Jurnal Peluang, Volume 2, Nomor 1, Oktober 2013, ISSN: 2302-5158

GENERALIZED INVERSE

Musafir Kumar[1)]

[1)]Dosen Pendidikan Matematika FKIP Unsyiah

Abstrak

Tulisan ini bertujuan untuk menhgetahui pengertian dari generalized inverse. Teorema-teorema dan sifat-sifat yang terkandung di dalamnya. Generalized inverse merupakan perluasan dari inverssuatu matriks yang telah dikenal sehari-hari. Di dalam generalized inverse ukuran matriks tidak harus persegi dan juga tidak harus non singular. Dengan pemahaman akan generalized inverse maka diharapkan akan memperluas wawasan kita tentang invers suatu matriks

Kata Kunci: invers, matriks

A. Pendahuluan

Secara umum kita sudah memahami tentang pengertian invers suatu matrik (balikan suatu matriks). Misalkan A suatu matriks persegi (beberapa buku menyebutkan matriks bujur sangkar), jika ada suatu matriks B sedemikian hingga AB = I, maka B disebut invers (balikan) dari A dan dinyatakan dengan A^{-1}. Juga jika AB = I, dan dapat kita tunjukkan bahwa BA = I maka ada suatu matriks B sedemikian hingga AB = BA = I maka matriks A disebut nonsingular; dalam hal sebaliknya disebut singular. (Anton dan Rorres, 2000: 46).

Beberapa sifat tentang invers suatu matriks yang seringkali terpakai adalah :

1. $AA^{-1} = I$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

Misalkan matriks A berukuran m x n (bukan matrik persegi) dan mempunyai rank r. Kita akan menginvestigasi suatu matrik yang dilambangkan dengan A^{-} (baca : generalized inverse) yang mempunyai sifat-sifat seperti invers dari A jika inversenya ada.

Timm (1975: 52) menyebutkan pengertian dari generalized Inverse sebagai berikut: A in this case is not square and A $[(A'A)^{-1} A'] \neq I$, it would be desirable to have a matriks A^{+} that behaves in same way as the usual inverse of A. Such a matriks may be termed a generalized inverse for matriks A.

Istilah generalized inverse pertama sekali didefinisikan oleh Penrose (1955) yang menggunakannya dalam penyelesaian Ax = g. Penrose mendefinisikan generalized inverse dari suatu matriks A sebagai matriks A^{+} yang memenuhi empat syarat berikut:

$A\,A^{+}\,A = A$ $\qquad$ $(A\,A^{+})' = A\,A^{+}$

$A^{+}\,A\,A^{+} = A^{+}$ $\qquad$ $(A^{+}\,A)' = A^{+}\,A$

Dengan A^+ didefinisikan oleh $A^+ = (A'\ A)^{-1}\ A'$ untuk kasus rank penuh. A^+ terlihat memenuhi keempat syarat di atas. Selanjutnya Rao (1962, 1965a, 1966b dalam Timm, 1975: 52) mendapatkan bahwa semua persyaratan Penrose belum cukup untuk memperoleh suatu penyelesaian sistem persamaan konsisten Ax = g. Menurut Rao, suatu generalized inverse (atau g-inverse) dari suatu matriks A berukuran n x m adalah suatu matriks yang memenuhi hanya syarat penrose yang pertama. Jadi, dengan menggunakan notasi Rao, generalized inverse adalah suatu matriks A^- yang memenuhi syarat

$$A\,A^-\,A = A$$

Simbol A^- digunakan untuk g-inverse yang membedakan dari g-inverse Penrose. Istilah *pseudo-inverse* sering juga digunakan oleh Rao untuk g-inverse.

B. Pembahasan

Definisi . Misalkan A adalah matriks berukuran m x n. Jika suatu matriks A^- ada dan memenuhi empat kondisi berikut yaitu:

1. $A\,A^-$ adalah simetrik
2. $A^-\,A$ adalah simetrik
3. $A\,A^-\,A = A$
4. $A^-A\,A^- = A^-$

maka matriks A^- disebut ***generelized invers*** (invers yang diperumum atau balikan yang diperumum). Terminologi yang digunakan untuk generalized invers adalah **" g-invers**". (Graybill, 1969:97)

Perhatikan contoh berikut ini, di mana matriks A adalah non singular

Misalkan A $= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ didapat $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1 . $A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ adalah simetrik

2. $A^{-1}\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ adalah simetrik

3. $A\,A^{-1}\,A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = A$ dan

4. $A^{-1}A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$

Ternyata bahwa jika A nonsingular maka matriks A^{-1} memenuhi sifat pada definisi .

Berikutnya, jika A matriks persegi dan singular atau jika A bukan matriks persegi, maka yang menjadi permasalahan adalah apakah matriks A^- ada dan memenuhi definisi 1? . untuk menjawab permasalahan ini akan ditunjukkan bahwa untuk setiap matriks A g- invers matriks A^- ada dan unik.

Teorema 1. Jika suatu g-invers dari matriks A berukuran m x n ada, maka matriks tersebut adalah berukuran n x m.

Bukti: Bukti diikuti oleh fakta bahwa A A^{-} adalah simetrik dengan demikian persegi.

Teorem 2. Jika A adalah matriks nol berukuran m x n, maka A^{-} adalah matriks nol berukuran n x m

Bukti : Ternyata jika A = 0 maka $A^{-} = 0$. Sehingga memenuhi syarat pada definisi .

Teorema 3. Untuk setiap matriks A, ada suatu matriks A^{-} yang memenuhi kondisi definisi 1. Jadi setiap matriks mempunyai suatu g-invers.

Bukti: Jika A = 0, maka dari teorema 2 didapat $A^{-} = 0$. Andaikan $A \neq 0$ dan jika A mempunyai rank r > 0 maka A dapat difaktorkan sebagai :

$$A = BC$$

Dimana B matrik berukuran m x r yang mempunyai rank r dan C berukuran r x n dengan rank r. perhatikan bahwa B'B dan CC' kedua-duanya non singular. Jika kita definisikan A^{-} sebagai:

$$A^{-} = C'(CC')^{-1} (B'B)^{-1} B'$$

Catatan : Hadley (1983 :118) mendefinisikan rank suatu matriks adalah jumlah maksimum kolom-kolom yang bebas linear dalam A

Teorema 4. Untuk tiap matriks A ada suatu matriks A^{-} unik yang memenuhi syarat pada definisi. Jadi setiap matriks A mempunyai suatu g-invers unik.

Bukti: Andaikan bahwa A_1^{-} dan A_2^{-} ada dua generalized Invers dari matriks A. Hal ini berarti bahwa A_1^{-} dan A_2^{-} memenuhi syarat pada definisi. Akan kita tunjukkan bahwa $A_1^{-} = A_2^{-}$. Pertama kita tunjukkan bahwa $A\,A_1^{-} = A\,A_2^{-}$. Kalikan dengan $A = A\,A\,A_1^{-}$ sebelah kanan dengan A_2^{-} dan diperoleh :

$$A\,A_2^{-} = A\,A_1^{-}A\,A_2^{-}$$

Dengan memperhatikan definisi , maka ruas kanan adalah simetrik. Jadi

$$A\,A_1^{-}A\,A_2^{-} = [A\,A_1^{-}A\,A_2^{-}]'.$$

Dari sini didapat

$$A\,A_2^{-} = A\,A_1^{-}A\,A_2^{-} = [(A\,A_1^{-})(A\,A_2^{-})]' = (A\,A_2^{-})'(A\,A_1^{-})'$$
$$= (A\,A_2^{-})(A\,A_1^{-}) = A\,A_1^{-}$$

Karena menurut definisi $A\,A_1^{-}$ dan $A\,A_2^{-}$ masing-masingnya adalah simetrik

Dengan cara yang sama (dengan mengalikan $A = A\,A_1^-A$ dengan A_2^- dari sebelah kiri) kita peroleh

$$A_1^-A = A_2^-\,A$$

Dengan menggunakan hasil teorema 4 dan teorema 5 diperoleh:

$$A_1^- = A_1^-A\,A_1^- = (A_1^-\,A)\,A_1^- = (A_2^-\,A)\,A_1^- = A_2^-\,(A\,A_1^-)$$
$$= A_2^-\,A\,A_2^- = A_2^- \text{ (terbukti)}$$

Sifat-sifat g-invers

1. g-inverse dari A transpose adalah transpose dari g-invers A
   Jadi $(A')^- = (A^-)'$
2. g-invers dari A^- adalah sama dengan A. Jadi $(A^-)^- = A$
3. rank g-invers dar A sama dengan rank A
4. Jika rank matriks A sama dengan r, maka rank dari matriks yang berikut ini adalah sama dengan r, yaitu A^-, $A\,A^-$, $A^-\,A$, $A\,A^-\,A$, $A^-\,A\,A^-$
5. Untuk setiap matriks A kita peroleh $(A'\,A)^- = A^-A'^-$
6. Untuk setiap matriks A, kita dapatkan $(A\,A^-)^- = A\,A^-$ dan $(A^-\,A)^- = A^-\,A$
7. Misalkan P adalah suatu matriks orthogonal berukuran m x m, Q adalah suatu matriks orthogonal berukuran n x n dan A sebarang matriks m x n. Maka $(PAQ)^- = Q'\,A^-\,P'$
8. Jika A suatu matriks simetrik, g-invers dari A adalah juga simetrik; jadi jika $A = A'$, maka $A^- = (A^-)'$
9. Jika matriks A adalah nonsingular, maka $A^{-1} = A^-$
10. Jika A adalah matriks simetrik idempotent, maka $A^- = A$; Jadi, jika $A = A'$ dan $A = A^2$, maka $A^- = A$
11. Jika $A = A'$, maka $A\,A^- = A^-\,A$
12. Misalkan D adalah matriks diagonal dengan elemen diagonal d_{ii}; I = 1, 2, 3, …, n. g-invers D adalah D^- adalah matriks diagonal dengan elemen diagonal ke I dari D^- sama dengan d_{ii}^{-1} jika $d_{ii} \neq 0$ dan sama dengan 0 jika $d_{ii} = 0$.

Contoh : Jika D dinyatakan dengan

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ maka } D^- = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13. Jika A adalah matriks berukuran m x n dengan rank m, maka $A^- = A'\,(A\,A')^{-1}$ dan $A\,A^- = I$. Jika rank dari A adalah n, maka $A^- = (A'\,A)^{-1}\,A'$ dan $A^-\,A = I$.
13. matriks $A\,A^-$, A^-A, $I - A\,A^-$, dan $I - A^-A$ semuanya simetrik idompoten.
14. Misalkan B adalah suatu matriks berukuran m x r dengan rank r (r > 0) dan misalkan C adalah matriks r x m dengan rank r; maka $(B\,C)^- = C^-\,B^-$.

Contoh: Carilah A^- (g-inverse dari A) jika diketahui:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solusi:
Gunakan sifat 13 yaitu : $A^- = (A'A)^{-1} A'$
Kita peroleh

$$A'A = \begin{bmatrix} 15 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$$

Karena A'A mempunyai rank 2, maka A'A nonsingular dan

$$(A'A)^{-1} = \frac{1}{141}\begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}$$

Dan $$A^- = \frac{1}{141}\begin{pmatrix} 13 & 30 & -17 & 6 & -4 \\ 18 & 9 & 9 & 30 & 27 \end{pmatrix}$$

C. Penutup

Misalkan A adalah matriks berukuran m x n. Jika suatu matriks A^- ada dan memenuhi empat kondisi berikut yaitu:

1. $A A^-$ adalah simetrik
2. $A^- A$ adalah simetrik
3. $A A^- A = A$
4. $A^- A A^- = A^-$

maka matriks A^- disebut ***generelized inverse*** (inverse yang diperumum atau balikan yang diperumum). Terminologi yang digunakan untuk generalized invers adalah **" g-inverse**".

Daftar Kepustakaan

Anton dan Rorres. 2000. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.
Ayres, Frank. 1985. *Matriks*, Jakarta: Erlangga.
Graybill, Franklin A. 1969. *Introduction to Matrices With Applications in Statistics*. California : Wadsworth Publishing Company, Inc. Belmont,.
Hadley, G. 1983. *Aljabar Linear*. Jakarta: Erlangga.
Perry, William L. 1988. *Elemtary Linear Algebra*. New York: McGraw-Hill International Editions.
Timm, Neil H. 1975. *Multivariate Analysis With Aplication In Education And Psychology*. California: Brooks/ Cole Publishing. Monterey..