Efektifitas Hedging dalam Mitigasi Risiko Mortalitas dan Risiko Longevity

(The Hedging Effectiveness of Mortality and Longevity Risks Mitigation)

Nurdianti Rizki Hapsari[1], Danang Teguh Qoyyimi[2]
[1]Departemen Matematika, FMIPA UGM, Yogyakarta
[2]Departemen Matematika, FMIPA UGM, Yogyakarta
email : [1]nurdianti.rizki.h@gmail.com, [2]qoyyimi@ugm.ac.id

INTISARI

Hedging merupakan salah satu alternatif bagi perusahaan asuransi jiwa dan penyedia anuitas untuk mengelola risiko mortalitas dan risiko *longevity*. Strategi *hedging* dilakukan dengan membeli *mortality-linked securities* dari perantara keuangan. Unit optimal *mortality-linked securities* yang memaksimalkan efektifitas *hedging* diturunkan melalui solusi *closed-form* dari skema *hedging* tersebut. Model mortalitas yang digunakan pada skema *hedging* ini adalah model Lee-Carter. Metode peramalan Lee-Carter menjadi salah satu yang paling dikenal dan telah sukses diterapkan di berbagai negara untuk meramalkan tingkat kematian penduduk. Pengujian empiris dilakukan dengan menggunakan data penduduk negara Chili. Implementasi tersebut menghasilkan tingkat efektitas *hedging* sebesar 74% terhadap risiko mortalitas dan 72% terhadap risiko *longevity*.

Kata Kunci : *hedging*, mortalitas, *longevity*, *hedge effectiveness*, Lee-Carter.

ABSTRACT

Hedging is one of alternative method for life insurance companies and annuities providers (pension funds) to manage mortality and longevity risk. Hedging strategy is done by buying a mortality-linked securities from financial intermediaries. The optimal unit of mortality-linked securities that maximize the effectiveness of hedging is derived through the closed form solution of the hedging scheme. Mortality model used in this hedging schemes is Lee-Carter model. Forecasting method of Lee-Carter becomes one of the most well-known and has been successfully applied in many countries to predict the mortality rate of the population. Empirical test was done using Chilean population data. The implementation resulted in a 74% level of hedging effectiveness against mortality risk and 72% to longevity risk.

Keywords : hedging, mortality, longevity, hedge effectiveness, Lee-Carter.

1. Pendahuluan

Ketidakpastian usia harapan hidup di negara industri maupun negara berkembang menjadi topik penting yang menarik perhatian peneliti di dunia beberapa tahun terakhir. Peningkatan usia harapan hidup atau tingkat mortalitas pada kadar tertentu akan menjadi masalah bagi penyedia anuitas dan perusahaan asuransi jiwa terkait manfaat yang diberikan.

Ronald D. Lee dan Lawrence R.Carter mempublikasikan model peramalan mortalitas yang merupakan kombinasi dari model demografi dan model *time-series* [4]. Hasil peramalan tingkat kematian digunakan untuk mengkonstruksi skema *hedging* yang dipublikasikan oleh Lin dan Tsai (2015). Tzuling Lin dan Cary Chi-Liang Tsai mempublikasikan strategi *hedging* menggunakan *mortality-linked security*. Pada skema tersebut, perusahaan asuransi jiwa dan penyedia anuitas membeli produk derivatif dari perantara keuangan untuk memitigasi risiko ketidakpastian usia harapan hidup.

Pitacco, et al (2009) memperkenalkan strategi portofolio diantaranya natural *hedging*, reinsurance dan *alternative risk transfers*. *Alternative Risk Transfers* dapat berupa *life insurance securitization* dan *mortality-linked securities* [8]. *Mortality-linked securities* ini digunakan oleh Lin dan Tsai (2015) untuk membuat skema *hedging* perusahaan asuransi jiwa dan penyedia anuitas melalui perantara keuangan yang dinilai lebih menguntungkan dibandingkan dengan strategi natural *hedging* maupun reasuransi.

2. Skema Hedging

2.1. Perusahaan Asuransi Jiwa

Tingkat kematian pusat untuk individu berusia x di tahun t dinotasikan dengan $\tilde{m}_{x,t}^{L}$. Didefinisikan $Y = \tilde{m}_{x,t}^{L}$ dan diasumsikan $\tilde{m}_{x,t}^{L} \sim LN(\mu_L, \sigma_L{}^2)$ dengan fungsi distribusi $F_{Y_L} = \Phi(\frac{\ln(y) - \mu_L}{\sigma_L})$, dalam hal ini Φ adalah fungsi distribusi kumulatif normal standar.

Didefinisikan fungsi kerugian per unit eksposure dari suatu perusahaan asuransi jiwa tanpa *hedging* ataupun jenis *risk transfer* lainnya adalah $L_L = Y_L - E[Y_L]$.

Perusahaan asuransi membayar premi *hedging* sebesar $u_l E[(Y_L - y_l)_+]$ kepada perantara keuangan dengan $(Y_L - y_l)_+ = maks(Y_L - y_l, 0)$ dan u_l merupakan jumlah unit instrumen keuangan yang digunakan. Sehingga, fungsi kerugian perusahaan asuransi dengan menggunakan strategi *hedging* adalah sebesar

$$L_L = Y_L - E[Y_L] - u_l\{(Y_L - y_l)_+ - E[(Y_L - y_l)_+]\} \quad (2).$$

Selanjutnya, efektifitas *hedging* diukur melalui rasio variansi berikut

$$HE(u_l) = 1 - \frac{\sigma^2[L_L(u_l)]}{\sigma^2[L_L]} \quad (3).$$

Nilai u_l akan ditentukan sedemikian sehingga memaksimalkan $HE(u_l)$ atau meminimalkan $\sigma^2[L_L(u_l)]$. Persamaan (2) dapat dituliskan menjadi $L_L = X_1 - u_l X_2$ dengan $X_1 = Y_L - E[Y_L]$ dan $X_2 = (Y_L - y_l)_+ - E[(Y_L - y_l)_+]$ adalah variabel random dan u_l merupakan suatu nilai konstan. Diperoleh

$$Var[L_L(u_l)] = Var[Y_L] - 2u_l Cov[Y_L, (Y_L - y_l)_+] + u_l{}^2 Var(Y_L - y_l)_+ \quad (4).$$

Sehingga, unit optimal yang meminimalkan persamaan (4) adalah

$$\hat{u}_l = \frac{Cov[Y_L, (Y_L - y_l)_+]}{Var[(Y_L - y_l)_+]} \quad (5).$$

Diperhatikan bahwa $Y_L(Y_L - y_l)_+$ dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} Y_L(Y_L - y_l)_+ &= ((Y_L - y_l)_+ + y_l)(Y_L - y_l)_+ \\ &= [(Y_L - y_l)_+]^2 + y_l(Y_L - y_l)_+ \end{aligned}$$

sehingga $\hat{u}_l$ pada (5) menjadi $\hat{u}_l = \frac{E\{[(Y_L - y_l)_+]^2\} - E[Y_L - y_l]E[(Y_L - y_l)_+]}{E\{[(Y_L - y_l)_+]^2\} - \{E[(Y_L - y_l)_+]\}^2}$. Jika nilai $y_l = E[Y_L]$, maka

$$\hat{u}_l = \frac{E\{[(Y_L - y_l)_+]^2\}}{E\{[(Y_L - y_l)_+]^2\} - \{E[(Y_L - y_l)_+]\}^2} > 1 \qquad (6).$$

Lemma 3.1

Diberikan $W \sim N(\mu, \sigma^2)$ *dengan mean* μ *dan variansi* σ^2. *Jika* $Y = e^W \sim LN(\mu, \sigma^2)$ *dengan* $E[Y^\gamma] = e^{\gamma\mu + \frac{\gamma^2\sigma^2}{2}}$ *, maka diperoleh:*

a. $E[(Y - y_0)_+] = E[Y]\Phi(-y_0(1, \mu, \sigma^2)) - y_0\Phi(-y_0(0, \mu, \sigma^2))$

b. $$E\{[(Y - y_0)_+]^2\} = E[Y^2]\Phi(-y_0(2, \mu, \sigma^2)) - 2y_0E[Y]\Phi(-y_0(1, \mu, \sigma^2)) + y_0^2\Phi(-y_0(0, \mu, \sigma^2))$$

c. $E[(y_0 - Y)_+] = -E[Y]\Phi(y_0(1, \mu, \sigma^2)) + y_0\Phi(y_0(0, \mu, \sigma^2))$

d. $$E\{[(y_0 - Y)_+]^2\} = E[Y^2]\Phi(y_0(2, \mu, \sigma^2)) - 2y_0E[Y]\Phi(y_0(1, \mu, \sigma^2)) + y_0^2\Phi(y_0(0, \mu, \sigma^2))$$

dengan $y_0(\gamma, \mu, \sigma^2) \triangleq \dfrac{[\ln(y_0) - \mu - \gamma\sigma^2]}{\sigma}$.

Bukti.

Oleh karena $Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$ *, maka diperoleh:*

$$\begin{aligned}\int_0^{y_0} y^\gamma f_Y(y)dy &= \int_0^{y_0} y^\gamma \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\ln(y)-\mu}{\sigma})^2} dy \\ &= e^{\gamma\mu + \frac{\sigma^2\gamma^2}{2}} \Phi(y_0(\gamma, \mu, \sigma^2))\end{aligned} \qquad (7)$$

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{\infty} y^\gamma f_Y(y)dy &= \int_0^{\infty} y^\gamma f_Y(y)dy - \int_0^{y_0} y^\gamma f_Y(y)dy \\ &= E[Y^\gamma]\Phi(-y_0(\gamma, \mu, \sigma^2))\end{aligned} \qquad (8).$$

Persamaan (7) dan (8) digunakan dalam pembuktian Lemma 3.1 berikut.

a. $$\begin{aligned}E[(Y - y_0)_+] &= \int_{y_0}^{\infty} (y - y_0) f(y)dy \\ &= E[Y]\Phi(-y_0(1, \mu, \sigma^2)) - y_0(1 - F_Y(y_0)) \\ &= E[Y]\Phi(-y_0(1, \mu, \sigma^2)) - y_0\Phi(-y_0(0, \mu, \sigma^2))\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}E\{[(Y - y_0)_+]^2\} &= \int_{y_0}^{\infty} (y - y_0)^2 f(y)dy \\ &= E[Y^2]\Phi(-y_0(2, \mu, \sigma^2)) - 2y_0E[Y]\Phi(-y_0(1, \mu, \sigma^2)) \\ &\quad + y_0^2\Phi(-y_0(0, \mu, \sigma^2))\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}E[(y_0 - Y)_+] &= \int_0^{y_0} (y_0 - y) f(y)dy \\ &= -E[Y]\Phi(y_0(1, \mu, \sigma^2)) + y_0\Phi(y_0(0, \mu, \sigma^2))\end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned} E\{[(y_0-Y)_+]^2\} &= \int_0^{y_0}(y_0-y)^2 f(y)dy \\ &= E[Y^2]\Phi(y_0(2,\mu,\sigma^2)) - 2y_0E[Y]\Phi(y_0(1,\mu,\sigma^2)) \\ &\quad + y_0^2\Phi(y_0(0,\mu,\sigma^2)) \end{aligned}$$

Jika $y_0 = E[Y] = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$, maka

$$\begin{aligned} y_0(0,\mu,\sigma^2) &= \frac{\sigma}{2}; \\ y_0(1,\mu,\sigma^2) &= -\frac{\sigma}{2}; \\ y_0(2,\mu,\sigma^2) &= -\frac{3\sigma}{2}. \end{aligned} \quad (9).$$

Akibat 3.2

Jika $y_0 = E[Y] = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ *maka*

a. $E[(Y-y_0)_+] = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}[2\Phi(\frac{\sigma}{2})-1]$

b. $E\{[(Y-y_0)_+]^2\} = e^{2\mu+2\sigma^2}\Phi(\frac{3\sigma}{2}) + e^{2\mu+\sigma^2}[1-3\Phi(\frac{\sigma}{2})]$

c. $E[(y_0-Y)_+] = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}[2\Phi(\frac{\sigma}{2})-1] = E[(Y-y_0)_+]$

d. $E\{[(y_0-Y)_+]^2\} = e^{2\mu+2\sigma^2}[1-\Phi(\frac{3\sigma}{2})] + e^{2\mu+\sigma^2}[3\Phi(\frac{\sigma}{2})-2]$

Berdasarkan Lemma 3.1 dan Akibat 3.2, diperoleh nilai optimal $\hat{u}_l$ yaitu

$$\hat{u}_l = \frac{E\{[(Y_L-y_l)_+]^2\}}{E\{[(Y_L-y_l)_+]^2\} - \{E[(Y_L-y_l)_+]\}^2} \quad (10)$$

dengan $E\{[(Y_L-y_l)_+]^2\} = e^{2\mu+2\sigma^2}\Phi(\frac{3\sigma}{2}) + e^{2\mu+\sigma^2}[1-3\Phi(\frac{\sigma}{2})]$

dan $\{E[(Y_L-y_l)_+]\}^2 = \{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}[2\Phi(\frac{\sigma}{2})-1]\}^2$.

2.2. Penyedia Anuitas

Didefinisikan $Z_A = 1-Y_A = 1-\tilde{m}_{x,t}^A$ dan diasumsikan $\tilde{m}_{x,t}^A \sim LN(\mu_A,\sigma_A^2)$ sehingga fungsi kerugian per unit eksposure dari suatu penyedia anuitas tanpa *hedging* ataupun jenis *risk transfer* lainnya adalah sebagai berikut

$$L_A = Z_A - E[Z_A] = E[Y_A] - Y_A$$

dengan $E[Z_A] = 1 - E[\tilde{m}_{x,t}^A]$ menyatakan manfaat yang akan dibayarkan kepada anuitan per unit eksposure.

Penyedia anuitas membayar premi *hedging* sebesar $u_a.E[(Z_A - z_a)_+]$ kepada perantara keuangan dengan $(Z_A - z_a)_+ = (y_a - Y_A)_+ = \text{maks}(y_a - Y_A, 0)$, sehingga $z_a = 1 - y_a$ dan u_a merupakan jumlah unit instrumen keuangan yang digunakan. Sehingga, fungsi kerugian penyedia anuitas dengan menggunakan strategi *hedging*, menjadi

$$L_A(u_a) = E[Y_A] - Y_A - u_a.\{(y_a - Y_A)_+ - E[(y_a - Y_A)_+]\} \quad (11).$$

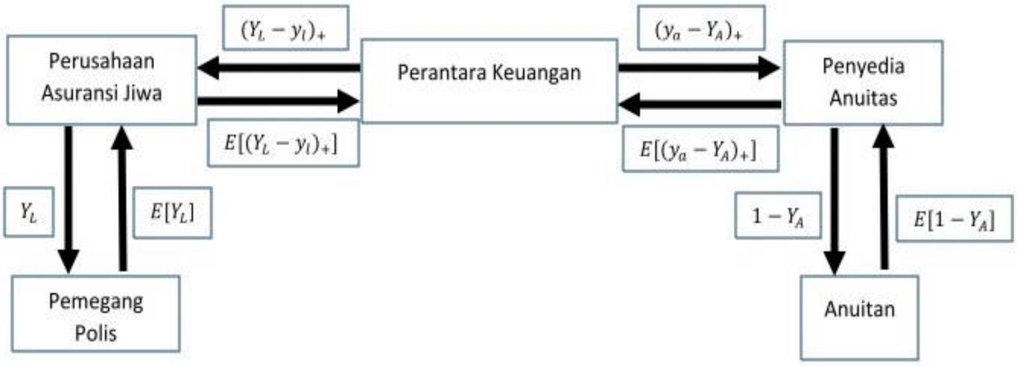

Fig 1 : Diagram *Cash Flows*

Berdasarkan persamaan (11) diperoleh

$$\hat{u}_a = -\frac{Cov[Y_A, (y_a - Y_A)_+]}{Var[(y_a - Y_A)_+]} \quad (12).$$

Diperhatikan bahwa $Y_A(y_a - Y_A)_+$ dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} Y_A(y_a - Y_A)_+ &= [-(y_a - Y_A)_+ + y_a](y_a - Y_A)_+ \\ &= -[(y_a - Y_A)_+]^2 + y_a(y_a - Y_A)_+ \end{aligned}$$

sehingga $\hat{u}_a$ pada (12) menjadi $\hat{u}_a = \dfrac{E\{[(y_a - Y_A)_+]^2\} - E[y_a - Y_a]E[(y_a - Y_A)_+]}{E\{[(y_a - Y_A)_+]^2\} - \{E[(y_a - Y_A)_+]\}^2}$.

Jika nilai $y_a = E[Y_A]$, maka

$$\hat{u}_a = \frac{E\{[(y_a - Y_A)_+]^2\}}{E\{[(y_a - Y_A)_+]^2\} - \{E[(y_a - Y_A)_+]\}^2} \quad (13)$$

dengan

$$E\{[(y_a - Y_A)_+]^2\} = e^{2\mu + 2\sigma^2}[1 - \Phi(\frac{3\sigma}{2})] + e^{2\mu + \sigma^2}[3\Phi(\frac{\sigma}{2}) - 2] \text{ dan}$$

$$\{E[(y_a - Y_A)_+]\}^2 = \{e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}[2\Phi(\frac{\sigma}{2}) - 1]\}^2.$$

3. Model Lee-Carter

Didefinisikan model mortalitas untuk rentang usia $[x_L, x_U]$ dan rentang waktu $[t_L, t_U]$, sebagai berikut

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \varepsilon_{x,t} \tag{14}$$

dengan a_x, b_x, k_t dan $\varepsilon_{x,t}$ berturut-turut merupakan rata-rata tingkat kematian usia x, perubahan tingkat kematian usia x akibat perubahan parameter k_t, tingkat kematian penduduk pada waktu t dan random error (*white noise process*).

Lee dan Carter memodelkan *trend* waktu k_t sebagai random walk dengan *drift*, yaitu

$$k_t = \theta + k_{t-1} + \varepsilon_t \tag{15}$$

dengan $\varepsilon_t \overset{\text{i.i.d}}{\sim} N(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Estimasi parameter *drift* dan variansi model (15) adalah

$$\hat{\theta} = \frac{k_T - k_1}{T - 1} \tag{16}$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{T-2} \sum_{t=2}^{T} (k_t - k_{t-1} - \hat{\theta})^2 \tag{17}.$$

Peramalan k_t pada waktu $T + (\Delta t)$ dengan data tersedia hingga periode T, menggunakan iterasi persamaan (15) sebanyak Δt kali, diperoleh

$$k_{T+\Delta t} = \Delta t.\theta + k_T + \sum_{l=1}^{\Delta t} \varepsilon_{T+l} \tag{18}.$$

Variabel random ε_t diasumsikan independen dengan variansi yang sama yaitu σ_ε^2 sehingga elemen ketiga pada persamaan (18) berdistribusi normal dengan variansi $(\Delta t)\sigma_\varepsilon^2$. Oleh karena itu, $\sum_{l=1}^{\Delta t} \varepsilon_{T+l}$ memiliki distribusi yang sama dengan variabel $\sqrt{(\Delta t)}\varepsilon_t$. Sehingga, persamaan (18) dapat ditulis menjadi

$$k_{T+\Delta t} = \Delta t.\theta + k_T + \sqrt{(\Delta t)}\varepsilon_t \tag{19}.$$

Berdasarkan persamaan (14) dan (19), diperoleh peramalan tingkat kematian pusat pada waktu $t_U + \tau$, yaitu

$$\begin{aligned} \ln(\tilde{m}_{x,t_U+\tau}) &= E[\ln(m_{x,t_U+\tau})] \\ &= \{\ln(\hat{m}_{x,t_U+\tau})\} + \hat{b}_x \sqrt{(\tau)}\tilde{\varepsilon}_\tau \} \end{aligned} \tag{20}.$$

Jika *hedging* yang dilakukan adalah dalam periode satu tahun, maka $\tau = 1$.

4. Unit Optimal

Hasil peramalan Lee Carter menjadi dasar penentuan unit optimal instrumen keuangan agar *hedging* dapat efektif dilakukan untuk mitigasi risiko mortalitas pada perusahaan asuransi jiwa dan risiko *longevity* pada penyedia anuitas. Didefinisikan $W = \ln(\tilde{m}_{x,t_U+\tau}) = \ln(\hat{m}_{x,t_U+\tau}) + \hat{b}_x \sqrt{(\tau)}\tilde{\varepsilon}_\tau$ berdistribusi normal dengan $\mu_{x,\tau} = \hat{a}_x + \hat{b}_x(\tau\hat{\theta} + \hat{k}_{t_U})$ dan $\hat{\sigma}_{x,\tau}^2 = \hat{b}_x^2 \tau \hat{\sigma}_\varepsilon^2$.

Selanjutnya, didefinisikan

$$
\begin{aligned}
Y &= e^{W} \\
&= e^{\hat{a}_x+\hat{b}_x(\hat{k}_{t_U}+\tau\bar{\theta})+\hat{b}_x\sqrt{(\tau)}\tilde{\epsilon}_\tau} .
\end{aligned}
$$

Berdasarkan Lemma 3.1 $E[Y^{\gamma}]=e^{\gamma\mu+\frac{\gamma^2\sigma^2}{2}}$, sehingga diperoleh

$$
\begin{aligned}
E[Y] &= e^{\hat{a}_x+\hat{b}_x(\tau\hat{\theta}+\hat{k}_{t_U})+\frac{\hat{b}_x^2\tau\hat{\sigma}_\epsilon^2}{2}} \\
E[Y^2] &= e^{2\hat{a}_x+\hat{b}_x(\tau\hat{\theta}+\hat{k}_{t_U})+2\hat{b}_x^2\tau\hat{\sigma}_\epsilon^2} .
\end{aligned}
$$

Jika $y_0=E[Y]=e^{\hat{a}_x+\hat{b}_x(\tau\hat{\theta}+\hat{k}_{t_U})+\frac{\hat{b}_x^2\tau\hat{\sigma}_\epsilon^2}{2}}$, maka persamaan (9) menjadi

$$
\begin{aligned}
y_0(0,\mu,\sigma^2) &= \frac{\sqrt{\tau}\hat{b}_x\hat{\sigma}_\epsilon}{2}; \\
y_0(1,\mu,\sigma^2) &= -\frac{\sqrt{\tau}\hat{b}_x\hat{\sigma}_\epsilon}{2}; \\
y_0(2,\mu,\sigma^2) &= -\frac{3}{2}\sqrt{\tau}\hat{b}_x\hat{\sigma}_\epsilon
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Akibat 4.1

Jika $y_0=E[Y]=e^{\hat{a}_x+\hat{b}_x(\tau\hat{\theta}+\hat{k}_{t_U})+\frac{\hat{b}_x^2\tau\hat{\sigma}_\epsilon^2}{2}}$, *maka*

a. $E[(Y-y_0)_+]=e^{\hat{a}_x+\hat{b}_x(\hat{k}_{t_U}+\tau\hat{\theta})+\frac{\tau\hat{b}_x^2\hat{\sigma}_\epsilon^2}{2}}[2\Phi(\frac{\sqrt{\tau}\hat{b}_x\hat{\sigma}_\epsilon}{2})-1]$

b.
$$
\begin{aligned}
E\{[(Y-y_0)_+]^2\} &= e^{2(\hat{a}_x+\hat{b}_x(\hat{k}_{t_U}+\tau\hat{\theta}))+2(\tau\hat{b}_x^2\hat{\sigma}_\epsilon^2)}\Phi(\frac{3\sqrt{\tau}\hat{b}_x\hat{\sigma}_\epsilon}{2}) \\
&\quad +e^{2(\hat{a}_x+\hat{b}_x(\hat{k}_{t_U}+\tau\hat{\theta}))+\tau\hat{b}_x^2\hat{\sigma}_\epsilon^2}[1-3\Phi(\frac{\sqrt{\tau}\hat{b}_x\hat{\sigma}_\epsilon}{2})]
\end{aligned}
$$

c. $E[(y_0-Y)_+]=e^{(\hat{a}_x+\hat{b}_x(\hat{k}_{t_U}+\tau\hat{\theta}))+\frac{\tau\hat{b}_x^2\hat{\sigma}_\epsilon^2}{2}}[2\Phi(\frac{\sqrt{\tau}\hat{b}_x\hat{\sigma}_\epsilon}{2})-1]$

d.
$$
\begin{aligned}
E\{[(y_0-Y)_+]^2\} &= e^{2(\hat{a}_x+\hat{b}_x(\hat{k}_{t_U}+\tau\hat{\theta}))+2(\tau\hat{b}_x^2\hat{\sigma}_\epsilon^2)}[1-\Phi(\frac{3\sqrt{\tau}\hat{b}_x\hat{\sigma}_\epsilon}{2})] \\
&\quad +e^{2(\hat{a}_x+\hat{b}_x(\hat{k}_{t_U}+\tau\hat{\theta}))+\tau\hat{b}_x^2\hat{\sigma}_\epsilon^2}[3\Phi(\frac{\sqrt{\tau}\hat{b}_x\hat{\sigma}_\epsilon}{2})-2]
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh unit optimal u_l pada persamaan (10) dengan

$$
\begin{aligned}
e^{2\mu+2\sigma^2}\Phi(\frac{3\sigma}{2})+e^{2\mu+\sigma^2}[1-3\Phi(\frac{\sigma}{2})] &= e^{2(\hat{a}_x+\hat{b}_x(\hat{k}_{t_U}+\tau\hat{\theta}))+2(\tau\hat{b}_x^2\hat{\sigma}_\epsilon^2)}\Phi(\frac{3\sqrt{\tau}\hat{b}_x\hat{\sigma}_\epsilon}{2}) \\
&\quad +e^{2(\hat{a}_x+\hat{b}_x(\hat{k}_{t_U}+\tau\hat{\theta}))+\tau\hat{b}_x^2\hat{\sigma}_\epsilon^2}[1-3\Phi(\frac{\sqrt{\tau}\hat{b}_x\hat{\sigma}_\epsilon}{2})]
\end{aligned}
$$

$$
\{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}[2\Phi(\frac{\sigma}{2})-1]\}^2=\{e^{\hat{a}_x+\hat{b}_x(\hat{k}_{t_U}+\tau\hat{\theta})+\frac{\tau\hat{b}_x^2\hat{\sigma}_\epsilon^2}{2}}[2\Phi(\frac{\sqrt{\tau}\hat{b}_x\hat{\sigma}_\epsilon}{2})-1]\}^2 .
$$

Sedangkan, unit optimal instrumen keuangan yang dibeli oleh penyedia anuitas adalah $\hat{u}_a$ pada persamaan (13) dengan

$$e^{2\mu+2\sigma^2}[1-\Phi(\frac{3\sigma}{2})]+e^{2\mu+\sigma^2}[3\Phi(\frac{\sigma}{2})-2]=e^{2(\hat{a}_x+\hat{b}_x(\hat{k}_{t_U}+\tau\hat{\theta}))+2(\tau\hat{b}_x^2\hat{\sigma}_\epsilon^2)}[1-\Phi(\frac{3\sqrt{\tau}\hat{b}_x\hat{\sigma}_\epsilon}{2})]$$
$$+e^{2(\hat{a}_x+\hat{b}_x(\hat{k}_{t_U}+\tau\hat{\theta}))+\tau\hat{b}_x^2\hat{\sigma}_\epsilon^2}[3\Phi(\frac{\sqrt{\tau}\hat{b}_x\hat{\sigma}_\epsilon}{2})-2]$$

$$\{e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}[2\Phi(\frac{\sigma}{2})-1]\}^2=\{e^{\hat{a}_x+\hat{b}_x(\hat{k}_{t_U}+\tau\hat{\theta})+\frac{\tau\hat{b}_x^2\hat{\sigma}_\epsilon^2}{2}}[2\Phi(\frac{\sqrt{\tau}\hat{b}_x\hat{\sigma}_\epsilon}{2})-1]\}^2.$$

5. *Hedging* Portofolio Asuransi Jiwa dan Anuitas dalam Satu Tahun

Besarnya unit eksposure usia x pada tahun t dinotasikan sebagai $n_{x,t}$. Fungsi kerugian agregat perusahaan asuransi jiwa tanpa *hedging* untuk usia $x = x_{l,1},...x_{l,2}$ adalah

$$AL_L = \sum_{x=x_{l,1}}^{x_{l,2}} n_{x,t}^L\{Y_L - E[Y_L]\} \tag{22}$$

Sedangkan fungsi kerugian agregat perusahaan asuransi jiwa dengan *hedging* untuk usia $x = x_{l,1},...x_{l,2}$ adalah

$$AL_L(\hat{u}_l) = \sum_{x=x_{l,1}}^{x_{l,2}} n_{x,t}^L\{[Y_L - E[Y_L]] - \hat{u}_{x,l}.\{(Y_L - y_l)_+ - E[(Y_L - y_l)_+]\}\} \tag{23}$$

dengan $\hat{u}_l = \{\hat{u}_{x,l} : x = x_{l,1},...x_{l,2}\}$. Sehingga besarnya premi *hedging* yang dibayarkan oleh perusahaan asuransi jiwa kepada perantara keuangan adalah sebesar $\sum_{x=x_{l,1}}^{x_{l,2}} n_{x,t}^L\hat{u}_{x,l}.E[(\tilde{m}_{x,t}^L - E[\tilde{m}_{x,t}^L])_+]$.

Fungsi kerugian agregat dari penyedia anuitas tanpa *hedging* untuk usia $x = x_{a,1},...x_{a,2}$ adalah

$$AL_A = \sum_{x=x_{a,1}}^{x_{a,2}} n_{x,t}^A\{E[Y_A] - Y_A\} \tag{24}$$

Sedangkan fungsi kerugian agregat penyedia anuitas dengan *hedging* untuk usia $x = x_{a,1},...x_{a,2}$ adalah

$$AL_A(\hat{u}_a) = \sum_{x=x_{a,1}}^{x_{a,2}} n_{x,t}^A\{[E[Y_A] - Y_A] - \hat{u}_{x,a}.\{(y_a - Y_A)_+ - E[(y_a - Y_A)_+]\}\} \tag{25}$$

dengan $\hat{u}_a = \{\hat{u}_{x,a} : x = x_{a,1},...x_{a,2}\}$. Besarnya premi *hedging* yang dibayarkan oleh penyedia anuitas kepada perantara keuangan adalah sebesar $\sum_{x=x_{a,1}}^{x_{a,2}} n_{x,t}^A\hat{u}_{x,a}.E\{(E[\tilde{m}_{x,t}^A] - \tilde{m}_{x,t}^A)_+\}$.

Perusahaan asuransi jiwa dan penyedia anuitas melakukan perhitungan ulang eksposure dan premi *hedging* setiap tahunnya. Kedua perhitungan tersebut didasarkan pada tabel mortalita baru yang kemudian menjadi dasar untuk membuat kesepakatan baru dengan pihak perantara keuangan untuk tahun berikutnya.

6. Studi Kasus

Tujuan studi kasus ini adalah implementasi *hedging* risiko mortalitas di Indonesia. Data jumlah kematian dan *exposure to risk* di Indonesia sangat terbatas, sehingga penelitian ini menggunakan data sekunder jumlah kematian $(d_{x,t})$ dan data eksposure $(L_{x,t})$ negara Chili tahun 1992-2003. Berdasarkan tingkat kematian penduduk Chili, estimasi parameter a_x, b_x dan k_t pada model (14) memberikan hasil sebagai berikut

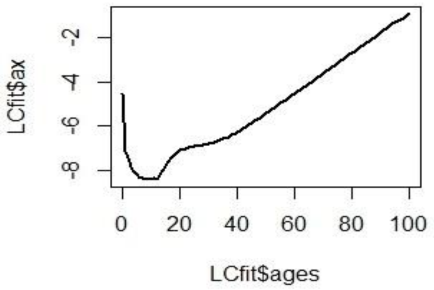

Fig 2: $(\hat{a}_x)$

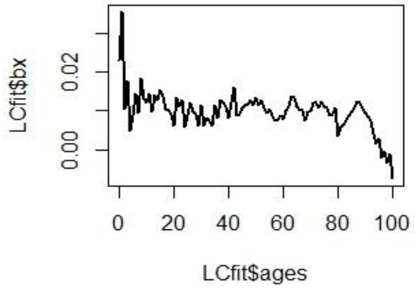

Fig 3: $(\hat{b}_x)$

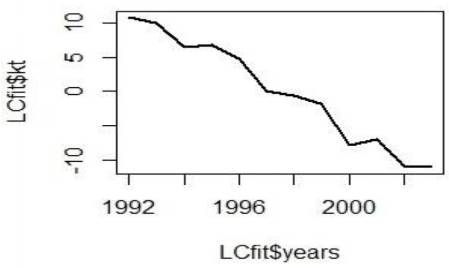

Fig 4: $(\hat{k}_t)$

Perusahaan asuransi jiwa dan penyedia anuitas di negara Chili berturut-turut memegang portofolio polis asuransi jiwa dan anuitas di tahun 2003 $(t = 0)$. Pemegang polis (tertanggung) asuransi jiwa berusia 45-64 tahun. Sedangkan anuitan berusia 65-84 tahun. Perusahaan asuransi jiwa dan penyedia anuitas memproyeksikan tingkat kematian tahun 2004 untuk melakukan *hedging*.

6.1. Perusahaan Asuransi Jiwa

Unit optimal instrumen keuangan (u_l) yang dibeli oleh perusahaan asuransi jiwa dari perantara keuangan dihitung menggunakan persamaan (10). Sehingga untuk usia 45-64 tahun, diperoleh

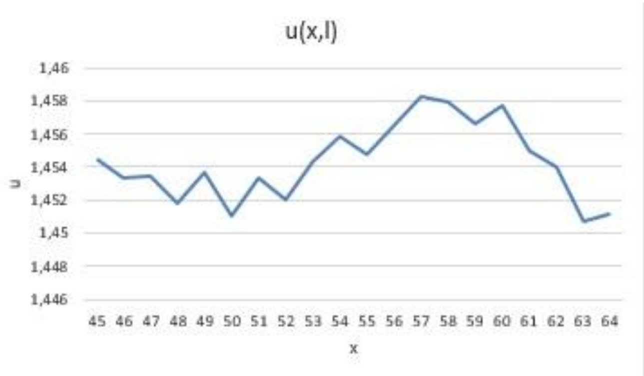

Fig 5: Unit optimal untuk masing-masing usia pemegang polis

Unit optimal untuk masing-masing pemegang polis menentukan tingkat efektifitas *hedging* yang dilakukan perusahaan asuransi jiwa. Simulasi perhitungan AL_L yang dihitung berdasarkan (22) dan (23) di tahun 2004 didiskontokan ke tahun 2003 menggunakan asumsi tingkat inflasi sebesar 3%.

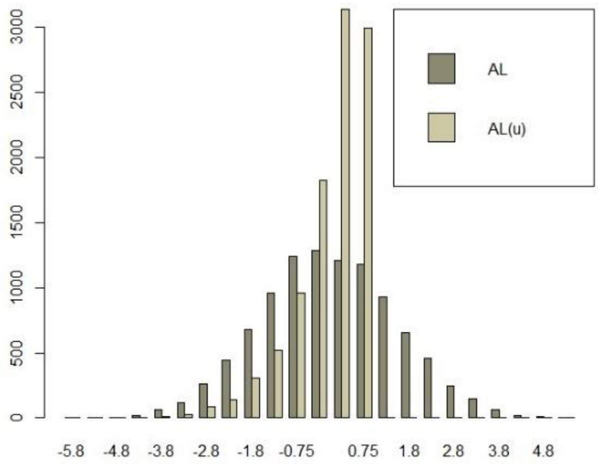

Fig 6: Histogram AL_L

Sehingga diperoleh tingkat efektifitas *hedging* sebesar

$$\begin{aligned} HE(u_l) &= \frac{\sigma^2[AL_L]-\sigma^2[AL_L(u_l)]}{\sigma^2[AL_L]} \\ &= 1-\frac{0.5707003}{2.174974} \\ &= 0.737606. \end{aligned} \tag{26}$$

Hedging yang dilakukan perusahaan asuransi jiwa dengan membeli unit optimal instrumen keuangan, dengan rentang [1.45074;1.45824], untuk masing-masing usia pemegang polis menurunkan risiko sebesar 74%.

6.2. Penyedia Anuitas

Unit optimal dihitung menggunakan persamaan (13). Sehingga untuk usia 65 – 84 tahun, diperoleh

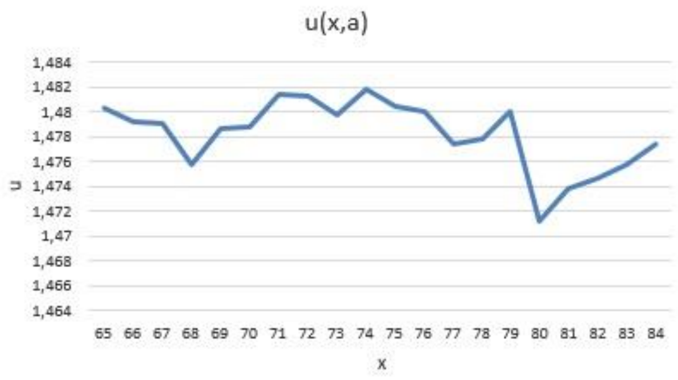

Fig 7: Unit optimal untuk masing-masing anuitan

Simulasi perhitungan AL_A yang diperoleh berdasarkan persamaan (24) dan (25) di tahun 2004 didiskontokan ke tahun 2003 menggunakan asumsi tingkat inflasi yang sama yaitu sebesar 3%.

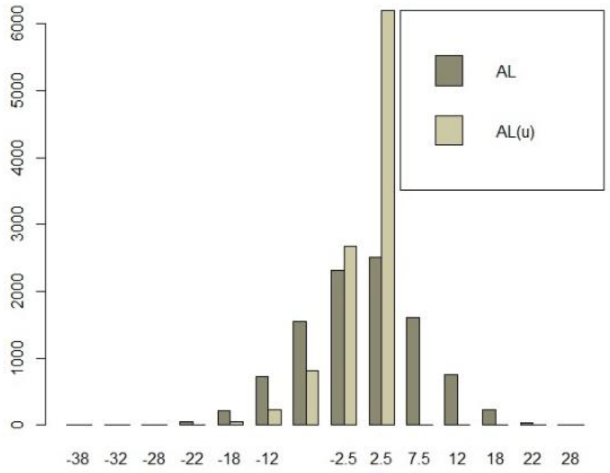

Fig 8 : Histogram AL_A

Sehingga diperoleh tingkat efektifitas *hedging* sebesar

$$\begin{aligned} HE(u_a) &= \frac{\sigma^2[AL_A]-\sigma^2[AL_A(u_a)]}{\sigma^2[AL_A]} \\ &= 1-\frac{16.68357}{59.50344} \\ &= 0.7196201 \end{aligned} \quad (27)$$

Hedging yang dilakukan oleh penyedia anuitas dengan membeli unit optimal instrumen keuangan, dengan rentang [1.47123;1.48186], untuk masing-masing usia anuitan dapat menurunkan risiko sebesar 72%.

7. Penutup

Skema *hedging* dikonstruksi berdasarkan fungsi kerugian. Berdasarkan solusi *closed-form* fungsi kerugian tersebut, diperoleh unit optimal instrumen keuangan yang dibeli oleh perusahaan asuransi jiwa untuk *hedging* risiko mortalitas yaitu

$$\hat{u}_l = \frac{E\{[(\tilde{m}^L_{x,t} - E[\tilde{m}^L_{x,t}])_+]^2\}}{E\{[(\tilde{m}^L_{x,t} - E[\tilde{m}^L_{x,t}])_+]^2\} - \{E[(\tilde{m}^L_{x,t} - E[\tilde{m}^L_{x,t}])_+]\}^2}$$

dan unit optimal instrumen keuangan yang dibeli oleh penyedia anuitas untuk *hedging* risiko *longevity* adalah

$$\hat{u}_a = \frac{E\{[(E[\tilde{m}^A_{x,t}] - \tilde{m}^A_{x,t})_+]^2\}}{E\{[(E[\tilde{m}^A_{x,t}] - \tilde{m}^A_{x,t})_+]^2\} - \{E[(E[\tilde{m}^A_{x,t}] - \tilde{m}^A_{x,t})_+]\}^2}$$

Implementasi skema *hedging* pada data kematian dan eksposure penduduk negara Chili (1992-2003) menunjukkan bahwa *hedging* efektif dilakukan sehingga dapat menurunkan risiko sebesar 74% terhadap risiko mortalitas dan 72% terhadap risiko *longevity*. Efektifitas *hedging* tersebut dihitung berdasarkan simulasi perhitungan *aggregate loss* sebanyak 10.000 sehingga besarnya HE adalah

$$HE(u) = 1 - \frac{\sigma^2[AL(u)]}{\sigma^2[AL]}$$

Penelitian ini tidak secara eksplisit menyebutkan instrumen keuangan yang digunakan untuk *hedging* sehingga perlu dilakukan penelitian lebih lanjut terkait tingkat efektifitas *hedging* berdasarkan instrumen keuangan yang ada di pasar berjangka atau perantara keuangan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Denuit et al., 2005, *Actuarial Theory for Dependent Risks*, John Wiley and Sons, England.

[2] Gujarati, Damodar N., 2003, *Basic Econometric*, McGraw-Hill Companies, Inc., New York.

[3] Lawless, Jerald F., 2003, *Statistical Models and Methods for Lifetime Data Second Edition*, John Wiley and Sons, United States of America.

[4] Lee, Ronald D., and Lawrence R. Carter, 1992, *Modelling and Forecasting U.S. Mortality*, Journal of American Statistical Association 87:659-671.

[5] London, Dick, 1988, *Survival Models and Their Estimation Third Edition*, ACTEX, Winsted, Connecticut.

[6] Lin, T. and Tsai C.C., 2015, *Hedging mortality/longevity risks of insurance portfolios for life insurer/annuity provider and financial intermediary*, Insurance : Mathematics and Economics, 66(2016), 44-58.

[7] Norstad, John, 2011, *The Normal and Lognormal Distributions*, http://www.norstad.org, diakses 17 Februari 2017 Pukul 09.00 WIB.

[8] Pitacco, et al., 2009, *Modelling Longevity Dynamics for Pensions and Annuity Business*, University Press, Oxford.

[9] Wei, William W.S., 1990. *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., United States of America.