトリクスが連立方程式の係数マトリクスとなっている。従って、式(3-1-1)より \mathbf{z} が求

められ式(3-1-5)の右辺が全て与えられれば、式(1)を解くサブルーチンを利用することにより、差分法に比べて非常に効率的に $\partial \mathbf{z} / \partial X_i$ が計算される。

また、 i 番目の感度変数 X_i の微小変動に対する e 部材の断面力 \mathbf{r}_e の感度係数ベクトル $\partial \mathbf{r}_e / \partial X_i$ は式(3-1-2)より次式で示される。

$$\frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial X_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_{0e}}{\partial X_i} + \frac{\partial \mathbf{k}_e}{\partial X_i} \mathbf{z}_e + \mathbf{k}_e \frac{\partial \mathbf{z}_e}{\partial X_i} \quad (3-1-6)$$

感度変数の微小変動に対する応答 \mathbf{g} の変動分は感度係数を用いて次式で表される。

$$\Delta \mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial X} \Delta X \quad (3-1-7)$$

今、各感度変数の間に $X_i = f(X_N)$ なる関係があれば、それを考慮した X_N に関する感度係数 $\tilde{\partial \mathbf{g}} / \partial X_N$ は線形結合の形で次式で求められる。

$$\frac{\tilde{\partial \mathbf{g}}}{\partial X_N} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial X_N} + \sum_{i \neq N} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dX_N} \quad (3-1-8)$$

(3) 直接微分法による高次感度解析

式(3-1-5)は式(3-1-1)の両辺を感度変数 X_i で直接微分することにより求められた。さらに式(3-1-5)の両辺を任意の感度変数で偏微分すれば2次の感度係数に関する方程式が得られる。そして得られた式を任意の感度係数で次々に偏微分していくことにより、次のような高次感度係数に関する方程式が得られる。

(a) 2次感度係数

$$\mathbf{K} \mathbf{z}_{,i1,i2} = \mathbf{F}_{,i1,i2} - \mathbf{K}_{,i1,i2} \mathbf{z} - \mathbf{K}_{,i1} \mathbf{z}_{,i2} - \mathbf{K}_{,i2} \mathbf{z}_{,i1} \quad (3-1-9)$$

ここで式中の $,i1$ および $,i1,i2$ 等は $\partial(\) / \partial X_{i1}$ および $\partial^2(\) / \partial X_{i1} \partial X_{i2}$ を表す。

(b) 3次感度係数

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \mathbf{z}_{,i1,i2,i3} = & \mathbf{F}_{,i1,i2,i3} - \mathbf{K}_{,i1,i2,i3} \mathbf{z} - \mathbf{K}_{,i1,i2} \mathbf{z}_{,i3} \\ & - \mathbf{K}_{,i1,i3} \mathbf{z}_{,i2} - \mathbf{K}_{,i2,i3} \mathbf{z}_{,i1} - \mathbf{K}_{,i1} \mathbf{z}_{,i2,i3} - \mathbf{K}_{,i2} \mathbf{z}_{,i1,i3} - \mathbf{K}_{,i3} \mathbf{z}_{,i1,i2} \end{aligned} \quad (3-1-10)$$

(c) p 次感度係数

$$\begin{aligned}
\mathbf{Kz}_{,i_1,\dots,i_p} &= \mathbf{F}_{,i_1,\dots,i_p} - \mathbf{K}_{,i_1,\dots,i_p} \mathbf{z} - \mathbf{K}_{,i_1,\dots,i(p-1)} \mathbf{z}_{,ip} \\
&\quad - \mathbf{K}_{,i_1,\dots,i(p-2),ip} \mathbf{z}_{,i(p-1)} - \dots - \mathbf{K}_{,i_2,\dots,ip} \mathbf{z}_{,i_1} \\
&\quad - \mathbf{K}_{,i_1,\dots,i(p-2)} \mathbf{z}_{,i(p-1),ip} - \mathbf{K}_{,i_1,\dots,i(p-3),i(p-1)} \\
&\quad \mathbf{z}_{,i(p-2),ip} - \dots - \mathbf{K}_{,i_3,\dots,ip} \mathbf{z}_{,i_1,i_2} \\
&\quad \vdots \\
&\quad - \mathbf{K}_{,i_1,i_2} \mathbf{z}_{,i_3,\dots,ip} - \mathbf{K}_{,i_1,i_3} \mathbf{z}_{,i_2,i_4,\dots,ip} \\
&\quad - \dots - \mathbf{K}_{,i(p-1),ip} \mathbf{z}_{,i_1,\dots,i(p-2)} - \mathbf{K}_{,i_1} \mathbf{z}_{,i_2,\dots,ip} \\
&\quad - \mathbf{K}_{,i_2} \mathbf{z}_{,i_1,i_3,\dots,ip} - \dots - \mathbf{K}_{,ip} \mathbf{z}_{,i_1,\dots,i(p-1)}
\end{aligned} \tag{3-1-11}$$

3-1-2. 形状感度解析

形状感度解析は、形状を決定づける変数の変動に対して構造の応答がどの様に変化するのかを計算するものであり、形状最適化問題における重要な役割を持っている。形状設計変数に関する応答量の第一偏導関数は、数学的な最適化手法と、構造解析手法とを結びつけるための重要な情報を与える。この問題は、最近の20年間にわたって議論されている³³⁾。

離散的なモデルにおける感度解析には3-3-1.と同様に、差分法、解析的手法、半解析的手法がある。差分法は概念が解りやすく計算の実行も容易である反面、2つの弱点がある。1つは感度係数の精度が摂動させる量に依存してしまうことと^{34),35)}、もう1つは設計変数の数が多くなると計算コストが非常に高価なものとなることである。解析的手法は、状態方程式を設計変数で直接微分する方法である^{36),37)~39)}。これは陰な微分によって得られるため数学的に厳密な感度係数が得られる。Zienkiewicz, Campbell⁴⁰⁾、Ramakrishnan, Francavilla⁴¹⁾の研究を皮切に、最近ではBraibant,Fleury⁴²⁾、Wang等³⁶⁾が陰な微分理論を確立している。しかし、剛性マトリクスは一般的に形状設計変数に関して非線形であるため、剛性マトリクスの微分を解析的に求めるのは非常に困難であるという問題がある。半解析的手法も解析的手法と同様に最初に状態方程式をまず微分することになるが、剛性マトリクスの微分を計算するために差分法を用いている^{43),44)}。これは、一般的で計算の実行も容易であることから実際の問題においては興味深い手法の一つといえる。しかし、多くの研究者は半解析的手法は梁構造、版構造および固体に対して深刻な精度の問題を持っていることを指摘している^{35),42),45)~49)}。

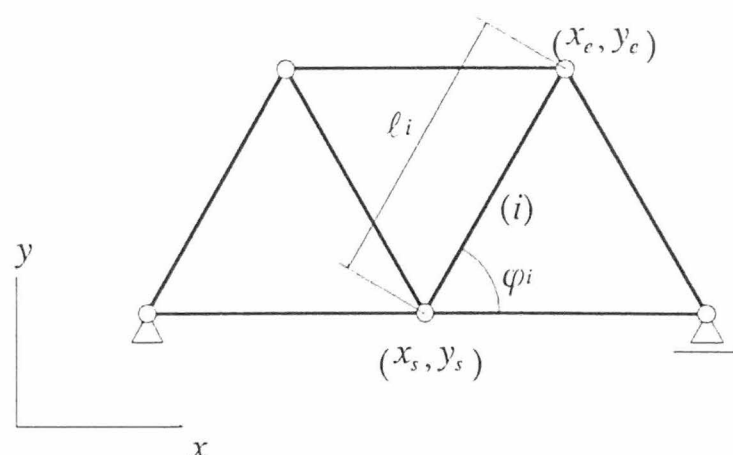
(1) 平面トラス¹⁸⁾

Fig.3-1

従来の感度解析では、設計変数 X_i を断面積 A 、断面二次モーメント I 、又はそれぞれの逆数を扱っていたが(3-1-1.参照)、形状に関する感度解析では節点の座標を設計変数 X_h (感度変数) とする (h : 節点座標番号, $h = 1, \dots, 2NN$ NN : 節点数). Fig.3-1 のトラス構造物の任意の要素 i に注目する. 節点座標は、部材の始節点(start node)の座標を、終節点(end node)の座標を (x_e, y_e) とする. そこで、部材(要素)の長さ、角度 φ を節点座標で表すと、

$$l = \sqrt{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2} \quad (3-1-12)$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \cos \varphi = X/l \\ \mu &= \sin \varphi = Y/l \end{aligned} \quad (3-1-13)$$

となる. トラスの部材 i に関する要素剛性マトリクス k_i は次のように表わされる.

$$k_i = \frac{E_i A_i}{l_i} \begin{bmatrix} \lambda_i^2 & \lambda_i \mu_i & -\lambda_i^2 & -\lambda_i \mu_i \\ \mu_i^2 & -\lambda_i \mu_i & -\mu_i^2 & \lambda_i \mu_i \\ \text{sym.} & \lambda_i^2 & \lambda_i \mu_i & \\ & & \mu_i^2 & \end{bmatrix} \quad (3-1-14)$$

このマトリクスの成分は高次の関数であるため直接計算していくことは効率的ではない. そこで、次式のような中間的な独立変数を考える.

$$S_{1i} = \frac{\lambda_i^2}{l_i} = \frac{(x_e - x_s)^2}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \quad (3-1-15)$$

$$S_{2i} = \frac{\lambda_i \mu_i}{l_i} = \frac{(x_e - x_s)(y_e - y_s)}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \quad (3-1-16)$$

$$S_{3i} = \frac{\mu_i^2}{l_i} = \frac{(y_e - y_s)^2}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \quad (3-1-17)$$

これらの式を式(3-1-14)に代入すれば次式となる.

$$k_i = E_i A_i \begin{bmatrix} S_{1i} & S_{2i} & -S_{1i} & -S_{2i} \\ & S_{3i} & -S_{2i} & -S_{3i} \\ & \text{sym.} & S_{1i} & S_{2i} \\ & & & S_{3i} \end{bmatrix} \quad (3-1-18)$$

形状感度係数とは, 節点変位を設計変数である節点座標で偏微分した形で表わされる. ここで独立変数を中間変数として形状感度係数を表わすと

$$\frac{\partial z_k}{\partial X_h} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z}{\partial S_{1i}} \frac{\partial S_{1i}}{\partial X_h} + \frac{\partial z}{\partial S_{2i}} \frac{\partial S_{2i}}{\partial X_h} + \frac{\partial z}{\partial S_{3i}} \frac{\partial S_{3i}}{\partial X_h} \right) \quad (3-1-19)$$

となる. ここで, m は部材数である. これは設計変数に無関係な部材 (要素) については偏微分は 0 になるからである.

ここで, $\partial z_k / \partial S_{1i}, \partial z_k / \partial S_{2i}, \partial z_k / \partial S_{3i}$ は 3-1-1. 静的感度解析より

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_k}{\partial S_{1i}} &= -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial S_{1i}} z_k \\ \frac{\partial z_k}{\partial S_{2i}} &= -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial S_{2i}} z_k \\ \frac{\partial z_k}{\partial S_{3i}} &= -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial S_{3i}} z_k \end{aligned} \quad (3-1-20)$$

と表わされる. 上式において剛性マトリクスの逆マトリクス \mathbf{K}^{-1} および節点変位は, 構造解析の際に計算されており既知数である. 要素剛性マトリクスをそれぞれ偏微分したものは式(3-1-18)より

$$\frac{\partial k_i}{\partial S_{1i}} = E_i A_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-1-21a)$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial S_{2i}} = E_i A_i \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-1-21b)$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial S_{3i}} = E_i A_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-1-21c)$$

となる. これを全体剛性マトリクス \mathbf{K} で考えれば $\partial z_k / \partial S_{1i}, \partial z_k / \partial S_{2i}, \partial z_k / \partial S_{3i}$ は容易に求めることができる. $\partial S_{1i} / \partial x_h, \partial S_{2i} / \partial x_h, \partial S_{3i} / \partial x_h$ は, を設計変数 x_h すなわち節点座標 x_s, x_e, y_s, y_e で偏微分したものであるから,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{1i}}{\partial x_s} &= \frac{3(x_e - x_s)^3}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} - \frac{2(x_e - x_s)}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\ \frac{\partial S_{2i}}{\partial x_s} &= \frac{3(x_e - x_s)^2(y_e - y_s)}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} - \frac{(y_e - y_s)}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\ \frac{\partial S_{3i}}{\partial x_s} &= \frac{3(x_e - x_s)(y_e - y_s)^2}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} \end{aligned} \quad (3-1-22a,b,c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{1i}}{\partial y_s} &= \frac{3(x_e - x_s)^2(y_e - y_s)}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} \\ \frac{\partial S_{2i}}{\partial y_s} &= \frac{3(x_e - x_s)(y_e - y_s)^2}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} - \frac{(x_e - x_s)}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\ \frac{\partial S_{3i}}{\partial y_s} &= \frac{3(x_e - x_s)^3}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} - \frac{2(y_e - y_s)}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \end{aligned} \quad (3-1-23a,b,c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{1i}}{\partial x_e} &= \frac{-3(x_e - x_s)^3}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} + \frac{2(x_e - x_s)}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\ \frac{\partial S_{2i}}{\partial x_e} &= \frac{-3(x_e - x_s)^2(y_e - y_s)}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} + \frac{(y_e - y_s)}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\ \frac{\partial S_{3i}}{\partial x_e} &= \frac{-3(x_e - x_s)(y_e - y_s)^2}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} \end{aligned} \quad (3-1-24a,b,c)$$

3-2. 骨組構造物の動的感度解析

3-2-1. 固有値・固有ベクトルの感度解析⁶⁾

多自由度系の固有値問題は、2-2-1.の項で述べたようにマトリクス表示を用いて次のように表わされる。

$$\mathbf{K}_{(x)}y_r = \lambda_r \mathbf{M}_{(x)}y_r \quad (3-2-1)$$

ここに、 $\mathbf{K}_{(x)}$ および $\mathbf{M}_{(x)}$ はそれぞれ $(n \times n)$ の剛性マトリクスおよび質量マトリクスである。 y_r は $(n \times 1)$ のベクトルで、 r 番目の固有ベクトルを表わし、 λ_r は r 番目の固有値を表わす。また、 X は $(m \times 1)$ の感度変数ベクトルである。ここでの X も、3-1-1.の項で述べたようにA,I,Jといった断面定数はそれぞれに独立である場合を考える。 n と m はそれぞれ構造全体の自由度と部材数である。なお、固有ベクトル y_r は次に示す直交条件式を満たすものとする。

$$\mathbf{y}_r^T \mathbf{M} \mathbf{y}_p = \begin{cases} 0 & (p \neq r) \\ 1 & (p = r) \end{cases} \quad (3-2-2)$$

(1) 1次感度係数

式(3-2-1)の両辺を感度係数 X_i で直接偏微分し関数の直交性を利用することにより、固有円振動数と固有ベクトルの感度変数に関する感度係数が得られる。

固有円振動数 $\omega_r = \sqrt{\lambda_r}$ の X_i に関する感度係数

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial X_i} = y_r^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} - \omega_r^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} \right] y_r \frac{1}{2\omega_r} \quad (3-2-3)$$

固有ベクトル y_{rl} の X_i に関する感度係数

$$\frac{\partial y_{rl}}{\partial X_i} = -\frac{1}{2} \left(y_r^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} y_r \right) y_r - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^n \frac{1}{\lambda_s - \lambda_r} \left(y_s^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} - \lambda_r \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} \right] y_r \right) y_s \quad (3-2-4)$$

(2) 高次感度係数

更に、上式を任意の感度変数で偏微分すれば2次の感度係数に関する方程式が得られ、それらの式を任意の感度変数で次々に偏微分していくことにより、次に示すような高次の感度係数が得られる。なお、本文中においては、3次の感度次数まで示すが任意の感度次数に対して表現が可能である。

(a) 2次感度係数

固有円振動数 ω_r については

$$\begin{aligned} \omega_{r,i1,i2} = & \mathbf{y}_{r,i2}^T (\mathbf{K}_{,i1} - \omega_r^2 \cdot \mathbf{M}_{,i1}) \mathbf{y}_r / \omega_r \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{y}_r^T (\mathbf{K}_{,i1,i2} - 2\omega_r \cdot \omega_{r,i2} \cdot \mathbf{M}_{,i1} - \omega_r^2 \cdot \mathbf{M}_{,i1,i2}) \mathbf{y}_r / \omega_r \\ & - \omega_{r,i2} \cdot \omega_{r,i1} / \omega_r \end{aligned} \quad (3-2-5)$$

固有ベクトル y_{ri} については

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{r,i1,i2} = & - \left(\mathbf{y}_r^T \mathbf{M}_{,i1} \mathbf{y}_{r,i2} + \mathbf{y}_r^T \mathbf{M}_{,i2} \mathbf{y}_{r,i1} + \mathbf{y}_{r,i2}^T \mathbf{M} \mathbf{y}_{r,i1} + \frac{1}{2} \mathbf{y}_r^T \mathbf{M}_{,i1,i2} \mathbf{y}_r \right) \mathbf{y}_r \\ & - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^n \frac{1}{\lambda_s - \lambda_r} \left\{ \mathbf{y}_s^T (\mathbf{K}_{,i1,i2} - \lambda_{r,i1} \mathbf{M}_{,i2} - \lambda_{r,i2} \mathbf{M}_{,i1} - \lambda_r \mathbf{M}_{,i1,i2}) \mathbf{y}_r \right. \\ & \left. + \mathbf{y}_s^T (\mathbf{K}_{,i1} - \lambda_{r,i1} \mathbf{M} - \lambda_r \mathbf{M}_{,i1}) \mathbf{y}_{r,i2} + \mathbf{y}_s^T (\mathbf{K}_{,i2} - \lambda_{r,i2} \mathbf{M} - \lambda_r \mathbf{M}_{,i2}) \mathbf{y}_{r,i1} \right\} \mathbf{y}_s \end{aligned} \quad (3-2-6)$$

なお、式中の $,i1$ および $,i1,i2$ 等は $\partial(\)/\partial X_{i1}$ および $\partial^2(\)/\partial X_{i1} \partial X_{i2}$ を表わす。

(b) 3次感度係数

固有円振動数 ω_r については

$$\begin{aligned} \omega_{r,i1,i2,i3} = & \mathbf{y}_{r,i2,i3}^T (\mathbf{K}_{,i1} - \omega_r^2 \cdot \mathbf{M}_{,i1}) \mathbf{y}_r / \omega_r \\ & + \mathbf{y}_{r,i2}^T (\mathbf{K}_{,i1,i3} - 2\omega_r \cdot \omega_{r,i3} \cdot \mathbf{M}_{,i1} - \omega_r^2 \cdot \mathbf{M}_{,i1,i3}) \mathbf{y}_r / \omega_r \\ & + \mathbf{y}_{r,i2}^T (\mathbf{K}_{,i1} - \omega_r^2 \cdot \mathbf{M}_{,i1}) \mathbf{y}_{r,i3} / \omega_r \\ & + \mathbf{y}_{r,i3}^T (\mathbf{K}_{,i1,i2} - 2\omega_r \cdot \omega_{r,i2} \cdot \mathbf{M}_{,i1} - \omega_r^2 \cdot \mathbf{M}_{,i1,i2}) \mathbf{y}_r / \omega_r \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{y}_r^T \left\{ \mathbf{K}_{,i1,i2,i3} - 2(\omega_{r,i2} \cdot \omega_{r,i3} + \omega_r \cdot \omega_{r,i2,i3}) \mathbf{M}_{,b1} \right. \\ & \quad \left. - 2\omega_r (\omega_{r,i2} \cdot \mathbf{M}_{,i1,i3} + \omega_{r,i3} \cdot \mathbf{M}_{,i1,i2}) - \omega_r^2 \cdot \mathbf{M}_{,i1,i2,i3} \right\} \mathbf{y}_r / \omega_r \\ & - (\omega_{r,i2,i3} \cdot \omega_{r,i1} + \omega_{r,i1,i3} \cdot \omega_{r,i2} + \omega_{r,i1,i2} \cdot \omega_{r,i3}) / \omega_r \end{aligned} \quad (3-2-7)$$

固有ベクトル y_{ri} については

$$\begin{aligned}
y_{r,i1,i2,i3} = & - \left\{ y_{r,i3}^T \mathbf{M} y_{r,i1,i2} + y_r^T \mathbf{M}_{,i3} y_{r,i1,i2} + y_{r,i3}^T \mathbf{M}_{,i1} y_{r,i2} + y_r^T \mathbf{M}_{r,i1,i3} y_{r,i2} \right. \\
& + y_r^T \mathbf{M}_{,i1} y_{r,i2,i3} + y_{r,i3}^T \mathbf{M}_{,i2} y_{r,i1} + y_r^T \mathbf{M}_{,i2,i3} y_{r,i1} + y_r^T \mathbf{M}_{,i2} y_{r,i1,i3} \\
& + y_{r,i1,i3}^T \mathbf{M} y_{r,i2} + y_{r,i1}^T \mathbf{M}_{,i3} y_{r,i2} + y_{r,i1}^T \mathbf{M} y_{r,i2,i3} \\
& \left. + \frac{1}{2} \left(y_{r,i3}^T \mathbf{M}_{,i1,i2} y_r + y_r^T \mathbf{M}_{,i1,i2,i3} y_r + y_r^T \mathbf{M}_{,i1,i2} y_{r,i3} \right) \right\} y_r \\
& - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^n \frac{1}{\lambda_s - \lambda_r} \left\{ y_s^T \left(\mathbf{K}_{,i1,i2,i3} - \lambda_{r,i1,i2} \mathbf{M}_{,i3} - \lambda_{r,i2,i3} \mathbf{M}_{,i1} \right. \right. \\
& - \lambda_{r,i1,i3} \mathbf{M}_{,i2} - \lambda_{r,i1} \mathbf{M}_{,i2,i3} - \lambda_{r,i2} \mathbf{M}_{,i1,i3} - \lambda_{r,i3} \mathbf{M}_{,i1,i2} - \lambda_r \mathbf{M}_{,i1,i2,i3} \left. \right) y_r \\
& + y_s^T \left(\mathbf{K}_{,i2,i3} - \lambda_{r,i2,i3} \mathbf{M} - \lambda_{r,i2} \mathbf{M}_{,i3} - \lambda_{r,i3} \mathbf{M}_{,i2} - \lambda_r \mathbf{M}_{,i2,i3} \right) y_{r,i1} \\
& + y_s^T \left(\mathbf{K}_{,i1,i3} - \lambda_{r,i1,i3} \mathbf{M} - \lambda_{r,i1} \mathbf{M}_{,i3} - \lambda_{r,i3} \mathbf{M}_{,i1} - \lambda_r \mathbf{M}_{,i1,i3} \right) y_{r,bi2} \\
& + y_s^T \left(\mathbf{K}_{,i1,i2} - \lambda_{r,i1,i2} \mathbf{M} - \lambda_{r,i1} \mathbf{M}_{,i2} - \lambda_{r,i2} \mathbf{M}_{,i1} - \lambda_r \mathbf{M}_{,i1,i2} \right) y_{r,bi3} \\
& + y_s^T \left(\mathbf{K}_{,i1} - \lambda_{r,i1} \mathbf{M} - \lambda_r \mathbf{M}_{,i1} \right) y_{r,i2,i3} \\
& \left. + y_s^T \left(\mathbf{K}_{,i2} - \lambda_{r,i2} \mathbf{M} - \lambda_r \mathbf{M}_{,i2} \right) y_{r,i1,i3} \right\} y_s
\end{aligned} \tag{3-2-8}$$

3-2-2. 動的応答感度解析

2-2-2. で述べた動的応答解析における感度解析について定式化を行う。ここでは、基準座標、刺激係数を直接感度変数で偏微分し、固有値の感度係数を用いる方法を示す。式(2-2-5)より変位ベクトル u_j は基準座標 q_j と固有ベクトル ϕ_{rj} を用いて

$$u_j = \sum_{r=1}^n q_j \phi_{rj} \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3-2-9)$$

で表される。上式の両辺を感度変数 X_i で偏微分すれば

$$\frac{\partial u_j(t)}{\partial X_i} = \sum_{r=1}^n \left(\frac{\partial q_j(t)}{\partial X_i} \phi_{rj} + q_j(t) \frac{\partial \phi_{rj}}{\partial X_i} \right) \quad (3-2-10)$$

となる。同様に基準座標 q_j についても式(2-2-9)の両辺を感度変数 X_i で偏微分すれば

$$\frac{\partial q_j(t)}{\partial X_i} = \frac{\partial \beta_j}{\partial X_i} q_{j0}(t) + \beta_j \frac{\partial q_{j0}(t)}{\partial X_i} \quad (3-2-11)$$

となる。上式の刺激係数 β_j の感度変数 X_i による偏微分は式(2-2-8)より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_j}{\partial X_i} &= \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{\sum_{r=1}^n \{\phi_{rj}\}^T [M] \{1\}}{\sum_{r=1}^n \{\phi_{rj}\}^T [M] \{\phi_{rj}\}} \right) \\ &= \frac{\left\{ \left(\sum_{r=1}^n \left\{ \frac{\partial \phi_{rj}}{\partial X_i} \right\}^T [M] \{1\} + \sum_{r=1}^n \{\phi_{rj}\}^T \left[\frac{\partial M}{\partial X_i} \right] \{1\} \right) \sum_{r=1}^n \{\phi_{rj}\}^T [M] \{\phi_{rj}\} \right.}{\left. - \sum_{r=1}^n \{\phi_{rj}\}^T [M] \{1\} \left(2 \sum_{r=1}^n \left\{ \frac{\partial \phi_{rj}}{\partial X_i} \right\}^T [M] \{\phi_{rj}\} + \sum_{r=1}^n \{\phi_{rj}\}^T \left[\frac{\partial M}{\partial X_i} \right] \{\phi_{rj}\} \right) \right\}}{\left(\sum_{r=1}^n \{\phi_{rj}\}^T [M] \{\phi_{rj}\} \right)^2} \end{aligned} \quad (3-2-12)$$

となる。ここに、 ϕ は固有ベクトルである。次に、式(2-2-11)の感度変数による偏微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{j0}(t)}{\partial X_i} &= \left[\frac{1}{\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j} \int_0^t \ddot{Z}_g(\tau) e^{-h_j \omega_j (t-\tau)} \sin \left\{ \sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j^2 (t-\tau) \right\} d\tau \right. \\ &\quad + \frac{h_j}{\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j} \int_0^t \ddot{Z}_g(\tau) e^{-h_j \omega_j (t-\tau)} \sin \left\{ \sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j^2 (t-\tau) \right\} (t-\tau) d\tau \\ &\quad \left. - \frac{1}{\omega_j} \int_0^t \ddot{Z}_g(\tau) e^{-h_j \omega_j (t-\tau)} \cos \left\{ \sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j^2 (t-\tau) \right\} (t-\tau) d\tau \right] \frac{\partial \omega_j}{\partial X_i} \end{aligned} \quad (3-2-13)$$

となる。上式の第1項目は式(2-2-11)のデュアメル積分である。上式の第2項目のデュアメル積分は

2nd. term

$$\begin{aligned} & \frac{h_j}{\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j} \int_0^t \ddot{Z}_g(\tau) e^{-h_j \omega_j (t-\tau)} \sin \left\{ \sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j (t-\tau) \right\} (t-\tau) d\tau \\ &= \frac{h_j}{\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j} \left[\sin \left(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t \right) \cdot \left\{ \eta_{cj}(t) - \xi_{cj}(t) \right\} - \cos \left(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t \right) \cdot \left\{ \eta_{sj}(t) - \xi_{sj}(t) \right\} \right] \end{aligned} \quad (3-2-14)$$

Duhamel Integration2

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{cj}(t) = \frac{t}{t-\Delta t} e^{-h_j \omega_j \Delta t} \eta_{cj}(t-\Delta t) + \ddot{Z}_g(t) t \cos \left(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t \right) \cdot \Delta t \quad \text{when } t_1 \geq 2\Delta t \\ \eta_{sj}(t) = \frac{t}{t-\Delta t} e^{-h_j \omega_j \Delta t} \eta_{sj}(t-\Delta t) + \ddot{Z}_g(t) t \sin \left(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t \right) \cdot \Delta t \quad \text{when } t_1 \geq 2\Delta t \\ \text{when } t_1 = \Delta t \\ \quad \eta_{cj}(\Delta t) = \ddot{Z}_g(t_1) t_1 \cos \left(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t_1 \right) \cdot \Delta t \\ \quad \eta_{sj}(\Delta t) = \ddot{Z}_g(t_1) t_1 \sin \left(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t_1 \right) \cdot \Delta t \\ \text{when } t_2 = 2\Delta t \\ \quad \eta_{cj}(2\Delta t) = \frac{t_2}{t_2-\Delta t} e^{-h_j \omega_j \Delta t} \eta_{cj}(\Delta t) + \ddot{Z}_g(t_2) t_2 \cos \left(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t_2 \right) \cdot \Delta t \\ \quad \eta_{sj}(2\Delta t) = \frac{t_2}{t_2-\Delta t} e^{-h_j \omega_j \Delta t} \eta_{sj}(\Delta t) + \ddot{Z}_g(t_2) t_2 \sin \left(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t_2 \right) \cdot \Delta t \\ \text{at programming} \\ \quad \eta_{cj}(t_0) = \ddot{Z}_g(1) t \cos \left(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t_1 \right) \cdot \Delta t \\ \quad \eta_{sj}(t_0) = \ddot{Z}_g(1) t \sin \left(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t_1 \right) \cdot \Delta t \\ \quad \eta_{cj}(t) = \frac{t_2}{t_2-\Delta t} e^{-h_j \omega_j \Delta t} \eta_{cj}(t-\Delta t) + \frac{\ddot{Z}_g(t-\Delta t) + \ddot{Z}_g(t)}{2} t_2 \cos \left\{ \sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot \left(t_2 - \frac{\Delta t}{2} \right) \right\} \cdot \Delta t \cdot e^{-\frac{h_j \omega_j \Delta t}{2}} \\ \quad \eta_{sj}(t) = \frac{t_2}{t_2-\Delta t} e^{-h_j \omega_j \Delta t} \eta_{sj}(t-\Delta t) + \frac{\ddot{Z}_g(t-\Delta t) + \ddot{Z}_g(t)}{2} t_2 \sin \left\{ \sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot \left(t_2 - \frac{\Delta t}{2} \right) \right\} \cdot \Delta t \cdot e^{-\frac{h_j \omega_j \Delta t}{2}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{cj}(t) = e^{-h_j \omega_j \Delta t} \xi_{cj}(t-\Delta t) + \ddot{Z}_g(t) t \cos \left(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t \right) \cdot \Delta t \\ \xi_{sj}(t) = e^{-h_j \omega_j \Delta t} \xi_{sj}(t-\Delta t) + \ddot{Z}_g(t) t \sin \left(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t \right) \cdot \Delta t \\ \text{when } t_1 = \Delta t \\ \quad \xi_{cj}(\Delta t) = \ddot{Z}_g(t_1) t_1 \cos \left(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t_1 \right) \cdot \Delta t = \eta_{cj}(\Delta t) \\ \quad \xi_{sj}(\Delta t) = \ddot{Z}_g(t_1) t_1 \sin \left(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t_1 \right) \cdot \Delta t = \eta_{sj}(\Delta t) \\ \text{when } t_2 = 2\Delta t \\ \quad \xi_{cj}(2\Delta t) = e^{-h_j \omega_j \Delta t} \xi_{cj}(\Delta t) + \ddot{Z}_g(t_2) t_2 \cos \left(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t_2 \right) \cdot \Delta t \\ \quad \xi_{sj}(2\Delta t) = e^{-h_j \omega_j \Delta t} \xi_{sj}(\Delta t) + \ddot{Z}_g(t_2) t_2 \sin \left(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t_2 \right) \cdot \Delta t \\ \text{at programming} \\ \quad \xi_{cj}(t_0) = \ddot{Z}_g(1) t \cos \left(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t_1 \right) \cdot \Delta t = \eta_{cj}(1) \\ \quad \xi_{sj}(t_0) = \ddot{Z}_g(1) t \sin \left(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t_1 \right) \cdot \Delta t = \eta_{sj}(1) \\ \quad \xi_{cj}(t) = e^{-h_j \omega_j \Delta t} \xi_{cj}(t-\Delta t) + \frac{\ddot{Z}_g(t-\Delta t) + \ddot{Z}_g(t)}{2} \cdot \left(t_2 - \frac{\Delta t}{2} \right) \cos \left\{ \sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot \left(t_2 - \frac{\Delta t}{2} \right) \right\} \cdot \Delta t \cdot e^{-\frac{h_j \omega_j \Delta t}{2}} \\ \quad \xi_{sj}(t) = e^{-h_j \omega_j \Delta t} \xi_{sj}(t-\Delta t) + \frac{\ddot{Z}_g(t-\Delta t) + \ddot{Z}_g(t)}{2} \cdot \left(t_2 - \frac{\Delta t}{2} \right) \sin \left\{ \sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot \left(t_2 - \frac{\Delta t}{2} \right) \right\} \cdot \Delta t \cdot e^{-\frac{h_j \omega_j \Delta t}{2}} \end{array} \right.$$

第3項目は

3rd. term

$$\begin{aligned} & \frac{h_j}{\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j} \int_0^t \ddot{Z}_g(\tau) e^{-h_j \omega_j (t-\tau)} \cos\{\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j (t-\tau)\} (t-\tau) d\tau \\ &= \frac{h_j}{\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j} \left[\cos(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t) \cdot \{\eta_{cj}(t) - \xi_{cj}(t)\} + \sin(\sqrt{1-h_j^2} \cdot \omega_j \cdot t) \cdot \{\eta_{sj}(t) - \xi_{sj}(t)\} \right] \end{aligned} \quad (3-2-15)$$

となる。以上により、変位 u_j の感度変数 X_i に関する感度係数が解析的に計算される。

3-3. 弾性平面モデルの静的感度解析

2次元弾性連続体の変位方による釣り合い方程式（状態方程式）は一般に、

$$[K]\{\delta\} = \{R\} - \{F\}_p + \{F\}_b + \{F\}_{\epsilon_0} + \{F\}_{\sigma_0} \quad (3-3-1)$$

と表すことができる。ここで、

$[K]$: 剛性マトリクス

$\{\delta\}$: 変位ベクトル

$\{R\}$: 荷重ベクトル

$\{F\}_p$: 連続体の物体力と等価な節点力

$\{F\}_b$: 連続体の境界に作用する単位面積当たりの分布外荷重

$\{F\}_{\epsilon_0}$: 初期ひずみによる節点力

$\{F\}_{\sigma_0}$: 初期応力によって生じる節点力

式(3-3-1)の剛性マトリクス $[K]$ は板厚、ヤング係数、ポアソン比などで表すことができる。

連続体の平面応力問題では板厚 t 、平面ひずみ問題ではヤング係数 E で感度変数を考えるこ

ととする。

いま、感度変数をベクトル $\{X\}$ で表し、式(3-3-1)の両辺の第一変分をとれば

$$[K]\{\Delta\delta\} + \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial k}{\partial X_i} \right] \{\delta\} \Delta X_i = \sum_{i=1}^m \left(\left[\frac{\partial R}{\partial X_i} \right] - \left[\frac{\partial F_p}{\partial X_i} \right] - \left[\frac{\partial F_b}{\partial X_i} \right] - \left[\frac{\partial F_{\epsilon_0}}{\partial X_i} \right] - \left[\frac{\partial F_{\sigma_0}}{\partial X_i} \right] \right) \Delta X_i \quad (3-3-2)$$

マトリクス $[H]$ を次のように定義する。

$$[H] \equiv \left[\left[\frac{\partial R}{\partial X_1} \right], \dots, \left[\frac{\partial R}{\partial X_m} \right] \right] - \left[\left[\frac{\partial F_p}{\partial X_1} \right], \dots, \left[\frac{\partial F_p}{\partial X_m} \right] \right] - \left[\left[\frac{\partial F_b}{\partial X_1} \right], \dots, \left[\frac{\partial F_b}{\partial X_m} \right] \right] - \left[\left[\frac{\partial F_{\epsilon_0}}{\partial X_1} \right], \dots, \left[\frac{\partial F_{\epsilon_0}}{\partial X_m} \right] \right] \\ - \left[\left[\frac{\partial F_{\sigma_0}}{\partial X_1} \right], \dots, \left[\frac{\partial F_{\sigma_0}}{\partial X_m} \right] \right] - \left[\left[\frac{\partial k}{\partial X_1} \right] \{\delta\} - \left[\frac{\partial k}{\partial X_m} \right] \{\delta\} \right] \quad (3-3-3)$$

式(3-3-2)は式(3-3-1)より

$$\begin{aligned}
[K]\{\Delta\delta\} &= \left[\sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial R}{\partial X_i} \right\} \Delta X_i - \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial F_p}{\partial X_i} \right\} \Delta X_i - \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial F_b}{\partial X_i} \right\} \Delta X_i \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial F_{\epsilon_0}}{\partial X_i} \right\} \Delta X_i - \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial F_{\sigma_0}}{\partial X_i} \right\} \Delta X_i - \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial k}{\partial X_i} \right\} \{\delta\} \Delta X_i \right] \\
&= [H]\{\Delta\delta\}
\end{aligned} \tag{3-3-4}$$

変位ベクトル $\{\delta\}$ を従属変数と考え、独立な感度変数ベクトル $\{X\}$ で $\{\Delta\delta\}$ を表せば

$$\{\Delta\delta\} = \left[\frac{\partial \delta}{\partial X} \right] \{\Delta X\} \tag{3-3-5}$$

となる。ここに、

$$\left[\frac{\partial \delta}{\partial X} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta_1}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial \delta_1}{\partial X_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \delta_n}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial \delta_n}{\partial X_m} \end{bmatrix} \tag{3-3-6}$$

荷重ベクトル $\{F\}$ が感度変数ベクトル $\{X\}$ の関数でないと考えると、

$$\left\{ \frac{\partial R}{\partial X} \right\} = \{0\} \tag{3-3-7}$$

である。式(3-3-4)は式(3-3-5)より

$$\begin{aligned}
[K] \left\{ \frac{\partial \delta}{\partial X_i} \right\} = [H] &= - \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial k}{\partial X_i} \right] \{\delta\} + \left\{ \frac{\partial F_p}{\partial X_i} \right\} + \left\{ \frac{\partial F_b}{\partial X_i} \right\} + \left\{ \frac{\partial F_{\epsilon_0}}{\partial X_i} \right\} + \left\{ \frac{\partial F_{\sigma_0}}{\partial X_i} \right\} \\
&\quad i = 1, 2, \dots, m
\end{aligned} \tag{3-3-8}$$

となる。式(3-3-8)の $\{\partial \delta / \partial X_i\}$ は i 要素の感度変数 X_i の微小変動に対する各節点の変位の変動量を表すもので、感度変数 X_i に関する感度係数となる。

いま、歪みベクトル $\{\epsilon\}$ と感度変数ベクトル $\{X\}$ が互いに独立していれば、応答 $g(\{X\}, \{\epsilon\})$ の第一変分は、

$$\Delta g_j = \left\{ \frac{\partial g}{\partial X} \right\}^T \{\Delta X\} + \left\{ \frac{\partial g}{\partial \epsilon} \right\}^T \{\Delta \epsilon\} \tag{3-3-9}$$

で示される。ここで、

$$\left\{ \frac{\partial g_j}{\partial X} \right\}^T = \left\{ \frac{\partial g_j}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial g_j}{\partial X_m} \right\} \tag{3-3-10a}$$

$$\left\{ \frac{\partial g_j}{\partial \epsilon} \right\}^T = \left\{ \frac{\partial g_j}{\partial \epsilon_x}, \frac{\partial g_j}{\partial \epsilon_y}, \frac{\partial g_j}{\partial \gamma_{xy}} \right\} \tag{3-3-10b}$$

$$\{\Delta X\}^T = \{\Delta X_1, \dots, \Delta X_m\} \quad (3-3-10c)$$

$$\{\Delta \varepsilon\}^T = \{\Delta \varepsilon_x, \Delta \varepsilon_y, \Delta \gamma_{xy}\} \quad (3-3-10d)$$

しかし、感度変数ベクトル $\{X\}$ が歪みベクトル $\{\varepsilon\}$ の従属変数と考えると、式(3-3-5)は式(3-3-9)より

$$\begin{aligned} \Delta g_j &= \left\{ \frac{\partial g}{\partial X} \right\}^T \{\Delta X\} + \left\{ \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} \right\}^T \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial X} \right] \{\Delta X\} \\ &= \left(\left\{ \frac{\partial g}{\partial X} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} \right\}^T \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial X} \right] \right) \{\Delta X\} \end{aligned} \quad (3-3-11)$$

となる。

ここで、 $\{\partial g_j / \partial X\}^T$ は設計空間における現設計点での応答 g_j の感度変数ベクトル $\{X\}$ に対する感度係数を示すものである。式(3-3-10)は式(3-3-11)より

$$\left\{ \frac{dg}{dX} \right\}^T = \left\{ \frac{\partial g}{\partial X} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} \right\}^T \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial X} \right] \quad (3-3-12)$$

となる。いま、応答 g_j を要素内関数と考え、感度変数 $\{X\}$ に対する感度係数を求める。式(3-3-12)の $\{dg_j/dX\}^T, \{dg_j/d\varepsilon\}^T$ は式(2-3-8)より

$$\left\{ \frac{dg}{dX_i} \right\}_j = \left[\frac{\partial D}{\partial X_i} \right]_j \{\varepsilon\}_j \quad (3-3-13a)$$

$$\left\{ \frac{dg}{d\varepsilon_j} \right\}_j = [D] \quad (3-3-13b)$$

となる。式(3-3-12)、式(3-3-13a)、式(3-3-13b)より j 要素の $\{g\}_j$ の感度変数 $\{X\}$ に対する感度係数は、

$$\left\{ \frac{dg}{dX} \right\}_j = \left[\frac{\partial D}{\partial X_i} \right]_j \{\varepsilon\}_j + [D]_j \left\{ \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_i} \right\}_j \quad (3-3-14)$$

となる。

4. 感度係数特性

4. 感度係数特性⁴⁾

4-1. 骨組構造物の静的感度係数特性

4-1-1. 断面定数に関する感度係数特性

節点外力ベクトル \mathbf{F} は感度変数 $X_i, i=1,2,\dots,s\cdot m$ の関数でないとする、 $\partial\mathbf{F}/\partial X_i=0$ となり、式(3-1-5)より i 番目の感度変数の X_i の変動に対する節点変位 z_h の1次感度係数は、

$$\frac{\partial z_h}{\partial X_i} = \left(-\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} \mathbf{z} \right)_h \quad (4-1-1)$$

で表される。ここで、 s は互いに独立な感度変数の種類の数、 m は骨組構造物の要素数である。右辺の $()_h$ は第 h 番目の自由度に対応するものを示す。式(4-1-1)の両辺に X_i/z_h を乗じ、 i について1から $s\cdot m$ まで総和をとれば

$$\sum_{i=1}^{s\cdot m} \frac{\partial z_h}{\partial X_i} \frac{X_i}{z_h} = - \left\{ \mathbf{K}^{-1} \left(\sum_{i=1}^{s\cdot m} \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} X_i \right) \right) \mathbf{z} \right\}_h \frac{1}{z_h} \quad (4-1-2)$$

となる。なお、上式の左辺の $(\partial z_h / \partial X_i) X_i / z_h$ は無次元化された感度係数となっている。式(4-1-2)の右辺の $\sum_{i=1}^{s\cdot m} \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} X_i \right)$ は

$$\sum_{i=1}^{s\cdot m} \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} X_i \right) = \mathbf{K} \quad (4-1-3)$$

となることは剛性マトリクスの要素の構成から明らかである。したがって、式(4-1-2)は式(4-1-4)となる。

$$\sum_{i=1}^{s\cdot m} \frac{\partial z_h}{\partial X_i} \frac{X_i}{z_j} = -(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{z})_h \frac{1}{z_h} = -z_h \frac{1}{z_h} = -1 \quad (4-1-4)$$

式(4-1-4)は任意の骨組構造物に対して成立する関係で、無次元化感度係数を骨組要素全体について総和したものは定数となることを示している。これを感度係数特性と呼ぶ。

上述の感度係数特性は任意の高次感度係数に対しても成立するが、定数の値は感度次数により異なる。2次感度係数の場合を以下に示す。まず、式(3-1-9)より

$$\frac{\partial^2 z_h}{\partial X_i \partial X_j} = \left\{ \mathbf{K}^{-1} \left(-\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial X_j} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_j} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial X_i} - \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial X_i \partial X_j} \right) \right\}_h \quad (4-1-5)$$

を得る。両辺に $X_i X_j / z_h$ を乗じ、 i, j について1から $s \cdot m$ まで総和をとれば

$$\sum_{i=1}^{s \cdot m} \sum_{j=1}^{s \cdot m} \frac{\partial^2 z_h}{\partial X_i \partial X_j} \frac{X_i X_j}{z_h} = \left[\mathbf{K}^{-1} \left\{ -\sum_{i=1}^{s \cdot m} \sum_{j=1}^{s \cdot m} \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} X_i \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial X_j} X_j \right) - \sum_{i=1}^{s \cdot m} \sum_{j=1}^{s \cdot m} \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_j} X_j \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial X_i} X_i \right) - \sum_{i=1}^{s \cdot m} \sum_{j=1}^{s \cdot m} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial X_i \partial X_j} X_i X_j \right) \mathbf{z} \right\} \right]_h \frac{1}{z_h} \quad (4-1-6)$$

となる。式(4-1-6)の右辺の $\{ \}$ 内を計算するに当たり

$$\sum_{i=1}^{s \cdot m} \sum_{j=1}^{s \cdot m} \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial X_i \partial X_j} X_i X_j = 0 \quad (4-1-7)$$

が成立することおよび式(4-1-3),(4-1-4)を考慮すれば式(4-1-6)は

$$\sum_{i=1}^{s \cdot m} \sum_{j=1}^{s \cdot m} \frac{\partial^2 z_h}{\partial X_i \partial X_j} \frac{X_i X_j}{z_h} = \left[\mathbf{K}^{-1} \{ -\mathbf{K}(-\mathbf{z}) - \mathbf{K}(-\mathbf{z}) \} \right]_h \frac{1}{z_h} = 2 \quad (4-1-8)$$

となる。

係数の骨組構造物に対する総和を求めるのに際し、以下の感度変数 \mathbf{X} とその逆数 R_x との関係式を用いれば簡単に求められる。

$$\frac{\partial z_h}{\partial R_{x_i}} = -\frac{\partial z_h}{\partial X_i} X_i^2 \quad (4-1-9)$$

$$\frac{\partial^2 z_h}{\partial R_{x_i} \partial R_{x_j}} = \frac{\partial^2 z_h}{\partial X_i \partial X_j} X_i^2 X_j^2 + 2 \frac{\partial z_h}{\partial X_i} \delta_{ij} X_i X_j^2 \quad (4-1-10)$$

(δ_{ij} : Kronecker's delta)

任意の p 次感度係数 ($1 \leq p \leq m$) に対する総和の値は次式で表される。

$$\sum_{i_1=1}^{s \cdot m} \sum_{i_2=1}^{s \cdot m} \cdots \sum_{i_p=1}^{s \cdot m} \frac{\partial^p z_h}{\partial X_{i_1} \partial X_{i_2} \cdots \partial X_{i_p}} \frac{X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_p}}{z_h} = (-1)^p p! \quad (4-1-11)$$

上式の証明はAppendixに示す。

以上の結果をまとめるとTable .4-1のようになる。

Table .4-1 Sensitivity Coefficient Characteristics

ORDER	SENSITIVITY VARIABLE X	
	X	$R_X=1/X$
1	-1	1
2	2	0
3	-6	0
4	24	0
P	$(-1)^P \cdot P!$	0

4-1-2. 平面ラーメンにおける感度変数について

これまで述べてきた平面ラーメン構造の感度係数特性に対して、感度変数としては、断面積 A 、断面 2 次モーメント I を独立変数として別々に取り扱ってきたわけであるが、次式のような

$$I = \alpha A \ell^2 \quad (4-1-12)$$

という関係式を導入することによっても、これまで定式化してきた感度係数特性が成立することを示す。ラーメン構造の要素剛性マトリクスを示す。

$$\mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_w}{\ell^3} & \frac{6EI_w}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EI_w}{\ell^3} & \frac{6EI_w}{\ell^2} \\ & & \frac{4EI_w}{\ell} & 0 & -\frac{6EI_w}{\ell^2} & \frac{2EI_w}{\ell} \\ & & & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ & sym. & & & \frac{12EI_w}{\ell^3} & -\frac{6EI_w}{\ell^2} \\ & & & & & \frac{4EI_w}{\ell} \end{bmatrix} \quad (4-1-13)$$

($X_i = I_i$) の場合

式(4-1-12)より $A = \frac{I}{\alpha \ell^2}$ となり、剛性マトリクス内の軸変形の要素における A も含めて I で偏微分すれば

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial I_i} I_i = \mathbf{K} \quad (4-1-14)$$

となることは明らかであり、これは 4-1-1. 式(4-1-3) および 4-2. 式(4-2-2) と一致する。

($X_i = A_i$) の場合

この場合も同様に剛性マトリクスの偏微分を考えれば

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} X_i &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial A_i} A_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial A_i} A_i = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial I_i} \alpha \ell^2 \cdot A_i \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial I_i} I_i = \mathbf{K} \end{aligned} \quad (4-1-15)$$

となり、4-1-1. 式(4-1-3) および 4-2. 式(4-2-2) と一致する。したがって、感度変数がある一種類の変数で考えても感度係数特性は成立する。

ここで、 α の物理的な意味について考える。

式(4-1-12)より

$$\alpha = \frac{1}{r^2} \ell^2 \quad , \quad r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (4-1-16)$$

ここに、 r は断面2次半径である。また、細長比 λ は

$$\lambda^2 = \left(\frac{r}{\ell}\right)^2 \quad (4-1-17)$$

であるから、 α は

$$\alpha = \frac{1}{\lambda^2} \quad (4-1-18)$$

となり、細長比の2乗の逆数であることがわかる。

4-1-3. 形状に関する感度係数特性

(1) 平面トラス¹⁸⁾

ここでは、4-1-1. 断面定数に関する感度係数特性を利用し、4-1-1.(1) 形状感度解析よりトラスの節点座標値を感度変数とした場合の感度係数特性の説明を行う。節点外力ベクトル F は感度変数 X_h の関数でないとする、 $\partial F / \partial X_h = 0$ となり、 i 要素の感度変数 X_h の変動に対する k 番目の自由度に対する節点変位 z_k の形状の感度係数は、式(3-1-15,16,17), 式(3-1-19) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_k}{\partial X_h} &= -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial X_h} z_k \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_k}{\partial S_{1i}} \frac{\partial S_{1i}}{\partial X_h} + \frac{\partial z_k}{\partial S_{2i}} \frac{\partial S_{2i}}{\partial X_h} + \frac{\partial z_k}{\partial S_{3i}} \frac{\partial S_{3i}}{\partial X_h} \right) \end{aligned} \quad (4-1-19)$$

と表される。式(4-1-19)の両辺に X_h / z_k を乗じ、 h について1から節点数 $(NN) \times 2$ まで総和をとると次式のようになる。

$$\sum_{h=1}^{2NN} \frac{\partial z_k}{\partial X_h} \frac{X_h}{z_k} = -K^{-1} \sum_{h=1}^{2NN} \left(\frac{\partial K}{\partial X_h} X_h \right) z_k \frac{1}{z_k} \quad (4-1-20)$$

部材レベルで感度係数に感度変数 X_h すなわち節点座標 (x_s, y_s) , (x_e, y_e) を乗じ、 i について1から m まで総和をとれば、次式のようになる。ここで、 m はトラスの部材数である。

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_k}{\partial x_s} x_s + \frac{\partial z_k}{\partial y_s} y_s + \frac{\partial z_k}{\partial x_e} x_e + \frac{\partial z_k}{\partial y_e} y_e \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_k}{\partial S_{1i}} \frac{\partial S_{1i}}{\partial x_s} + \frac{\partial z_k}{\partial S_{2i}} \frac{\partial S_{2i}}{\partial x_s} + \frac{\partial z_k}{\partial S_{3i}} \frac{\partial S_{3i}}{\partial x_s} \right) x_s + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_k}{\partial S_{1i}} \frac{\partial S_{1i}}{\partial y_s} + \frac{\partial z_k}{\partial S_{2i}} \frac{\partial S_{2i}}{\partial y_s} + \frac{\partial z_k}{\partial S_{3i}} \frac{\partial S_{3i}}{\partial y_s} \right) y_s \\ &+ \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_k}{\partial S_{1i}} \frac{\partial S_{1i}}{\partial x_e} + \frac{\partial z_k}{\partial S_{2i}} \frac{\partial S_{2i}}{\partial x_e} + \frac{\partial z_k}{\partial S_{3i}} \frac{\partial S_{3i}}{\partial x_e} \right) x_e + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_k}{\partial S_{1i}} \frac{\partial S_{1i}}{\partial y_e} + \frac{\partial z_k}{\partial S_{2i}} \frac{\partial S_{2i}}{\partial y_e} + \frac{\partial z_k}{\partial S_{3i}} \frac{\partial S_{3i}}{\partial y_e} \right) y_e \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial z_k}{\partial S_{1i}} \left(\frac{\partial S_{1i}}{\partial x_s} x_s + \frac{\partial S_{1i}}{\partial y_s} y_s + \frac{\partial S_{1i}}{\partial x_e} x_e + \frac{\partial S_{1i}}{\partial y_e} y_e \right) \\ &+ \sum_{i=1}^m \frac{\partial z_k}{\partial S_{2i}} \left(\frac{\partial S_{2i}}{\partial x_s} x_s + \frac{\partial S_{2i}}{\partial y_s} y_s + \frac{\partial S_{2i}}{\partial x_e} x_e + \frac{\partial S_{2i}}{\partial y_e} y_e \right) \\ &+ \sum_{i=1}^m \frac{\partial z_k}{\partial S_{3i}} \left(\frac{\partial S_{3i}}{\partial x_s} x_s + \frac{\partial S_{3i}}{\partial y_s} y_s + \frac{\partial S_{3i}}{\partial x_e} x_e + \frac{\partial S_{3i}}{\partial y_e} y_e \right) \end{aligned} \quad (4-1-21)$$

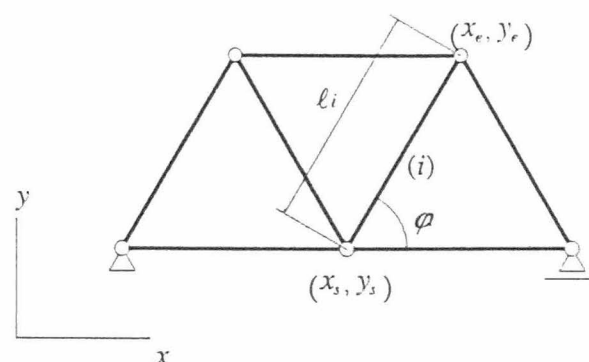


Fig.4-1 記号の説明

また、式(4-1-21)の一部は以下のように表せる。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial S_{1i}}{\partial x_s} x_s + \frac{\partial S_{1i}}{\partial y_s} y_s + \frac{\partial S_{1i}}{\partial x_e} x_e + \frac{\partial S_{1i}}{\partial y_e} y_e \\
&= \frac{3(x_e - x_s)^3 x_s}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} - \frac{2(x_e - x_s)x_s}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} + \frac{3(x_e - x_s)^2(y_e - y_s)y_s}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} \\
&- \frac{3(x_e - x_s)^3 x_e}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} + \frac{2(x_e - x_s)x_e}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} - \frac{3(x_e - x_s)^2(y_e - y_s)y_e}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} \\
&= \frac{3(x_e - x_s)^2 \{(x_e - x_s)x_s + (y_e - y_s)y_s - (x_e - x_s)x_e - (y_e - y_s)y_e\}}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} + \frac{2(x_e - x_s)^2}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\
&= \frac{-3(x_e - x_s)^2 \{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} + \frac{2(x_e - x_s)^2}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\
&= -\frac{3(x_e - x_s)^2}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} + \frac{2(x_e - x_s)^2}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\
&= -\frac{(x_e - x_s)^2}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} = -a_i \tag{4-1-21a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial S_{2i}}{\partial x_s} x_s + \frac{\partial S_{2i}}{\partial y_s} y_s + \frac{\partial S_{2i}}{\partial x_e} x_e + \frac{\partial S_{2i}}{\partial y_e} y_e \\
&= \frac{3(x_e - x_s)^2(y_e - y_s)x_s}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} - \frac{(y_e - y_s)x_s}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\
&+ \frac{3(x_e - x_s)(y_e - y_s)^2 y_s}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} - \frac{(x_e - x_s)y_s}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\
&- \frac{3(x_e - x_s)^2(y_e - y_s)x_e}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} + \frac{(y_e - y_s)x_e}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\
&- \frac{3(x_e - x_s)(y_e - y_s)^2 y_e}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} + \frac{(x_e - x_s)y_e}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\
&= \frac{3(x_e - x_s)(y_e - y_s) \{(x_e - x_s)x_s + (y_e - y_s)y_s - (x_e - x_s)x_e - (y_e - y_s)y_e\}}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} + \frac{2(x_e - x_s)(y_e - y_s)}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\
&= -\frac{3(x_e - x_s)(y_e - y_s) \{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} + \frac{2(x_e - x_s)(y_e - y_s)}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\
&= -\frac{3(x_e - x_s)(y_e - y_s)}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} + \frac{2(x_e - x_s)(y_e - y_s)}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\
&= -\frac{(x_e - x_s)(y_e - y_s)}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} = -b_i \tag{4-1-21b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial S_{3i}}{\partial x_s} x_s + \frac{\partial S_{3i}}{\partial y_s} y_s + \frac{\partial S_{3i}}{\partial x_e} x_e + \frac{\partial S_{3i}}{\partial y_e} y_e \\
&= \frac{3(x_e - x_s)(y_e - y_s)^2 x_s}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} - \frac{3(y_e - y_s)^3 y_s}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} - \frac{2(y_e - y_s) y_s}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\
& - \frac{3(x_e - x_s)(y_e - y_s)^2 x_e}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} - \frac{3(y_e - y_s)^3 y_e}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} + \frac{2(y_e - y_s) y_e}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\
&= \frac{3(y_e - y_s)^2 \{(x_e - x_s) x_s + (y_e - y_s) y_s - (x_e - x_s) x_e - (y_e - y_s) y_e\}}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} + \frac{2(y_e - y_s)^2}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\
&= -\frac{3(y_e - y_s)^2 \{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{5/2}} + \frac{2(y_e - y_s)^2}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\
&= -\frac{3(y_e - y_s)^2}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} + \frac{2(y_e - y_s)^2}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} \\
&= -\frac{(y_e - y_s)^2}{\{(x_e - x_s)^2 + (y_e - y_s)^2\}^{3/2}} = -c_i \tag{4-1-21c}
\end{aligned}$$

これより式(4-1-21)は,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_k}{\partial x_s} x_s + \frac{\partial z_k}{\partial y_s} y_s + \frac{\partial z_k}{\partial x_e} x_e + \frac{\partial z_k}{\partial y_e} y_e \right) \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial z_k}{\partial S_{1i}} (-S_{1i}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial z_k}{\partial S_{2i}} (-S_{2i}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial z_k}{\partial S_{3i}} (-S_{3i}) \\
&= -\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_k}{\partial S_{1i}} S_{1i} + \frac{\partial z_k}{\partial S_{2i}} S_{2i} + \frac{\partial z_k}{\partial S_{3i}} S_{3i} \right) \tag{4-1-22}
\end{aligned}$$

と表される。さらに式(4-1-19)を代入すると次式となる。

$$\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_k}{\partial S_{1i}} S_{1i} + \frac{\partial z_k}{\partial S_{2i}} S_{2i} + \frac{\partial z_k}{\partial S_{3i}} S_{3i} \right) \\
&= -\sum_{i=1}^m \left\{ \left(-K^{-1} \frac{\partial K}{\partial S_{1i}} z_k \right) S_{1i} + \left(-K^{-1} \frac{\partial K}{\partial S_{2i}} z_k \right) S_{2i} + \left(-K^{-1} \frac{\partial K}{\partial S_{3i}} z_k \right) S_{3i} \right\} \\
&= K^{-1} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial K}{\partial S_{1i}} S_{1i} + \frac{\partial K}{\partial S_{2i}} S_{2i} + \frac{\partial K}{\partial S_{3i}} S_{3i} \right) z_k \\
&= K^{-1} K z_k = z_k \tag{4-1-23}
\end{aligned}$$

式(4-1-20)は4-1-1.で述べたのと同様に感度係数に X_h/z_k を乗じ、 h について1から $2NN$ (節点数 $\times 2$)まで総和をとったものである。また、式(4-1-21)は部材レベルで感度係数に感度変数すなわち節点座標 x_s, y_s, x_e, y_e を乗じ、 i について1から m まで総和をとっているの
でこれを節点変位 z_k で割れば式(4-1-20)と式(4-1-21)は、実質上同じ意味を持っている。

したがって式(4-1-20)は、式(4-1-21)から式(4-1-23)より

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{2NN} \frac{\partial z_k}{\partial X_h} \frac{X_h}{z_k} &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_k}{\partial x_s} x_s + \frac{\partial z_k}{\partial y_s} y_s + \frac{\partial z_k}{\partial x_e} x_e + \frac{\partial z_k}{\partial y_e} y_e \right) \frac{1}{z_k} \\ &= z_k \frac{1}{z_k} = 1 \end{aligned} \quad (4-1-24)$$

となる。これは任意のトラス構造物に対して成立する関係式である。4-1-1.で述べた従来の無次元化感度係数特性と同様に形状感度係数に設計変数を乗じ、節点変位で割ったものを h について1から $2NN$ まで総和をとったものは、定数になることを示している。

4-2. 骨組構造物の固有値・固有ベクトルの感度係数特性⁶⁾

3-2-1. で示した固有円振動数 ω_r の, 任意の感度変数に対する1次感度係数, 式(3-2-3)の両辺に X_{0i}/ω_r を乗じ, 骨組構造物全体つまり i について1から $s \cdot m$ までの総和をとれば

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{s \cdot m} \left[\frac{\partial \omega_r}{\partial X_i} \right]_0 \frac{X_{0i}}{\omega_{0r}} &= \sum_{i=1}^{s \cdot m} \left[\frac{\partial \omega_r}{\partial X_i} \right]_0 \frac{X_{10i}}{\omega_{0r}} \\ &= y_{0r}^T \left[\sum_{i=1}^{s \cdot m} \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} - \omega_r^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} \right]_0 X_{0i} \right] y_{0r} \frac{1}{2\omega_{0r}^2} \end{aligned} \quad (4-2-1)$$

となる. ここで, s は3-3-1. で述べたように互いに独立である感度変数の種類の数を意味する. なお, 上式の左辺は無次元化された感度係数の総和となっている. 式(4-2-1)の右辺の $\sum_{i=1}^{s \cdot m} \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} \right]_0 X_{0i}$ および $\sum_{i=1}^{s \cdot m} \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} \right]_0 X_{0i}$ はそれぞれ

$$\sum_{i=1}^{s \cdot m} \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} X_i \right)_0 = \mathbf{K}_0 \quad (4-2-2)$$

$$\sum_{i=1}^{s \cdot m} \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} X_i \right)_0 = \mathbf{M}_0 \quad (4-2-3)$$

がって, 式(4-2-1)は式(4-2-4)となる.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{s \cdot m} \left[\frac{\partial \omega_r}{\partial X_i} \right]_0 \frac{X_{0i}}{\omega_{0r}} &= y_{0r}^T [\mathbf{K}_0 - \omega_{0r}^2 \mathbf{M}_0] y_{0r} \frac{1}{2\omega_{0r}^2} \\ &= (y_{0r}^T \mathbf{K}_0 y_{0r} - \omega_{0r}^2 y_{0r}^T \mathbf{M}_0 y_{0r}) \frac{1}{2\omega_{0r}^2} \\ &= (\omega_{0r}^2 - \omega_{0r}^2) \frac{1}{2\omega_{0r}^2} = 0 \end{aligned} \quad (4-2-4)$$

式(4-2-4)は任意の骨組構造物に対して成立する関係で無次元化感度係数を骨組要素全体について総和をとったものは定数となることを示している. これを感度係数特性という.

骨組構造物の感度解析では感度変数の応答に対する線形性を良くするために感度変数 \mathbf{X} の逆数すなわち $R_x = 1/\mathbf{X}$ を感度変数とすることがよく行われる. この場合, 無次元化感度係数の骨組構造物に対する総和を求めるのに際し, 以下の感度変数 \mathbf{X} とその逆数 R_x との

間の関係式を用いれば簡単に求められる。

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial R_{X_i}} = \frac{\partial \omega_r}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial R_{X_i}} = -\frac{\partial \omega_r}{\partial X_i} X_i^2 \quad (4-2-5)$$

したがって、

$$\sum_{i=1}^{s,m} \left[\frac{\partial \omega_r}{\partial R_{X_i}} \right]_0 \frac{R_{X_{0i}}}{\omega_{0r}} = \sum_{i=1}^{s,m} \left[-\frac{\partial \omega_r}{\partial X_i} X_i^2 \right]_0 \frac{1}{X_{0i} \omega_{0r}} = -\sum_{i=1}^{s,m} \left[\frac{\partial \omega_r}{\partial X_i} \right]_0 \frac{X_{0i}}{\omega_{0r}} = 0 \quad (4-2-6)$$

次に、3-2-1.で示した固有ベクトル y_r の、任意の感度変数に対する 1 次感度係数、式(3-2-4)の両辺に X_{0i}/y_r を乗じ、骨組構造物全体つまり i について 1 から s,m までの総和をとれば

$$\frac{\partial y_{rl}}{\partial X_i} = -\frac{1}{2} \left(y_r^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} y_r \right) y_r - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^n \frac{1}{\lambda_s - \lambda_r} \left(y_s^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} - \lambda_r \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} \right] y_r \right) y_s \quad (4-2-7)$$

より

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{s,m} \left[\frac{\partial y_{rl}}{\partial X_i} \right]_0 \frac{X_{0i}}{y_{0rl}} &= -\frac{1}{2} y_{0r}^T \left[\sum_{i=1}^{s,m} \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} \right]_0 X_{0i} \right] y_{0r} y_{0rl} \frac{1}{y_{0rl}} \\ &\quad - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^n \frac{1}{\lambda_{0s} - \lambda_{0r}} y_{0s}^T \left[\sum_{i=1}^{s,m} \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} - \lambda_r \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} \right]_0 X_{0i} \right] y_{0rl} y_{0s} \frac{1}{y_{0rl}} \end{aligned} \quad (4-2-8)$$

となる。固有円振動数の場合と同様に、無次元化された感度係数の総和は

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{s,m} \left[\frac{\partial y_{rl}}{\partial X_i} \right]_0 \frac{X_{0i}}{y_{0rl}} \\ &= -\frac{1}{2} y_{0r}^T \mathbf{M}_0 y_{0r} - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^n \frac{1}{\lambda_{0s} - \lambda_{0r}} y_{0s}^T [\mathbf{K}_0 - \omega_{0r}^2 \mathbf{M}_0] y_{0rl} y_{0s} \frac{1}{y_{0rl}} \\ &= -\frac{1}{2} y_{0r}^T \mathbf{M}_0 y_{0r} - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^n \frac{1}{\lambda_{0s} - \lambda_{0r}} (\omega_{0r}^2 - \omega_{0s}^2) y_{0s} \frac{1}{y_{0rl}} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (4-2-9)$$

上述の感度係数特性は任意の高次感度係数に対しても成立する。次に 2 次感度係数の場合を以下に示す。固有円振動数について式(3-2-5)より

$$\begin{aligned} \omega_{r,i1,i2} &= \mathbf{y}_{r,i2}^T (\mathbf{K}_{,i1} - \omega_r^2 \cdot \mathbf{M}_{,i1}) \mathbf{y}_r / \omega_r \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{y}_r^T (\mathbf{K}_{,i1,i2} - 2\omega_r \cdot \omega_{r,i2} \cdot \mathbf{M}_{,i1} - \omega_r^2 \cdot \mathbf{M}_{,i1,i2}) \mathbf{y}_r / \omega_r \\ &\quad - \omega_{r,i2} \cdot \omega_{r,i1} / \omega_r \end{aligned} \quad (4-2-10)$$

を得る. 両辺に $X_i X_j / \omega_r$ を乗じ, i, j について 1 から s, m まで総和をとれば

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{s,m} \sum_{j=1}^{s,m} \left[\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial X_i \partial X_j} \right]_0 \frac{X_{0i} X_{0j}}{\omega_{0r}} \\
&= \sum_{i=1}^{s,m} \sum_{j=1}^{s,m} \left(\left[\frac{\partial y_r}{\partial X_i} \right]_0^T X_{bi} \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} \right]_0 X_{0i} - \omega_{0r}^2 \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} \right]_0 X_{0i} \right) y_{0r} \frac{1}{\omega_{0r}^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} y_{0r}^T \left[\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial X_i \partial X_j} \right]_0 X_{0i} X_{0j} - 2\omega_{0r}^2 \left[\frac{\partial \omega_r}{\partial X_j} \right]_0 \frac{X_{b0j}}{\omega_{0r}} \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_j} \right]_0 X_{0j} \\
&\quad - \omega_{0r}^2 \left[\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial X_i \partial X_j} \right]_0 X_{0i} X_{0j} \left. \right) y_{0r} \frac{1}{\omega_{0r}^2} - \left[\frac{\partial \omega_r}{\partial X_i} \right]_0 \frac{X_{0i}}{\omega_{0r}} \left[\frac{\partial \omega_r}{\partial X_j} \right]_0 \frac{X_{0j}}{\omega_{0r}} \quad (4-2-11)
\end{aligned}$$

となる. 式(4-2-11)の右辺の計算をするにあたり

$$\sum_{i=1}^{s,m} \sum_{j=1}^{s,m} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial X_i \partial X_j} X_i X_j \right]_0 = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{s,m} \sum_{j=1}^{s,m} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial X_i \partial X_j} X_i X_j \right]_0 = 0 \quad (4-2-12,13)$$

が成立することおよび式(4-2-12,13)を考慮すれば式(4-2-11)は次式となる.

$$\sum_{i=1}^{s,m} \sum_{j=1}^{s,m} \left[\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial X_i \partial X_j} \right]_0 \frac{X_{0i} X_{0j}}{\omega_{0r}} = 0 \quad (4-2-14)$$

固有ベクトルについて

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y_r}{\partial X_i \partial X_j} &= - \left(y_r^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} \frac{\partial y_r}{\partial X_j} + y_r^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_j} \frac{\partial y_r}{\partial X_i} + \frac{\partial y_r^T}{\partial X_i} \mathbf{M} \frac{\partial y_r}{\partial X_j} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} y_r^T \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial X_i \partial X_j} y_r \right) y_r \\
&\quad - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^n \frac{1}{\lambda_s - \lambda_r} \left\{ y_s^T \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial X_i \partial X_j} - \frac{\partial \lambda_r}{\partial X_i} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_j} - \frac{\partial \lambda_r}{\partial X_j} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} - \lambda_r \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial X_i \partial X_j} \right) y_r \right. \\
&\quad \left. + y_s^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} - \frac{\partial \lambda_r}{\partial X_i} \mathbf{M} - \lambda_r \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} \right) y_r \frac{\partial y_r}{\partial X_j} \right. \\
&\quad \left. + y_s^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_j} - \frac{\partial \lambda_r}{\partial X_j} \mathbf{M} - \lambda_r \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_j} \right) y_r \frac{\partial y_r}{\partial X_i} \right\} y_s \quad (4-2-15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial^2 y_r}{\partial X_i \partial X_j} \right]_0 \frac{X_{0i} X_{0j}}{y_{0r}} \\
&= - \left[\left(y_r^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} \frac{\partial y_r}{\partial X_j} + y_r^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_j} \frac{\partial y_r}{\partial X_i} + \frac{\partial y_r}{\partial X_i}^T \mathbf{M} \frac{\partial y_r}{\partial X_j} + \frac{1}{2} y_r^T \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial X_i \partial X_j} y_r \right) y_r \right]_0 \frac{X_{0i} X_{0j}}{y_{0r}} \\
&\quad - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^n \left[\frac{1}{\lambda_s - \lambda_r} \left\{ y_s^T \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial X_i \partial X_j} - \frac{\partial \lambda_r}{\partial X_i} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_j} - \frac{\partial \lambda_r}{\partial X_j} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} - \lambda_r \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial X_i \partial X_j} \right) y_r \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + y_s^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} - \frac{\partial \lambda_r}{\partial X_i} \mathbf{M} - \lambda_r \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} \right) y_r \frac{\partial y_r}{\partial X_j} + y_s^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_j} - \frac{\partial \lambda_r}{\partial X_j} \mathbf{M} - \lambda_r \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_j} \right) y_r \frac{\partial y_r}{\partial X_i} \right\} y_s \right]_0 \frac{X_{0i} X_{0j}}{y_{0r}} \\
&= - \left[y_{0r}^T \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} \right]_0 X_{0i} \left[\frac{\partial y_r}{\partial X_j} \right]_0 X_{0j} + y_{0r}^T \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_j} \right]_0 X_{0j} \left[\frac{\partial y_r}{\partial X_i} \right]_0 X_{0i} \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\partial y_r}{\partial X_i} \right]_0^T X_{0i} \mathbf{M}_0 \left[\frac{\partial y_r}{\partial X_j} \right]_0 X_{0j} + \frac{1}{2} y_{0r}^T \left[\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial X_i \partial X_j} \right]_0 X_{0i} X_{0j} y_{0r} \right] \\
&\quad - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^n \frac{1}{\lambda_{0s} - \lambda_{0r}} \left[y_{0s}^T \left[\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial X_i \partial X_j} \right]_0 X_{0i} X_{0j} - 2\omega_{0r}^2 \left[\frac{\partial \omega_r}{\partial X_i} \right]_0 \frac{X_{0i}}{\omega_{0r}} \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_j} \right]_0 X_{0j} \right. \\
&\quad \left. - 2\omega_{0r}^2 \left[\frac{\partial \omega_r}{\partial X_j} \right]_0 \frac{X_{0j}}{\omega_{0r}} \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X_i} \right]_0 X_{0i} \right]
\end{aligned} \tag{4-2-16}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_i \sum_j \left[\frac{\partial^2 y_r}{\partial X_i \partial X_j} \right]_0 \frac{X_{0i} X_{0j}}{y_{0r}} \\
&= - \left[y_{0r}^T \mathbf{M}_0 \left(-\frac{1}{2} y_{0r} \right) + y_{0r}^T \mathbf{M}_0 \left(-\frac{1}{2} y_{0r} \right) + \left(-\frac{1}{2} y_{0r}^T \right) \mathbf{M}_0 \left(-\frac{1}{2} y_{0r} \right) \right] \\
&\quad - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^n \frac{1}{\lambda_{0s} - \lambda_{0r}} \left[y_{0s}^T [0 - 0 - 0 - 0] y_{0r} + y_{0s}^T [\mathbf{K}_0 - 0 - \omega_{0r}^2 \mathbf{M}_0] \left(-\frac{1}{2} y_{0r} \right) \right. \\
&\quad \left. + y_{0s}^T [\mathbf{K}_0 - 0 - \omega_{0r}^2 \mathbf{M}_0] \left(-\frac{1}{2} y_{0r} \right) \right] y_{0s} \frac{1}{y_{0r}} \\
&= - \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right] - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^m \frac{1}{\lambda_{0s} - \lambda_{0r}} \left[y_{0s}^T \mathbf{K}_0 \left(-\frac{1}{2} y_{0r} \right) - \omega_{0r}^2 y_{0s}^T \mathbf{M}_0 \left(-\frac{1}{2} y_{0r} \right) \right. \\
&\quad \left. + y_{0s}^T \mathbf{K}_0 \left(-\frac{1}{2} y_{0r} \right) - \omega_{0r}^2 y_{0s}^T \mathbf{M}_0 \left(-\frac{1}{2} y_{0r} \right) \right] y_{0s} \frac{1}{y_{0r}} \\
&= \frac{3}{4} - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^n \frac{1}{\lambda_{0s} - \lambda_{0r}} \left[-\frac{1}{2} \omega_{0r}^2 + \frac{1}{2} \omega_{0r}^2 + -\frac{1}{2} \omega_{0r}^2 + \frac{1}{2} \omega_{0r}^2 \right] y_{0s} \frac{1}{y_{0r}} \\
&= \frac{3}{4} - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq r}}^n \frac{1}{\lambda_{0s} - \lambda_{0r}} [0] y_{0s} \frac{1}{y_{0r}} = \frac{3}{4}
\end{aligned} \tag{4-2-17}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y_r}{\partial R_{X_i} \partial R_{X_j}} &= \frac{\partial^2 y_r}{\partial X_i \partial X_j} X_i^2 X_j^2 - 2 \frac{\partial y_r}{\partial R_{X_i}} \frac{\partial R_{X_i}}{\partial R_{X_j}} X_i \\ &= \frac{\partial^2 y_r}{\partial X_i \partial X_j} X_i^2 X_j^2 + 2 \frac{\partial y_r}{\partial X_i} \frac{\partial R_{X_i}}{\partial X_j} X_i^3 \end{aligned} \quad (4-2-18)$$

$$\begin{aligned} &\sum_i \sum_j \left[\frac{\partial^2 y_r}{\partial R_{X_i} \partial R_{X_j}} \right]_0 \frac{R_{X_{0i}} R_{X_{0j}}}{y_{0r}} \\ &= \sum_i \sum_j \left[\frac{\partial^2 y_r}{\partial R_{X_i} \partial R_{X_j}} \right]_0 \frac{X_{0i}^2 X_{0j}^2 R_{X_{0i}} R_{X_{0j}}}{y_{0r}} + 2 \sum_i \sum_j \left[\frac{\partial y_r}{\partial X_i} \right]_0 \frac{X_{0i}^3 R_{X_{0i}} R_{X_{0j}}}{y_{0r}} \frac{\partial R_{X_i}}{\partial R_{X_j}} \\ &= \sum_i \sum_j \left[\frac{\partial^2 y_r}{\partial X_i \partial X_j} \right]_0 \frac{X_{0i} X_{0j}}{y_{0r}} + 2 \sum_i \sum_j \left[\frac{\partial y_r}{\partial X_i} \right]_0 \frac{X_{0i}}{y_{0r}} X_{0i}^2 R_{X_{0i}} R_{X_{0j}} \frac{\partial R_{X_i}}{\partial R_{X_j}} \\ &= \sum_i \sum_j \left[\frac{\partial^2 y_r}{\partial X_i \partial X_j} \right]_0 \frac{X_{0i} X_{0j}}{y_{0r}} + 2 \sum_i \sum_j \left[\frac{\partial y_r}{\partial X_i} \right]_0 \frac{X_{0i}}{y_{0r}} \\ &= \frac{3}{4} + 2 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{4} \end{aligned} \quad (4-2-19)$$

Table.4-2 Sensitivity Coefficient Characteristics

ORDER	Natural Circular Frequency ω_r		Eigenvector $y_{r\ell}$	
	X	$R_X=1/X$	X	$R_X=1/X$
1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	0	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
3	0	0	$-\frac{15}{8}$	$\frac{3}{8}$

4-3. 骨組構造物の動的応答解析における感度係数特性

本章では3-2-2.で示した動的応答解析の感度係数を用いて、感度係数特性を数値計算により求める。感度係数特性は無次元化感度係数の骨組全体に対する総和であるから、これを次式のように表現する。右辺のCは定数値であり、これを感度係数特性値と呼ぶ。

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \frac{X_i}{u_j} = C \quad (4-3-1)$$

下図に示すような門型ラーメンと片持梁に規則波と不規則波を作用させて、動的応答解析およびその感度解析を行い、感度係数特性値Cを計算したものを時系列で表示したものがFig.4-1～4-5である。ここでは、 $I = \alpha A l^2$ の関係式を用いている。

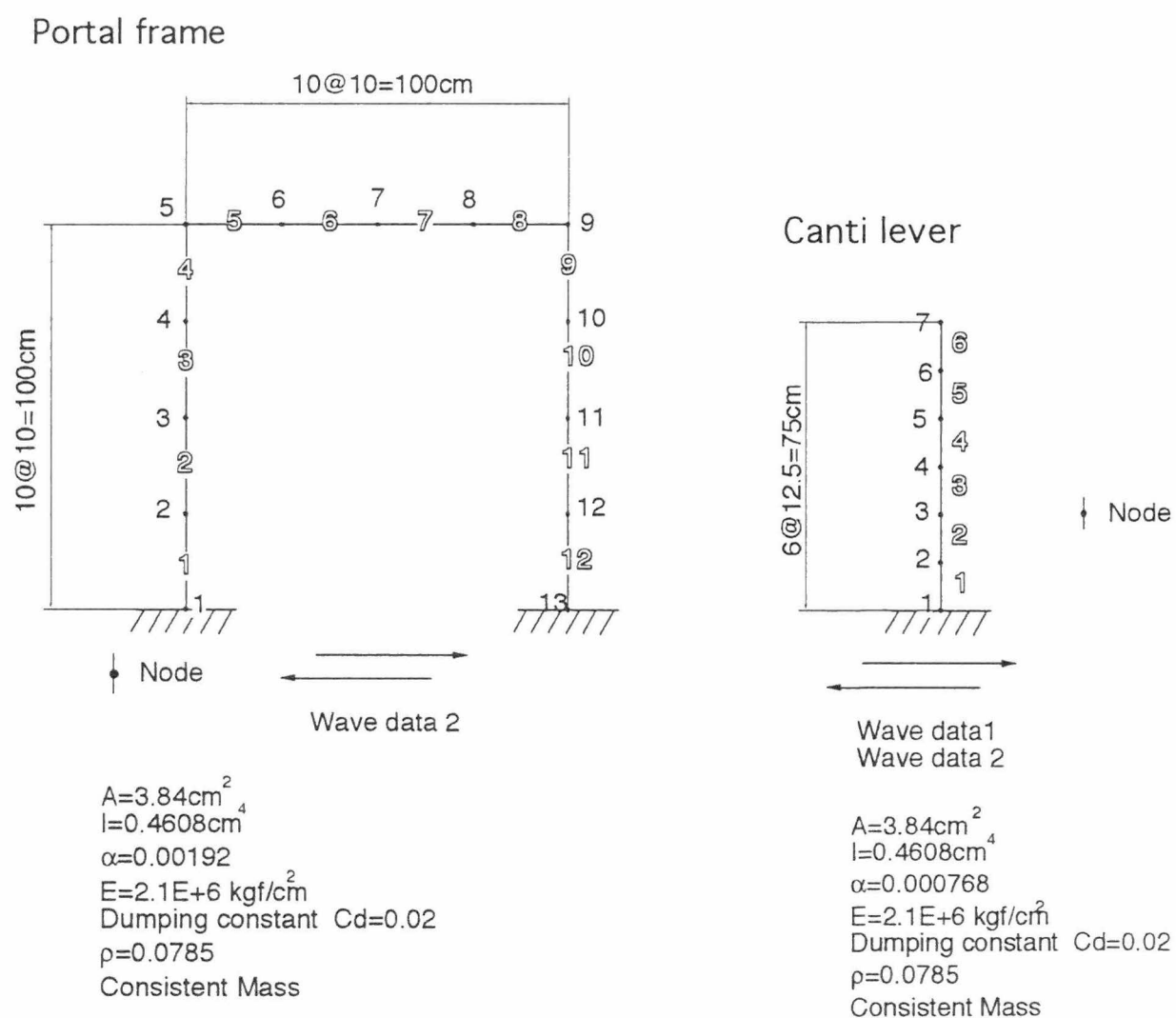
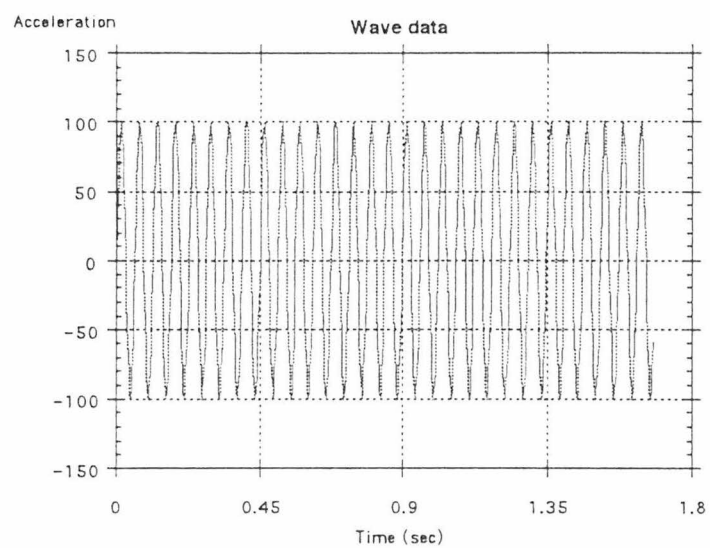
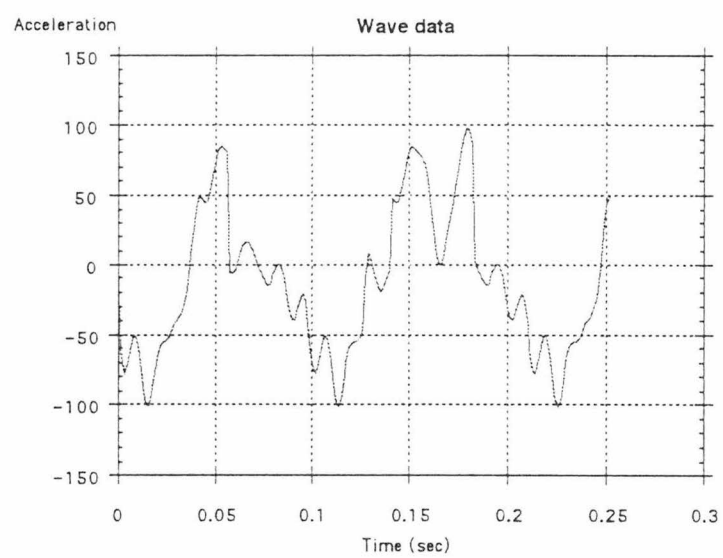


Fig. 4-1 骨組モデル



Wave data 1 (Sin - curve)



Wave data 2 (irregular)

Fig. 4-2 入力振動波形

Canti lever
(Wave data 1)

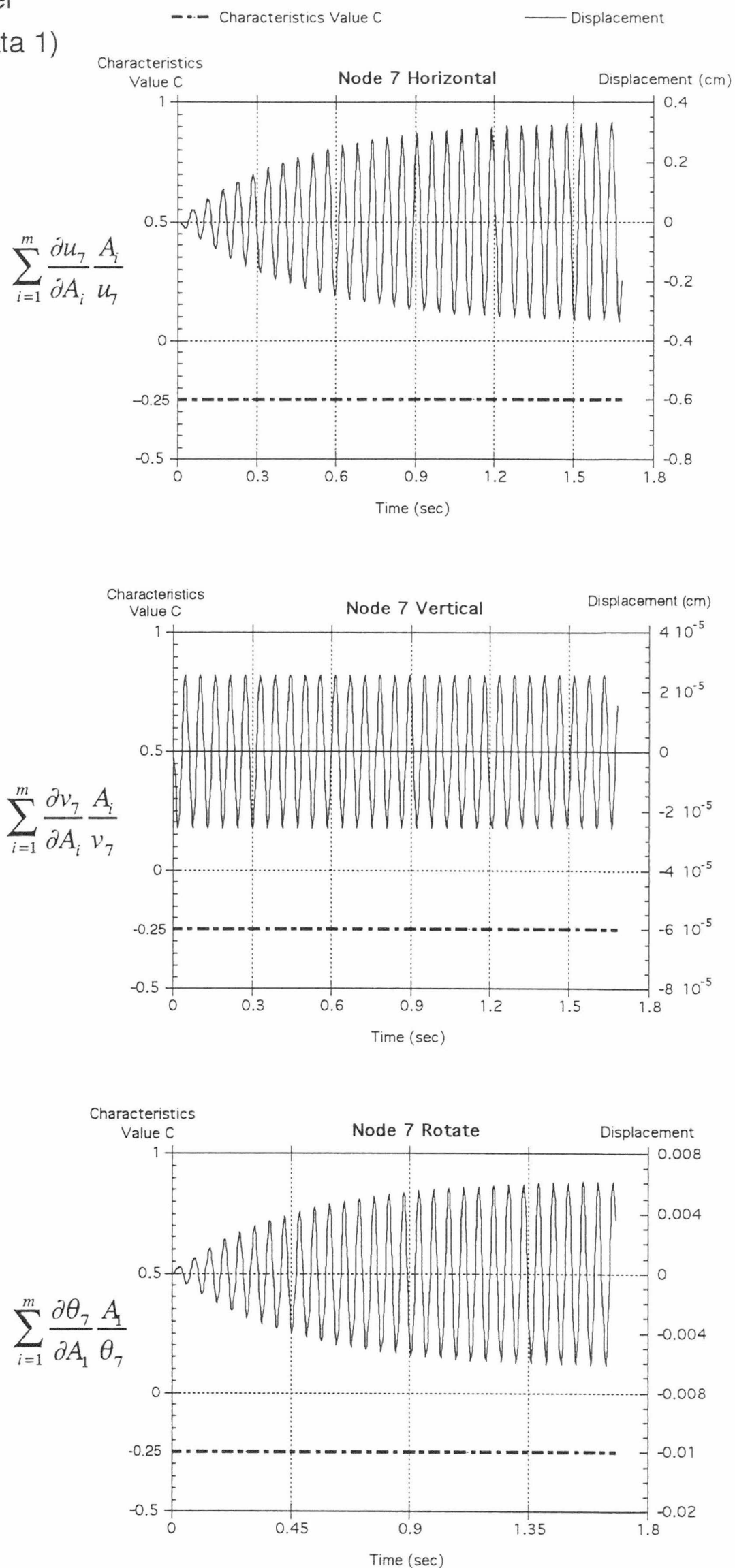


Fig. 4-3 Characteristic value C of Dynamic response

Canti lever

(Wave data 2)

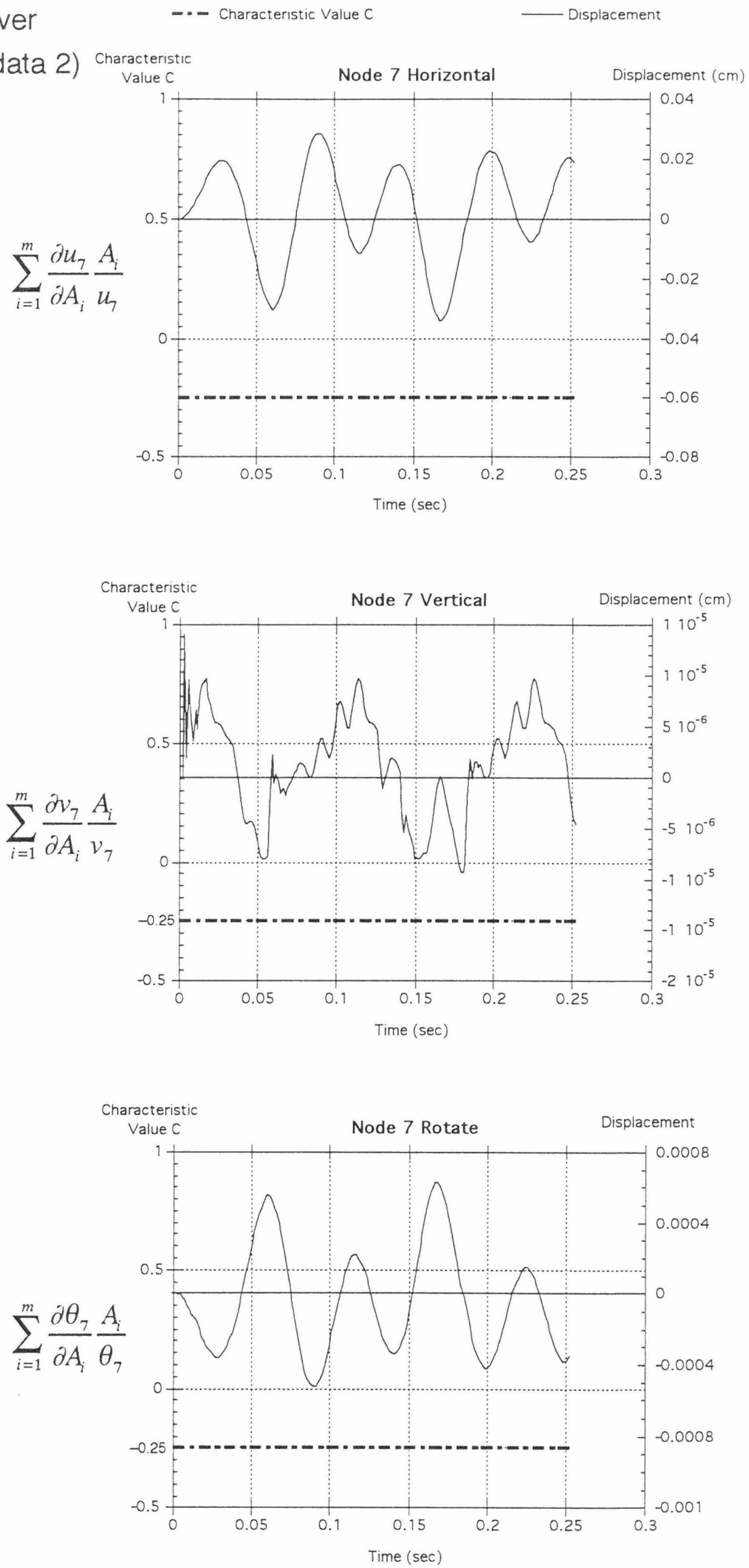


Fig. 4-4 Characteristic value C of Dynamic response

Portal Frame
(Wave data 2)

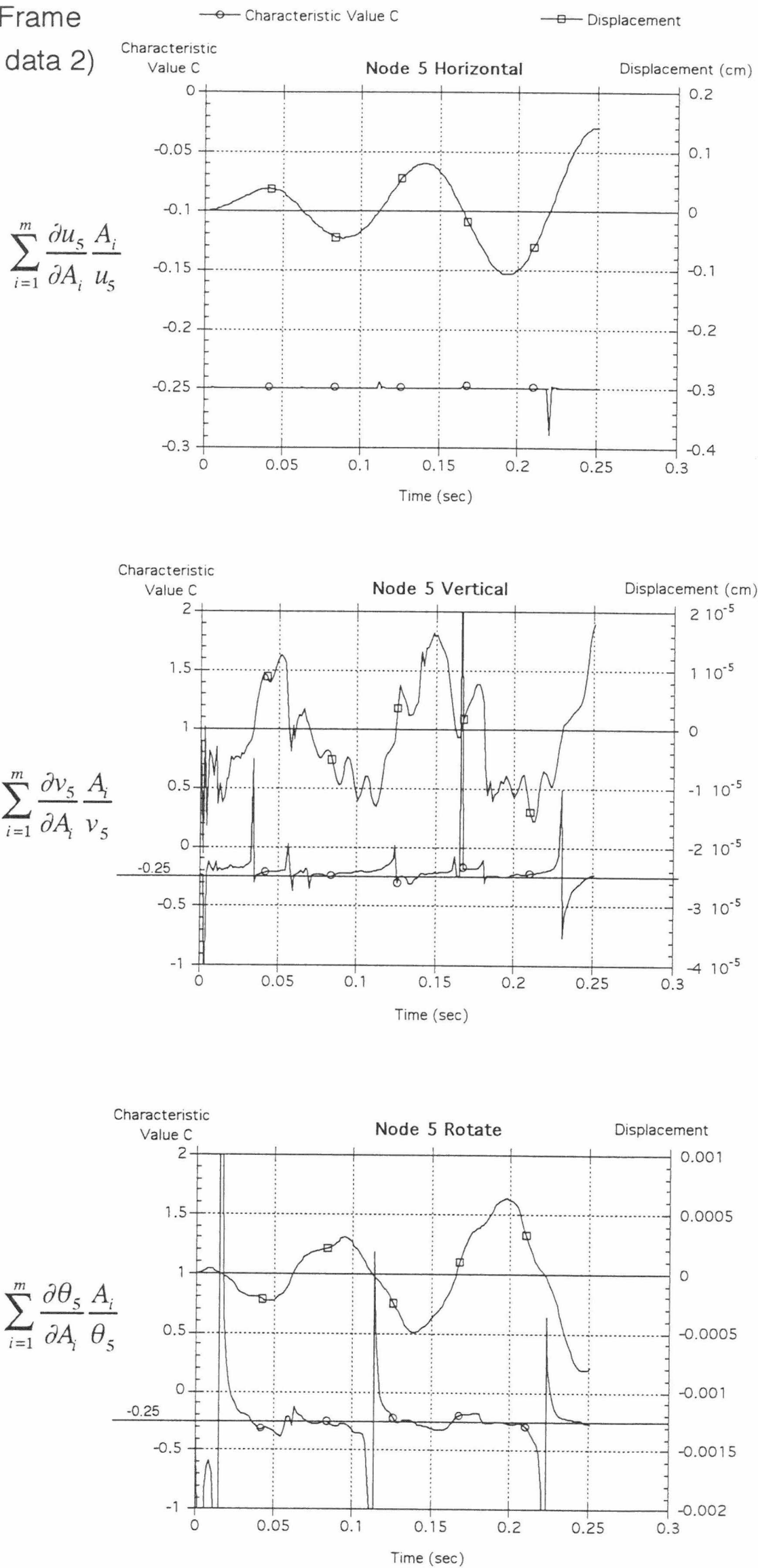


Fig. 4-5 Characteristic value C of Dynamic response

これらの図から特性値 C は

$$C = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial X_i} \frac{X_i}{u} = -0.25 = -\frac{1}{4} \quad (X_i = A_i) \quad (4-3-2)$$

となっていることがわかる。門型ラーメンの特性値が一定していないのは、無次元化する際に変位が非常に小さい場合の数値計算上の誤差が現れているためである。

4-4. 弾性平面モデルの感度係数特性

弾性平面モデルに対しても骨組構造物の場合と同様に，無次元化感度係数の全ての要素について総和をとったものは常に定数となることを以下に示す。

節点外力ベクトルは感度変数 $X_i(i=1,2,\dots,m)$ の関数でないとすると， $\partial F/\partial X_i=0$ となり， i 番目の感度変数 X_i の変動に対する k 番目の自由度における節点変位 δ_k の感度係数は，

$$\frac{\partial \delta_k}{\partial X_i} = \left(-\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} \delta \right)_k \quad (4-4-1)$$

で表される。右辺の $()_k$ は第 k 番目の自由度に対応するものを示す。式(4-4-1)の両辺に X_i/δ_k を乗じ， i について1から m まで総和をとれば，

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \delta_k}{\partial X_i} \frac{X_i}{\delta_k} = \left(-\mathbf{K}^{-1} \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} X_i \right) \delta \right)_k \frac{1}{\delta_k} \quad (4-4-2)$$

となる。なお，上式の左辺は無次元化された感度係数となっている。右辺の総和記号の中は

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X_i} X_i = \mathbf{K} \quad (4-4-3)$$

であることは感度変数 X_i がヤング係数 E や板厚 t であれば剛性マトリクスの要素の構成から明らかである。したがって，式(4-4-2)は

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \delta_k}{\partial X_i} \frac{X_i}{\delta_k} = \left(-\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} \delta \right)_k \frac{1}{\delta_k} = -\delta_k \frac{1}{\delta_k} = -1 \quad (4-4-4)$$

となる。この式は任意の2次元弾性連続体に対して成立する関係式である。ここで，感度変数の逆数 R_{X_i} を考えれば式(4-1-9)より

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \delta_k}{\partial X_i} \frac{R_{X_i}}{\delta_k} = -\sum_{i=1}^m \frac{\partial \delta_k}{\partial X_i} X_i^2 R_{X_i} \frac{1}{\delta_k} = -\sum_{i=1}^m \frac{\partial \delta_k}{\partial X_i} \frac{X_i}{\delta_k} = 1 \quad (4-4-5)$$

となり，骨組構造物の場合の感度次数1次の感度係数特性と一致する。

5. 骨組構造物の応答感度係数特性に基づく感度解析

5. 骨組構造物の応答感度係数特性に基づく感度解析⁵⁾

5-1. 適合法に基づく静的感度解析 (SACM)

応答感度係数が荷重に対して線形である性質と適合法の考え方を基に、不静定構造物の応答感度係数が求められる(SACM: Sensitivity Analysis based on Compatibility Method)。この新しい感度解析法は以下に述べるような顕著な特徴を有している。不静定構造物の感度解析を逐次的に行う場合、まず静定基本系に対して節点変位の感度係数を求めておけば、重ね合わせにより原不静定構造物の節点変位の感度係数が得られ、次回以降の感度係数は感度変数の値を代入した不静定次数に等しい次元を有する適合方程式を解くだけで求められることにある。静定基本系に対して外力 \mathbf{F} および不静定力の方向に単位荷重 $Q_k=1$ を作用させたときの応答感度係数が得られれば、応答感度係数の荷重に対する線形性から重ね合わせの理論を用いて外力 \mathbf{F} と不静定力 Q_k に対する応答節点変位 z_j の感度変数 X_{Mi} (この場合 X としては $RX=1/X$ を考える) に対する感度係数は次のように表される。

$$\frac{\partial z_j}{\partial X_i} = \left(\frac{\partial z_j}{\partial X_i} \right)_{\mathbf{F}} + \sum_{k=1}^{\ell} \left(\frac{\partial z_j}{\partial X_i} \right)_{Q_k=1} \cdot Q_k \quad (5-1-1)$$

ここで、 ℓ は不静定次数である。式(5-1-1)の右辺の第1項は外力 \mathbf{F} による静定基本系の応答感度係数を示し、第2項は単位の大きさの仮想荷重 $Q_k=1$ による静定基本系の応答感度係数を示す。従って式(5-1-1)は静定基本系の外力 \mathbf{F} と不静定力 Q_k による任意の節点変位 z_j の感度係数を表している。式(5-1-1)中の $(\)_{\mathbf{F}}$, $(\)_{Q_k}$ の添字は荷重の状態を表している。静定構造に対し感度変数を逆数とすることにより、ここで考えている感度係数は感度変数に依存しない定数となる。本章では前章で述べた感度係数特性を用いるが、無次元化感度係数の骨組全体に対する総和の表現を以下のように改める。

$$\sum_{i=1}^{s-m} \frac{\partial z_j}{\partial X_i} \frac{X_i}{z_j} \quad \Rightarrow \quad \sum_M \sum_{i=1}^m \frac{\partial z_j}{\partial X_{Mi}} \frac{X_{Mi}}{z_j}$$

ここで、 s および M は互いに独立な関係にある感度変数の種類の数である。

例えば、 i 番目の要素の断面積を A_i 、断面 2 次モーメントを I_i とすれば、平面ラーメン構造の場合、 $M=s=2$ であり

$$X_{M=1,i}=A_i \quad X_{M=2,i}=I_i$$

を意味する。Table.4-1 より感度変数を逆数とすれば次式が得られる。

$$\sum_M \sum_{i=1}^m \frac{\partial z_j}{\partial X_{M,i}} \frac{X_{M,i}}{z_j} = 1 \quad \rightarrow \quad z_j = \sum_M \sum_{i=1}^m \frac{\partial z_j}{\partial X_{M,i}} X_{M,i} \quad (5-1-2)$$

感度係数特性である式(5-1-2)の右辺の $\partial z_j / \partial X_{M,i}$ に式(5-1-1)を代入すれば、静定基本系の感度係数と感度変数によって応答を表わすことができる。

$$z_j = \sum_M \sum_{i=1}^m \left\{ \left(\frac{\partial z_j}{\partial X_{M,i}} \right)_F + \sum_{k=1}^{\ell} \left(\frac{\partial z_j}{\partial X_{M,i}} \right)_{Q_k} Q_k \right\} X_{M,i} \quad (5-1-3)$$

式(5-1-3)を利用して不静定力 Q_k が作用する節点における変位 z_h ($h=1,2,\dots,\ell$) の適合条件式を導く。なお、 z'_h は適合させる対象となる節点変位で z_h とは対をなすものである。

$$\begin{aligned} z_h &= \sum_M \sum_{i=1}^m \left\{ \left(\frac{\partial z_h}{\partial X_{M,i}} \right)_F + \sum_{k=1}^{\ell} \left(\frac{\partial z_h}{\partial X_{M,i}} \right)_{Q_k} Q_k \right\} X_{M,i} \\ &= \sum_M \sum_{i=1}^m \left\{ \left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{M,i}} \right)_F + \sum_{k=1}^{\ell} \left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{M,i}} \right)_{Q_k} Q_k \right\} X_{M,i} = z'_h \end{aligned} \quad (5-1-4)$$

この適合条件式を解けば不静定力 Q_k が以下のようにして求められ、式(5-1-4)は次式のよりにまとめられる。

$$\begin{aligned} \sum_M \left[\left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_h}{\partial X_{M,i}} \right)_{Q_k=1} X_{M,i} \right] - \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{M,i}} \right)_{Q_k=1} X_{M,i} \right] \right] \{Q_k\} \\ = \sum_M \left\{ \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{M,i}} \right)_F X_{M,i} \right] - \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_h}{\partial X_{M,i}} \right)_F X_{M,i} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5-1-5)$$

さらに整理すれば、次式のような

$$[G]\{Q_k\} = \{H_1\} \quad (5-1-6)$$

不静定次数の次元を有する連立方程式となる。ここで $[G]$ は式(5-1-5)の左辺の係数マトリクスで対称マトリクスであり、 $\{H_1\}$ は右辺のベクトルである。式(5-1-2)を用いることにより、係数マトリクス $[G]$ が感度変数 $X_{M,i}$ に関して数学的に陽な形で表現されている。さら

に適合条件式(5-1-6)を感度変数で偏微分することにより不静定力 Q_k の感度係数が求められる。

$$\frac{\partial G}{\partial X_{M_i}} \{Q_k\} + [G] \left\{ \frac{\partial Q_k}{\partial X_{M_i}} \right\} = \sum_M \left\{ \left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{M_i}} \right)_F - \left(\frac{\partial z_h}{\partial X_{M_i}} \right)_F \right\} \quad (5-1-7)$$

$$[G] \left\{ \frac{\partial Q_k}{\partial X_{M,i}} \right\} = \{H_2\} \quad (5-1-8)$$

ここで,

$$\{H_2\} = \sum_M \left\{ \left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{M,i}} - \frac{\partial z_h}{\partial X_{M,i}} \right)_F - \left[\left(\frac{\partial z_h}{\partial X_{M,i}} - \frac{\partial z'_h}{\partial X_{M,i}} \right)_{Q_k} \right] \{Q_k\} \right\} \quad (5-1-9)$$

式(5-1-8)の左辺の係数マトリクス $[G]$ は式(5-1-6)のものと同じである。また、式(5-1-3)の両辺を Q_k で偏微分すれば次式を得る。

$$\frac{\partial z_j}{\partial Q_k} = \sum_M \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_j}{\partial X_{M,i}} \right)_{Q_k=1} X_{M,i} \quad (5-1-10)$$

以上より、原系の不静定構造物の節点変位の感度係数は

$$\frac{\partial z_j}{\partial X_{M,i}} = \left(\frac{\partial z_j}{\partial X_{M,i}} \right)_F + \sum_{k=1}^{\ell} \left(\frac{\partial z_j}{\partial X_{M,i}} \right)_{Q_k=1} \cdot Q_k + \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial z_j}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial X_{M,i}} \quad (5-1-11)$$

で示される。ここで、式(5-1-11)の左辺 $\partial z_j / \partial X_{M,i}$ は原系である ℓ 次不静定構造系の節点変位 z_j の1次感度係数である。右辺の第1項および第2項は静定基本系に対する感度係数を示し、第3項は不静定力 Q_k の変動による感度係数の変動分を表している。

以上の計算過程に続いて節点変位の感度係数の他に節点変位、部材断面力、そして部材断面力の感度係数も求められることを示す。

節点変位は式(5-1-11)より得られた節点変位の感度係数を用いて式(5-1-2)より求められる。また、 e 部材の部材断面力 r_e は静定基本系の r_{0e} と不静定力 Q_k より

$$r_e = (r_{0e})_F + \sum_{k=1}^{\ell} (r_{0e})_{Q_k=1} Q_k \quad (5-1-12)$$

となる。上式の両辺を感度変数 $X_{M,i}$ で偏微分すれば r_e と $\partial Q_k / \partial X_{M,i}$ より部材断面力の感度係

数が得られる。

$$\frac{\partial r_e}{\partial X_{M,i}} = \sum_{k=1}^{\ell} (r_{0e})_{Q_k=1} \frac{\partial Q_k}{\partial X_{M,i}} \quad (5-1-13)$$

5-1-1. 適合条件

5-1.で述べた新しい感度解析法は応力法の考え方に基づいた手法である。したがって、通常の応力法と同様に適切な不静定力と静定基本系を設定し適合条件を考える必要がある。適合条件式(5-1-5)を計算するのに必要な、静定基本系の感度係数 $\left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{M,i}} \right)_{\mathbf{F}}$ 、 $\left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{M,i}} \right)_{Q_k=1}$ ($h=1,2,\dots,\ell$, $k=1,2,\dots,\ell$)は以下に述べる考え方であらかじめ求めておく。静定基本系に対する感度係数は感度変数に独立であるため、その値が定数値となることは本手法における重要な特徴である。解析に先立ち1度だけ実行されるこの計算過程を本手法においては前処理 (Pre-process) と呼ぶこととする。前処理は静定基本系に対して行われるため直接微分法、差分法ともに同じ値が得られるが、本手法では効率的な直接微分法を用いている。このことは、後述の5-1-2. 計算効率の項で説明している。一般的な構造系の適合条件を考えるにあたり、支点の拘束条件による外的不静定と剰余部材による内的不静定に分けて考える。

(1) 外的不静定に対する適合条件

外的不静定に対しては、**Fig.5-1**に示すように支点の拘束を解放してその変位を0とする適合条件を考える。つまり、式(5-1-4)において $z_h = z'_h = 0$ となる。したがって、式(5-1-5)、(5-1-9)において

$$\left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{M,i}} \right)_{\mathbf{F}} = 0, \quad \left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{M,i}} \right)_{Q_k=1} = 0 \quad (5-1-14)$$

として式(5-1-6)、(5-1-8)の $[G]$ 、 $\{H_1\}$ 、 $\{H_2\}$ を計算する。これは式(5-1-5)、(5-1-9)が内的不静定に対して表現されたものであり、外的不静定の場合は対となる節点変位が支点であることを表している。

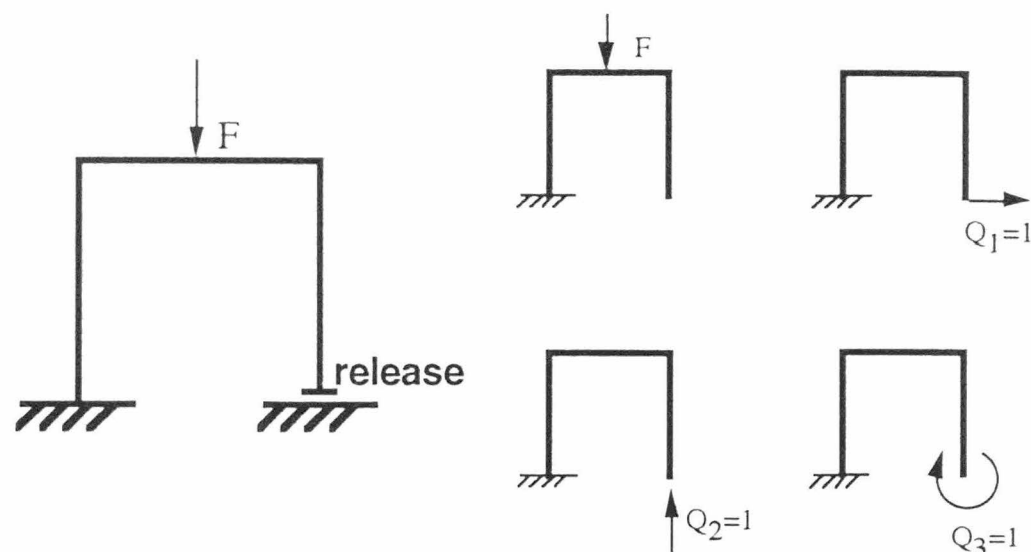


Fig.5-1 外的不静定に対する静定基本系

(2) トラス構造の内的不静定に対する適合条件

トラス構造の場合、Fig.5-2のように剰余部材を除去した静定基本系を考えて除去した部材の部材長 δ_h の適合を考える。つまり、式(5-1-4)において $z_h = \delta_h = \delta'_h = z'_h$ となる。部材長（節点間の距離）の感度係数は節点変位の感度係数から次式により求める(Fig.5-3)。

$$\frac{\partial \delta_h}{\partial X_{Mi}} = \cos \theta \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_{Mi}} - \frac{\partial u_1}{\partial X_{Mi}} \right) + \sin \theta \left(\frac{\partial v_2}{\partial X_{Mi}} - \frac{\partial v_1}{\partial X_{Mi}} \right) \quad (5-1-15)$$

式(5-1-15)の誘導はAppendixを参照されたい。

除去された剰余部材自身の部材長 δ'_h の感度係数は式(5-1-16)となる。

$$\frac{\partial \delta'_h}{\partial X_{Mi}} = \frac{L}{E} \quad (5-1-16)$$

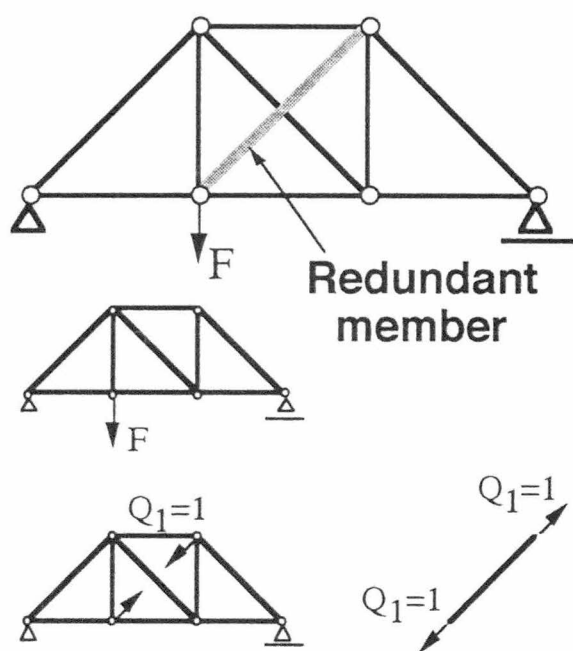


Fig.5-2 トラス構造に対する静定基本系

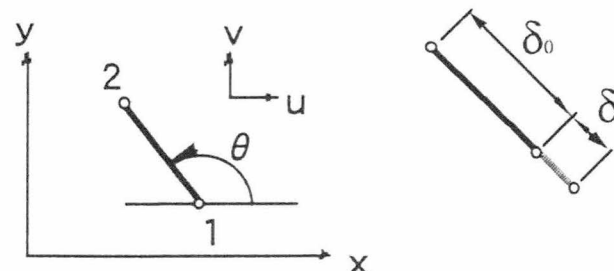


Fig.5-3 節点間の距離

ここで、 L は部材長、 E はヤング係数である。したがって、式(5-1-5)、(5-1-9)において

$$\left(\frac{\partial z_h}{\partial X_{M^i}}\right)_F = \left(\frac{\partial \delta_h}{\partial X_{M^i}}\right)_F, \quad \left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{M^i}}\right)_F = 0, \quad \left(\frac{\partial z_h}{\partial X_{M^i}}\right)_{Q_k=1} = \left(\frac{\partial \delta_h}{\partial X_{M^i}}\right)_{Q_k=1}$$

$$\left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{M^i}}\right)_{Q_k=1} = \left(\frac{\partial \delta'_h}{\partial X_{M^i}}\right)_{Q_k=1}, \quad (h=k) \quad \left|\quad \left(\frac{\partial z'_h}{\partial X_{M^i}}\right)_{Q_k=1} = 0, \quad (h \neq k)\right.$$

として式(5-1-6)、(5-1-8)の $[G]$ 、 $\{H_1\}$ 、 $\{H_2\}$ を計算する。

(3) ラーメン構造の内的不静定に対する適合条件

ラーメン構造の場合、Fig.5-4に示すように樹状構造の線図には閉じた経路あるいは輪(ring)が一つもないよう部材を切断した静定基本系⁹⁾を考えその切断点での節点変位 z_h の適合を考える。つまり、式(5-1-4)において $z_h = z'_h$ となる。

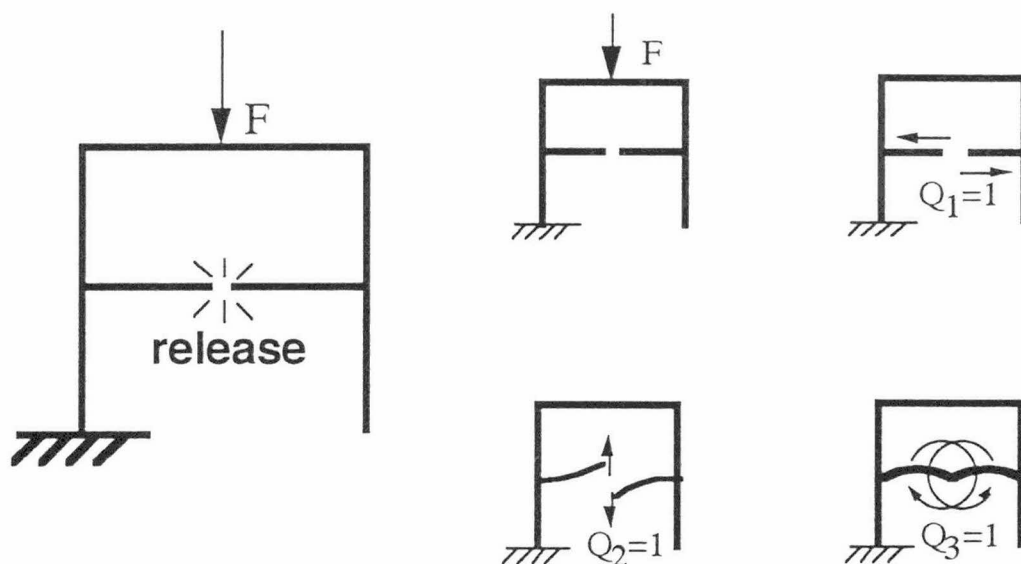


Fig.5-4 ラーメン構造に対する静定基本系

5-1-2. 計算効率

本手法 (SACM) の計算効率を評価するために従来法である差分法 (FDM, 3.1.1.(1)) と直接微分法 (DDM, 3.1.1.(2)) との比較を行う。計算効率は設計最適化の過程や通常的设计において逐次的に構造解析や感度解析が行われることを前提として、節点変位と断面力およびそれぞれの感度係数を計算するのに要する計算量を比較することにより評価する。計算量は計算機のプログラムにより記述されるループの中で実行される四則演算による算術代入命令回数の総数を数えることで考える (Fig.5-5)。各手法の演算回数を Fig.5-6,7 に示し、これらの図で用いた変数の意味を Table.5-1 に示す。Table.5-1 で NF' はラーメン構造

Table.5-1 Common Parameter

NDF	The number of degree of freedom per node (=2,TRUSS =3,FRAME)
NNE	The number of nodes per element (=2 ,Framed structure)
NDFEL	The total number of degree of freedom for element (=NDF*NNE)
NBW	Half band width of Stiffness Matrix
NN	The number of nodes
NE	The number of elements
NG	The number of group (design variables)
NQ	The degree of redundancy
NF	The total number of degree of freedom for the global structure (Original Model)
NF'	The total number of degree of freedom for the global structure (Statically Model)
NI	The number of independent variables in structures (M : X_M)
ITE	The number of times of design modification (Iteration for optimizing)
Depended on an algorithm	
$[k]$	Calculation of element stiffness matrix
$\{r\}$	Calculation of nodal force
$\left[\frac{\partial k}{\partial X}\right]$	Calculation of derivative stiffness matrix
$\left\{\frac{\partial r}{\partial X}\right\}$	Calculation of sensitivity of nodal force

for example

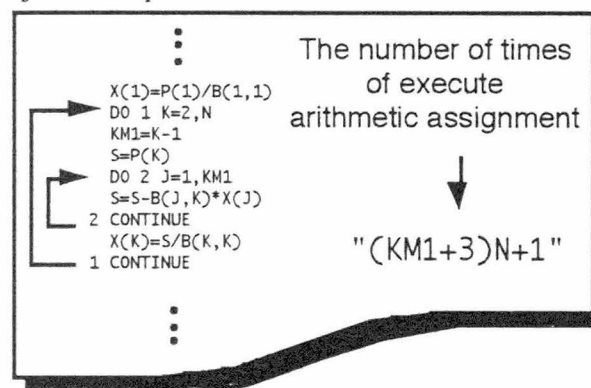


Fig.5-5 演算回数

において静定基本系とするために切断された節点の自由度が増えることを考慮するものである。Fig.5-6,7は定式化された式の添字を見ることで表したものであるが、解析の主たる演算となる連立方程式の演算は係数マトリクスの性質により様々である。そこで、FDMとDDMにおける剛性マトリクス \mathbf{K} とSACMにおけるマトリクス \mathbf{G} の成分の構成を考慮して演算回数を仮定する。なお、マトリクスの分解にはCholesky decompositionを用いる。一般の構造物の \mathbf{K} はマトリクスの帯域幅を考慮すればマトリクスの分解に要する演算回数は $NF \cdot (NDF \cdot (NBW + 1))^2$ となる¹²⁾。ここで、構造の自由度をNF、帯域幅をNBW、部分マトリクスのサイズ（節点あたりの自由度数）をNDFとする。一方、マトリクス \mathbf{G} は対称マトリクスであるが、非零の係数のみで構成されていることから分解に要する演算回数は $NQ^3/3$ となる¹³⁾。ここで不静定次数をNQとする。分解後に連立方程式を解くのに要する代入回数はどちらの手法もマトリクスのサイズをNとすれば N^2 となる¹³⁾。

ここで、各手法の特徴を考察する。SACMの計算の流れ図をFig.5-8に示す。SACMと従来手法との最も対照的な点は、連立方程式の次元がSACMでは不静定次数であるのに対して、FDMとDDMでは構造系の自由度である点と、SACMでは解析に先立って（不静定次数+1）回分の構造解析および感度解析（前処理）が必要である点である。これは、SACMが応力法に基づいている一方、FDMとDDMでは変位法に基づいているため、基本的には応力法と変位法の長所、短所がそのまま性質として引き継がれている。したがって、応答やその感度係数を1度しか計算しないのであれば、SACMは前処理が必要な分、従来法に比べて煩雑で非効率的となる。しかし、逐次的に解析を行う場合、前処理を一度行っておけばその後の設計変更に対しては不静定次数に等しい次元を有する連立方程式を解くだけで応答やその感度係数が得られるという特徴があり、不静定次数が小さく構造系の自由度が大きい場合SACMは従来法に比べて効率的な感度解析法となることが分かる。通常の感度解析ではFDMが広く用いられているが、DDMが式(3-1-5)を計算するときには構造解析においてすでに分解された剛性マトリクス \mathbf{K} を利用できるのに対し、FDMでは式(3-1-3)の

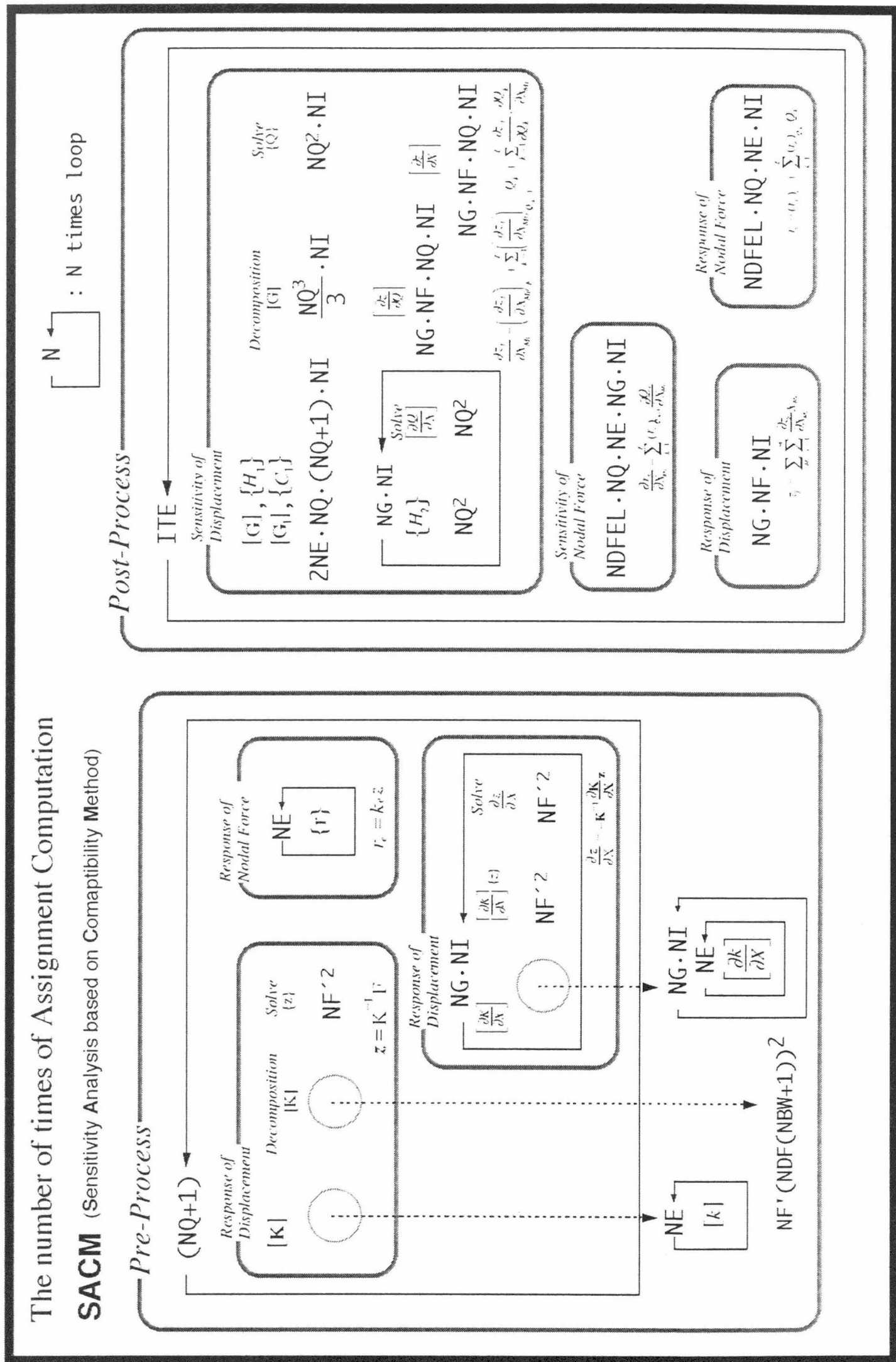


Fig.5-6 SACMの演算回数

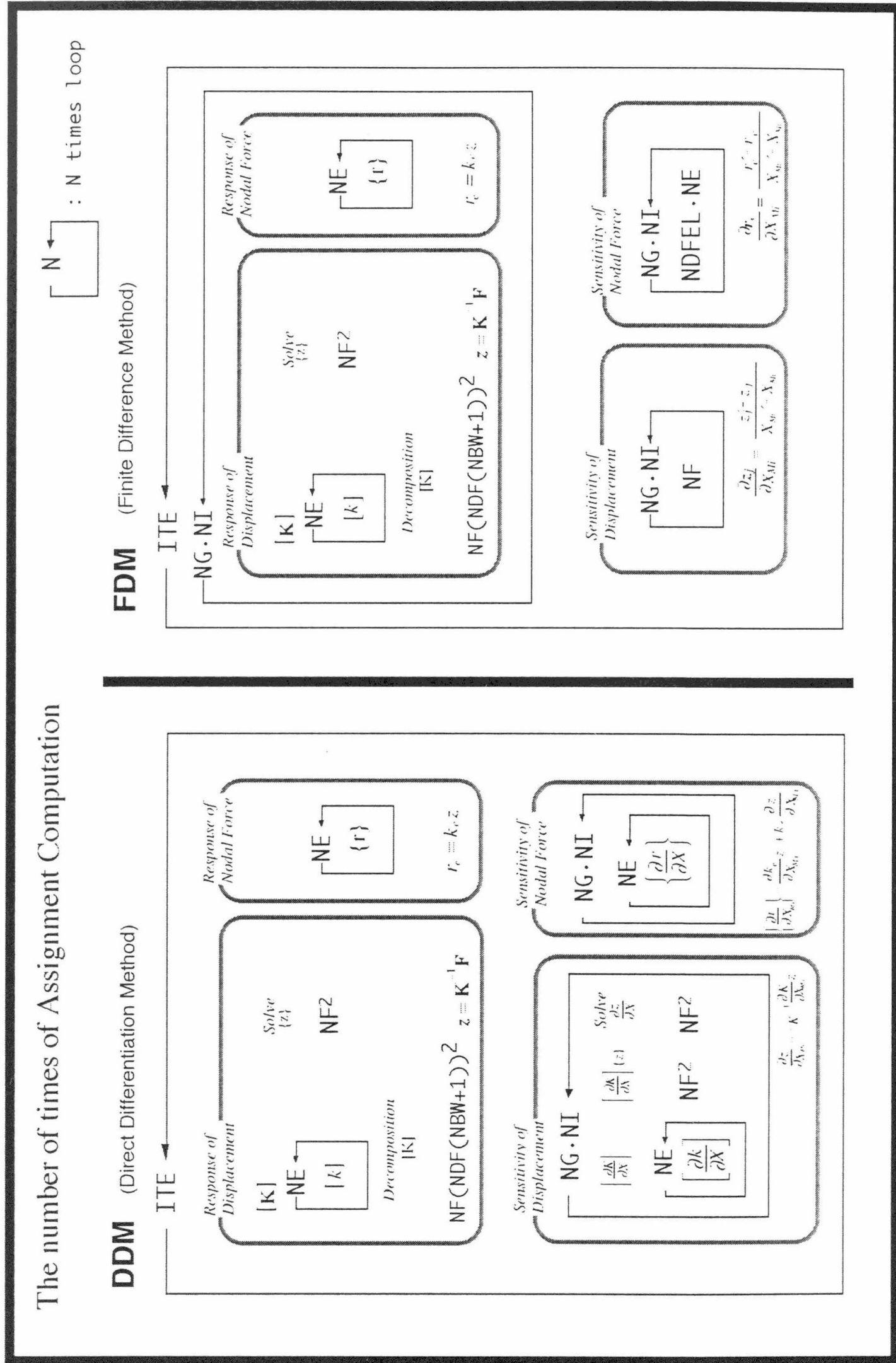


Fig.5-7 DDMとFDMの演算回数

Sensitivity analysis based on Compatibility Method **SACM**

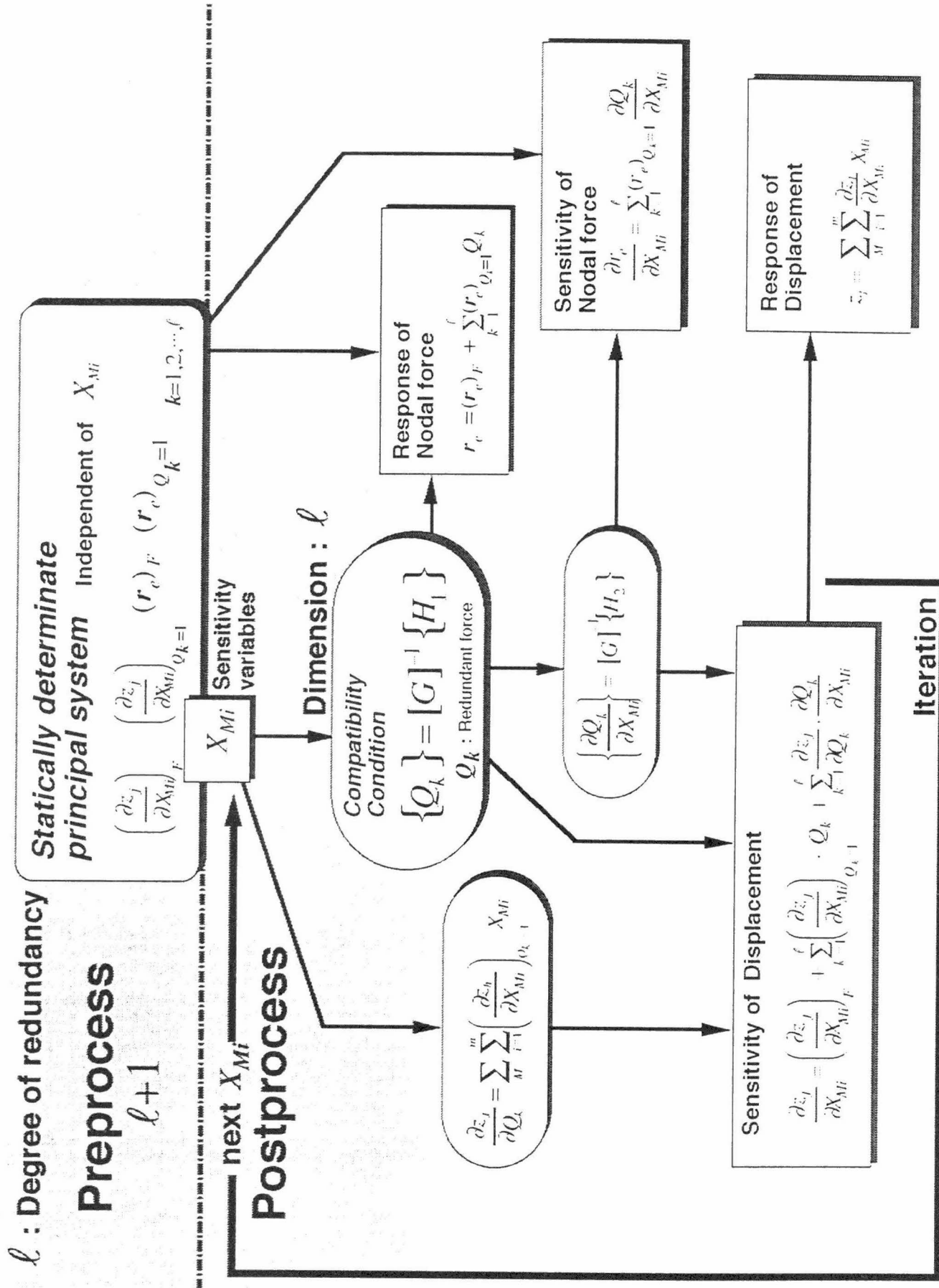


Fig.5-8 SACM の計算の流れ

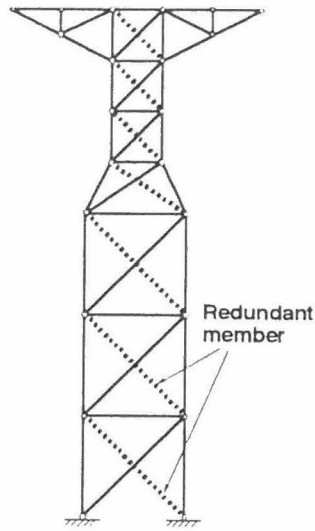


Fig.5-9 47 bar truss

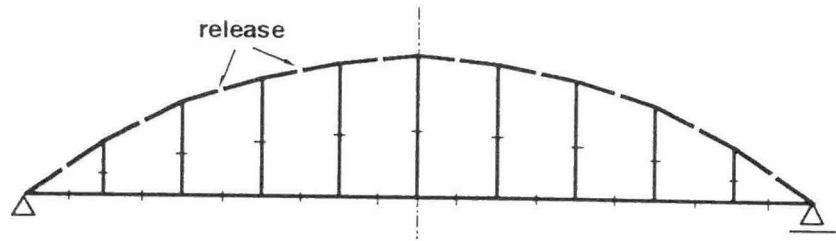


Fig.5-11 vierendeel

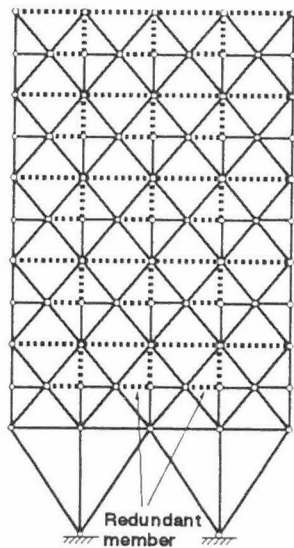


Fig.5-10 200 bar truss

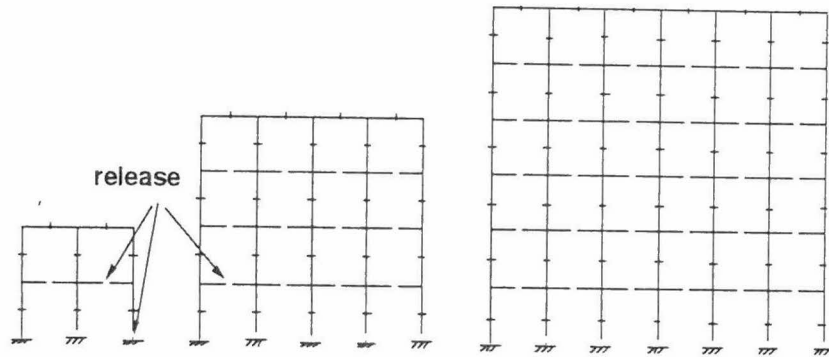


Fig.5-12 Multi bay -multi span frame

$g(X_{M,i} + \Delta X_{M,i})$ を計算するのに摂動系の剛性マトリクス \mathbf{K} を毎回分解する必要があるため計算効率の面で非常に不利となることは明らかである。また、得られる感度係数は **SACM** と **DDM**は解析的に求められるため厳密に一致するが、**FDM**は差分法であるため近似的な値しか得られない。なお、**FDM**における $\Delta X_{M,i}$ は0.1%の変動を考えている。

Fig.5-6,7に示した演算回数が解析を繰り返していったときに、どのように推移するかをみるために、解析モデルとして47部材トラス、200部材トラス、vierendeel、多層多スパンラーメンを考える (Fig.5-9~12)。なお、荷重条件は各手法特有の問題には無関係であるため、図示していない。ここでは、設計変数をグループ化せずに全部材を独立な設計変数としている。したがって、Table.5-1において $NG=NE$ である。また、帯域幅NBWは節点番号の付け方に影響を受ける変数であるが、 $NBW=10$ としている。

(1) 47部材トラス

Fig.5-9の47部材トラスは7次の不静定構造物である。図中の破線で示した剰余部材を除去して考えれば静定基本系となる。Table.5-1における各変数はそれぞれ、 $NN=22$, $NE=47$, $NQ=7$, $NF=NF'=40$ となり、解析の繰り返し回数ITEを増加していったときの各手法の演算回数をプロットしたものがFig.5-13である。Fig.5-13は横軸に解析の繰り返し回数、縦軸に演算回数の総数を示している。1回の解析に対してDDMとFDMはそれぞれ450000回と1900000回の演算が必要である。この回数は解析を繰り返すごとに必要となる回数である。一方、SACMは前処理において1400000回の演算が必要となるが、その後の1回の解析に対しては102000回の演算で解析を行うことができる。つまり、5回以上の

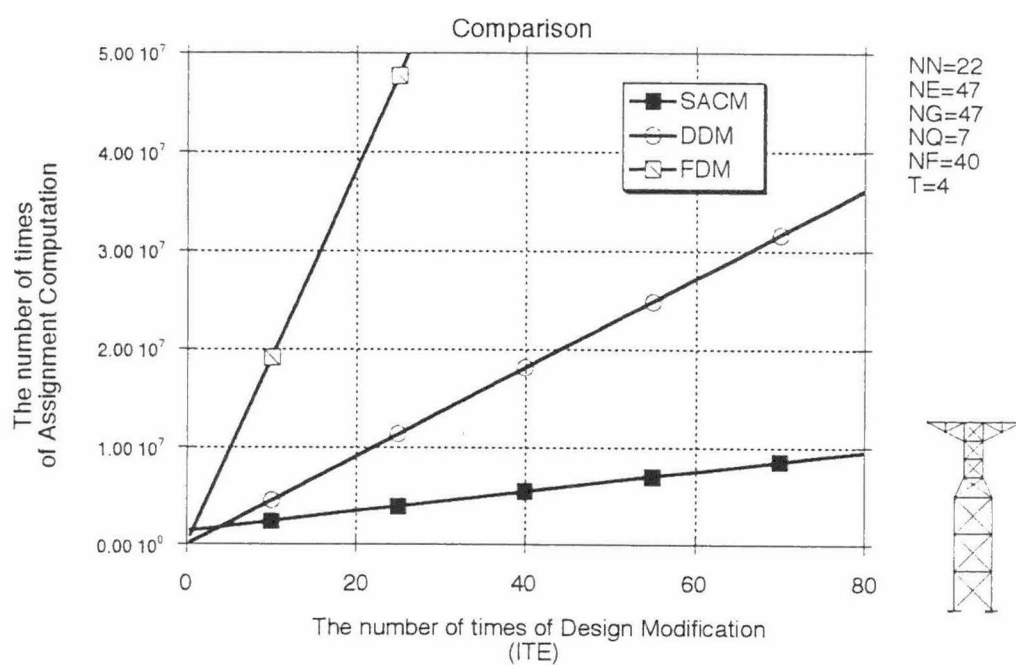


Fig.5-13

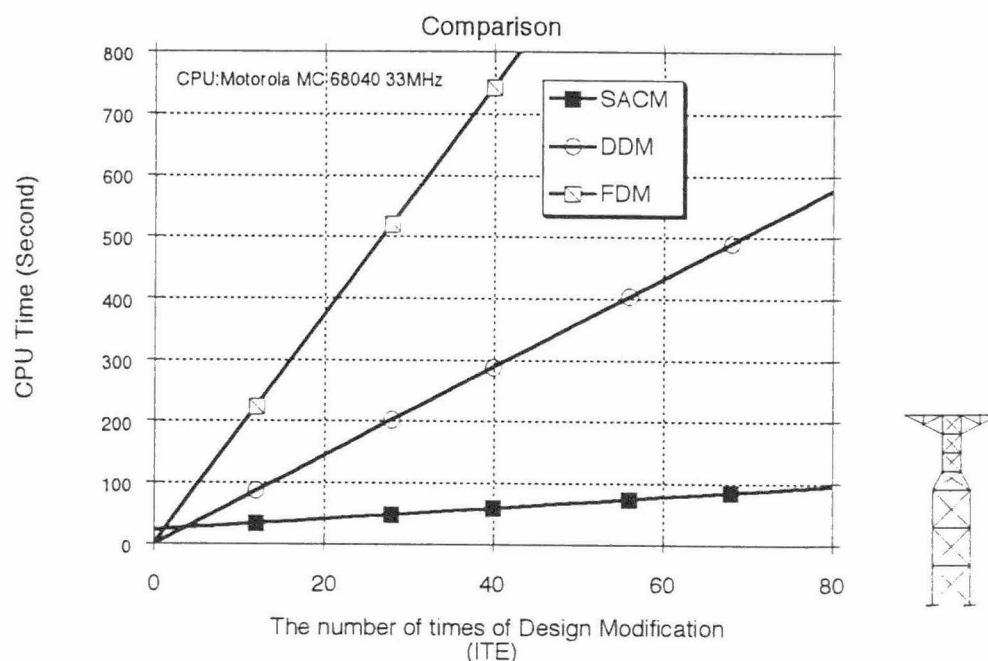


Fig.5-14 CPU Time

解析を繰り返した場合、**SACM**は他の手法に対して効率的な解析法となる。なお、**Fig.5-13**に表記した T は**SACM**と**DDM**が交差する点に対する解析の繰り返し回数ITEを意味している。このモデルに対して、実際の計算時間を測定したものを**Fig.5-14**に示す。**Fig.5-14**は**Fig.5-13**の縦軸をCPU Time(Sec)に置き換えたものである。測定に用いた計算機はMotorola社のMC68040 (33MHz) をプロセッサユニットとして搭載している。**Fig.5-13**と比べてみると演算回数から見た計算量の推移とはほぼ同じ傾向が現れていることが解る。1回の解析に対して**DDM**は7.2秒、**FDM**は18.5秒を要する。一方**SACM**は前処理において22秒かかるが、その後の1回の解析に対してわずか0.9秒で計算を行うことが可能である。**SACM**が**DDM**に対して効率的となる繰り返し回数は実際の計算では4回程度となった。

(2) 200部材トラス

Fig.5-10の200部材トラスは50次の不静定構造物である。図中の破線で示した剰余部材を除去して考えれば静定基本系となる。**Table.5-1**における各変数はそれぞれ、 $NN=77$, $NE=200$, $NQ=50$, $NF=NF'=150$ となり、各手法の演算回数を示したものが**Fig.5-15**である。

1回の解析に対して**DDM**と**FDM**はそれぞれ $1.4E+7$ 回と $3.5E+7$ 回の演算が必要である。一方、**SACM**は前処理において $4.6E+8$ 回の演算が必要となるが、その後の1回の解析に対

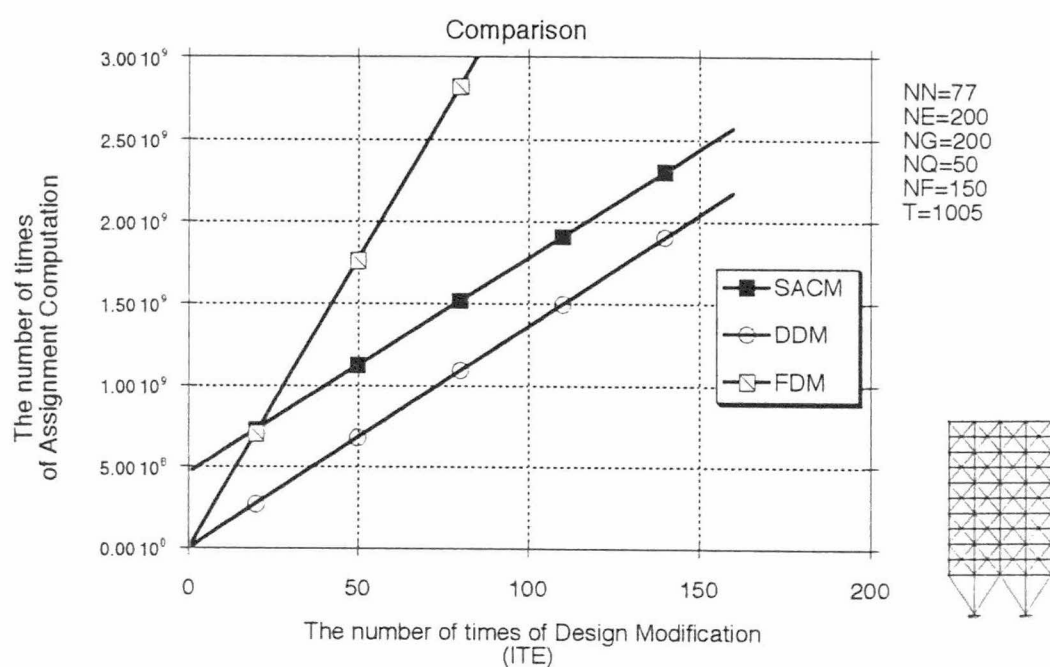


Fig.5-15

しては $1.3E+7$ 回の演算となり、**DDM**の1回分の演算回数である $1.4E+7$ 回をわずかに下回るだけであるため、1005回以上の解析を繰り返さなければ、**SACM**は**DDM**に対して効率的な解析法とならない。しかし、**FDM**に対しては25回以上解析を繰り返せば効率的な解析法となる。

(3) vierendeel

Fig.5-11のvierendeelは30次の不静定構造物である。図に示したように上弦の部材を10箇所切断することにより静定基本系となる。**Table.5-1**における各変数はそれぞれ、 $NN=49$, $NE=58$, $NQ=30$, $NF=144$, $NF'=174$ となり、各手法の演算回数を示したものが**Fig.5-16**である。1回の解析に対して**DDM**と**FDM**はそれぞれ $6.6E+6$ 回と $2.8E+7$ 回の演算が必要であ

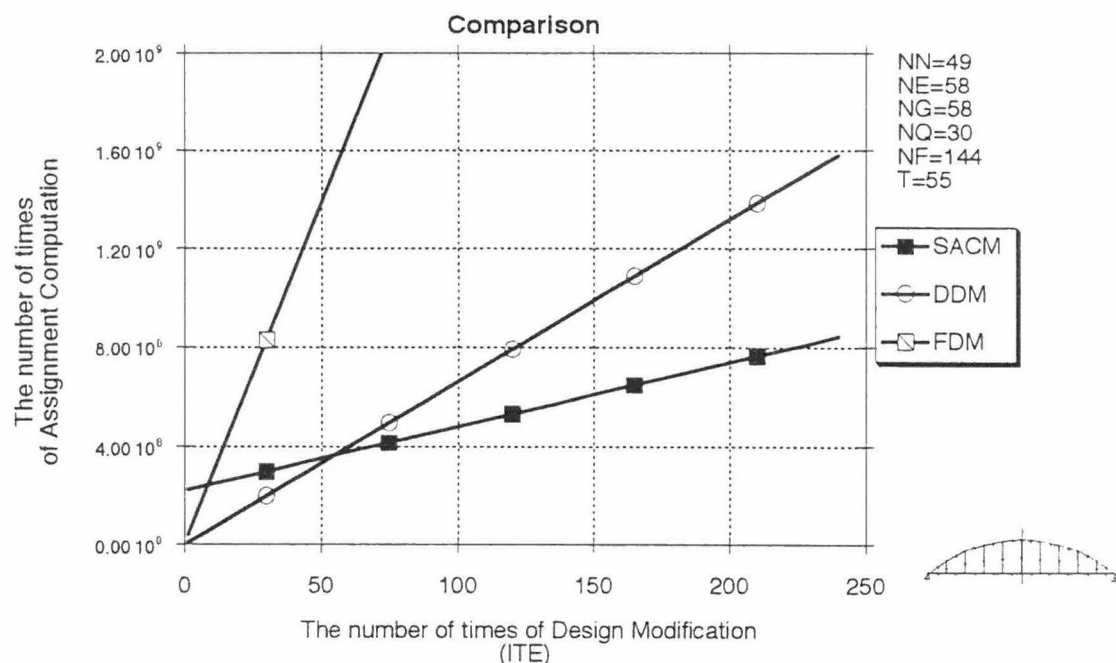


Fig.5-16

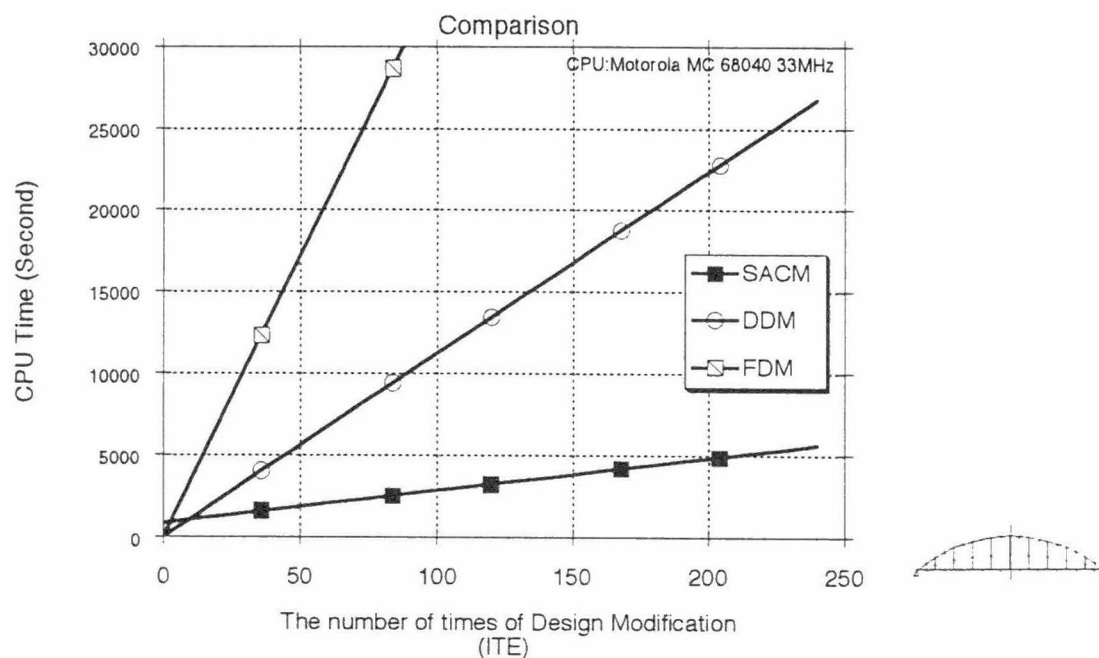


Fig.5-17 CPU Time

る。一方、**SACM**は前処理において $2.2E+8$ 回の演算が必要となるが、その後の1回の解析に対しては $2.6E+6$ 回の演算で解析を行うことができる。つまり、55回以上の解析を繰り返せば**SACM**は他の手法に対して効率的な解析法となることが推定できる。このモデルに対して、実際の計算時間を測定したものをFig.5-17に示す。Fig.5-16と比べてみると演算回数から見た計算量の推移とはほぼ同じ傾向が現れていることが解る。1回の解析に対して**DDM**は1111.5秒、**FDM**は170.6秒を要する。一方**SACM**は前処理において862秒かかるが、その後の1回の解析に対してわずか19.6秒で計算を行うことが可能である。**SACM**が**DDM**に対して効率的となる繰り返し回数は実際の計算では10回程度となった。

(4) 多層多スパンラーメン

Fig.5-12に示す多層多スパンラーメンはそれぞれ、12次、48次、108次の不静定構造物である。図に示すように閉じた輪が1つもないよう梁部材と支点部を切断することにより樹状構造の静定基本系となる。各々のラーメンに対して各手法の演算回数を示したものがFig.5-18である。3つの図から不静定次数が大きくなるに従い、**SACM**は前処理にかかる演算回数が増加し、1回の解析に要する演算回数も**DDM**と差が無くなっていくため、**SACM**の従来法に対する優位性は低くなっていることが分かる。しかし、ラーメン構造に対する不静定次数は節点数と要素数の設定に無関係な固有の値であるため、同一の構造において設計上必要な更に多くの節点数と要素数が設定されていれば**SACM**の優位性は向上する。

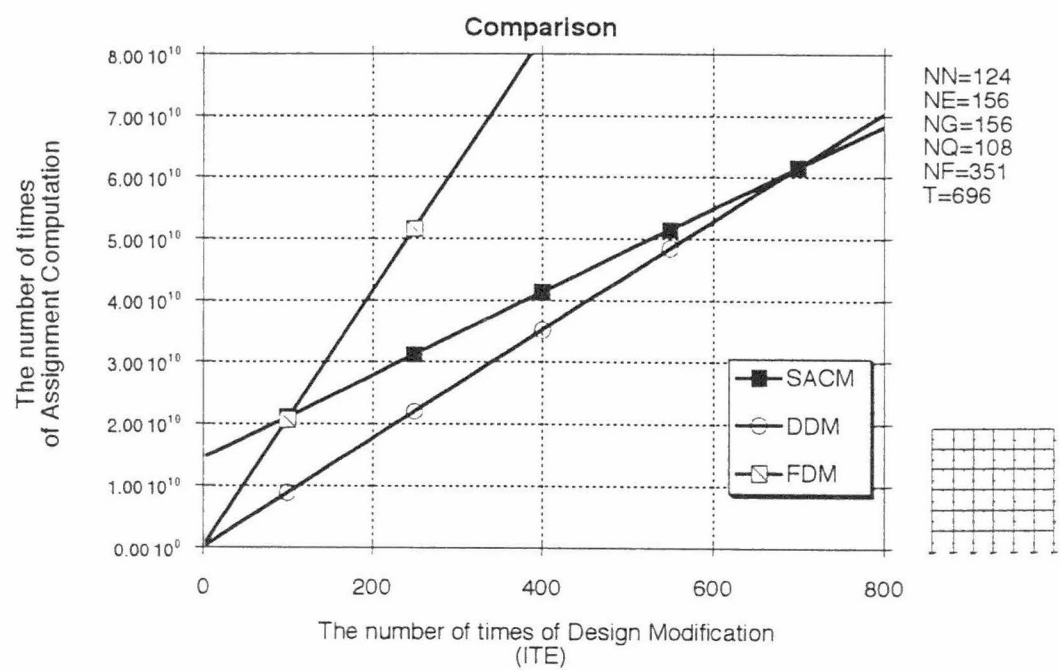
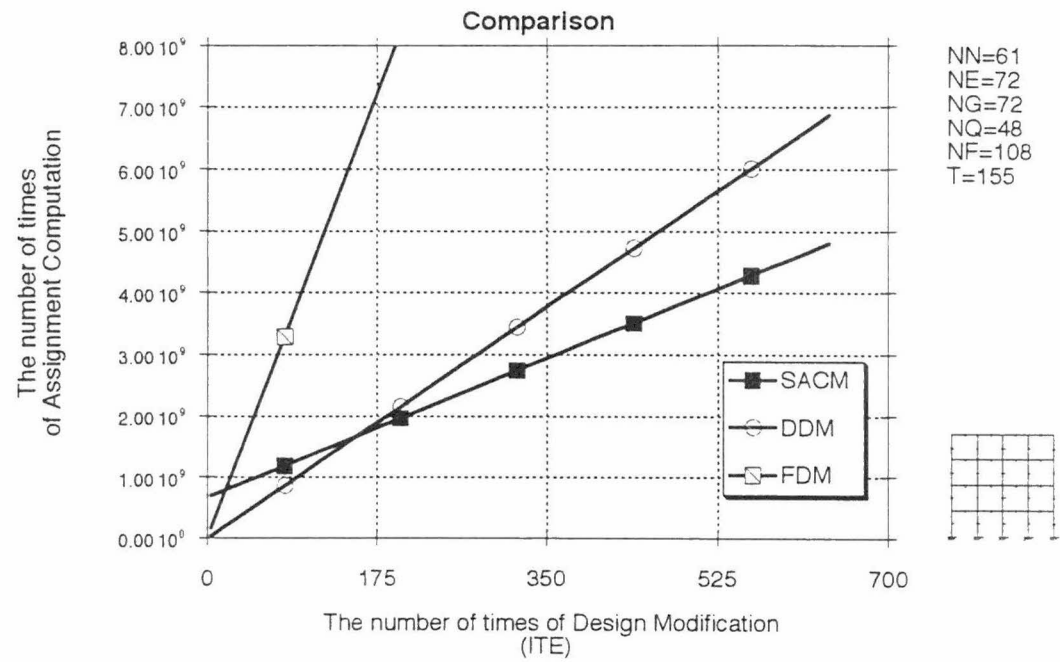
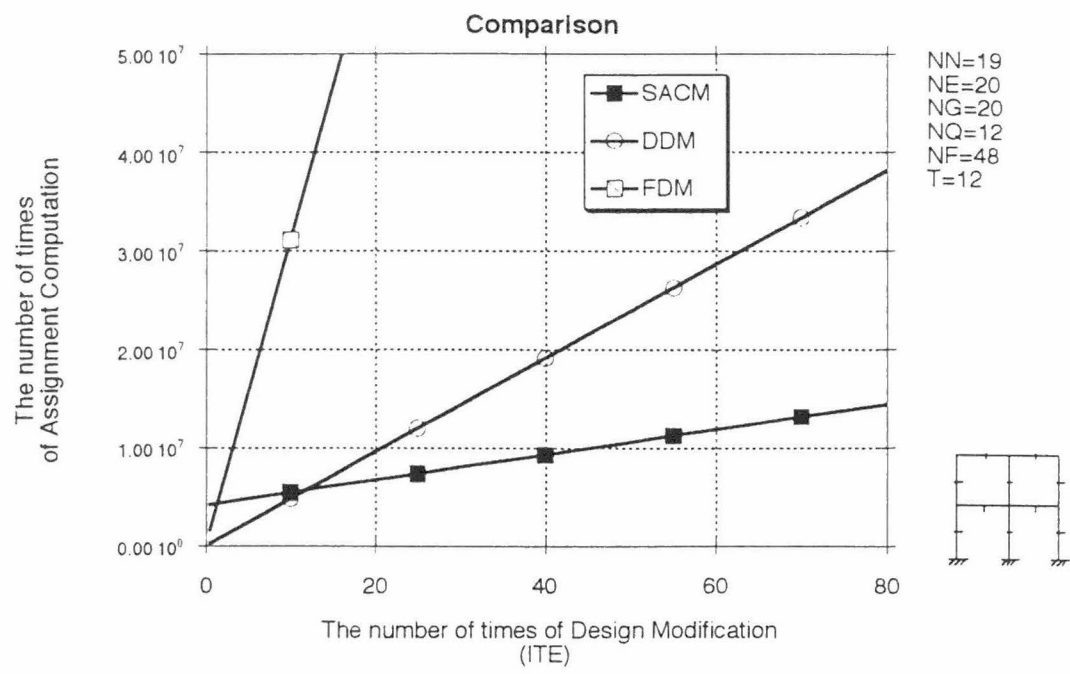


Fig.5-18

(5) 演算回数と計算時間との関係

実際の計算時間 (CPU Time)と Fig.5-6,7に示した代入演算回数を完全に対応づけることは現実的には不可能である。なぜなら、演算回数 (operation) 1 回当たりの計算時間は実行される命令の内容により様々だからである。したがって、この問題を論じることは本論文の範囲を超えるため言及しないが、各手法で要した計算時間を演算回数で割ることにより、演算 1 回当たりに要する計算時間を調べれば、Fig.5-6,7に示される各手法の演算 1 回の重みの情報を得ることは可能である。なお、重みを調べるに当たり実行した解析モデルは、Fig.5-9の47部材トラス、Fig.5-10の200部材トラス、Fig.5-11のvierendeel、Fig.5-12の20および72要素ラーメン、そして、Fig.5-19に示す124部材トラスである。各手法の演算 1 回の重みの情報をFig.5-20に示す。Fig.5-20より SACM の後処理(Post)の演算 1 回当た

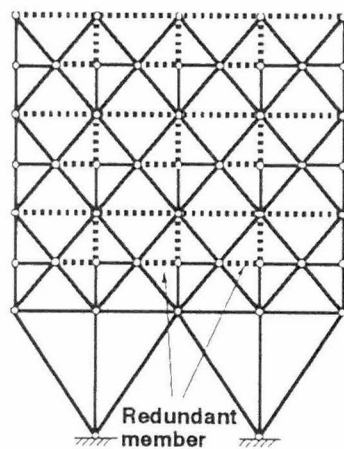


Fig.5-19 124bar truss

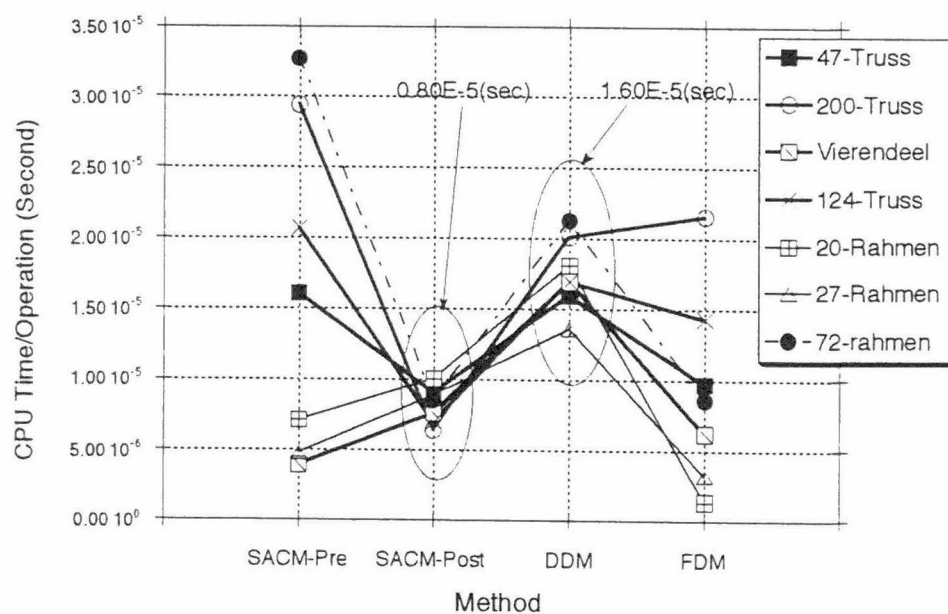


Fig.5-20 CPU Time / Operation

りの所要時間は、平均して $0.80E-5(\text{sec})$ となり、**DDM**のそれは $1.60E-5(\text{sec})$ となり 2 倍の比を持っていることが分かる。これは絶対的ではなく計算機の数値に依存する値であるが、概ねこの比は再現されるはずである。この 2 つの手法では値が各モデルで集中していることから**Fig.5-6,7**に示した代入演算回数は妥当であると考えられる。また、演算回数からみて **SACM** が **DDM** に較べて不利と判断される場合でも実際の計算時間では 2 倍ほどは効率的な解析法であるということである。一方、**SACM** の前処理(Pre)と**FDM**は各モデルの値にかなりのばらつきが生じた。しかし、トラス構造とラーメン構造が二分されるようなばらつきとなっていることが分かる。つまり、**SACM** の前処理(Pre)と**FDM**ではトラス構造はラーメン構造に比べて**Fig.5-6,7**に示す演算 1 回当たりの所要時間が多いということが分かる。

6. 逆解析問題

6. 逆解析問題

本章では、3.および4.で述べてきた感度解析及び感度係数特性を利用した逆解析問題への応用について述べる。ここでは、逆解析問題として変位指定下のトラス構造物の形状逆解析問題と、弾性平面モデルでモデル化された多層地盤の表層測定変位から弾性係数を逆解析する問題を扱うこととする。

6-1. 変位指定下におけるトラス構造物の形状逆解析^{19) 20)}

変位指定下における構造物の形状逆解析は半谷らによって様々な手法が試みられているが^{16) 17) 21) 22)}、そこでは、変位モード制約条件式 $\mathbf{A}\mathbf{z}=0$ のもとで変位法における釣り合い方程式 $\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{z}=\mathbf{F}$ を解析する問題に帰着させて構造形態解析を定式化している。ここで、 $\mathbf{z}(n)$ は節点変位ベクトル、 \mathbf{K} は剛性マトリクス、 \mathbf{F} は荷重ベクトル、解析変数 \mathbf{x} は節点の座標値である。具体的には、次式のようにラグランジュ乗数 λ を導入して全ポテンシャルエネルギーの最小化問題に変換し、

$$\begin{aligned} \prod_k \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} - \mathbf{F}^T \mathbf{x} + \lambda \mathbf{A} \mathbf{x} &\Rightarrow \min \\ \mathbf{r} = \mathbf{A}^T \lambda & : \mathbf{A}(m, n) \end{aligned}$$

これら2つの式を満足するための条件として、次式において $\mathbf{r}=0$ となるような未知の節点座標 \mathbf{x} を Bott Duffin の逆行列を利用して表現した \mathbf{x} に関する非線形方程式で定式化している。

$$\mathbf{r}(\bar{\mathbf{x}}) = \underbrace{\mathbf{P}_L^\perp [\mathbf{K}(\bar{\mathbf{x}}) \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_L^\perp]^{-1} \mathbf{F}}_{\text{Bott Duffin Inverse Matrix}} = 0$$

上式を解くための手法として、線形法、Newton-Raphson 法、最大傾斜法などを利用している。

本論文においてトラス構造物の感度解析における感度変数を節点座標とした、形状の感度係数および感度係数特性を導いてきたわけであるが、この形状の感度係数および感度係数特性を構造形態の逆解析問題へ応用する。形態解析は高度な非線形問題に属しており、ここでは最小自乗法に基づく手法を考えている。

形状感度解析

部材数 m のトラス構造の形状感度係数は式(3-1-19)より次式で与えられる.

$$\frac{\partial z_k}{\partial X_h} = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_k}{\partial S_{1i}} \frac{\partial S_{1i}}{\partial X_h} + \frac{\partial z_k}{\partial S_{2i}} \frac{\partial S_{2i}}{\partial X_h} + \frac{\partial z_k}{\partial S_{3i}} \frac{\partial S_{3i}}{\partial X_h} \right) \quad (6-1-1)$$

ここで, X_h は節点座標値 (x_s, y_s, x_e, y_e) である. また, 形状感度係数特性は式(4-1-24)より次式のように導かれる.

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{2NN} \frac{\partial z_k}{\partial X_h} \frac{X_h}{z_k} &= \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial z_k}{\partial x_s} x_s + \frac{\partial z_k}{\partial y_s} y_s + \frac{\partial z_k}{\partial x_e} x_e + \frac{\partial z_k}{\partial y_e} y_e \right) \frac{1}{z_k} \\ &= z_k \frac{1}{z_k} = 1, \quad NN: \text{Number of node} \end{aligned} \quad (6-1-2)$$

6-1-1. 逆解析問題の定式化 (変位値を直接指定する場合)¹⁹⁾

形状感度係数の応用例として, トラス構造の節点変位を指定値 (既知量) として, その変位を生じうる未知の節点座標を決定する逆解析問題を考える. これは「与えられた荷重条件のもとで, 指定した変位あるいは変位モードが得られる形態決定問題」¹⁷⁾ となる.

感度係数特性より k 番目の変位 z_k は次式で表される.

$$z_k = \sum_{h=1}^{2NN} \frac{\partial z_k}{\partial X_h} X_h \quad (6-1-3)$$

通常の構造設計において, 支点など予め決定された節点座標が条件として与えられることを考慮するため, Fig. 6-1-1 に示すように変化させる節点座標 X_a と, 変化させずに固定しておきたい節点座標 X_b とに分けて式(6-1-3)を変形すれば

$$z_k = \sum_{a=1}^{n_1} \frac{\partial z_k}{\partial X_a} X_a + \sum_{b=1}^{n_2} \frac{\partial z_k}{\partial X_b} X_b, \quad n_1 + n_2 = 2NN \quad (6-1-4)$$

となる. 次に最小自乗法に基づき, 未知の節点座標 X_a を求めるための連立方程式を作る.

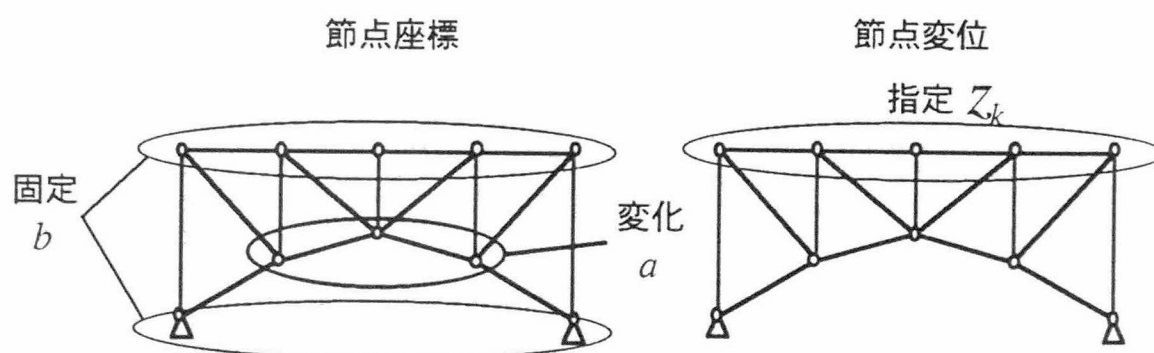


Fig. 6-1-1

$$Q = \frac{1}{2}(\bar{z}_k - z_k)^2 \quad (6-1-5)$$

ここで, \bar{z}_k は指定変位, Q は残差である. 式(6-1-5)に式(6-1-4)を代入する.

$$Q = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \bar{z}_k - \left(\sum_a \frac{\partial z_k}{\partial X_a} X_a + \sum_b \frac{\partial z_k}{\partial X_b} X_b \right) \right\}^2 \quad (6-1-6)$$

式(6-1-6)を最小にするには $\partial Q / \partial X_a = 0$ とすれば良い. 式(6-1-6)の両辺を X_a で偏微分し未知の節点座標 X_a について整理すれば, 未知数を推定する連立方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial z_k}{\partial X_a} \\ \frac{\partial z_k}{\partial X_a} \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{c} \frac{\partial z_k}{\partial X_a} \\ \frac{\partial z_k}{\partial X_a} \end{array} \right] \{X_a\} &= \left[\frac{\partial z_k}{\partial X_a} \right]^T \left\{ \bar{z}_k - \sum_b \frac{\partial z_k}{\partial X_b} X_b \right\} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{A} x &= \mathbf{A}^T y \end{aligned} \quad (6-1-7)$$

ただし, n_1 以上の指定変位数を与える必要がある.

Fig. 6-1-2に示すように, 初期値 X_{0a} を仮定して解析を開始し, 式(6-1-7)から得られる X_a が前ステップの X_a と等しくなるまで解析を繰り返す. ここで, 次の計算ステップに用いる X_a は前ステップで得られた値とする. なお, 後述の解析例では収束条件として次式を考えている.

$$|X_a^{I+1} - X_a^I| \leq 0.001 \quad (6-1-8)$$

Algorithm

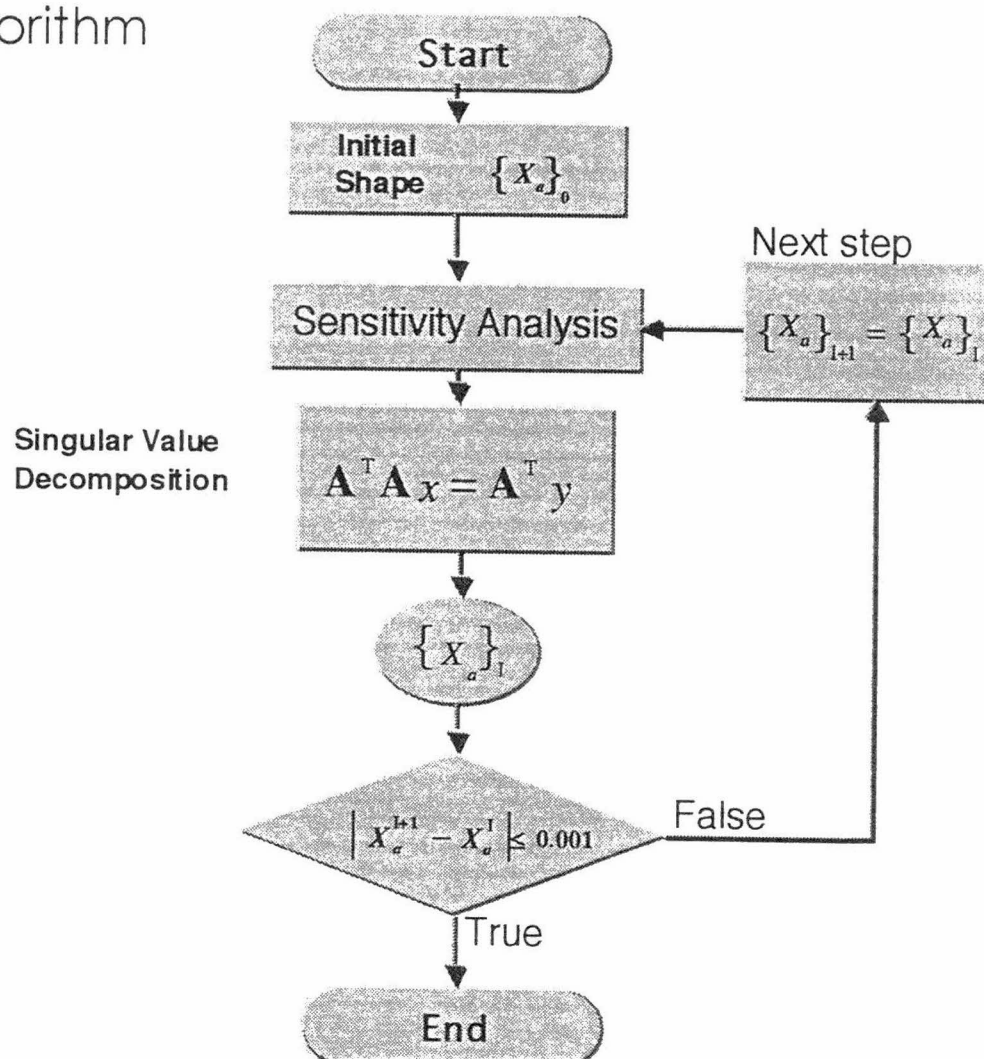


Fig. 6-1-2

解析例

1) 2部材トラス

Fig.6-1-3 に示す 2 部材トラスを考え、節点 2 の水平および鉛直変位をそれぞれ $u_2=0.0952\text{cm}$, $v_2=-0.0952\text{cm}$ として指定し、指定変位を生じうる節点 2 の座標 x_2, y_2 を逆解析する。ここでは、初期値と収束値の関係を見るため、初期値として $-100 \leq x_{02} \leq 300$, $1 \leq y_{02} \leq 200$ を考える。Fig.6-1-4 に各収束値に対する初期値をプロットしたものを示す。設定した初期値に対して 4 つの解が存在することが分るが、初期値と収束値との間に明確な相関は見られない。

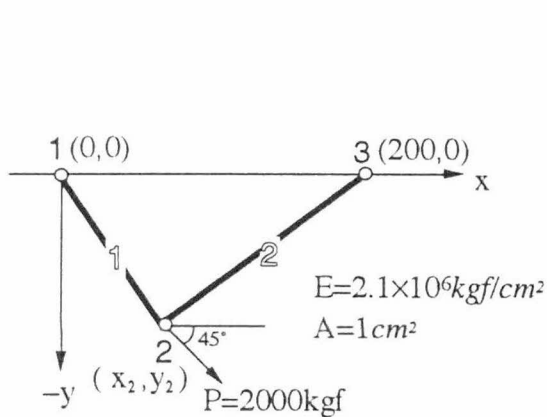


Fig.6-1-3 2部材トラス

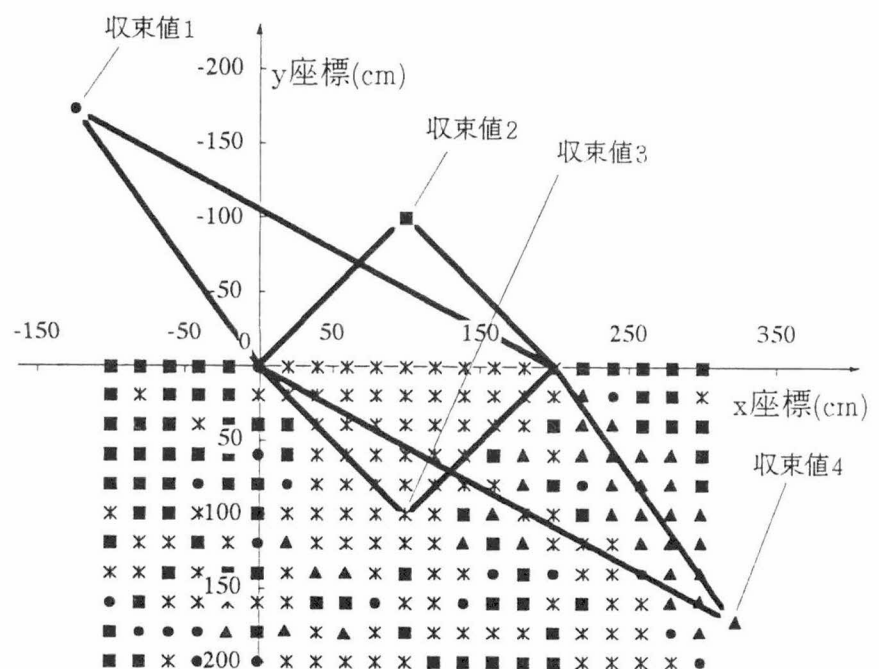


Fig.6-1-4 各収束値に対する初期値

2) 13部材トラス

Fig.6-1-5 に示す 13 部材トラスを考え、上弦節点に等しい鉛直荷重を作用させ、節点 2, 4, 7 の鉛直変位が等しいというホモロガス変形 ($v_2=v_4=v_7=-9.524\text{E-4 cm}$) を制約条件²⁾とした構造形態を逆解析する。構造および荷重条件の対称性から、全ての節点の x 方向座標値および節点 1, 2, 4, 7, 8 の y 方向座標値は固定とし、節点 3, 5, 6 の y 方向座標値を決定する問題を考える。このモデルで未知数を $y_3=y_6, y_5$ とした 2 変数問題を考えると、解は無数に存在するため³⁾、本手法においては式(6-1-7)の左辺マトリクスが特異となり、解を特定すること

ができない。そこで、 y_5 に任意の値を固定値として設定し、残りの $y_3=y_6$ を未知数とする1変数問題として扱う必要がある。座標値を共有させるには次式によって感度係数をグループ化し新たな未知数 X'_a によって解析を行う。

$$\frac{\partial z_k}{\partial X'_a} = \sum_a \frac{\partial z_k}{\partial X_a} \quad (6-1-9)$$

解析例としては、 $y_5=-120\text{cm}$ (固定)、初期値として $y_{03}=y_{06}=-150\text{cm}, -100\text{cm}, -85\text{cm}, -20\text{cm}$ とした場合の収束値および収束過程をFig.6-1-6に示す。これらの初期値では2つの収束値

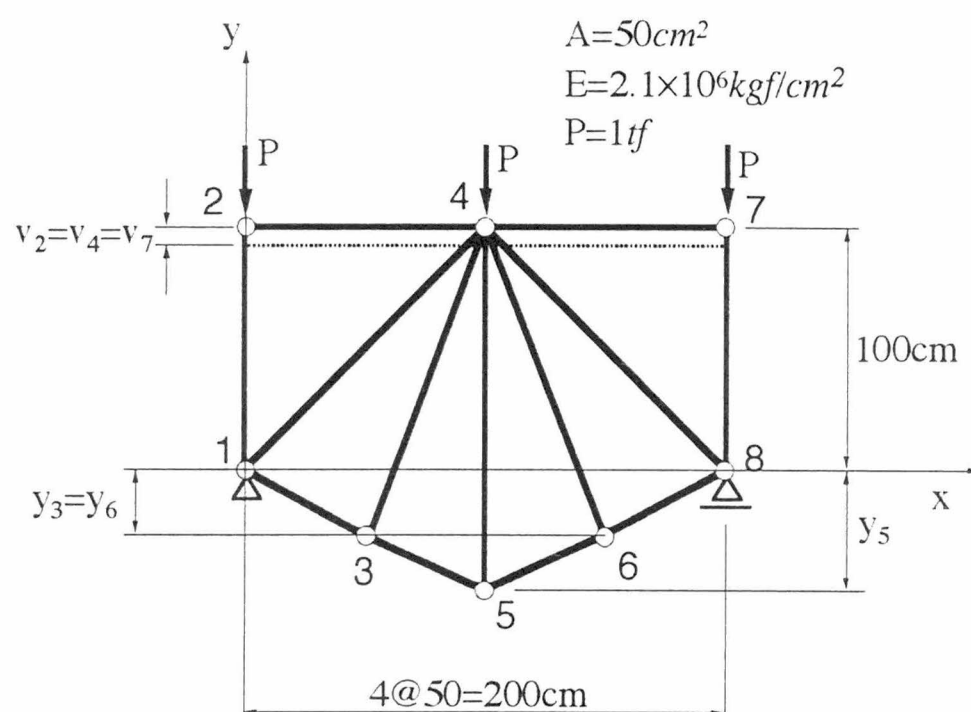


Fig.6-1-5 13部材トラス

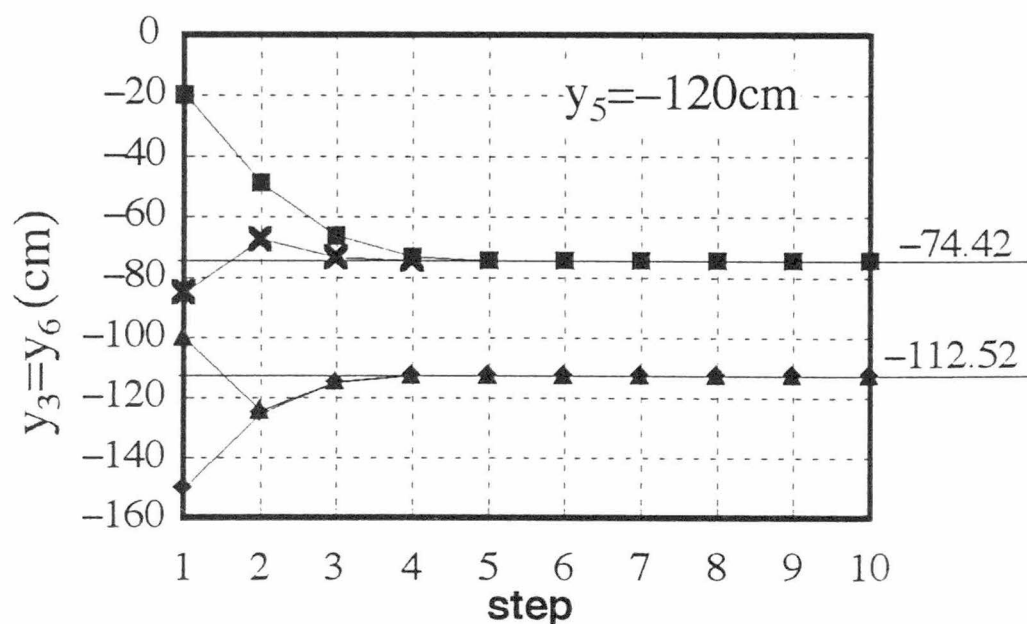
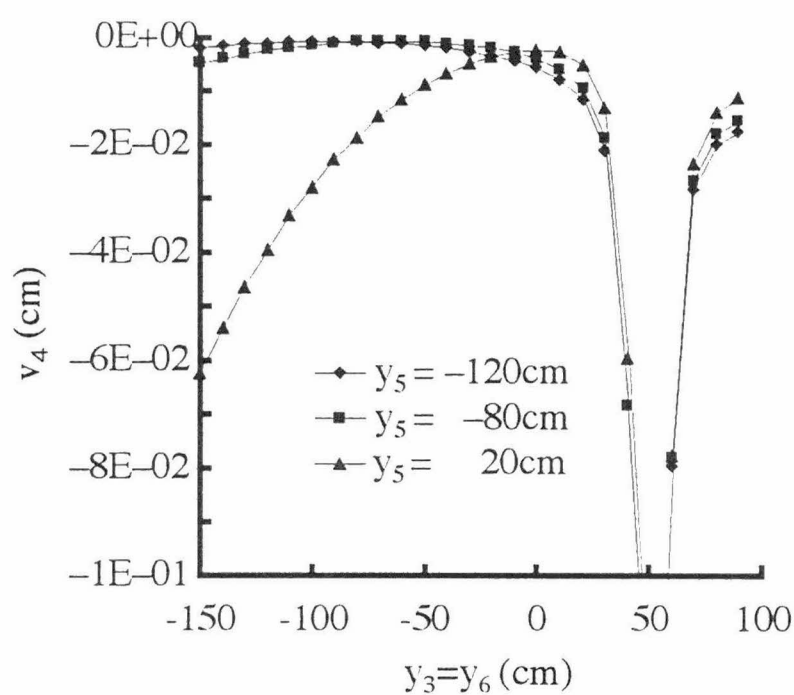
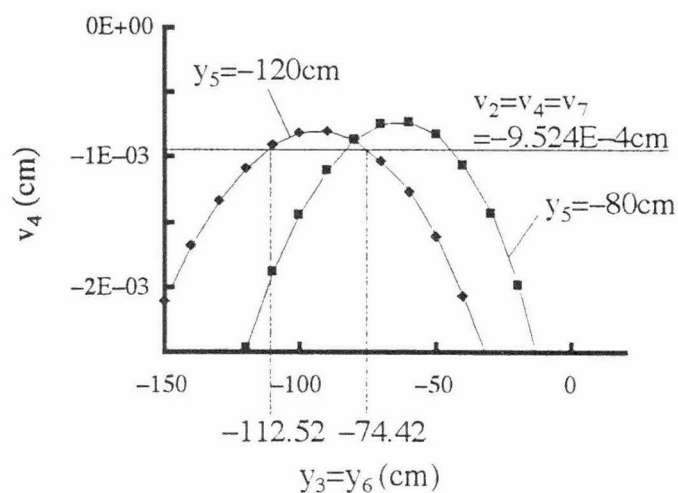


Fig.6-1-6 収束値と収束過程

が得られる。また、 y_5 をそれぞれ $-120, -80, 20\text{cm}$ と設定して、 $y_3=y_6$ の変動に対する節点4の鉛直変位 v_4 をプロットしたものをFig.6-1-7,8に示す。Fig.6-1-7からこのモデルは $y_3=y_6 > -20\text{cm}$ において非常に高い非線形性を有していることが分る。Fig.6-1-8はFig.6-1-7の一部を拡大して表示したものであるが、Fig.6-1-6で示した収束解近傍の状況が分る。

Fig.6-1-7 $y_3=y_6$ と v_4 の関係Fig.6-1-8 $y_3=y_6$ と v_4 の関係 (収束解近傍)

6-1-2. 逆解析問題の定式化 (変位モード指定による場合) ²⁰⁾

本章においても6-1-1.と同様に、トラス構造の未知の節点座標を決定する逆解析問題を考える。ここで、制約条件としては指定する節点変位をモードで取扱うものとする。感度係数特性より k 番目の節点変位は次式で表わされる。

$$z_k = \sum_{h=1}^{2NN} \frac{\partial z_k}{\partial X_h} X_h \quad (6-1-10)$$

変位モードを考えるにあたり、基準となる節点変位を z_1 とすれば変位モードは

$$\phi_k = z_k / z_1 \quad (6-1-11)$$

となる。通常の構造解析において支点など予め決定された節点座標値が条件として与えられることを考慮するため、未知数となる節点座標 X_a と、変化させずに固定しておきたい節点座標 X_b とに分けて式(6-1-10)を変形すれば

$$z_k = \sum_{a=1}^{n_1} \frac{\partial z_k}{\partial X_a} X_a + \sum_{b=1}^{n_2} \frac{\partial z_k}{\partial X_b} X_b, \quad n_1 + n_2 = 2NN \quad (6-1-12)$$

となる。式(6-1-11)に式(6-1-12)を代入すれば変位モードは次式で表わされる。

$$\phi_k = \left(\sum_a \frac{\partial z_k}{\partial X_a} X_a + \sum_b \frac{\partial z_k}{\partial X_b} X_b \right) / \left(\sum_a \frac{\partial z_1}{\partial X_a} X_a + \sum_b \frac{\partial z_1}{\partial X_b} X_b \right) \quad (6-1-13)$$

次に、最小2乗法に基づき未知の節点座標 X_a を求めるための連立方程式を作る。

$$Q = \frac{1}{2} \sum_k (\bar{\phi}_k - \phi_k)^2 \quad (k=1,2,\dots,NGiven), \quad (NGiven \geq n_1) \quad (6-1-14)$$

ここで、 $\bar{\phi}_k$ は指定変位モードである。式(6-1-13)を式(6-1-14)に代入すれば

$$Q = \frac{1}{2} \sum_k \left(\bar{\phi}_k - \frac{\sum_a \frac{\partial z_k}{\partial X_a} X_a + \sum_b \frac{\partial z_k}{\partial X_b} X_b}{\sum_a \frac{\partial z_1}{\partial X_a} X_a + \sum_b \frac{\partial z_1}{\partial X_b} X_b} \right)^2 \quad (6-1-15)$$

式(6-1-15)を最小化するには $\partial Q / \partial X_t = 0, (t=1,2,\dots,s_1)$ とすればよい。式(6-1-15)の両辺を X_t で偏微分すれば

$$\frac{\partial Q}{\partial X_t} = \sum_k \left(\bar{\phi}_k - \frac{\sum_a \frac{\partial z_k}{\partial X_a} X_a + \sum_b \frac{\partial z_k}{\partial X_b} X_b}{\sum_a \frac{\partial z_1}{\partial X_a} X_a + \sum_b \frac{\partial z_1}{\partial X_b} X_b} \right) \left(-\frac{\partial \phi_k}{\partial X_t} \right) = 0 \quad (6-1-16)$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial X_i} = \frac{1}{z_i} \left(\frac{\partial z_k}{\partial X_i} - \frac{\partial z_1}{\partial X_i} \phi_k \right) \quad (6-1-17)$$

式(9)を未知の節点座標 X_a について整理すれば、未知数を推定する連立方程式が得られる。

$$\left[\left[\frac{\partial z_k}{\partial X_a} - \frac{\partial z_1}{\partial X_a} \phi_k \right]^T \left[\frac{\partial z_k}{\partial X_a} - \frac{\partial z_1}{\partial X_a} \bar{\phi}_k \right] \right] \{X_a\} = \left[\frac{\partial z_k}{\partial X_a} - \frac{\partial z_1}{\partial X_a} \phi_k \right]^T \left\{ \left(\sum_b \frac{\partial z_1}{\partial X_b} X_b \right) \cdot \bar{\phi}_k - \sum_b \frac{\partial z_k}{\partial X_b} X_b \right\} \quad (6-1-18)$$

マトリクス表示すれば次式のようになる。

$$\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{B}^T \mathbf{y} \quad (6-1-19)$$

Fig.6-1-2 に示す手順と同様に、式(6-1-18)から得られる X_a と等しくなるまで解析を繰り返す。ここで、次の計算ステップに用いる X_{0a} は前ステップで得られた値とする。なお、後述の解析例では収束条件として次式を考えている。

$$|X_a^{I+1} - X_a^I| \leq 0.001 \quad (6-1-20)$$

解析例

1) 21 部材トラス²¹⁾

Fig.6-1-9 に示す 21 部材トラスの上弦節点 1~5 の鉛直変位を同一とするホモロガス変形を考える。したがって、

$$\bar{\phi}_k = 1.000 \quad , (k=1,2,3,4,5)$$

を指定変位モードとして、節点 7, 8, 9 の y 座標値 y_7, y_8, y_9 を逆解析する。解析に際して初

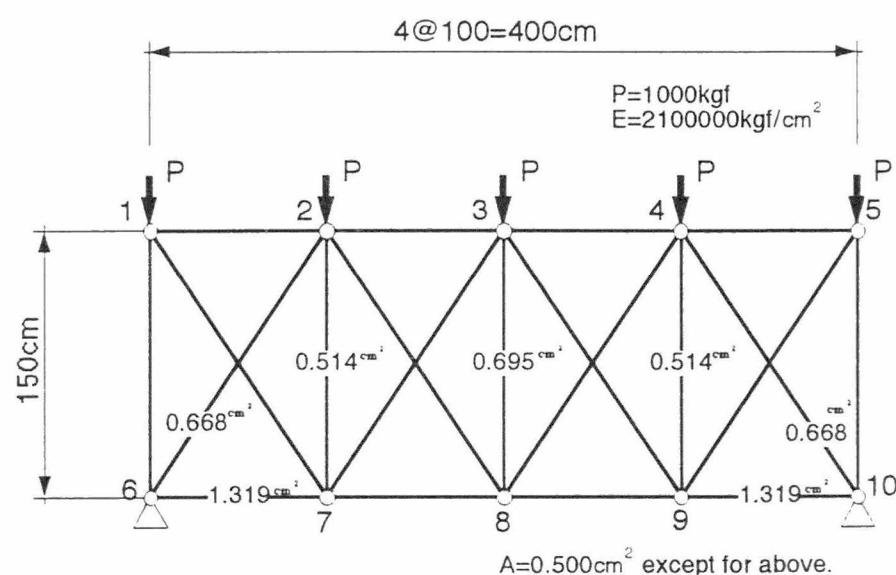


Fig.6-1-9 21 bar Truss

期値として下表の2ケースを考える。

Initial	Case.1	Case.2	Convergence
y7	80	90	97.788
y8	160	190	171.562
y9	70	90	97.788

収束状況，解形態および変形図を Fig.6-1-10,11,12 に示す。

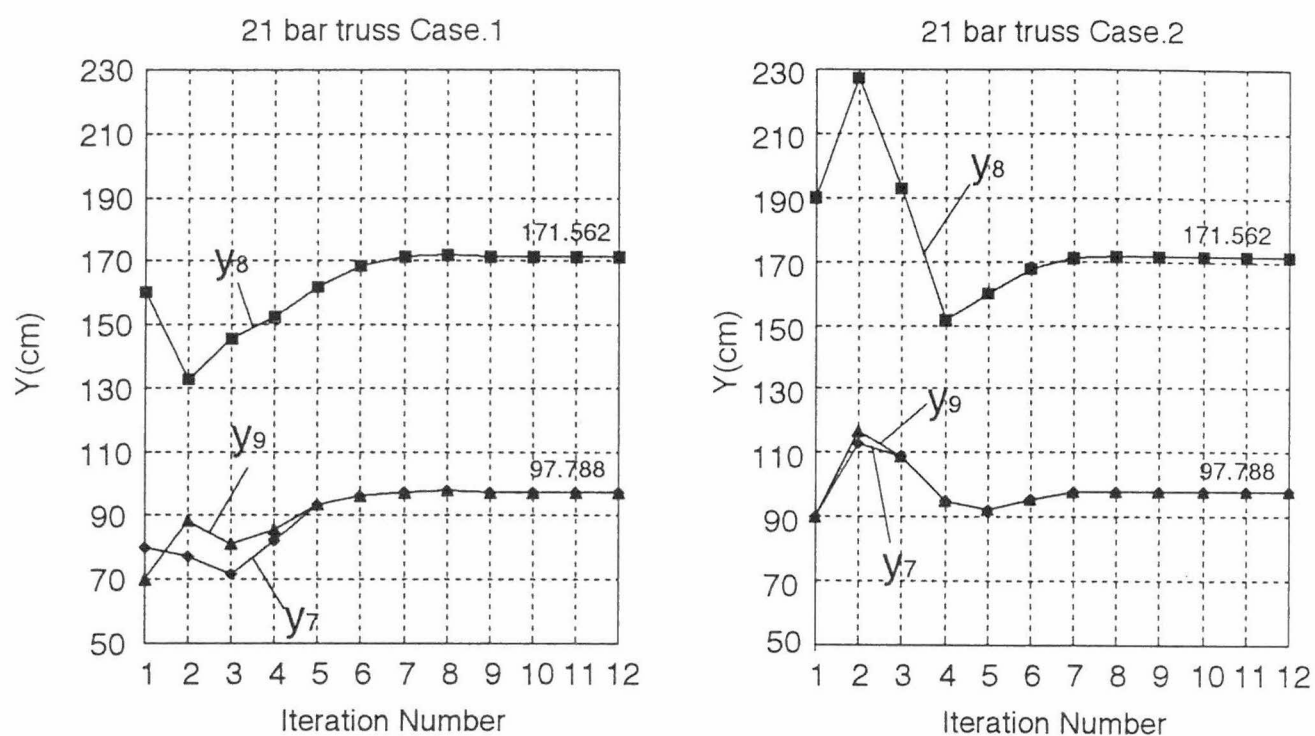


Fig.6-1-10 Variation in convergence

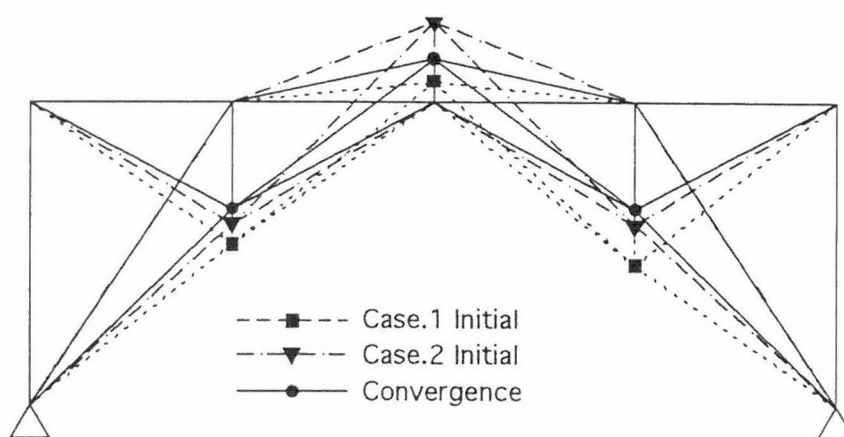


Fig.6-1-11 Initial and convergence shape

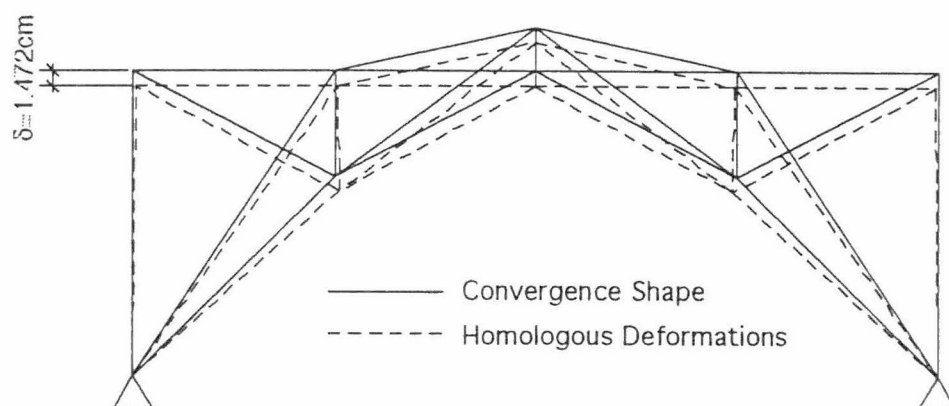


Fig.6-1-12 Homologous deformations

2) 41 部材トラス²²⁾

Fig.6-1-13 に示す 41 部材トラスを考える。放物線上 ($y=0.00024x^2+40$) に位置する上弦節点 1~11 が均一な鉛直荷重 P の作用によって、変形後も放物線を保持するというホモロガス変形を満足するトラス形態を、下弦節点の y 座標値 $Y(14), Y(15), Y(16), Y(17)$ を未知数として決定する問題である。 $Y(12)$ も未知数とすると解が無数に存在するため、 $Y(12)=25\text{cm}$ と設定して逆解析している。解形態、収束状況をそれぞれ Fig.6-1-13, 14 に示す。

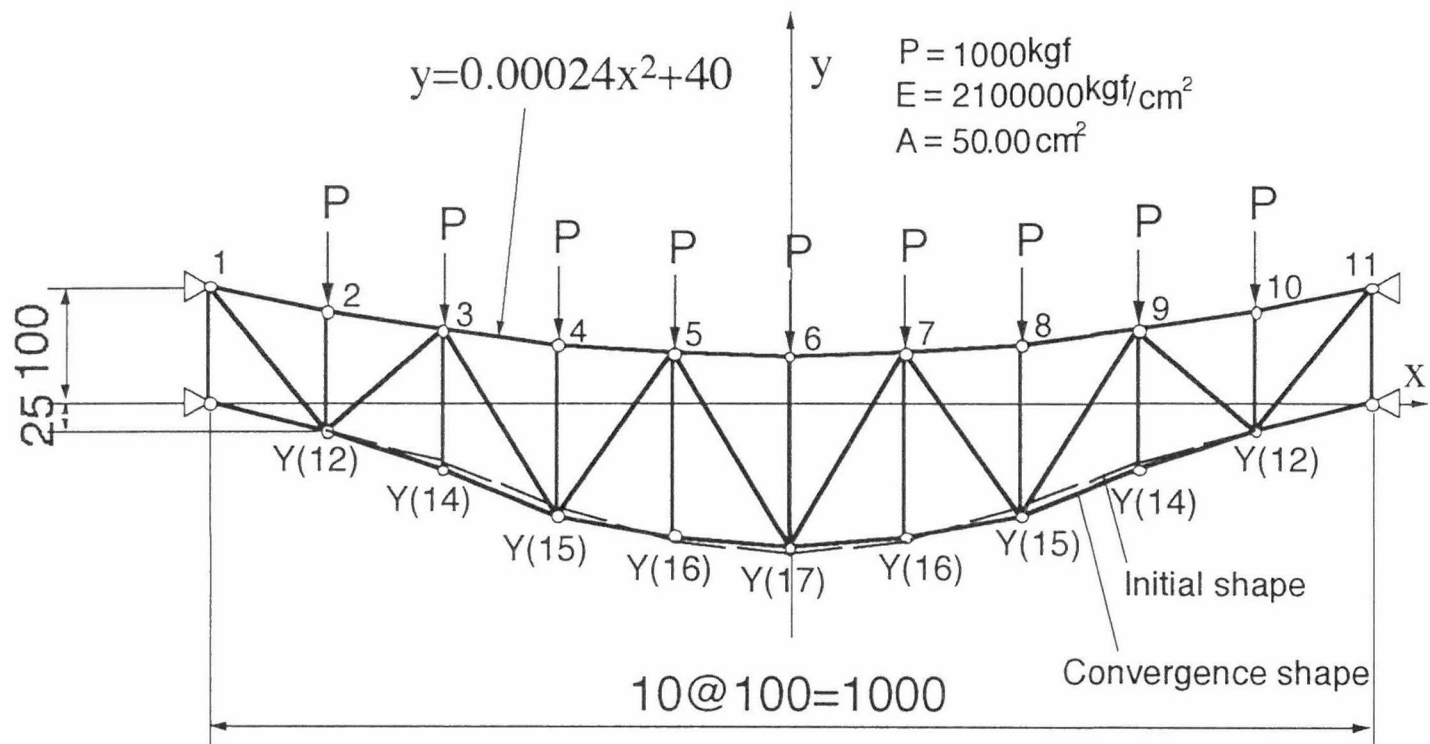


Fig.6-1-13 41 bar Truss

δy	$\bar{\phi}_k$	z_k (convergence)
2,10	1.00000	-0.17204
3,9	1.77778	-0.30582
4,8	2.33333	-0.40145
5,7	2.66667	-0.45877
6	2.77778	-0.47791

	Initial	Convergence
$Y(14)$	-50.000	-58.595
$Y(15)$	-90.000	-97.790
$Y(16)$	-120.000	-115.334
$Y(17)$	-130.000	-124.442

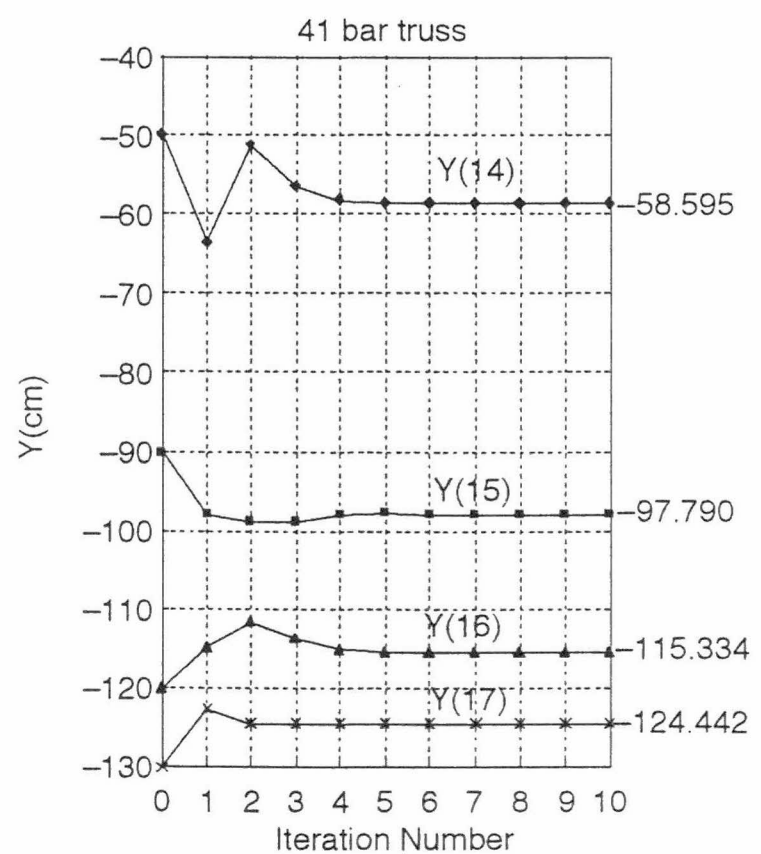


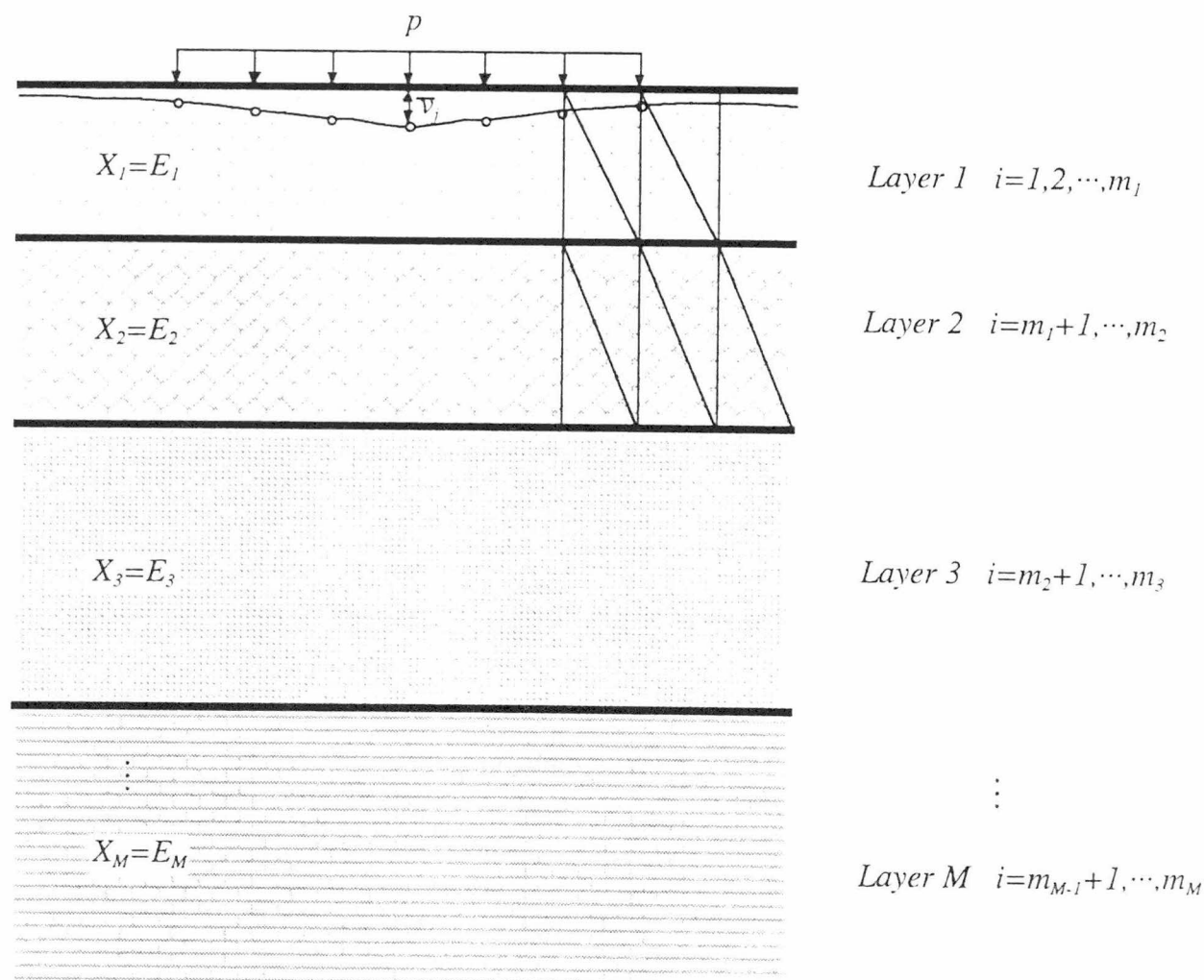
Fig.6-1-14 Variation in convergence

6-2. 弾性平面ひずみモデルの逆解析問題²³⁾²⁴⁾

本章では、3-3. および4-4. で説明してきた感度係数を利用し、構造物の未知の剛性（ヤング係数）の推定を行う。対象としている構造物の剛性は未知で、応答量からその剛性を推定する。既知の応答量は、実際的な問題としては構造物の変位量をとるのが妥当である。あとは荷重系が分かれば未知の剛性量の推定が可能となる。このような問題は、逆解析問題または同定問題として知られている。

本研究では、感度解析手法を用いた最小自乗法に基づく剛性の推定方法を提示し、その信頼性の検討を行った。以下に二次元弾性連続体を対象とした逆解析問題についての解析方法を示す。

Fig.6-2-1のように M 層の異なる地層の未知の剛性 X_s ($s=1,2,\dots,M$) を求める。既知な変位量($j=1,2,\dots,\ell$: 事前に解析して得られた変位)は、上部の測定点とする。設計変数は各層の E (ヤング係数) とする。



\bar{v}_j : Response of displacement (measurement) $j = 1, 2, \dots, \ell$

$X_s = E_s$: unknown $s = 1, 2, \dots, M$

Fig.6-2-1

6-2-1. 感度係数特性に基づく剛性推定法（提案法）

最初に初期条件（剛性や測定変位に誤差を与えた状態）で、変位や感度係数を計算で求める。感度係数は各要素で得られるが、同じ層内にある要素の、各測定点に関する感度係数を層毎に加算しグループ化する。これにより未知数の数は推定したい層数となる。

$$\frac{\partial v_j}{\partial X_1} = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{\partial v_j}{\partial X_i}, \quad \frac{\partial v_j}{\partial X_2} = \sum_{i=m_1+1}^{m_2} \frac{\partial v_j}{\partial X_i}, \quad \frac{\partial v_j}{\partial X_3} = \sum_{i=m_2+1}^{m_3} \frac{\partial v_j}{\partial X_i}, \dots \quad (j=1, 2, \dots, \ell) \quad (6-2-1)$$

式(4-4-4)の感度係数特性から変位は次式で表される。

$$v_j = - \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} X_s \quad (6-2-2)$$

最小2乗法に基づき、剛性 X_s を求めるための連立方程式をつくる。

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell} (\bar{v}_j - v_j)^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell} \left(\bar{v}_j + \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} X_s \right)^2 \quad (6-2-3)$$

式(6-2-3)において残差 Q を最小にするには $\frac{\partial Q}{\partial X_k} = 0$ になればよい。これを未知数 X_s について整理した連立方程式を解き、各層の剛性 X_s を求める。

$$\frac{\partial Q}{\partial X_k} = \sum_{j=1}^{\ell} \left(\bar{v}_j + \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} X_s \right) \left(\frac{\partial v_j}{\partial X_k} \right) = 0 \quad (6-2-4)$$

$$\sum_{s=1}^M \left(\sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \frac{\partial v_j}{\partial X_k} \right) X_s = - \sum_{j=1}^{\ell} \bar{v}_j \frac{\partial v_j}{\partial X_k} \quad (6-2-5)$$

収束条件を以下のように設定し収束判定を行う。ここで、 X_s^I は感度解析を行ったときの剛性、 $X_s^{I'}$ は式(6-2-5)を解いて得られた剛性である。

$$\left| \frac{X_s^I - X_s^{I'}}{X_s^{I'}} \right| \leq \varepsilon \quad (6-2-6)$$

収束条件を満足しない場合は、解析で得られた剛性を新たな設計変数として再解析する。

これらの過程を収束条件を満たすまで繰り返し計算する。

再解析を行う際、新たに設計変数として代入する剛性の値は以下のように決定する。

$$X_s^{I+1} = X_s^I \frac{X_s^I}{X_s^{I'}} \quad (6-2-7)$$

この新たな設計変数 X_s^{I+1} は前ステップの剛性 X_s^I を解析後の剛性 $X_s^{I'}$ で除したものを、前ステップの剛性 X_s^I に乗じたものである。

6-2-2. Gauss-Newton 法に基づく方法

提案法は Gauss-Newton 法と似た手法であるが、定式化の過程において Gauss-Newton 法で行われているような数学的近似（2次の項を無視する）が含まれない点で異なっている。そこで、比較対象として一般的な Gauss-Newton 法による逆解析問題の定式化を行っておく。後述の解析例においてこの方法との比較を行っている。

v_j に対応する測定変位を \bar{v}_j とし、測定変位に含まれる誤差を ε とすると

$$\bar{v}_j = v_j + \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \Delta X_s + \varepsilon \quad (6-2-8)$$

最小2乗法にもとづき、 ΔX_s を求めるための連立方程式をつくる。

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\ell} \left(\bar{v}_j - v_j - \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \Delta X_s \right)^2 \quad (6-2-9)$$

Q を最小にするには $\frac{\partial Q}{\partial X_k} = 0$ になればよい。

$$\frac{\partial Q}{\partial X_k} = \sum_{j=1}^{\ell} \left(\bar{v}_j - v_j - \sum_{s=1}^M \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \Delta X_s \right) \left(-\frac{\partial v_j}{\partial X_k} \right) = 0 \quad (6-2-10)$$

これを整理すると

$$\sum_{s=1}^M \left(\sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \frac{\partial v_j}{\partial X_k} \right) \Delta X_s = \sum_{j=1}^{\ell} (\bar{v}_j - v_j) \frac{\partial v_j}{\partial X_k} \quad (6-2-11)$$

上式より ΔX_s を求め、再解析を行う際新たに解析変数として代入する剛性の値は次式とし、収束判定は式(6-2-6)とする。

$$X_s^{l+1} = X_s^l + \Delta X_s^l \quad (6-2-12)$$

Algorithm

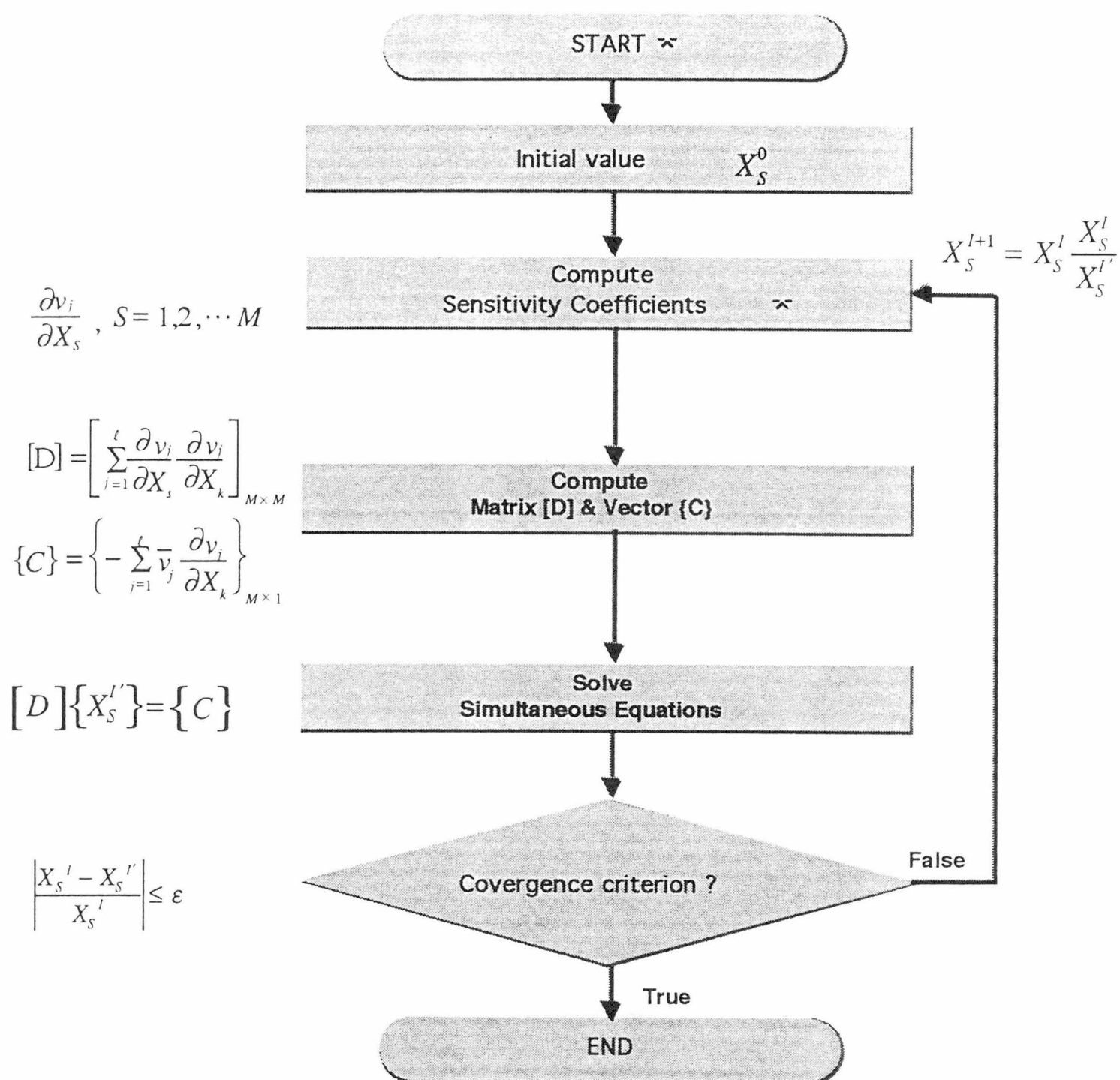


Fig.6-2-2 Back Analysis based on properties of sensitivity coefficients

6-2-3. 推定値の信頼性

収束した推定値は、与える測定データの精度に影響を受けるため測定データの信頼性に対応した推定値の信頼性を考える。収束した時点での式(6-2-5)の右辺の \bar{v}_j に単位 of 値を与えて方程式を解けば各測定変位 \bar{v}_p ($p=1,2,\dots,\ell$)の単位変動に対する推定値の変動 $\partial X_s / \partial \bar{v}_p$ が近似的に得られる。

$$\sum_{s=1}^M \left(\sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial v_j}{\partial X_s} \frac{\partial v_j}{X_k} \right) \frac{\partial X_s}{\partial \bar{v}_p} = - \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{v}_p} \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial X_k} \quad (6-2-13)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial \bar{v}_p} = \begin{cases} 1 & (j=p) \\ 0 & (j \neq p) \end{cases}$$

式(6-2-13)より得られる $\partial X_s / \partial \bar{v}_p$ に測定変位 \bar{v}_p を掛け、 X_s で除すれば推定値の信頼性の指標となる無次元化された値 C_v が得られる。

$$C_v = \frac{\partial X_s}{\partial \bar{v}_p} \frac{\bar{v}_p}{X_s} \quad (6-2-14)$$

6-2-4. 提案法とGauss-Newton法の相違点

提案法はGauss-Newton法と似ている方法であるが、いくつかの相違点がある。下表に相違点をまとめた。

	the properties	Gauss-Newton method
未知数	E_S	ΔE_S
パラメータの改良法	$X^{I+1} = X^I \frac{X^I}{X^I}$	$X^{I+1} = X^I + \Delta X^I$
定式化における数学的近似	なし	ニュートン・ラフソン法の2次微分の項を無視

6-2-5. 解析例 (地層モデル)

Fig.6-2-3に示すような3層の異なるヤング係数 (上層部: $1000\text{tf}/\text{m}^2$, 中層部: $1500\text{tf}/\text{m}^2$, 下層部: $2000\text{tf}/\text{m}^2$, これを真値とする)を持つ39節点48要素の平面歪み問題に対して, 表層部の節点5に集中鉛直荷重 $P=2.000\text{tf}$ を載荷したモデルを考える. 既知数となる測定変位は, 真値のヤング係数で通常の構造解析を行い設定する. 設定された測定変位を既知数として未知数となる各層のヤング係数を逆解析により同定する. 地層のポアソン比は $\nu=0.48$ とする. なお, 収束条件は $\varepsilon=0.01$ とする.

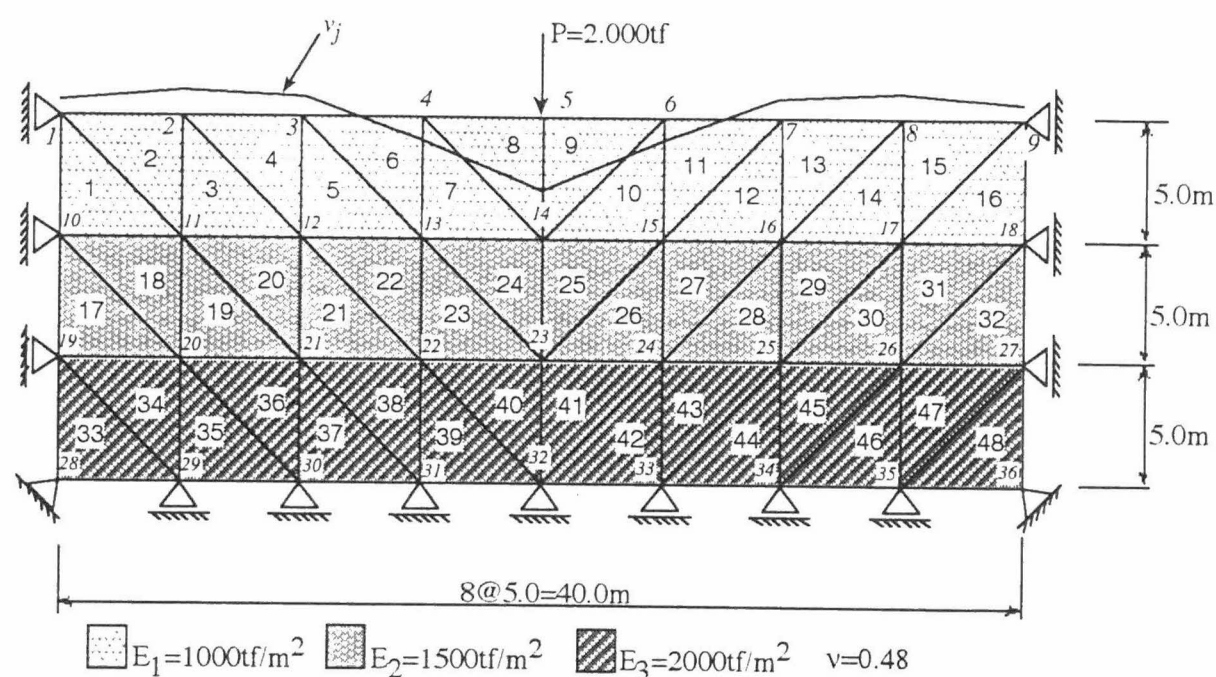


Fig.6-2-3 地層モデル

初期値の設定と収束回数, 推定精度の関係を調べるために, 収束計算に先立ちヤング係数の初期値 E_0 を真値 E_{true} に対して E_0/E_{true} で10%~190%変動させて設定し, 提案法とGauss-Newton法で逆解析を行う. この際, 測定変位には誤差を与えていない. 解析結果をFig.6-2-4に示す. この図からヤング係数の初期値が真値に近ければ二つの方法の差はほとんどみられないが, 初期値が真値に対して離れているときは提案法を用いた方がより早く推定値が得られることがわかる.

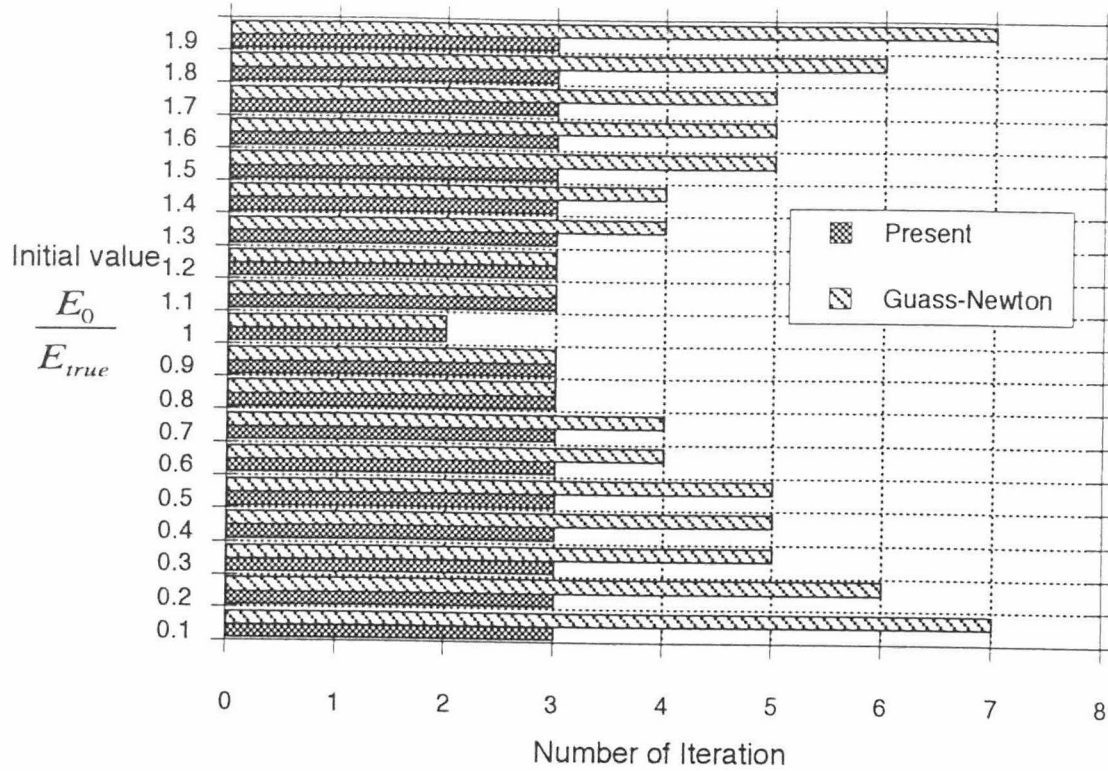


Fig.6-2-4 ヤング係数の初期設定値と収束回数の関係

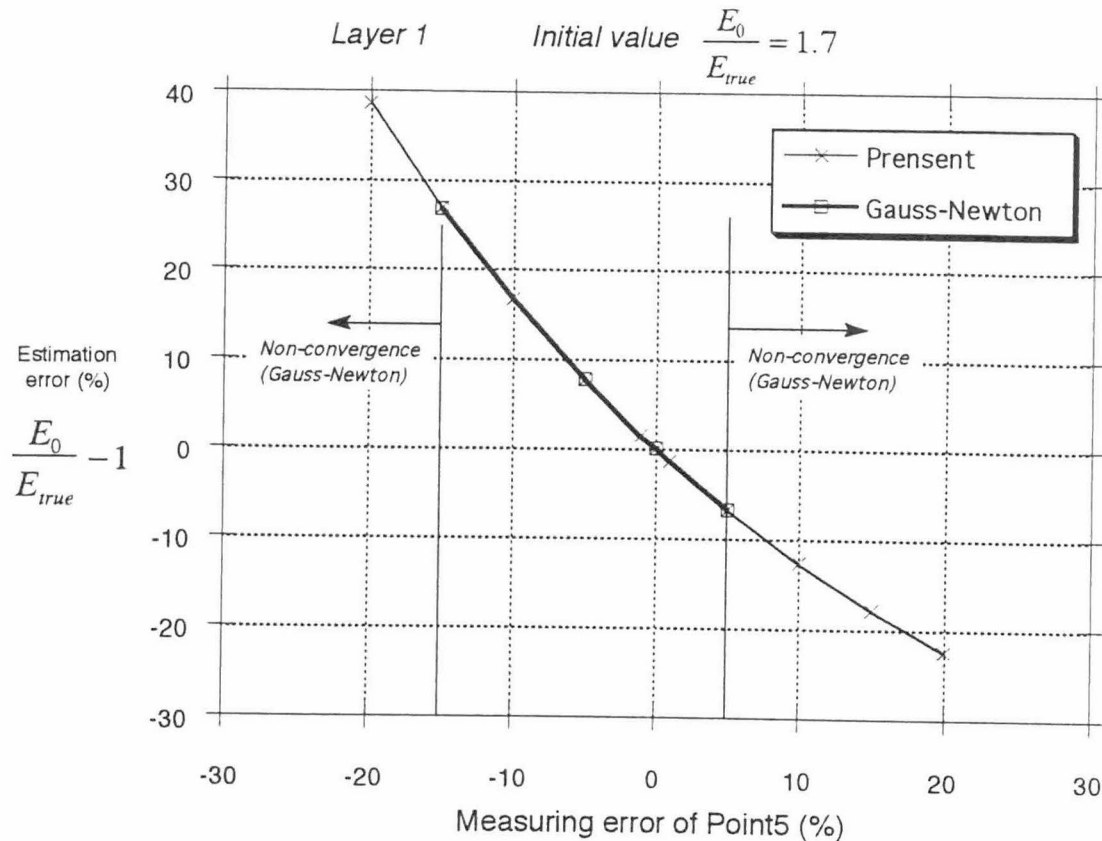


Fig.6-2-5 測定誤差（測定点5）と推定誤差の関係

次に測定誤差がある場合の推定値に生じる誤差との関係を調べるために、測定点5の測定変位に $-20\% \sim +20\%$ の誤差を与えて、提案法とGauss-Newton法で逆解析を行う。Fig.6-2-5より二つの方法ともほぼ同じ誤差を生じるが、Gauss-Newton法は測定誤差が -15% あるいは $+5\%$ よりも大きくなるとこの問題の場合、収束せずに発散してしまうことがわかる。Fig.6-2-6に測定誤差 $+1.0\%$ （測定点5）、初期値 $E_0/E_{true} = 1.7$ としたときの収束状況を示す。Gauss-Newton法よりも提案法が早く収束していることが分かる。

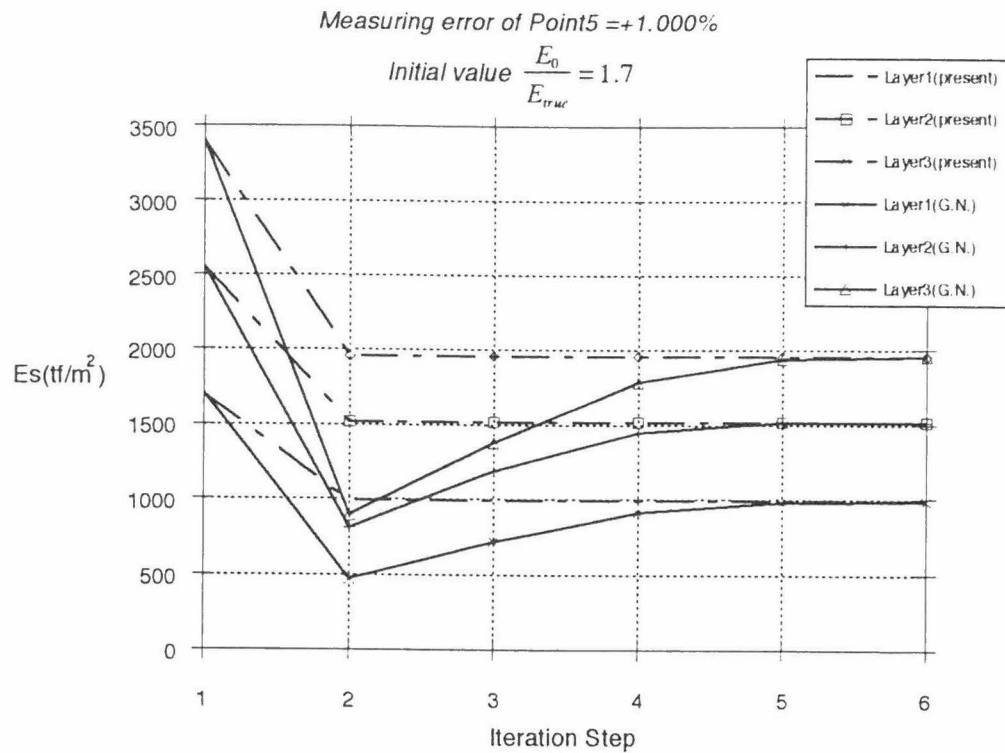


Fig.6-2-6 収束過程

次に、測定変位が誤差を持つ場合の推定結果に与える影響をTable. 6-2-1,2に示す。ここではヤング係数の初期値を170%，各測定点に-1%の誤差を与えた場合を考えている。Table. 6-2-1は真値に対する推定誤差を示したものであり、Table. 6-2-2は、式(6-2-14)で得られる推定値の信頼性を各測定点毎に示したものである。（Table. 6-2-1,2共に提案法で解析したものである。）この信頼値に測定データの誤差を掛けたものが、推定されたヤング係数の持つ誤差を表している。例えば測定点5に-1.00%の誤差が与えられれば、推定された第1層目のヤング係数の誤差は

$$C \times (-0.01) = -1.43 \times (-0.01) = 0.0143(1.43\%) \approx 1.46\%$$

となり、Table. 6-2-1 に示した推定誤差にほぼ一致する。

Table. 6-2-1 測定位置と推定精度の関係

測定点	1	2	3	4	5
上層部	-0.04	-0.08	-0.08	-0.25	1.46
中層部	-0.24	0.30	1.12	0.78	-0.94
下層部	0.93	0.12	-2.11	-0.11	2.22

Table. 6-2-2 推定値の信頼性

測定点	1	2	3	4	5
上層部	-0.04	-0.08	-0.07	-0.25	1.43
中層部	-0.24	0.30	1.10	0.76	-0.94
下層部	0.91	0.12	-2.13	-0.11	2.15

7. トラス構造物の最小重量設計と最大剛性設計

7. トラス構造物の最小重量設計と最大剛性設計

本章では、4-1-1. 断面定数に関する感度係数特性を利用したトラス構造物の最適設計問題について述べる。トラス構造物の最適設計問題において一般に設計変数としては部材の断面積あるいはその逆数が用いられる。通常、部材断面積を設計変数とした場合、応力制約条件や変位制約条件は非線形な形で表現されるが、感度係数特性によりこれらの非線形式を線形式に置換することが可能である。この線形化された制約条件を用いてLP (Linear Programming) によって最適化を行うものである。逐次的にLPを繰り返す点で提案法はSLPと似ているが、 ΔX に対する非負条件などの制約が少ないという特徴を持っている。

ここで取り扱う最適設計問題は、静的弾性トラス構造の最小重量設計および最大剛性設計を対象としている。最小重量設計では感度係数特性に基づく方法(提案法)、大久保等の方法²⁸⁾(エネルギー原理に基づく挙動の感度係数を用いない最適設計法)、従来からの逐次線形計画法(SLP)の3つの手法でそれぞれ、10部材トラスの最適設計を行い、比較検討を行う。最大剛性設計では、最小重量設計で得られた最適断面による重量を与えて、同じ制約条件のもとで最大剛性設計を行い、2つの設計法の等価性について検証している。

7-1. トラス構造の最大剛性設計と最小重量設計^{26) 27)}

構造設計の本質は、最大の効果を上げるように最も効率的に構造物の幾何学的諸元を決定することにある。ある荷重条件のもとで最大の剛性が得られるように最も効果的に幾何学形状を決めるという側面が重要であると考えられる。これは、一定費用のもとで最大の効果を得るための意志決定の手続きの一種であり、構造設計ではこれを最大剛性設計(maximum stiffness design)と呼んでいる。

最大剛性設計の一般的定式化は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & x_i \\ & Z = \delta(x_i) \quad \rightarrow \min \end{aligned} \quad (7-1)$$

$$\text{Subject to} \quad W(x_i, \rho, \ell_i) = \text{const} \quad (7-2a)$$

$$\sigma_a^U \geq \sigma_i \geq \sigma_a^L \quad i = 1, \dots, m \quad (7-2b)$$

$$r_a^U \geq r_j \geq r_a^L \quad j = 1, \dots, n \quad (7-2c)$$

ここで、 δ は荷重方向の変位であり、 W は構造物の総重量、 ρ は単位体積重量、 ℓ_i は*i*番目の部材長、 σ_i は*i*番目の部材応力、 σ_a^U と σ_a^L は許容応力度の上限値と下限値、 r_j は*j*番目の自由度の変位、 r_a^U と r_a^L は変位の上限値と下限値を示している。剛性を最大にする構造を求めることは、荷重点の荷重方向変位を最小にすることと等価であるから最大剛性設計問題は以上のように定式化できることになる。また、トラス構造の全ひずみエネルギーは、各部材の発生応力、ひずみ ε_i を用いると

$$U = \frac{1}{2} \int_v (\sigma_1 \varepsilon_1 + \dots + \sigma_m \varepsilon_m) dv \quad (7-3)$$

で与えられるが、これは

$$U = \frac{1}{2} P \delta \quad (7-4)$$

とも書けるから、荷重 $P = \text{const.}$ のもとでは δ を最小にすることは U を最小にすることとも等価となる。つまり構造物の最大剛性設計問題は、その構造の全ひずみエネルギーを最小のすることでも定式化可能であり、分布荷重を受ける構造物など明確に目的関数としての変位を規定できない構造に対しては、式(7-3)で用いるような定式化の方法が採用される。

最大剛性設計とは逆に、ある荷重条件下において構造物の使用重量が最小となるように最も効果的に構造物の幾何形状を決める設計がある。一般に構造物のコストは材料の重量に比例することが多いので、与えられた形状、荷重条件のもとで応力、変位といった制約条件を満足する最小の重量を求めることがコストの軽減につながる。このような問題を最小重量設計(minimum weight design)という。

最小重量設計の一般的定式化は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & x_i \\ & Z = W(x_i) = \sum_{i=1}^m \rho \ell_i x_i \quad \rightarrow \min \end{aligned} \quad (7-5)$$

$$\text{Subject to} \quad \sigma_a^U \geq \sigma_i \geq \sigma_a^L \quad i = 1, \dots, m \quad (7-6a)$$

$$r_a^U \geq r_j \geq r_a^L \quad j = 1, \dots, n \quad (7-6b)$$

7-2. 感度係数特性を用いた最適化問題の定式化

3-1-1. の感度解析によって得られる k 番目の設計点における任意の応答変位の感度係数は

$$\frac{\partial r^k}{\partial X_i} = - \left([K]^{-1} \left[\frac{\partial K}{\partial X_i} \right] \{r\} \right)^k \quad (7-7)$$

となる。ここで設計変数 X_i が δX_i だけ微小変動したときの $k+1$ 番目の設計点における応答変位の推定式は次式となる。

$$r^k + \sum_{i=1}^m \frac{\partial r^k}{\partial X_i} \delta X_i = r^{k+1} \quad (7-8)$$

$\delta X_i = X_i^{k+1} - X_i^k$ と表されるので、式(7-8)に代入して

$$\begin{aligned} r^k + \sum_{i=1}^m \frac{\partial r^k}{\partial X_i} (X_i^{k+1} - X_i^k) &= r^{k+1} \\ r^k + \sum_{i=1}^m \frac{\partial r^k}{\partial X_i} X_i^{k+1} - \sum_{i=1}^m \frac{\partial r^k}{\partial X_i} X_i^k &= r^{k+1} \end{aligned} \quad (7-9)$$

となる。ここで、感度係数特性は設計変数 X_i が断面積 A_i の場合

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial r^k}{\partial X_i} \frac{X_i}{r^k} = -1 \quad \therefore - \sum_{i=1}^m \frac{\partial r^k}{\partial X_i} X_i = r^k \quad (7-10)$$

であるから、式(7-9)は

$$\begin{aligned} r^k + \sum_{i=1}^m \frac{\partial r^k}{\partial X_i} X_i^{k+1} + r^k &= r^{k+1} \\ 2r^k + \sum_{i=1}^m \frac{\partial r^k}{\partial X_i} X_i^{k+1} &= r^{k+1} \end{aligned} \quad (7-11)$$

となる。また、応力の感度係数特性による $k+1$ 番目の任意の応力の推定式は次のように表される。

$$2\sigma^k + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \sigma^k}{\partial X_i} X_i^{k+1} = \sigma^{k+1} \quad (7-12)$$

(1) 最小重量設計の定式化

一般に式(7-5), (7-6)で表される最小重量設計問題を感度係数特性を用いて次のように定式化する。

$$W = \sum_{i=1}^m \rho \ell_i A_i \quad \rightarrow \min \quad (7-13)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{i=1}^m \frac{\partial r^k}{\partial A_i} A_i \leq r_a - 2r^k \quad (7-14a)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \sigma^k}{\partial A_i} A_i \leq \sigma_a - 2\sigma^k \quad (7-14b)$$

(2) 最大剛性設計問題の定式化

一般性を考慮して、目的関数としてトラス構造の全ひずみエネルギーをFig.7-1から考える。

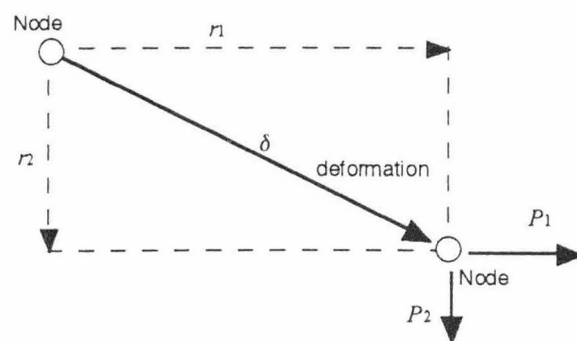


Fig.7-1 荷重による節点Pの移動

トラス構造の全ひずみエネルギー U は

$$U = \sum_{i=1}^m \frac{N_i^2}{2EA_i} \ell_i \quad (7-15)$$

N_i は i 部材の部材力を示す。構造物の全ひずみエネルギー U は外力仕事と等しくなるから、

Fig.7-1に示す節点における外力の仕事は

$$\text{Work} = \frac{P\delta}{2} = \frac{1}{2}(P_1 r_1 + P_2 r_2) \quad (7-16)$$

これはひずみエネルギーに等しいわけであるから、

$$U = \frac{1}{2}(P_1 r_1 + P_2 r_2) \quad (7-17)$$

ここで、感度係数特性より

$$-\sum_{i=1}^m \frac{\partial r_1}{\partial A_i} A_i = r_1 \quad (7-18)$$

$$-\sum_{i=1}^m \frac{\partial r_2}{\partial A_i} A_i = r_2 \quad (7-19)$$

を式(7-17)に代入すると次式となる。

$$U = -\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial r_1}{\partial A_i} P_1 A_i + \sum_{i=1}^m \frac{\partial r_2}{\partial A_i} P_2 A_i \right) \quad (7-20)$$

次にモデル全体の節点荷重 P_j を $j=1,2,\dots,n$ まで総和をとることにより、全外力仕事は次式となる。

$$U = -\sum_{j=1}^n \frac{P_j}{2} \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial r_j}{\partial A_i} A_i \right) \quad (7-21)$$

以上により、最大剛性設計とは全ひずみエネルギーの最小化を意味するから、定式化は次のようになる。

$$U = -\sum_{j=1}^n \frac{P_j}{2} \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial r_j}{\partial A_i} A_i \right) \rightarrow \min \quad (7-22)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial r^k}{\partial A_i} A_i \leq r_a - 2r^k \quad (7-23a)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \sigma^k}{\partial A_i} A_i \leq \sigma_a - 2\sigma^k \quad (7-23b)$$

$$W = \sum_{i=1}^m \rho \ell_i A_i \quad (7-23c)$$

本来ならば応力制約、変位制約などの制約条件及びひずみエネルギー式は設計変数の非線形式で表されるものを、感度係数特性を用いることによってこれらの非線形式を線形式で表すことが可能である、この定式化によって数理計画法として線形計画法(Linear Programming)を用いることができる。

(3) 逆変数による定式化

式(7-24)で定義される逆変数 $\{Y\}$ を独立変数とする空間での最適化は、通常、制約関数に対する高精度の近似が可能である。感度係数に対しても逆変数によるものの方が精度が良いことが知られている。上記の最適設計問題に対して逆変数による定式化を行う。

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/X_1 \\ \vdots \\ 1/X_m \end{Bmatrix} \quad (7-24)$$

設計変数が断面積の逆変数の場合の応答感度係数特性は変位、応力について次のようになる。

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial r^k}{\partial Y_i} \frac{Y_i}{r^k} = 1 \quad (7-25a)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \sigma^k}{\partial Y_i} \frac{Y_i}{\sigma^k} = 1 \quad (7-25b)$$

これを式(7-9)に代入すると

$$r^k + \sum_{i=1}^m \frac{\partial r^k}{\partial Y_i} Y_i^{k+1} - r^k = r^{k+1} \quad (7-26a)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial r^k}{\partial Y_i} Y_i^{k+1} = r^{k+1} \quad (7-26b)$$

$$\sigma^k + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \sigma^k}{\partial Y_i} Y_i^{k+1} - \sigma^k = \sigma^{k+1} \quad (7-27a)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \sigma^k}{\partial Y_i} Y_i^{k+1} = \sigma^{k+1} \quad (7-27b)$$

となる。よって応力、変位制約条件式は

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial r^k}{\partial R_{Ai}} R_{Ai} \leq r_a \quad (7-28a)$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial \sigma^k}{\partial R_{Ai}} R_{Ai} \leq \sigma_a \quad (7-28b)$$

となる。ここで R_{Ai} は断面積の逆変数を意味する。

逆変数による定式化では重量関数が断面積に対して非線形となる。そこで逆変数による重量関数の線形化を行う。重量関数は

$$W = \sum_{i=1}^m \rho \ell_i X_i \quad (7-29)$$

と表せる。これを逆変数で偏微分すると

$$\frac{\partial W}{\partial Y_i} = -\rho \ell_i X_i^2 \quad (7-30)$$

となり逆変数による重量関数は

$$W' = \sum_{i=1}^m \frac{\partial W}{\partial Y_i} Y_i = -\sum_{i=1}^m \rho \ell_i X_i^2 Y_i \quad (7-31)$$

となる。これは次に示すように設計変数そのままの定式化と等価であるが、正負が逆になっている。これは、設計変数の変動は逆変数では分母の変動になるので例えば、最小化を目的とするならば逆変数としては最大化にしていくことになるからである。

$$W' = -\sum_{i=1}^m \frac{\partial W}{\partial Y_i} Y_i = \sum_{i=1}^m \rho \ell_i X_i^2 \frac{1}{X_i} = \sum_{i=1}^m \rho \ell_i X_i \quad (7-32)$$

7-3. スケーリング

一般に式(7-13), (7-14)の線形近似問題は、原問題のつり合い条件を満足しない。そこで設計変数のスケーリングを行って、つり合い条件を満たすようにする。

本研究で行っているスケーリングは許容値を用い設計変数を修正するものである。最適設計では許容値を上回ったり、極端に下回ったものを適度な値に戻せばよい。その方法として、計算回数 k 番目における設計変数 X_i^k によって得られた応答応力を σ_i^k 、変位を r_i^k とすると、許容値 σ_a, r_a に対する不足または余裕の割合は

$$\frac{\sigma_i^k}{\sigma_a} = \Lambda_i^k \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7-33)$$

$$\frac{r_j^k}{r_a} = \Lambda_j^k \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (7-34)$$

と表すことができ Λ_i^k, Λ_j^k をスケーリング係数と呼ぶ。 $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ の全体のうちスケーリング係数の最大値を Λ^k とする。そこで応力や変位の関係式は設計変数である部材断面積の陽な形であることに着目する。

$$X_i^{k+1} = X_i^k \times \Lambda^k \quad (7-35)$$

式(7-35)のように、スケーリング係数 Λ^k と設計変数の積 X_i^{k+1} を用いて再び最適設計を行えば、収束を早めることが可能である。

active な制約条件が応力制約である場合、全応力設計がそのまま最適設計となることが知られていることから、このスケーリング方法は大変効果的である。しかし active な制約条件が変位制約である場合、着目している応答変位に影響を与える設計変数を特定する事ができない。したがってかえって収束を遅らせてしまうことになりかねない。

スケーリングについては他にも様々な方法が提案されているが、全ての問題に有効な非線形計画法が無いように、確実な方法が確立できていないわけではなく、また期待すべきでもない。しかし、問題によってはその収束性を大幅に改善する1つの選択肢としてその持つ価値は大きい。

以上に述べた最適設計の流れをFig.7-2に示す。図からわかるようにMove Limitを一定にして目的関数の最小化を繰り返し(k -loop)、その過程で目的関数が $k-1$ 回目の目的関数よりも大きくなった時点で、Move Limitを減少させて、1回前の設計変数を初期値としてさらに解析を繰り返していく(K -loop)方法を用いている。Move Limitの減少方法の設定によっては最小化の効率に影響がでる。

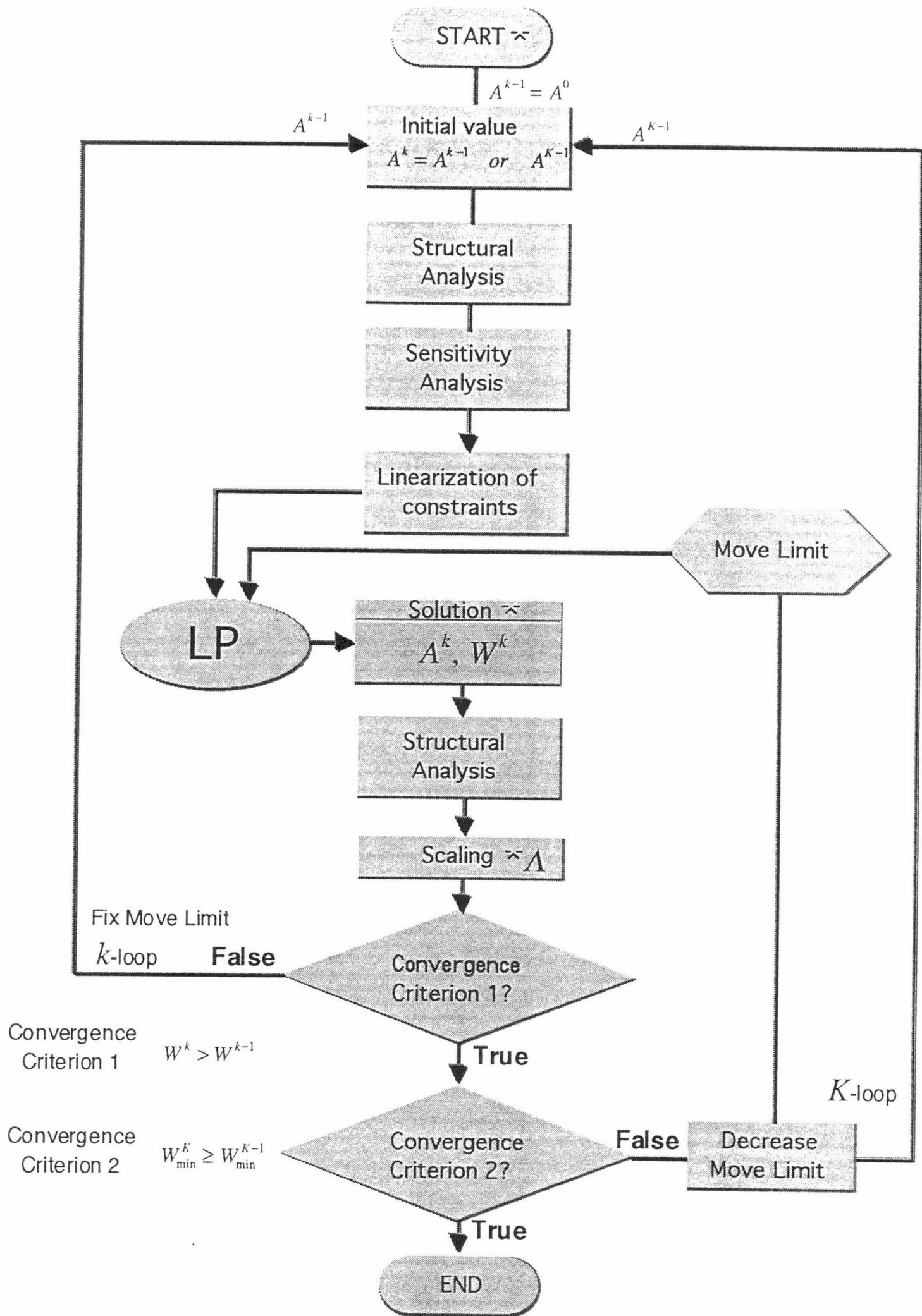


Fig.7-2 最小重量設計の計算の流れ

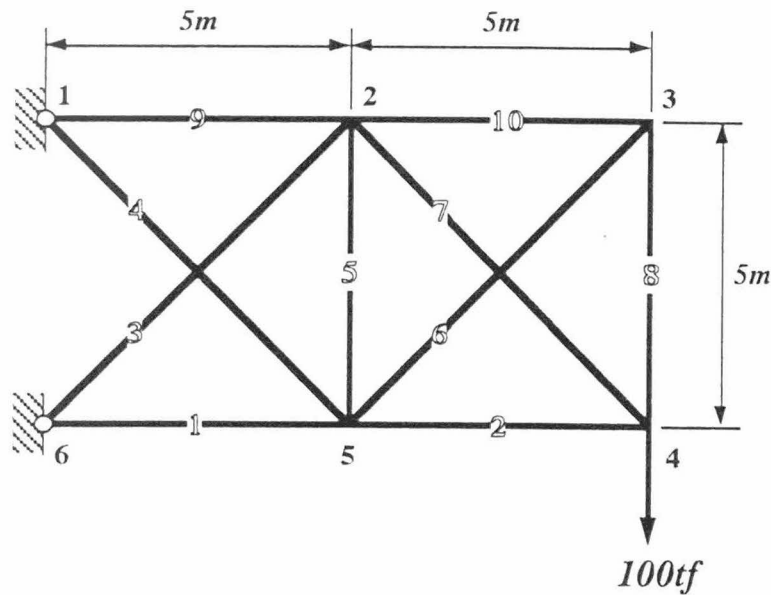
7-4. 提案法とSLPとの相違点

これまで述べてきた提案法による最適化手法は、従来からあるSLP（逐次線形計画法）と似た手法であるが、いくつかの相違点がある。下表にその相違点をまとめた。LPは非負条件を満足するような変数を取り扱う必要があるが、提案法は設計変数そのものをLPにおける未知数としていることから非負条件の問題はないが、SLPは設計変数の変動量を未知数としていることから変数が非負条件を満足しているか常に注意しながら計算を行う必要があるため煩雑である。

Optimal design based on ...		
	the properties	conventional SLP
LPにおける未知数	X^{k+1}	$\Delta X = X^{k+1} - X^k$
制約条件の線形化	$\sum_{i=1}^m \frac{\partial g^k}{\partial X_i} X_i^{k+1} \leq g_a - 2g^k$	$\sum_{i=1}^m \frac{\partial g^k}{\partial X_i} \Delta X_i \leq g_a - g^k$
非負条件の問題	なし	存在する

7-5. 解析例

これまで述べてきた最適設計問題をFig.7-3に示す10部材トラスに対して数値解析を行う。



$$E = 2.0 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\rho = 7.85 \times 10^{-3} \text{ kgf/cm}^3$$

$$\sigma_a = 3000 \text{ kgf/cm}^2$$

$$A^L = 1.0 \text{ cm}^2$$

$$\lambda_a = 3.0 \text{ cm}$$

Fig.7-3 10 bar Truss

(1) 最小重量設計

初期値を $A^0=100\text{cm}^2$ として応力制約と変位制約の両方をかけた場合を考える。Move Limitは10%,9%,5%,1%,0.5%,0.1%で減少させた。比較対象として、従来からのSLP法（方法Ⅱ）と大久保等の提案している挙動の感度係数を用いない方法²⁸⁾（方法Ⅲ）を取り上げそれぞれの手法における計算実行回数、最適解を比較一覧したものがTable.7-1である。

Table.7-1

	方法Ⅰ（提案法）		方法Ⅱ（SLP法）		方法Ⅲ（大久保論文）	
変位制限 (cm)	3.0		3.0		3.0	
許容応力度 (kgf/cm ²)	3000		3000		3000	
初期値 (cm ²)	100.0		100.0		100.0	
設計変数	A		A		A, σ , λ	
部材番号	断面積 (cm ²)	応力度 (kgf/cm ²)	断面積 (cm ²)	応力度 (kgf/cm ²)	断面積 (cm ²)	応力度 (kgf/cm ²)
1	67.3656	-1499.75	68.2000	1481.00	67.0000	1507.00
2	66.0228	-1500.25	66.9000	1481.00	65.8000	1506.00
3	93.3485	-1499.36	92.9000	1506.00	95.0000	1474.00
4	1.0000	1458.47	1.0000		1.0000	
5	1.0000	-81.9984	1.0000		1.0000	
6	1.0000	-1342.51	1.0000		1.0000	
7	93.3437	1500.68	92.1000	1520.00	93.5000	1497.00
8	1.0000	949.297	1.0000		1.0000	
9	132.649	1499.97	131.1000	1518.00	130.7000	1522.00
10	1.0000	949.297	1.0000		1.0000	
最小重量 (kgf)	2103.36		2094.9		2103.5	
計算実行回数 (ITE)	92		253		168	

表より、収束に要する計算実行回数は提案法が92回と最も少ない。大久保論文の表-3

表より，収束に要する計算実行回数は提案法が92回と最も少ない．大久保論文の表-3

よりITE 1回あたりのCPU Time(s)は

SLP法 12.5(s)/253(ITE) → 0.049(s)/ITE

方法Ⅲ 6.7(s)/168(ITE) → 0.040(s)/ITE

となっており，SLP法に比べて方法ⅢはITE 1回あたりの計算時間が約1.25倍高速であることがわかる．提案法（方法Ⅰ）はSLP法と計算の手順が同じであるため，提案法に比べても方法ⅢはITE 1回あたりの計算時間が約1.25倍高速ということになる．したがって，提案法の92回をこの比率で表せば， $92(\text{ITE}) \times 1.25 = 115(\text{ITE})$ となり，提案法が他の手法に比べて効率的であることがわかる．

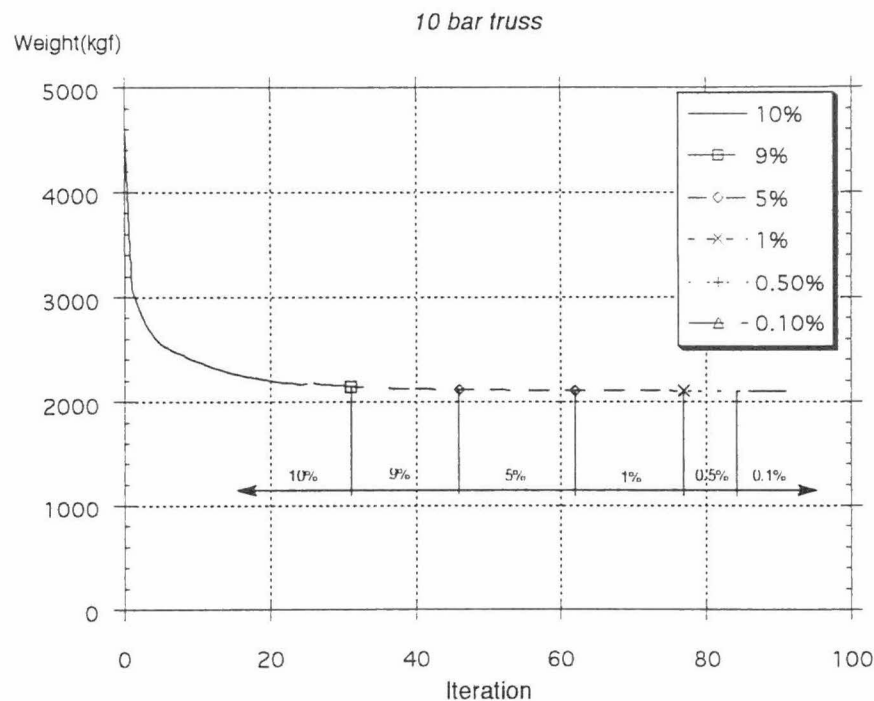


Fig.7-4 目的関数（重量）の収束状況

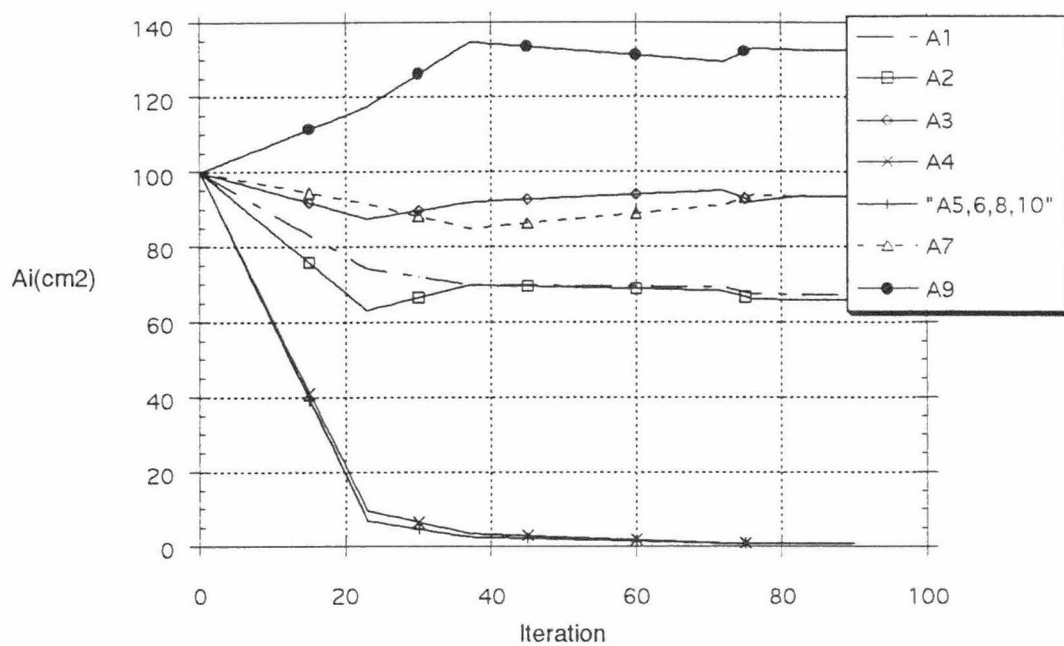


Fig.7-5 設計変数（部材断面積）の収束状況

次に提案法における，目的関数と設計変数の収束状況をFig.7-4,5に示す．

(2) 最大剛性設計

前述の最小重量設計で得られた重量を用いて最大剛性設計を行ってみると，Table.7-2に示すような結果を得た．同じ制約条件によって決まった最小重量設計の解が最大剛性設計の解と一致していることがわかる．

Table.7-2 最大剛性設計結果

最大剛性設計	
W(重量) = 2103.36(kgf)	
部材番号	断面積 (cm ²)
1	67.3656
2	66.0228
3	93.3485
4	1.0000
5	1.0000
6	1.0000
7	93.3437
8	1.0000
9	132.649
10	1.0000

8. 結 論

8. 結 論

本論文では，構造システムの感度解析理論に着目し感度解析手法について再度見直しを行った結果，感度次数の各次数で無次元化された応答感度係数の総和が特性値を有し，その値は選択した感度変数 X と対象とする応答 g により異なるという「感度係数特性」を導いた．この特性により応答などの制約条件が感度変数に関する線形式で表現することができ，最適設計問題において線形計画法を用いることができるなどの応用が考えられる．以下にその結果を総括する．

Table.8-1 Characteristic value $C_{order1} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{X_i}{g}$

System	Behavior	Sensitivity variable	Characteristic value C_{order1}	Characteristic value C_{order2}	Characteristic value C_{order3}	Characteristic value C_{orderp}
Framed Structure	Static Response	A, I	-1	2	-6	$(-1)^p!$
		1/A, 1/I	1	0	0	0
		Nodal Coordinates of Truss Structure	1			
	Natural Circular Frequency	A, I	0	0	0	
		1/A, 1/I	0	0	0	
	Eigenvector	A, I	-1/2	3/4	-15/8	
		1/A, 1/I	1/2	-1/4	3/8	
	Dynamic Response	A, I	-1/4 *1			
Plane Model	Static Response	E	-1			
		1/E	1			

*1 computed value

上述の感度係数特性を利用して以下の問題について適用を行った．

1. 適合法に基づく静的感度解析

新たに誘導された感度係数特性を利用した従来法と異なる感度解析法を提案し，任意の骨組構造物に対する一般的なアルゴリズムを示した．提案した感度解析法は，適合法的な考え方に基づいており，逐次的に感度解析を行う場合，先ず静定基本系に対して節点変位

の感度係数を求めておけば重ね合わせの原理より原不静定構造の感度係数や応答が求められ、次回以降の解析は新たな感度変数を代入し不静定次数だけの次元を有する適合方程式を解くだけで行うことが可能である。さらにこの手法によれば、不静定構造物の節点変位の感度係数だけでなく、節点変位、部材断面力およびその感度係数が変位法を用いずに計算することができる。したがって、自由度が多く不静定次数が比較的小さな構造系の場合、初回の前処理が行われていれば次回以降の解析は非常に効率よく行うことができる。この計算効率については種々の計算モデルを対象にアルゴリズム上で必要となる演算回数と、実際の計算時間を測定し従来法である差分法と直接微分法との比較を行い、本手法の有効性を検証した。先に述べたように計算効率は不静定次数と自由度数の関係で決るが、不静定次数が30程度のラーメン構造物であれば、逐次的に感度解析を行った場合、10回以上の繰返しで従来法（直接微分法）の計算効率を上回り、それ以降の繰返しに対しては、解析1回当たりの計算効率が高い本手法の効果が発揮される。しかし、多層多スパンラーメン構造において不静定次数が50を超えるよう高次不静定構造になってくると、前処理に費やす計算時間が大きくなり逐次的に感度解析を繰返しても本手法は直接微分法に対して効率的とはならない。本手法、直接微分法のいずれにしても差分法に比べて十分効率的であるといえる。なお、本手法では前処理を行う際に不静定構造を静定基本形にする必要があるが、これらの具体的な方法とそれに対する適合条件の考え方を本文で説明している。

2. 逆解析問題

感度係数特性によって、応答と感度変数が線形関係にある形で表現できることから、これを利用して一般的な Gauss-Newton 法とは異なる逆解析問題に対する解析法が導かれる。

トラス構造及び平面モデルに対して最小2乗法に基づいた逆解析問題を取り扱った。トラス構造に対しては形状の感度係数特性を利用した変位指定下の形状逆解析問題を示し、ホモガス変形を制約条件とした構造形態のいくつかの解を得ている。この問題は非常に高度の非線形問題に属するものであり、解の唯一性あるいは存在が保証されていることは少

ない。本論文における手法についても初期値の設定が大きな問題となっており解の探索方法については未解決となった。

弾性平面モデルでは多層地盤のヤング係数を地表面の測定変位から逆解析により推定することが可能である。感度係数特性に基づいたこの逆解析法は、一般的な Gauss-Newton 法に比べて収束性に優れた解析法となっている。収束した推定値は、与えられた測定データの精度に影響を受けるため、測定データの信頼性に対応した推定値の信頼性の指標を示した。

3. トラス構造物の最小重量設計および最大剛性設計

平面トラス構造を対象として本来非線形である制約条件または目的関数を感度係数特性に基づき線形化し、線形計画法を繰り返すことにより構造物の最適化が可能である。本論文で提案している手法によれば、従来からの SLP 法などに比べて、効率的な最適化が行えることを示した。