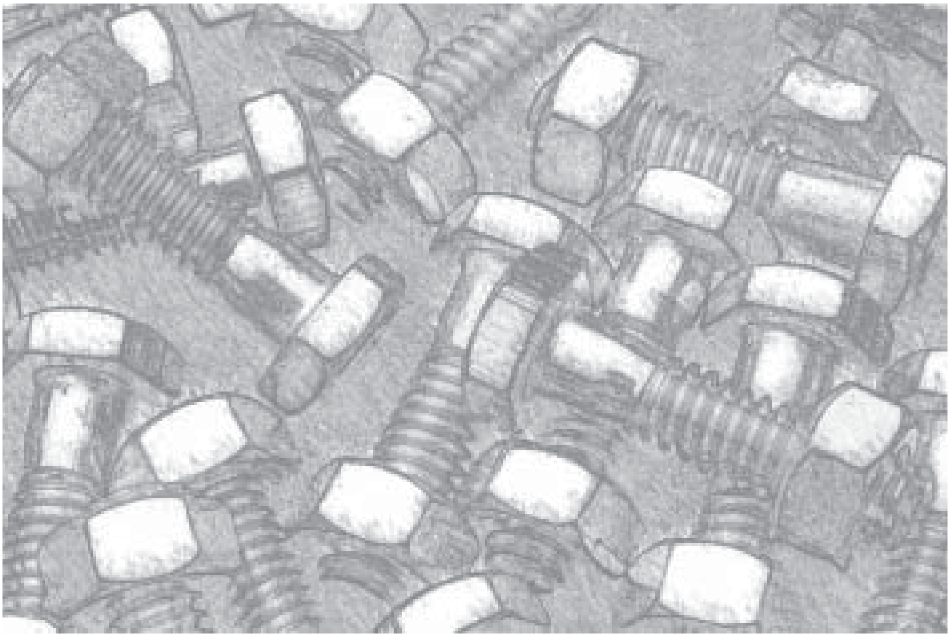


El modelo Harrod-Domar: implicaciones teóricas y empíricas

Humberto Franco González
Andrés Ramírez Hassan

Ecos de Economía No. 21. Medellín, octubre 2005, pp. 127-151

*Humberto Franco González**

*Andrés Ramírez Hassan***

• ***Resumen.*** En el presente escrito se presenta un aporte académico con miras a fortalecer el acercamiento a la teoría del crecimiento económico dada su relevancia a nivel teórico y práctico. En primera instancia se desarrollan algunas ideas fundamentales de la teoría del crecimiento económico, para luego tomar específicamente el modelo de crecimiento desarrollado por Harrod (1939) y Domar (1946), atendiendo al rigor matemático y finalizando con un ejercicio de simulación en el cual se muestra la pureza del equilibrio implícito en dicho modelo.

Palabras clave: Crecimiento económico, Modelo Harrod-Domar, Simulación.

Clasificación: JEL 040.

• ***Abstract.*** This paper shows an academic exercise in order to understand the bases of economic growth theory. First of all, we develop some fundamental ideas about the economic growth theory. Second, we take specifically the Harrod (1939) –Domar (1946) model, and we develop the mathematical structure implicitly in that model, and finally we do a simulation exercise, this one shows the restrictions inside the model's equilibrium.

Key words: Economic Growth, Harrod-Domar Model, Simulation.

JEL Classification: 040.

---

* Jefe del departamento de Economía de la universidad EAFIT y Docente e Investigador de esta misma Institución. hfranco@eafit.edu.co

** Docente e Investigador de la Universidad EAFIT. aramir21@eafit.edu.co

EL modelo Harrod-Domar: implicaciones teóricas y empíricas

Humberto Franco González
Andrés Ramírez Hassan

Introducción

El crecimiento económico es tal vez uno de los aspectos más relevantes al interior de la sociedad. Para argumentar dicha hipótesis se encuentran pruebas de carácter empírico y teórico, al respecto del primer criterio, la evidencia empírica ha enseñado que pequeñas diferencias en la tasa de crecimiento del Producto Interno Bruto per-cápita de una economía, durante un período prolongado de tiempo, implican diferencias significativas de renta al cabo de dicho período.

A manera de ejemplo se puede citar el nivel del PIB per-cápita de la economía colombiana a inicios del siglo XX, el cual ascendía a 494 dólares, medido a precios constantes de 1990 y en términos de dólares de paridad de poder adquisitivo[1]. Ahora, con una tasa media de crecimiento del PIB per-cápita equivalente a 2,3%, se encuentra que a finales del siglo XX, el PIB per-cápita de la economía colombiana ascendió a 4.800 dólares, casi diez veces mayor que el inicial (GRECO, 2002, p. 3).

[1] Para efectos de comparaciones internacionales es conveniente expresar las medidas cuantitativas de las variables macroeconómicas en términos de dólares de paridad de poder adquisitivo. En este sentido, la principal fuente de datos internacionales de renta son las Penn World Tables.

Si se asumiera que la economía colombiana hubiera gozado de una mayor dinámica, tal que hubiera alcanzado una tasa de crecimiento promedio de 3,3%, el nivel de renta per-cápita en la actualidad sería 12.698 dólares, es decir, veinticinco veces el PIB per-cápita inicial, y casi tres veces al que se observa en la actualidad. Por el contrario, si el desempeño hubiera sido de menor dinámica en comparación con el punto de partida en este análisis, y la tasa de crecimiento evidenciada hubiese sido de 1,3%, el nivel de renta actual sería 1.798 dólares, es decir, sólo casi cuatro veces el inicial, y muy por debajo de la situación actual. Este pequeño ejercicio enseña que pequeñas diferencias en las tasas de crecimiento promedio implican diferencias bastante elevadas en los niveles de renta de las economías.

Por su parte, desde el punto de vista del segundo criterio, es decir, el aspecto teórico, varios autores de reconocida trayectoria en las ciencias económicas manifiestan que la teoría del crecimiento económico es la rama de la economía de mayor importancia, entre estos se encuentra Lucas (1988) el cual expresa, "una vez uno empieza a pensar (en el crecimiento económico), es difícil pensar en otra cosa", además Sala-i-Martín (1994) en su libro Apuntes de Crecimiento Económico, dice: "Sin ningún género de dudas, la teoría del crecimiento económico es la rama de la economía de mayor importancia y la que debería ser objeto de mayor atención entre los investigadores económicos".

Cabe destacar que luego de una fase en la cual la teoría del crecimiento económico prácticamente desapareció del espacio de interés de los académicos a finales de la década del sesenta del siglo pasado, lo cual obedeció a una estructura formal bastante compleja y rigurosa, sin ningún sentido práctico en los modelos desarrollados, este fructífero campo ha resurgido con una fuerza inusitada a partir de la segunda mitad de la década de los ochenta, gracias a la tesis doctoral del señor Romer(1986), y la posterior bendición de Lucas(1988). Hoy en día es un espacio académico e investigativo bastante promisorio.

En esencia, el fenómeno del crecimiento económico ha estado presente al interior de los desarrollos teóricos de los primeros intelectuales que se preocuparon por problemas de índole económico, es el caso de Adam Smith (1776), David Ricardo (1817) y Thomas Malthus (1798), los cuales establecieron los cimientos del moderno enfoque que se ha determinado para la teoría del crecimiento económico; sus planteamientos básicos se fundamentan en las hipótesis de rendimientos marginales decrecientes, estructuras de mercado competitivas y equilibrios dinámicos. Pero es Ramsey (1928), el que establece el primer modelo de crecimiento económico fundamentado en el cálculo de variaciones; este modelo establece las denominadas condiciones de optimalidad de Ramsey, las cuales son ampliamente utilizadas en el espectro económico. Dicho modelo fue retomado por Cass (1963) y Koopmans (1963), los cuales lo implementaron bajo la estrategia de modelación basada en el control óptimo.

A partir del marco teórico implementado por Ramsey, surge a finales de la década de los años treinta, el modelo desarrollado por Harrod (1939) y Domar (1946), dichos autores establecieron un punto de referencia lógico que esbozó la situación evidenciada por la coyuntura económica de la época, la cual se reflejó en los desastres económicos ocasionados por la gran depresión de finales de la década de los veinte.

Con base en la anterior secuencia cronológica, el propósito del presente artículo es desarrollar los conceptos teóricos y formales que se encuentran implícitos en el modelo Harrod-Domar, además de ilustrar mediante un ejercicio de simulación las principales conclusiones que se desprenden de éste. La importancia de este tipo de trabajos es la de dar luces sobre los preceptos teóricos que subyacen el fenómeno del crecimiento económico como paso esencial para contribuir a la comprensión de tan magna manifestación económica y social.

En ese orden de ideas, el artículo está estructurado de la siguiente forma: luego de la introducción se exponen detenidamente los conceptos y características relevantes del modelo Harrod-Domar, después se realiza un ejercicio de simulación que evidencia cuantitativamente las conclusiones relevantes del modelo, y finalmente se presentan algunas consideraciones generales, producto del desarrollo del presente trabajo.

I. Marco teórico

La historia económica lleva a concluir que los trabajos de crecimiento económico de Harrod en 1939 y posteriormente de Domar en 1946, pueden ser considerados como los precursores en el inicio del interés contemporáneo por las teorías modernas del crecimiento económico hecho que, sin lugar a dudas, lleva a que el punto de partida del estudio de los modelos de crecimiento económico, sea el análisis de lo que comúnmente se conoce como el modelo de crecimiento de

Harrod-Domar. Dicho marco se considera el punto de inicial de referencia, dada la poca aceptación y difusión en el medio académico del esquema pionero implementado por Ramsey (1928).

Bajo esta consideración, el presente apartado del trabajo empezará por exponer algunas ideas que se constituyeron en la base inspiradora de Harrod para el desarrollo de su modelo, pues Domar tuvo tiempo para retomar aspectos de este autor y, en consecuencia, de John Maynard Keynes quién, a su turno, incidió de forma notoria sobre los planteamientos de Harrod.

En efecto, el economista ingles Roy Harrod tuvo la fortuna de interactuar con uno de sus colegas de mayor trascendencia en la historia de esta ciencia, John Maynard Keynes, pues fue de los primeros pensadores del crecimiento económico en analizar a profundidad la celebre Teoría General Keynesiana. De este intercambio de ideas y planteamientos, sobre todo cuando Keynes fue director del Economic Journal surgieron en primera instancia, algunos artículos en torno al crecimiento económico por parte de Harrod y posteriormente su texto sobre este tópico de la ciencia económica. Así pues, Harrod (1934-1939) aprovechó con gran lustre, la interlocución keynesiana para publicar sus escritos de dinámica económica.

El calificativo de afortunado obedece al hecho según el cual, Keynes no solo cuestionó algunos de los puntos de vista de Harrod, sino que le sugirió una serie de acciones y correctivos, que al final fueron incorporados en el modelo de crecimiento de este autor.

En tal sentido, es posible aseverar que el enfoque dado por Harrod a su modelo de crecimiento, enfoque similar tomado por Domar en el suyo, es eminentemente keynesiano pues fue este planteamiento el que lo inspiró para tratar de dinamizar la macroeconomía, intento que en el momento se constituía en la panacea de la teoría económica. A manera de ilustración, es pertinente mencionar como elementos keynesianos en el trabajo de Harrod, desarrollados en la siguiente sección del presente escrito, el ahorro y la inversión como factores que determinan la senda de crecimiento equilibrado de las economías.

En otras palabras, al tener como soporte las ideas keynesianas de corto plazo, el enfoque de Harrod tomó como eje central, las condiciones necesarias para el equilibrio entre el ahorro y la inversión en una economía en crecimiento. En tal caso, una de las sugerencias finales del modelo Harrod-Domar es la de insinuar la acción del Estado para dirigir el ahorro y la inversión, de manera que se garantice la inversión suficiente en pro de prevenir el excesivo desempleo, pues las economías no son estables siendo necesario, entonces, acciones ajenas a ella para reencaminarla por la senda del crecimiento sostenido y equilibrado, como alternativa para hacerle frente al desempleo.

A. El modelo

El modelo Harrod-Domar establece que un cambio en la tasa del flujo de inversión producirá un doble efecto. El primero se da a través del acelerador al alterar la capacidad productiva de la economía, en tanto que el segundo opera a través del multiplicador, y afecta a la demanda agregada. En efecto, tomando cada uno de estos operadores y repasándolos con algún grado de profundidad se tiene:

- **El acelerador:**

Este principio señala que un aumento del capital necesario para incrementar la capacidad productiva en una cuantía dada, es un valor constante, es decir, la variación en la producción ante cambios en el capital se mantiene inalterada a través de la trayectoria temporal de las variables en cuestión.

$$\dot{Y}(t) = a\,\dot{K}(t) \quad (1)^2 \qquad (1)$$

El hecho de que aparezca explícitamente sólo el factor productivo capital en el principio del acelerador, no implica que la función de producción dependa únicamente de este factor, sino que la relación implícita entre los factores productivos es complementaria perfecta. La función de producción que recoge explícitamente este hecho es la función de coeficientes fijos de Leontief. Debido a la existencia de esta proporción fija, todo aumento de uno de los factores sin el consiguiente aumento del otro deja la producción inalterada. En tal caso y de manera formal se tiene:

$$Y(t) = Min\{\alpha K(t), \beta A(t)L(t)\} \qquad (2)$$

[2] Las variables con punto, denotan su derivada con respecto al tiempo, es decir, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

en donde α y β son los coeficientes técnicos (constantes) del capital y el trabajo efectivo, respectivamente.

Es de anotar que la función de producción adoptada es neutral en el sentido Harrod, lo cual implica que la función adoptada es potenciadora de trabajo[3]. Ahora, suponiendo una tasa de crecimiento para la población (*n*) constante[4], al igual que la tasa de crecimiento de la eficiencia laboral (*g*) se tiene.

$$L(t) = L(0)e^{nt}$$
$$A(t) = A(0)e^{gt}$$

Es preciso anotar, además, que otra característica de la función de producción es la presencia de rendimientos constantes a escala:

$$\lambda Y(t) = Min\{\lambda\alpha K(t), \lambda\beta A(t)L(t)\} = \lambda Min\{\alpha K(t), \beta A(t)L(t)\} \quad (3) \quad \forall\lambda > 0$$

Seguidamente y dado el supuesto de rendimientos constantes a escala, es posible expresar la función de producción de coeficientes fijos en términos de trabajador eficiente[5].

$$\hat{y} = Min\left\{\alpha\,\hat{k}, \beta\right\} \qquad (4)$$

---

3 La función de producción presentada es potenciadora de trabajo, es decir, neutral en el sentido Harrod. Lo anterior implica que la participación relativa de los factores, $\dfrac{K\left(\partial Y/\partial K\right)}{L\left(\partial Y/\partial L\right)}$, permanece inalterada para una relación capital / producto dada (Aragandoña, Gamez y Monchón, 1997, 302).

4 Dado el supuesto de pleno empleo, la fuerza laboral ocupada es igual al tamaño de la población.

5 En (7) hacemos $\lambda = \dfrac{1}{AL}$.

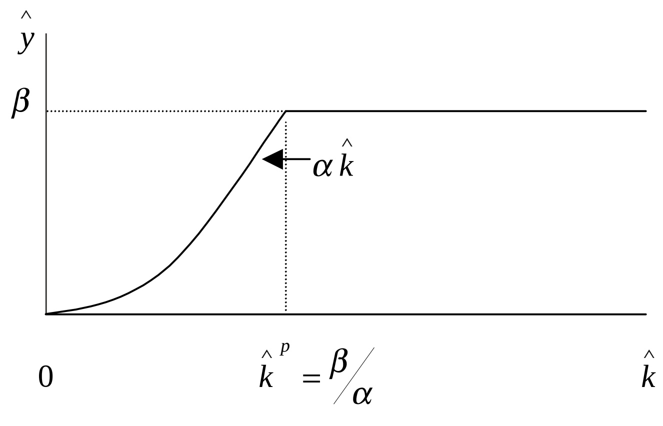
Donde: $\hat{y} \equiv \frac{Y}{AL}$ y $\hat{k} \equiv \frac{K}{AL}$

Luego, la evolución temporal de la producción en unidades eficientes estará determinada por un nivel de capital en unidades eficientes $\left(\hat{k}^{p}\right)$ en el cual el capital y el trabajo efectivo estarán plenamente utilizados y no hay capacidad ociosa de los recursos productivos en la economía. Así se tiene:

$$\hat{y} = \begin{cases} \alpha \hat{k} & \forall \hat{k} \leq \hat{k}^{p} = \frac{\beta}{\alpha} \\ \beta & \forall \hat{k} > \hat{k}^{p} = \frac{\beta}{\alpha} \end{cases} \tag{5}$$

Gráficamente[6],

Gráfico 1
Evolución de la producción en unidades eficientes.



6 En la sección donde se especifica la senda temporal del capital eficiente, se mostrará que el mismo presenta un crecimiento exponencial si se cumplen ciertas condiciones sobre los parámetros.

Luego de analizar el mecanismo del acelerador y la función de producción que más se aproxima a las necesidades que en un principio Harrod y Domar planteaban, lo más relevante era la intención de explicar el desempleo y la desaceleración económica que se vivía para la época[7], de esta forma se da paso al análisis de la influencia del flujo de inversión sobre la demanda agregada.

- **El multiplicador:**

Principio basado en el hecho de que los agentes consumen (o ahorran) una proporción constante de su ingreso.

Bajo un entorno de economía cerrada y sin gobierno (ó saldo de exportaciones netas igual a cero y un gobierno que mantiene su presupuesto equilibrado mediante unos impuestos de suma fija –no distorsionadores– en cada instante del tiempo) se cumple la igualdad macroeconómica entre inversión y ahorro.

$$Y(t)=C(t)+I_g(t)+G(t)+NX(t) \tag{6}$$

$$S(t)=Y(t)-C(t)-T(t) \quad (7)$$

Se supone, como se había anotado, que:

$G(t)=T(t)$, $NX(t)=0 \quad \forall t \in [0,\infty)$. Igualmente se cumple que,

$$S(t)=I_g(t) \quad (8) \quad \forall t \in [0,\infty)$$

Ahora, como el mecanismo del multiplicador supone que los agentes ahorran una fracción constante del ingreso *(s)*, entonces se cumple la siguiente igualdad:

[7] Otra función de producción que recoge la esencia del principio de aceleración es la función $Y = AK$, pero la tecnología en ella inmersa, no es la relevante para el análisis del modelo Harrod-Domar dado que el factor trabajo no juega ningún papel en dicha función. En tal caso, es pertinente recordar que fue precisamente el estudio del desempleo el objetivo central de estos autores. Además, la tecnología Leontief se comporta como la función AK para niveles de capital pequeños, pero luego adquiere otra tipología.

$$I_g(t) = sY(t) \tag{9}$$

Por otra parte es sabido, por teoría macroeconómica básica, que la inversión bruta es igual a la inversión neta más el capital de reposición, es decir:

$$I_g(t) = I_n(t) + \delta K(t) = \dot{K}(t) + \delta K(t) \tag{10}$$

Donde δ es la tasa de depreciación del capital que se supone constante. Ahora, a partir de (9) y (10), se obtiene:

$$\dot{K} = sY - \delta K \tag{11}$$

Vale la pena recordar que el análisis está soportado en términos de la evolución del capital en unidades de trabajador eficiente $\left(\hat{k} \equiv K/AL\right)$, de esta forma[8]:

$$\frac{\dot{K}}{AL} = s\hat{y} - \delta\hat{k}$$

$$\dot{\hat{k}} = s\hat{y} - (n + \delta + g)\hat{k} \tag{12}$$

Estudiados los supuestos de partida del modelo de crecimiento Harrod-Domar y la trayectoria de la producción, se procederá a analizar la evolución temporal del capital en unidades eficientes. En efecto, reemplazando (5) en (12), se encuentran un par de ecuaciones diferenciales las cuales describen el comportamiento del capital medido en unidades de eficiencia.

[8] Donde $\dot{K} = \dot{\hat{k}}\,AL + \dot{A}\hat{k}\,L + \dot{L}\,\hat{k}\,A$ haciéndose uso de las definiciones de tasa de crecimiento $\frac{\dot{A}}{A} = g$ y $\frac{\dot{L}}{L} = n.$

$$\dot{\hat{k}} = \begin{cases} s\alpha \hat{k} - (n+\delta+g)\hat{k} & \forall \hat{k} \leq \hat{k}^{p} \\ s\beta - (n+\delta+g)\hat{k} & \forall \hat{k} > \hat{k}^{p} \end{cases} \tag{13}$$

Así, la trayectoria del capital presenta la siguiente evolución dependiendo del estado del capital de pleno empleo y recursos no ociosos $\left(\hat{k}^{p}\right)$:

$$\hat{k}(t) = \begin{cases} \hat{k}(0)e^{(s\alpha-(n+\delta+g))t}, & \hat{k} \leq \hat{k}^{p} \\ \left[\hat{k}^{p} - \hat{k}^{*}\right]e^{-(n+\delta+g)t} + \hat{k}^{*}, & \hat{k} > \hat{k}^{p} \quad y \quad \hat{k}(0) \leq \hat{k}^{p} \\ \left[\hat{k}(0) - \hat{k}^{*}\right]e^{-(n+\delta+g)t} + \hat{k}^{*}, & \hat{k} > \hat{k}^{p} \quad y \quad \hat{k}(0) > \hat{k}^{p} \end{cases} \tag{14}$$

Donde las sendas temporales resultan de resolver las ecuaciones diferenciales de las ecuaciones en (13) y de establecer el capital en unidades eficientes inicial. Además, se tiene que $\hat{k}^{*} = \dfrac{s\beta}{n+\delta+g}$, el cual define el estado estacionario.

Por su parte, las tasas de crecimiento del capital en unidades eficientes, serán halladas tomando el sistema (13) y dividiéndolo por $\hat{k}$.

$$\gamma_{\hat{k}} = \begin{cases} s\alpha - (n+\delta+g), & \hat{k} \leq \hat{k}^{p} \\ \dfrac{s\beta}{\hat{k}} - (n+\delta+g), & \hat{k} > \hat{k}^{p} \end{cases} \tag{15}$$

Obsérvese que la tasa de crecimiento está definida como una constante para valores del capital eficiente inferiores al de plena utilización. Para valores del capital medido en unidades eficientes superiores al de plena utilización, es posible evidenciar que la tasa de crecimiento deja de ser una constante y pasa a ser una función negativa del capital eficiente. En general, la tasa de crecimiento del capital eficiente de la economía Harrod-Domar, depende en forma negativa de la tasa de crecimiento de la población, la tasa de depreciación y la tasa de progreso tecnológico, y positivamente de la propensión marginal a ahorrar, el coeficiente técnico del capital y el coeficiente técnico del trabajo efectivo.

Para caracterizar la transición dinámica de la economía hacia el estado estacionario (si este existe), se analizan tres posibles casos los cuales dependerán de los valores de los parámetros.

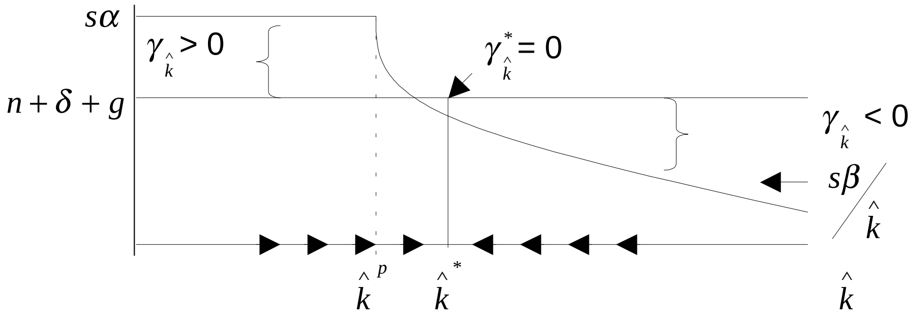
Caso I: $s\alpha > (n+\delta+g)$

Tal como se observa en el gráfico 2, la economía converge hacia un capital eficiente de estado estacionario mayor al capital eficiente de plena utilización y recursos no ociosos. Es decir, $\hat{k}^{*} > \hat{k}^{p}$, lo cual implica que la producción en unidades eficientes es igual a β. Analizando las variables en niveles, la restricción sobre la producción está dada por el trabajo efectivo $\left(Y = Min\left\{\alpha K^{*}, \beta(AL)^{*}\right\} = \beta(AL)^{*}\right)$ observándose un nivel de capital ocioso, el cual crece permanentemente a la tasa $(n+g)$, situación no deseable en la economía[9].

$$\text{Formalmente,} \quad \underset{t\rightarrow\infty}{Lim}\,\hat{k}(t) = \hat{k}^{*} \qquad (16)$$

9 Esta situación es irracional desde la perspectiva económica, puesto que no es coherente suponer que los agentes económicos pese a poseer capital ocioso, continúen ahorrando una fracción constante de su ingreso. En tal caso, los modelos de optimización dinámica intentan corregir dicho comportamiento a través de la endogenización de la tasa de ahorro.

Gráfico 2
Evolución de la economía caso I.



En este caso, la economía presenta transición dinámica hacia un estado estacionario estable en el cual la tasa de crecimiento de las variables, medidas en unidades eficientes, es cero, es decir, $\gamma^* = \gamma^*_{\hat{k}} = \gamma^*_{\hat{y}} = \gamma^*_{\hat{c}} = 0$. Lo anterior implica que las variables per-cápita crecen a la tasa g y las variables en niveles crecen a la tasa $n+g$.

Caso II: $s\alpha = (n+\delta+g)$

En este escenario, como lo muestra el gráfico 3, la situación final de la economía depende del nivel inicial de capital eficiente.

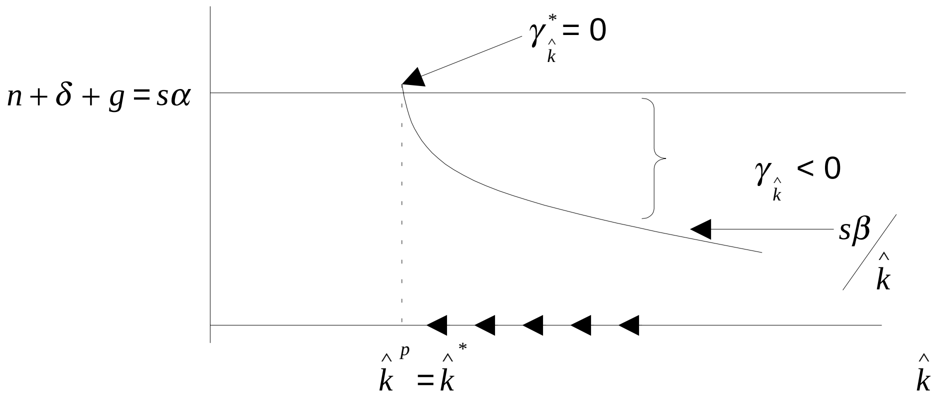
$$\lim_{t\to\infty} \hat{k}(t) = \begin{Bmatrix} \hat{k}(0), & \hat{k}(0) \leq \hat{k}^p \\ \hat{k}^p = \hat{k}^*, & \hat{k}(0) > \hat{k}^p \end{Bmatrix} \tag{17}$$

Nótese que dado $\hat{k}(0) \leq \hat{k}^p$, la economía permanecerá en la situación inicial, la cual es menor que la situación de plena utilización de los recursos disponibles sin capacidad ociosa. Lo anterior implica que $\hat{y} = \alpha \hat{k}(0)$, es decir, la producción en niveles está restringida por el nivel de capital, esto implica que la economía se encuentra en una situación en la cual hay desempleo[10]. Para el caso $\hat{k}(0) > \hat{k}^{p}$, la economía presentará una tasa de crecimiento negativa hasta alcanzar el estado estacionario $\hat{k}^{p} = \hat{k}^{*}$ en el cual hay plena utilización de los factores productivos y recursos no ociosos. Esta es la única situación de equilibrio final deseable en el modelo Harrod-Domar.

Nuevamente se alcanza un equilibrio en el cual las tasas de crecimiento de las variables en unidades eficientes son iguales a cero, es decir, $\gamma^{*} = \gamma^{*}_{\hat{k}} = \gamma^{*}_{\hat{y}} = \gamma^{*}_{\hat{c}} = 0$, lo cual implica que las variables en niveles crecen a la tasa $n+g$, y las variables per-cápita evolucionan según la eficiencia tecnológica.

Gráfico 3

Evolución de la economía caso II



10 En modelos en los cuales se endogeniza la tasa de crecimiento de la población se podrá solucionar esta situación, puesto que es ilógico, desde el punto de vista económico, traer hijos a una economía en la cual no existe capacidad de sostenimiento de los mismos.

Caso III: $s\alpha < (n+\delta+g)$

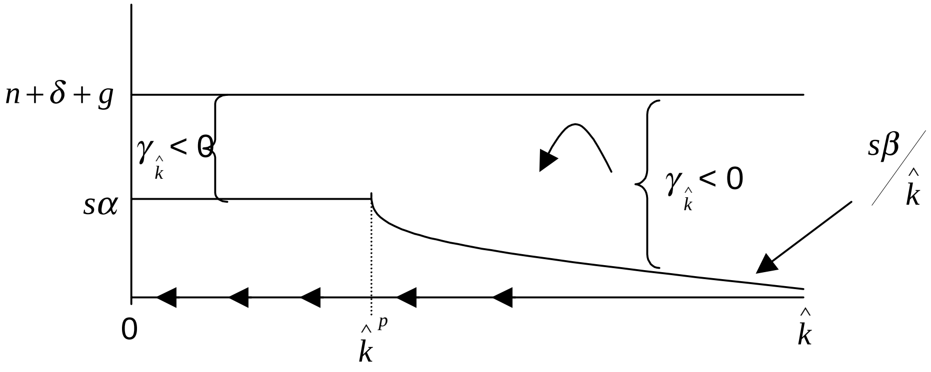
Finalmente, en el último escenario correspondiente al gráfico 4, se evidencia de forma clara, como la tasa de crecimiento para la economía es permanentemente negativa, lo cual conlleva a una situación en la cual no hay transición dinámica hacia un equilibrio racional, puesto que se genera una situación en la cual la economía converge a su desaparición. Dada la evolución dinámica del capital medido en unidades eficientes, se observa como se converge a una situación en la cual el stock de capital eficiente es menor que el nivel de pleno empleo y recursos no ociosos; luego, la producción está restringida por el nivel de capital (dada la magnitud relativamente pequeña de la propensión marginal a ahorrar), esto genera una situación de aumento continuo del desempleo. Harrod y Domar tenían el convencimiento de que esta era la situación que caracterizaba la gran depresión de la economía capitalista durante los años treinta (altas tasas de desempleo y tasas de crecimiento negativas).

Formalmente,

$$\lim_{t\to\infty} \hat{k}(t) = 0 \tag{18}$$

Gráfico 4

Evolución de la economía caso III.



Como conclusión general del modelo planteado por Harrod y Domar se observa una sola situación en la cual se llega a un equilibrio racionalmente viable desde el punto de vista económico. Tal caso dio origen a la famosa situación del filo de navaja, la cual enuncia que para que una economía converja y se estabilice en un equilibrio estacionario racionalmente viable, es necesario que se establezca una igualdad entre los parámetros, hecho prácticamente imposible dada la exogeneidad de ellos.

Por su parte, ante la enorme restricción del modelo Harrod-Domar, Solow (1956) y Swan (1956) desarrollaron un modelo de crecimiento exógeno *ad hoc* en el cual se alcanza un equilibrio estacionario estable[11]. La clave para dicho equilibrio es la función de producción Neoclásica, en la cual se establece cierto grado de sustitución entre los factores productivos, hecho que no se presenta en la función de producción Leontief en la cual la elasticidad de sustitución entre los factores productivos es cero, tal como se manifestó con anterioridad.

II. Ejercicio de simulación

Considérese una economía que evoluciona según los supuestos del modelo de crecimiento Harrod-Domar, la cuál presenta las características expuestas en el siguiente cuadro.

Parámetros del modelo

Parámetros	**Magnitud**
Coeficiente técnico del capital (a)	1
Coeficiente técnico del trabajo (b)	1
Propensión marginal al ahorro(s)	0.18
Tasa de crecimiento de la población (n)	0.02
Tasa de crecimiento de la tecnología (g)	0.03
Tasa de depreciación (d)	0.08
Capital inicial eficiente $\hat{k}(0)$	0.8
Horizonte temporal (t)	100

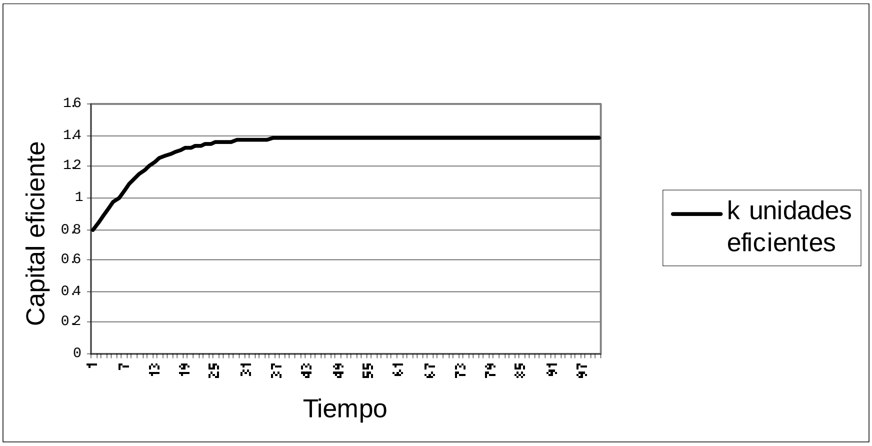
Fuente. Hipótesis de los autores.

[11] El modelo de crecimiento Neoclásico, puede generar crecimiento endógeno si se incumple una de las condiciones de Inada (1963). Bajo una función de producción CES y con una elasticidad de sustitución suficientemente amplia es posible generar crecimiento endógeno, además de convergencia condicional.

Bajo este escenario, el comportamiento de la economía estará determinada por la siguiente senda temporal del capital en unidades eficientes (gráfico 5).

Gráfico 5

Trayectoria del capital eficiente



Fuente. Cálculos de los autores.

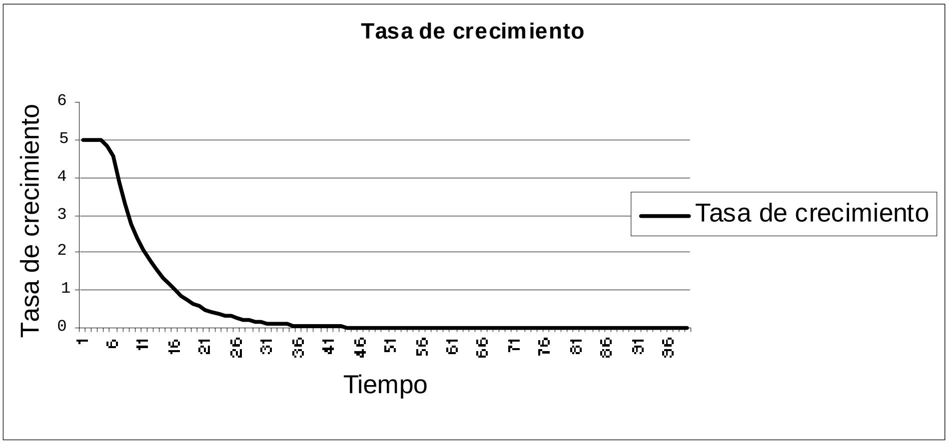
Obsérvese que el capital en unidades eficientes tiende a su valor de estado estacionario, el cual viene determinado de la forma siguiente:

$$\hat{k}^{*} = \frac{s\beta}{n+\delta+g} = 1.385 \qquad (19)$$

En tales condiciones, la tasa de crecimiento del capital eficiente en el largo plazo tiende a cero (gráfico 6), esto implica que las variables en niveles crecerán a la tasa $n+g$ y las variables per-cápita crecerán al ritmo de la tecnología (g).

Gráfico 6

Tasa de crecimiento del capital eficiente

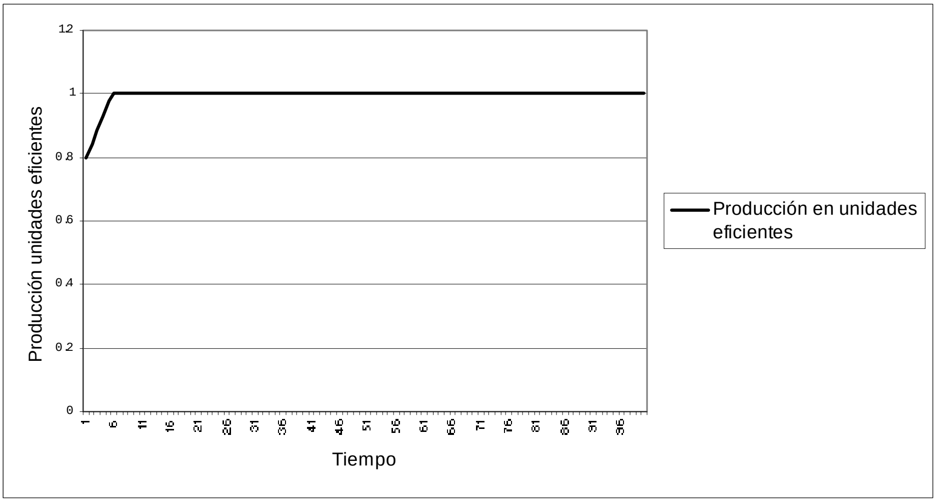


Fuente. Cálculos de los autores.

Ahora, dado que el valor de estado estacionario del capital medido en unidades eficientes es mayor que el capital de pleno empleo, la producción eficiente estará limitada por el trabajo efectivo, es decir, inicialmente la producción presentará un comportamiento creciente al ritmo que lo realiza el capital en unidades eficientes, pero llegará un momento que detendrá su crecimiento y pasará a ser constante dada la limitación que representa el trabajo eficiente en estado estacionario (gráfico 7).

Gráfico 7

Producción en unidades eficientes



Fuente. Cálculos de los autores.

Formalmente,

$$\hat{k}^{*} = 1.385 > 1 = \hat{k}^{*} \tag{20}$$

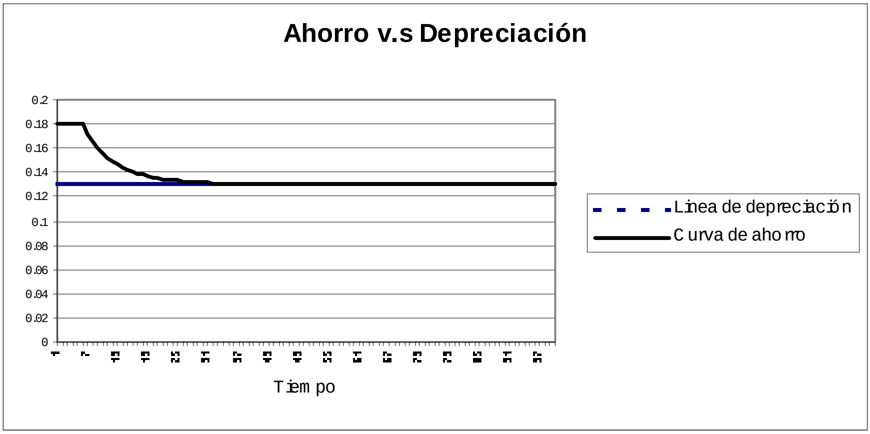
La curva de ahorro de la economía estará determinada por:

$$\frac{sf\left(\hat{k}\right)}{\hat{k}} = \begin{cases} s\alpha & \forall \hat{k} \leq \hat{k}^{p} \\ \frac{s\beta}{\hat{k}} & \forall \hat{k} > \hat{k}^{p} \end{cases} \tag{21}$$

Se nota entonces (gráfico 8), que la economía en consideración se aproxima a una instancia en la cual el ahorro agregado medido en unidades eficientes se acerca a la depreciación agregada.

Gráfico 8

Ahorro agregado contra depreciación agregada



Fuente. Cálculos de los autores.

En síntesis, el tiempo que demora la economía en cuestión en recorrer la distancia entre el capital inicial y el capital de pleno empleo y recursos no ociosos está determinado por la siguiente ecuación:

$$t_1 = \frac{Ln\left[\hat{k}^p \big/ \hat{k}(0)\right]}{s\alpha - (n + \delta + g)} \qquad (22)$$

Para este caso particular, el tiempo que demora la economía en encontrar la situación ideal, es decir, capacidad instalada de la economía plenamente utilizada y desempleo natural, es 4.46 ≅ 4 años y 5 meses. A partir de ese momento, la economía empezará a sufrir un proceso de exceso de capital en unidades eficientes, el cual continuará hasta encontrar la situación de estado estacionario. Por su parte, el tiempo que tarda la economía del ejemplo en alcanzar la mitad del recorrido entre la situación de pleno empleo y el estado estacionario está dada por:

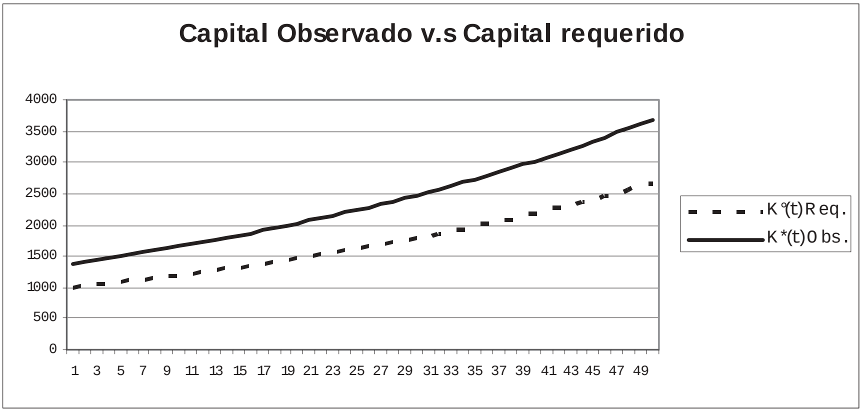
$$t_2 = -\frac{Ln\left(1/2\right)}{n+\delta+g} \tag{23}$$

Se debe tener presente que a partir del momento en el cual la economía alcanza $\hat{k}^p$, éste se convierte en el capital inicial para la trayectoria del capital eficiente, que ahora se comporta según el reglón dos del sistema (14). Para el caso en particular $t_2 = 5.33 \cong 5$ años y 4 meses.

Ahora, luego de alcanzar el estado estacionario, esta economía presenta una situación en la cual se observa un continuo crecimiento del capital ocioso (posición plenamente irracional), lo que es atribuible a la exogeneidad de la tasa de ahorro del modelo Harrod-Domar, pues sería ilógico continuar invirtiendo en una economía en la cual sobra el capital. El gráfico 9 es bastante elocuente al permitir observar, que la brecha entre el capital requerido (K* Req.) y el capital observado (K* Obs.), va aumentando con el transcurrir del tiempo[12].

Gráfico 9

Evolución del capital observado y del capital requerido.



Fuente: Cálculos de los autores.

[12] El análisis se realiza suponiendo una población inicial de 1000. El capital ocioso crecerá a la tasa $n+g$ = 0.05.

Este ejercicio de simulación, muestra como la economía alcanza una situación en la que el capital de estado estacionario, es superior al capital deseable (capital de pleno empleo); tal situación conlleva a un exceso de inversión generado por la ausencia de microfundamentación para la toma de decisiones por parte de los agentes económicos. Pero ¿Cómo puede ser racional invertir en una economía en la que existe exceso de capital?

III. Consideraciones finales

Es claro entonces, que las teorías del crecimiento económico se ocupan de analizar el funcionamiento del sistema económico a través del tiempo enfatizando sobre todo, la forma como la producción se comportan en él. En tal dirección, ellas estudian las condiciones que deberán existir para que además del crecimiento de la producción, la economía tienda a mantener el equilibrio macroeconómico. Desde luego, como se manifestó en algunos apartes del escrito y como se puede deducir del estudio del crecimiento económico, que el punto de arranque de estas teorías, corresponde al intento de dinamización de la teoría macroeconómica keynesiana, pues consideran el efecto de la inversión en la capacidad productiva de las economías, además del que se refleja en los niveles de la demanda agregada que es el punto central de la Teoría General del interés, la ocupación y el dinero.

Ahora, también se hizo hincapié en el trabajo sobre la controversia que normalmente caracteriza a los modelos de crecimiento. Esta situación no escapa al modelo Harrod-Domar el que a pesar de constituirse en uno de los primeros intentos de dinamización de la teoría macroeconómica, se ve sometido a una serie de consideraciones que llevan a mostrar algunas desventajas del mismo. En efecto, de este modelo se dice que sus supuestos son "heroicos", además de ser un modelo bastante rígido. De hecho, estos puntos de vista son argumentados sobre la siguiente base: para que se de el crecimiento económico según las condiciones del modelo, deberán suceder dos cosas; que la tasa de crecimiento de la inversión sea exactamente igual al resultado del producto entre la propensión marginal a ahorrar y la razón capital producto y, en segundo lugar, que la tasa de crecimiento económico sea igual al crecimiento de la población o de la fuerza productiva, dado el supuesto de igualdad entre una y otra.

En general, las desventajas que presenta el modelo Harrod-Domar se deben a la función de producción implícita en este, puesto que dicha función considera una relación de complementariedad perfecta entre los insumos productivos. Esta limitación es superada por el modelo Neoclásico en el cual la función de producción asume explícitamente los factores productivos y estos presentan una elasticidad de sustitución mayor a cero. Otra limitación implícita en el modelo analizado es que las decisiones de ahorro son modeladas exógenamente, lo cual atañe a un comportamiento no racional desde el punto de vista económico, esta dificultad es sorteada por el modelo Ramsey (1928), Cass (1965) y Koopmans (1965) en el cual las decisiones de ahorro son desarrolladas endógenamente a través de un proceso de optimización dinámico.

Pero no obstante las criticas esgrimidas sobre el modelo de la referencia, él sigue siendo el punto de partida obligado para el estudio de las teorías del crecimiento económico, al punto que los llamados teóricos neoclásicos y los neokeynesianos introdujeron en su análisis la flexibilización del modelo Harrod-Domar para desarrollar sus modelos.

Bibliografía

Argandoña, Gamez y Mochón, (1996). Macroeconomía avanzada I. McGraw-Hill. España.

Cass, David (1965). Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation" Review of Economic Studies, 32 (julio), 233-240.

Chiang Alpha, (1987). Métodos fundamentales de economía matemática. McGraw-Hill. México.

Domar, Evsey, (1946). "Capital expansion, Rate of Growth, and Employment" Econométrica, 14 (abril), 137-147.

Hicks, R. F. (1965). Capital and Growth. Oxford University.

Harrod, Roy, (1939). "An Essay in Dynamic Theory", Economic Journal, 49 (junio), 14-33.

Jones, Hywell, (1988). Introducción a las teorías modernas del crecimiento económico. Barcelona, España.

Kaldor, N. (1969). Capital Accumulation and Economic Growth. 177-222.

Koopmans, T., (1965). "On the Concept of Optimal Economic Growth", en The econometric approach to development planning. Amsterdam, North Holland.

Malgesini, Graciela y Galindo Miguel Angel. Crecimiento Económico: principales teorías desde Keynes. McGraw-Hill. Madrid, 1994.

Ramsey, F. (1928). "A Mathematical Theory of Saving". Economic Journal 38 (diciembre): 543-559.

Romer David (2002). Macroeconomía avanzada. McGraw-Hill. España.

Solow, Robert (1956). "A Contribution to the Theory of Economic Growth" Quaterly Journal of Economics, 70 (febrero), 65-94.

Xavier Sala-i-Martin (2000). Apuntes de crecimiento económico. Antoni Bosch, editor. España.