

Berkala MIPA, 18(2), Mei 2008

## ANALISIS PORTOFOLIO RESAMPLED EFFICIENT FRONTIER BERDASARKAN OPTIMASI MEAN-VARIANCE

Abdurakhman

Jurusan Matematika FMIPA UGM

### Abstrak

Keputusan alokasi asset yang tepat pada investasi portofolio dapat memaksimalkan keuntungan dan atau meminimalkan risiko. Metode yang sering dipakai dalam optimasi portofolio adalah metode Mean-Variance Markowitz. Dalam prakteknya, metode ini mempunyai kelemahan tidak terlalu stabil. Sedikit perubahan dalam estimasi parameter input menyebabkan perubahan besar pada komposisi portofolio. Untuk itu dikembangkan metode optimasi portofolio yang dapat mengatasi ketidakstabilan metode Mean-Variance dengan memperbanyak input. Salah satu caranya adalah menggunakan Optimasi *Resample Efficient Frontier* (REF) dengan memanfaatkan metode Monte Carlo. Paper ini menampilkan analisis performance hasil investasi pada portofolio menggunakan dua metode optimasi REF dan *Mean-Variance Efficient Portfolio* (MVEP). Hasil uji empiris menunjukkan dua keunggulan metode REF dibandingkan MVEP. Metode REF sangat jarang memberikan strategi *short sell* dan nilai rata-rata *Sharpe* rasio yang lebih baik dibandingkan dengan MVEP terutama pada tingkat resiko minimal.

Kata kunci : Optimasi Portofolio, Mean-Variance, Resampling, Monte Carlo.

### ABSTRACT

Appropriate decisions in asset allocation on investment is aimed to maximize profits and or minimize risk. The method is often used in portfolio optimization is the method of Markowitz Mean-Variance. In practice, this method is not too stable. Little bit changes in the estimation of input parameters cause large changes in portfolio allocation.

In this paper, we use REF (Resampled Efficient Frontier) method to overcome this instability. This paper shows the results of investments in portfolio performance using two optimization methods, REF and Mean-Variance Efficient Portfolio (MVEP). Empirical test results indicate two advantages using REF method : no (rarely) short shell strategies and better value of Sharpe ratio, especially at minimal risk case.

Keywords: Portfolio Optimization, Mean-Variance, resampling, Monte Carlo.

## 1. LATAR BELAKANG

Optimasi *Mean-Variance* Markowitz sangat mudah diaplikasikan untuk menentukan alokasi bobot portofolio. Dibalik kemudahannya, metode ini mempunyai beberapa kelemahan, antara lain ketidakstabilan hasil bobot portofolio. Portofolio MVEP dapat berubah secara dramatis akibat perubahan level *return* dan risiko (Michaud,2007 ; Kohli dan Jasraj, 2005 ; Rasmussen,2003). Sedikit perubahan pada asumsi input terkadang membawa perubahan besar pada bobot portofolio. Disamping itu, MVEP sering menghasilkan bobot portofolio yang negative (*short-sell*).

Untuk itu perlu dikembangkan metode yang dapat mengatasi ketidakstabilan dalam optimasi portofolio. Metode tersebut dikenal dengan istilah *resampled efficiency* yang menggunakan simulasi Monte Carlo untuk menciptakan variasi input optimasi alternatif yang relatif konsisten. Setiap data input optimasi menghasilkan *efficient frontier* yang berbeda. *Efficient frontier* tersebut dirata-rata untuk mendapatkan *resampled efficient frontier*. Portofolio hasil *resampled efficient frontier* lebih stabil dengan diversifikasi yang lebih baik, serta lebih peka bila dibandingkan dengan teknik optimasi *Mean-Variance* klasik yang hanya menggunakan satu data input (Gibson,2007).

## 2. MEMINIMALKAN RISIKO PADA TINGKAT RETURN TERTENTU

Model Markowitz digunakan untuk mendapatkan bobot optimal aset-aset dalam portofolio dengan cara meminimalkan risiko pada tingkat *return* tertentu. Bobot portofolio diperoleh dengan spesifikasi :

$$\text{Meminimalkan } \frac{1}{2} w' \Sigma w \quad (2.1)$$

dengan syarat  $w^T \mu = \bar{r}$  dan  $w^T \bar{1} = 1$

dengan:

- $w$  : bobot masing-masing aset dalam portofolio dalam bentuk vektor
- $\Sigma$  : matriks kovarian antar return aset
- $\mu$  : vektor *return* masing-masing aset
- $\bar{r}$  : besarnya *return* yang diharapkan

Model ini sering memberikan kemungkinan terjadinya *short sell* (bobot  $w < 0$ ). Proses *short selling* atau *shorting* mengharuskan investor meminjam saham dari pihak lain, kemudian secepatnya menjual saham tersebut untuk membeli asset yang lain dalam komposisi portofolio.

Permasalahan optimasi pada persamaan (2.1) dapat diselesaikan dengan metode *Lagrange* dan diperoleh solusi sebagai berikut.

$$w_p = \frac{1}{S} \begin{bmatrix} (P \cdot \Sigma^{-1} \bar{1} - Q \cdot \Sigma^{-1} \mu) \\ + (R \cdot \Sigma^{-1} \mu - Q \cdot \Sigma^{-1} \bar{1}) \cdot \bar{r} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

dengan

$$P = \mu^T \Sigma^{-1} \mu ; Q = \bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu \\ R = \bar{1}^T \Sigma^{-1} \bar{1} ; S = P \cdot R - Q^2$$

Formula bobot di atas dapat ditulis  $w_p = g + h \cdot \bar{r}$  dengan

$$g = \frac{1}{S} (P \cdot \Sigma^{-1} \bar{1} - Q \cdot \Sigma^{-1} \mu) ; \\ h = \frac{1}{S} (R \cdot \Sigma^{-1} \mu - Q \cdot \Sigma^{-1} \bar{1})$$

Bobot portofolio MVEP diperoleh dengan memasukkan target *return* tertentu ( $\bar{r}$ ) pada persamaan (2.2), sehingga diperoleh portofolio dengan risiko minimal pada tingkat *return* yang diharapkan. Fungsi  $h \cdot \bar{r}$  dapat disebut sebagai bobot spekulasi untuk suatu tingkat *return*, sedangkan fungsi

g dapat disebut sebagai bobot yang memiliki variansi minimum atau *Global Minimum Variance Portfolio* (GMVP). Selanjutnya persamaan (2.2) dapat ditulis

$$w_p = w_{min} + w_{spec} \quad (2.3)$$

Bobot portofolio GMVP yang diselesaikan dengan metode *Lagrange* mempunyai formula sebagai berikut :

$$w_{min} = \frac{\Sigma^{-1} \bar{1}}{\bar{1}^T \Sigma^{-1} \bar{1}} \quad (2.4)$$

### 3. PENDEKATAN MONTE CARLO PADA OPTIMASI MEAN-VARIANCE

Teknik *Resampled Efficient Frontier* (REF) menggunakan simulasi Monte Carlo dalam teori portofolio dimaksudkan untuk memperbanyak input *Mean-Variance* Markowitz dalam menentukan portofolio yang efisien (Meucci, 2005). Monte Carlo merupakan suatu prosedur simulasi dengan menggunakan penarikan bilangan random dari sebuah distribusi probabilitas, dan menggunakannya sebagai input dalam proses matematis. Teknik simulasi Monte Carlo dalam portofolio sangat bermanfaat karena dapat melakukan komputasi pengambilan sampel sebanyak-banyaknya, sehingga menghasilkan tingkat kesalahan yang relative kecil. *Return* setiap aset disimulasikan berdasarkan distribusi probabilitas tertentu berdasar data historis *return* saham-saham. Portofolio resampling dapat digunakan untuk mengurangi efek *error* estimasi. Melalui proses *resampling*, akan diperoleh input optimasi yang dapat dibandingkan dengan rata-rata dan variansi data sampel. Pada percobaan simulasi Monte Carlo, vektor-vektor rata-rata ( $\mu$ ) dan matriks-matriks kovariansi ( $\Sigma$ ) dihitung dari masing-masing harga

saham. Selanjutnya dari sebanyak A saham, diambil sampel masing-masing berukuran T.

### 4. PROSEDUR PEMBENTUKAN PORTOFOLIO DENGAN METODE RESAMPLING

Berikut ini diberikan langkah-langkah *resampling* untuk menentukan bobot portofolio efisien :

1. Mengambil data observasi sebanyak T dari A aset saham pada data historis. Kemudian mengestimasi nilai rata-rata dan matrik kovariansi *return* sebagai kerangka kerja MVEP.

$$\hat{\mu}_0 = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mu}_A \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\hat{\Sigma}_0 = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2 & \hat{\sigma}_{12} & \cdots & \hat{\sigma}_{1A} \\ \hat{\sigma}_{21} & \hat{\sigma}_2^2 & \cdots & \hat{\sigma}_{2A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}_{A1} & \hat{\sigma}_{A2} & \cdots & \hat{\sigma}_A^2 \end{bmatrix}$$

atau,

$$r_1 \sim N(\hat{\mu}_1, \hat{\sigma}_1)$$

⋮

$$r_A \sim N(\hat{\mu}_A, \hat{\sigma}_A)$$

2. Berdasarkan *return*  $i_A$ , dibuat distribusi probabilitas *return* setiap aset :  $R_1, \dots, R_A$  berdistribusi normal.
3. Melakukan resampel *return* berukuran T sebanyak Q kali dengan skenario Monte Carlo berdasarkan parameter distribusi normal :

$$i_{qA} = \{r_{q1}, r_{q2}, \dots, r_{qA}\},$$

$$q = 1, 2, \dots, Q$$

sehingga diperoleh kumpulan data input  $(\hat{\mu}_1, \hat{\Sigma}_1)$  hingga  $(\hat{\mu}_Q, \hat{\Sigma}_Q)$ .

4. Menentukan titik-titik *efficient frontier*

a. Menghitung GMVP untuk setiap *input* optimasi :

$$w_{qMV} = \min_{w^T \mathbf{1} = 1} w^T \hat{\Sigma}_q w, \\ q = 1, 2, \dots, Q$$

b. Menghitung estimasi masing-masing nilai **ekspektasi return portofolio** dari GMVP :

$$\bar{r}_q = (w_{qMV})^T \hat{\mu}_q,$$

c. Menghitung estimasi nilai *return* maksimum dari masing-masing A aset :  $\bar{r}_q$

d. Membuat interval *return* mulai dari nilai *return* portofolio yang diperoleh dari GMVP sampai dengan *return* maksimal,  $\{\bar{r}_q^{(1)}, \bar{r}_q^{(2)}, \dots, \bar{r}_q^{(I)}\}$ . Untuk setiap *q* dipunyai nilai *return*:

$$\bar{r}_q^{(1)} = \bar{r}_q, \\ \vdots \\ \bar{r}_q^{(i)} = \bar{r}_q + \frac{\bar{r}_q - \bar{r}_q}{I-1} (i-1), \\ \vdots \\ \bar{r}_q^{(I)} = \bar{r}_q$$

e. Membuat I titik-titik efisien frontier *Mean-Variance* pada persamaan (2.1) untuk seluruh Q skenario Monte Carlo

$$w_q^{(i)} = \min_{\substack{w^T \mathbf{1} = 1 \\ w^T \hat{\mu}_q = \bar{r}_q^{(i)}}} w^T \hat{\Sigma}_q w$$

5. Menentukan *resampled efficient frontier* pada masing-masing I titik sebagai rata-rata Q bobot portofolio :

$$w_{resampled}^{(i)} = \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q w_q^{(i)},$$

$$i = 1, 2, \dots, I$$

## 5. ANALISIS DATA STUDI KASUS

### 5.1 Data

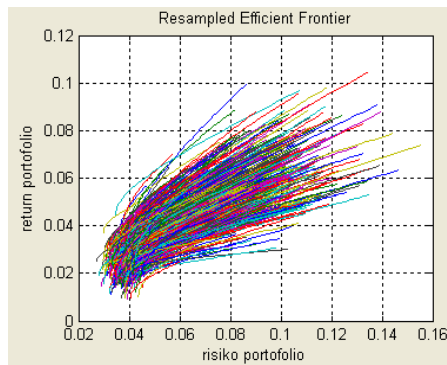
Pada paper ini ditampilkan hasil analisis data perbandingan kedua metode di atas. Data diambil dari investasi pada beberapa saham yang terdaftar di Bursa Efek Indonesia (BEI), terutama saham-saham yang menjadi anggota Indeks LQ-45. Saham-saham tersebut meliputi AALI, ASII, BBRI, INDF, ISAT, MEDC, PNB, SMCB, dan UNVR. Data yang dipergunakan merupakan data historis harga saham bulanan periode Januari 2004-Januari 2008.

### 5.2 Hasil dan Pembahasan

Proses simulasi Monte Carlo *resampling* dilakukan sebanyak 700 kali. Untuk masing-masing simulasi dihitung 25 titik efisien frontier. Gambar 5.1 menunjukkan 25 titik-titik *efficient frontier*. Bobot portofolio dihitung pada masing-masing titik *efficient frontier* yang terbentuk, sehingga diperoleh *return* dan risiko portofolio untuk setiap titik (target *return*). Panjang *efficient frontier* untuk setiap data tergantung besarnya rentang antara *return* GMVP dan *return* terbesar dari saham anggota portofolio.

Dari plot *efficient frontier* pada gambar 5.1, dapat dilihat pada tingkat risiko minimal titik-titik *return*nya lebih kompak dibandingkan dengan titik-titik *return* pada tingkat risiko menengah maupun maksimal. Berdasarkan hasil tersebut, penentuan portofolio optimal lebih difokuskan pada risiko minimal.

Selanjutnya dari hasil beberapa perhitungan bobot portofolio dapat diperoleh kecenderungan metode MVEP banyak menghasilkan bobot portofolio negatif atau dalam istilah investasi mengandung strategi *short sell*.



**Gambar 5.1 700 Resampled pada 25 titik efficient frontier.**

Sedangkan metode REF sangat jarang mengandung *short sell*. *Short shell* adalah kegiatan meminjam saham ke pihak lain untuk secepatnya dijual dengan harapan harga sahamnya akan turun. Salah satu bobot portofolio kedua metode tersebut dari 9 bobot portofolio untuk analisis data studi kasus ditampilkan pada tabel 5.1 di bawah.

**Tabel 5.1 persentase bobot portofolio 7 saham**

Saham	MVEP	REF
ASII	-6.51	13.64
BBRI	11.81	13.82
INDF	20.7	11.48
ISAT	62.05	24.56
MEDC	29.42	12.82
PNBN	5.48	14.68
SMCB	-23.32	9
<b>Sharpe Rasio</b>	<b>0.157</b>	<b>0.264</b>

Tabel 5.1 menyajikan satu contoh dari portofolio REF dan MVEP. Dapat dilihat metode MVEP menghasilkan strategi *short sell* pada saham SMCB (semen Cibinong) dan saham ASII (Astra). Ini artinya investor harus mencari pinjaman kedua saham tersebut masing-masing sebesar 6.51% dan 23,32% dari total dana investasi, selanjutnya menjual saham tersebut. Uang hasil penjualan kedua saham tersebut digunakan untuk tambahan

membeli saham-saham lainnya. Tentu saja melakukan *short sell* tidaklah mudah. Jika investor tidak mendapat saham pinjaman, maka otomatis portofolio MVEP di atas tidak dapat dijalankan. Bahkan beberapa negara melarang praktek *short shell*. Karena praktek ini diyakini dapat mengacaukan pasar saham dan ditengarai dapat menyebabkan krisis ekonomi.

Sebaliknya metode REF tidak menghasilkan strategi *short sell*. Hal ini mempermudah investor untuk menjalankan portofolio tersebut karena tidak ada keharusan meminjam saham dari pihak lain. Dapat dikatakan di sini bahwa metode REF lebih praktis untuk dijalankan dibandingkan metode MVEP.

Selanjutnya pada tabel 5.2 di bawah ini disajikan perbandingan nilai *Sharpe* rasio dari beberapa portofolio antara metode MVEP dan REF. Nilai rata-rata *Sharpe* rasio metode REF 0.264 lebih besar dibandingkan dengan nilai *Sharpe* rasio metode MVEP 0.157. Artinya metode REF menjanjikan keuntungan lebih besar dibandingkan dengan metode MVEP.

**Tabel 5.2 Ukuran Sharp Rasio pada beberapa portofolio**

No	MVEP	REF
1	0.1	0.103
2	0.279	0.316
3	0.157	0.264
4	0.271	0.287
5	0.163	0.252
6	0.27	0.276
7	0.266	0.276
8	0.169	0.247
9	0.27	0.318
<b>Rata2</b>	<b>0.217</b>	<b>0.326</b>

Besaran *Sharpe* rasio pada tabel 5.2 untuk metode MVEP menghasilkan rata-rata *Sharpe* rasio 0.217, sedangkan metode REF menghasilkan rata-rata 0.26. Artinya, berdasarkan nilai *Sharpe* rasio, metode REF mempunyai peluang menghasilkan *return* portofolio yang lebih besar dan tingkat resiko

yang lebih kecil dibandingkan dengan metode MVEP.

Berdasarkan kelebihan-kelebihan metode REF yang disajikan di atas dibandingkan metode MVEP, sangat disarankan menggunakan metode REF dalam menentukan bobot portofolio.

### 5.3 Perbandingan Performa Portofolio Kedua Metode

Selanjutnya ingin dilihat performa kedua metode di pasar saham yang sesungguhnya. Seorang investor memiliki modal Rp 100 juta rupiah diinvestasikan pada ketujuh saham di atas. Saham-saham tersebut dibeli pada tanggal 7 Februari 2008 kemudian dijual tanggal 7 Maret 2008 atau satu bulan kemudian (sesuai dengan periode *return* saham). Transaksi pembelian dan penjualan saham dilakukan berdasarkan harga saham pembukaan pada hari transaksi. Ilustrasi performa portofolio dari kedua metode di atas ditampilkan secara lengkap dalam tabel 5.3.

**Tabel 5.3 Perbandingan hasil investasi portofolio kedua metode**

Saham	MVEP	REF
ASII	-606,864.41	1,271,525.42
BBRI	825,874.13	966,433.57
INDF	1,934,579.44	1,072,897.20
ISAT	579,906.54	229,532.71
MEDC	4,093,217.39	1,783,652.17
PNBN	803,733.33	2,153,066.67
SMCB	-444,190.48	171,428.57
<b>Keuntungan</b>	<b>7,186,255.95</b>	<b>7,648,536.31</b>

Perbandingan performa portofolio pada Tabel 5.3 menunjukkan perbedaan keuntungan yang diperoleh investor dari kedua metode. Dapat dilihat dari tabel 5.3, metode REF memberikan keuntungan yang lebih stabil (semua saham untung)

dibandingkan dengan MVEP (saham ASII dan SMCB rugi). Disamping itu, metode REF juga memberikan keuntungan yang lebih besar. Secara umum, dari hasil analisis data di lapangan metode REF menghasilkan rata-rata keuntungan yang lebih besar dibandingkan dengan metode MVEP.

## 6. KESIMPULAN

Metode *Resampled Efficient Frontier* dapat dijadikan alternatif untuk menyempurnakan input *Mean-Variance* pada metode MVEP dengan cara menggunakan simulasi Monte Carlo. Secara empiris terbukti metode *Resampled Efficient Frontier* memberikan hasil yang lebih akomodatif (sangat jarang mengandung strategi *short sell*), dan memberikan nilai rata-rata *Sharpe* rasio yang lebih besar dibandingkan dengan metode MVEP. Dengan kata lain, dapat disimpulkan di sini secara empiris metode REF lebih baik dibandingkan dengan metode MVEP.

## DAFTAR PUSTAKA

- Gibson, Roger C., 2007, *Asset Allocation Balancing Financial Risk*, edisi keempat, McGraw-Hill, Inc.
- Kohli, Jasraj, 2005, *An Empirical Analysis of Resample Efficiency*, *Tesis*, Worcester Polytechnic Institute, Massachusetts.
- Meucci, Attilio, 2005, *Risk and Asset Allocation*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.
- Michaud, Richard O. dan Robert O. Michaud, 2007, *Efficient Asset Management*, edisi kedua, Oxford University Press, Inc., New York.
- Rasmussen, Mikkell, 2003, *Quantitative Portfolio Optimisation, Asset Allocation and Risk Management*, Palgrave Macmillan, New York.