

## PENJELASAN EKSPANSI ALIRAN YANG MENYEBABKAN THE BETZ LIMIT DENGAN MENGGUNAKAN MODEL DISK THEORY

Mustarum Musaruddin<sup>1\*</sup>, Aditya Rachman<sup>2</sup>, Muhammad Hasbi<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Jurusan Teknik Elektro Universitas Haluoleo

Kampus Hijau Bumi Tridarma Andounohu Kendari Indonesia

<sup>2,3</sup> Jurusan Teknik Mesin Universitas Haluoleo

Kampus Hijau Bumi Tridarma Andounohu Kendari Indonesia 93232

[aditya\\_rchmn@yahoo.com](mailto:aditya_rchmn@yahoo.com)

### ABSTRAK

Efisiensi maksimum turbin angin/air konvensional dikenal sebagai *Betz Limit* (0.59). Parameter batas ini ini nampaknya ini tidak hanya diakibatkan oleh cacat desain. Secara aerodinamis, beberapa referensi menjelaskan ekspansi aliran ke arah hilir dengan faktor dua terhadap daerah rotor menjadi penyebab dari fenomena batas ini. Meskipun banyak dari referensi ini menjelaskan faktor-faktor yang menyebabkan fenomena batas ini, pembahasan yang komprehensif mengenai alasan untuk ekspansi aliran tampaknya masih kurang dieksplorasi. Tulisan ini mencoba mendiskusikan lebih komprehensif mengenai faktor penyebab fenomena batas efisiensi, dengan menghubungkan dengan fenomena ekspansi aliran. Model matematika dari Teori Disk dengan menggunakan program simulasi MATLAB, digunakan dalam membantu untuk mencari faktor-faktor ekspansi aliran yang menyebabkan fenomena batas efisiensi. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa fenomena dari jumlah laju aliran masa melalui rotor yang dibatasi oleh kebutuhan untuk menghasilkan gaya Thrust pada rotor, adalah faktor yang menyebabkan fenomena batas efisiensi serta ekspansi aliran.

**Keywords :** efisiensi turbin, Betz Limit, teori disk, aliran, ekspansi

### ABSTRACT

The maximum efficiency of the conventional wind turbine is known as Betz Limit (0.59). It seems that this efficiency limit does not simply come from design flaws. Aerodynamically, some references explain the flow expansion toward the downstream by the factor of twice to the corresponding rotor area to be the cause for the phenomena. Even many of these references explain the caused factors for this limit, the comprehensive discussion regarding to the reason for the flow expansion seems till to be less explored. This paper attempts to discuss more comprehensively the factors causing the Betz Limits, in relation to the flow expansion. The mathematical model of the Disk Theory using the simulation program of MATLAB is utilized in assisting to figure the factors for the flow expansion causing the limit. The result indicates that phenomenon of the amount of the mass flow rate through the rotor constrained by the need to generate the thrust is the factor causing the limit as well as the flow expansion.

**Kata kunci:** turbine efficiency, Betz Limit, *Disk Theory*, flow, expansion

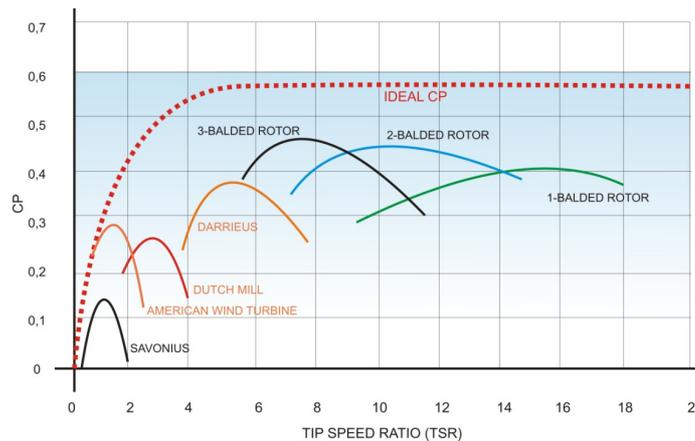
### PENDAHULUAN

Energi memainkan peran penting dalam perkembangan sosial dan ekonomi di hampir semua negara. Banyak sumber energi yang tersedia, mulai dari yang konvensional terbatas sampai yang bersih dan berkelanjutan. Di antara sumber yang bersih dan berkelanjutan adalah energi angin. Menurut [Towler, 2014] energi angin relatif memiliki biaya yang lebih kompetitif dibandingkan dengan sumber energi lain.

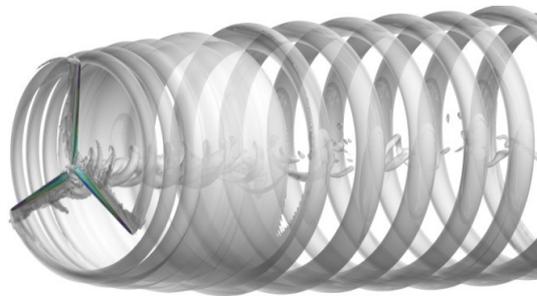
Efisiensi adalah salah satu aspek penting dalam penerapan teknologi ini, karena dapat mempengaruhi nilai ke-ekonomian. Efisiensi maksimum turbin angin konvensional adalah 0,59, yang dikenal sebagai *Betz Limits* [Vennell, 2013, Hau 2006, Pedanda, 1984] (lihat Gambar 1). Diyakini bahwa alasan di balik fenomena nilai batas efisiensi ini tidak hanya diakibatkan oleh kelemahan dalam desain teknologi [Grassmann, 2003]. Menurut [Burton dkk 2001] turbin angin tidak bisa

mengambil seluruh energi yang tersedia dalam aliran bebas (hulu) karena pada kenyataannya, turbin itu sendiri mempengaruhi medan aliran. Dalam mengekstrak energi dari angin oleh turbin, ada perubahan tekanan pada hulu dari turbin, yang pada gilirannya dapat mengubah pola aliran. Sebuah studi di [Betz dkk, 2003] menjelaskan bahwa efisiensi maksimum merupakan hasil dari aliran dalam turbin angin yang harus meng-ekspansi, sehingga area aliran pada hulu (*freestream*) lebih kecil

dari daerah rotor. Studi di [Hartwanger dkk 2003, Lawn, 2003] menjelaskan efisiensi maksimum didapatkan ketika area *cross section* pada aliran di hulu (*freestream*) dua pertiga dari daerah di rotor. Hal ini terkait dengan jumlah kecepatan angin di rotor yang dua-sepertiga dari kecepatan aliran bebas. Sebuah karya di Chou (2010) dengan menggunakan simulasi (*Computational Fluid Dynamic*) CFD menunjukkan adanya pola ekspansi aliran dalam turbin angin (Gambar 2).



Gambar 1. Koefisien kinerja pada turbin angin pada variasi tipe [Hau dkk 2006] )



Gambar 2. Simulasi aliran ekspansi dengan *Computational Fluid Dynamic* (CFD) (Chou, 2003)

Meskipun banyak referensi telah menjelaskan alasan fenomena *Betz Limits*, diskusi lebih komprehensif mengenai penyebab fenomena ini masih kurang banyak disajikan. Alasan untuk ekspansi aliran tampaknya masih kurang dibahas dalam referensi-referensi sebelumnya. Dalam tulisan ini, fenomena ekspansi aliran akan dibahas lebih lanjut dalam rangka memberikan pemahaman yang lebih dalam tentang faktor-faktor yang mempengaruhi batas efisiensi.

**METODOLOGI**

Dalam penelitian ini, untuk menyelidiki faktor yang mempengaruhi nilai batas efisiensi digunakan model matematika *Disk Theory*, yang dikembangkan oleh Betz.

**Model Matematika**

Bagian berikut membahas pengembangan model matematika dari *Disk*

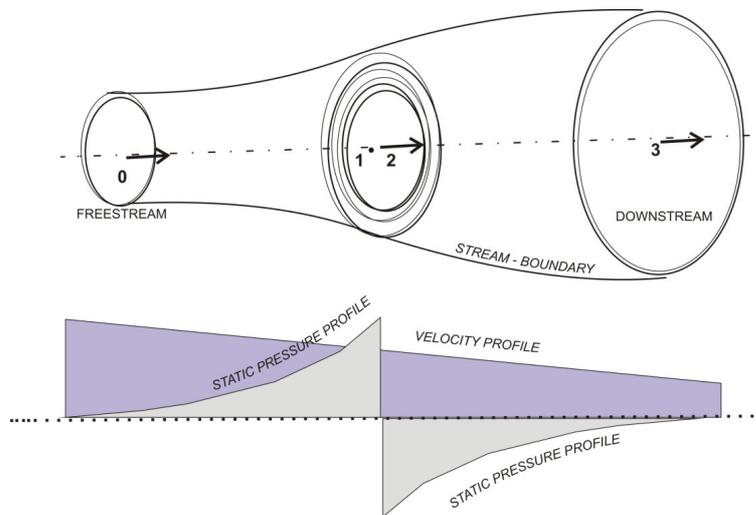
Theory, yang diperoleh di Burton (2001) dan Duran (2005). Model sistem disajikan pada Gambar 3. Mengacu pada gambar, lokasi aliran bebas diwakili oleh notasi (0), lokasi sesaat sebelum rotor (*disk*) diwakili oleh notasi (1), lokasi sesaat setelah rotor adalah diwakili oleh notasi (2) dan lokasi di hilir diwakili oleh notasi (3). Persamaan Bernoulli diterapkan pada lokasi pada (0) ke (1) dan (2) ke (3).

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 \quad (1)$$

dan

$$P_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2 = P_3 + \frac{1}{2} \rho V_3^2 \quad (2)$$

Notasi P mewakili tekanan statis dan notasi V mewakili kecepatan. Dalam model ini, diasumsikan bahwa aliran melalui rotor mengalami kecepatan konstan ( $V_1 = V_2$ ) tetapi tekanan statis menurun ( $P_1 > P_2$ ). Asumsi yang lain adalah bahwa tekanan statis aliran bebas (0) diasumsikan sama dengan hilir (3). Hal ini dapat dijelaskan bahwa turbin beroperasi pada perbedaan potensial yang mendekati nol.



Gambar 3. Model Disk Theory ( Burton, 2001 dan Duran, 2005)

Dengan menggabungkan persamaan (1) dan persamaan (2), didapatkan hubungan persamaan sebagai berikut.

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho V_0^2 - \frac{1}{2} \rho V_3^2 \quad (3)$$

Dengan menggunakan persamaan (3), didapatkan persamaan Thrust (T) sebagai berikut

$$T = \left[ \frac{1}{2} \rho V_0^2 - \frac{1}{2} \rho V_3^2 \right] A \quad (4)$$

Dimana A adalah luas sapuan rotor ( $m^2$ ).

Thrust yang disebabkan oleh perubahan momentum aliran dapat ditulis sebagai berikut:

$$T = \dot{m} (V_0 - V_3) \quad (5)$$

Dimana,  $\dot{m}$  adalah jumlah aliran masa (Kg/s), dirumuskan sebagai berikut :

$$\dot{m} = \rho(V_1) \cdot A \quad (6)$$

Dalam model ini, teori momentum konservasi juga diterapkan. Hal ini menyebabkan perbedaan tekanan antar-daerah rotor yang dikalikan dengan luas area sapuan rotor, sama dengan perubahan momentum aliran fluida. Dengan menggunakan persamaan (4) dan persamaan (5), kecepatan di rotor dapat ditentukan sebagai berikut :

$$V_1 = \frac{1}{2} (V_3 + V_0) \quad (7)$$

Sebuah notasi parameter non-dimensi, koefisien tahanan (K) diperkenalkan, dan didefinisikan sebagai

$$K = \frac{P_1 - P_2}{\frac{1}{2} \rho V_1^2} \quad (8)$$

Dengan memasukkan definisi perbedaan tekanan seperti dalam persamaan (3) dan kecepatan pada rotor seperti pada persamaan (7), ke dalam persamaan (8), dan menerapkan manipulasi aljabar dalam persamaan-persamaan ini, didapatkan hubungan sebagai berikut :

$$V_1 = V_0 \frac{4}{K+4} \quad (9)$$

dan

$$V_3 = V_0 \frac{(4-K)}{(K+4)} \quad (10)$$

Dengan menggunakan definisi kecepatan dalam persamaan (9) dan persamaan (10), ke dalam persamaan (5) dan persamaan (6),

persamaan untuk *Thrust* sebagai fungsi K dapat ditulis sebagai berikut :

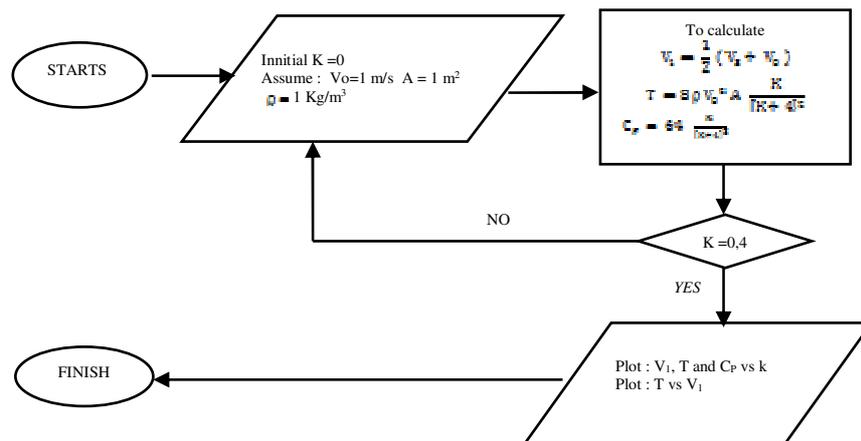
$$T = 8 \rho V_0^2 A \frac{K}{[K+4]^2} \quad (11)$$

Daya turbin didefinisikan sebagai perkalian antara *Thrust* dengan kecepatan pada rotor, ditulis sebagai berikut :

$$P = V_1 T \quad (12)$$

Dengan memasukkan definisi kecepatan di rotor ( $V_1$ ) di persamaan (9) dan *Thrust* dalam persamaan (11) ke dalam persamaan (12), didapatkan persamaan daya sebagai berikut :

$$P = 32 \rho V_0^3 A \frac{K}{[K+4]^3} \quad (13)$$



Gambar 4. Diagram *Flowchart* dengan MATLAB

Koefisien kinerja didefinisikan sebagai rasio dari daya yang dihasilkan oleh turbin dengan daya yang tersedia pada aliran yang berkaitan dengan luas sapuan turbin (rotor). Dengan menggunakan definisi dari daya pada persamaan (13) dan daya yang tersedia pada fluida, koefisien kinerja dapat ditulis sebagai berikut :

$$C_p = 64 \frac{K}{[K+4]^3} \quad (14)$$

**Simulasi Matlab**

Program komputer MATLAB versi 12 digunakan untuk membantu simulasi perhitungan menggunakan model. Simulasi ini menghitung beberapa parameter dalam model, seperti kecepatan aliran pada rotor, *Thrust* dan koefisien kinerja pada variasi koefisien tahanan untuk dapat membantu memberikan gambaran penyebab nilai batas efisiensi (lihat Gambar 4).

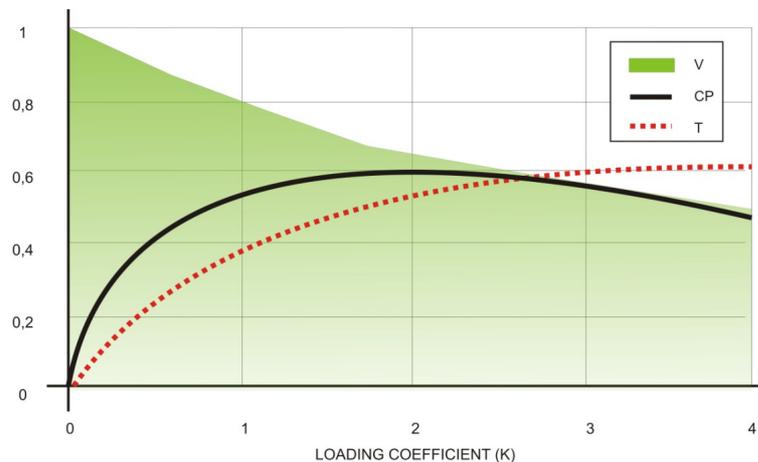
Seperti yang terlihat pada Gambar 4, program dimulai dengan mengasumsikan kecepatan fluida 1 m/s, luas sapuan turbin 1 m²

dan massa jenis aliran udara  $1 \text{ kg/m}^3$ , dan membuat nilai awal dari koefisien tahanan 0. Tahap selanjutnya adalah menghitung kecepatan pada rotor, *Thrust* dan koefisien kinerja, sampai jumlah koefisien tahanan 1, sebelum program menginstruksikan pembuatan grafik.

## HASIL DAN DISKUSI

### Faktor yang mempengaruhi Kinerja Turbin

Berdasarkan persamaan (12), untuk mendapatkan nilai kinerja sebesar-besarnya, dibutuhkan sebuah turbin, yang memungkinkan kecepatan aliran pada rotor dan *Thrust* yang besar (keduanya). Kedua kecepatan dan *Thrust* (berdasarkan persamaan (9) dan persamaan (11)) ditentukan oleh koefisien tahanan (K). Gambar 5 menunjukkan hubungan antara kecepatan aliran pada rotor, *Thrust* dan koefisien kinerja pada variasi koefisien tahanan.



Gambar 5. Kecepatan pada rotor (V), *Thrust* (T) dan Koefisien kinerja (CP) pada variasi koefisien tahanan (K)

Berdasarkan hasil di atas, pada saat nilai koefisien tahanan nol, tidak ada perlambatan aliran ( $V_1 = V_0$ ) dan *Thrust* adalah nol. Ketika koefisien tahanan sedikit meningkatkan, kecepatan mulai melambat, sementara nilai *Thrust* mulai meningkat. Ketika nilai koefisien tahanan meningkat lebih lanjut, aliran ini terus melambat, sementara *Thrust* terus meningkat.

Berdasarkan fenomena tersebut, dapat dikatakan bahwa aliran melambat sebenarnya selalu diikuti oleh peningkatan jumlah *Thrust*. Karena ada dua komponen yang berkontribusi dalam menghasilkan daya, yaitu kecepatan di rotor dan *Thrust*, akan ada suatu kondisi di mana pada saat jumlah kecepatan dan *Thrust* tertentu dapat menghasilkan kinerja yang maksimal. Berdasarkan Gambar 5, kondisi kecepatan dan *Thrust* pada koefisien tahanan 2 menghasilkan kinerja maksimum (CP 0,59). Nilai maksimum ini sama dengan nilai *Betz Limit*. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa *Betz Limits* dicapai ketika nilai *Thrust* dan kecepatan yang dihasilkan tertentu (nilai

$K=2$ ) yang dapat memberikan kinerja maksimum turbin.

### Hubungan antara Kecepatan dan Thrust

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, ada sesuatu yang menarik bahwa ketika nilai koefisien tahanan meningkat, tren pada kecepatan dan *Thrust* terbalik; kecepatan di rotor menurun, sementara *Thrust* meningkat. Sebuah pertanyaan mungkin timbul apakah ada hubungan antara kecepatan dan *Thrust*. Pada bagian berikut membahas hubungan kedua parameter ini.

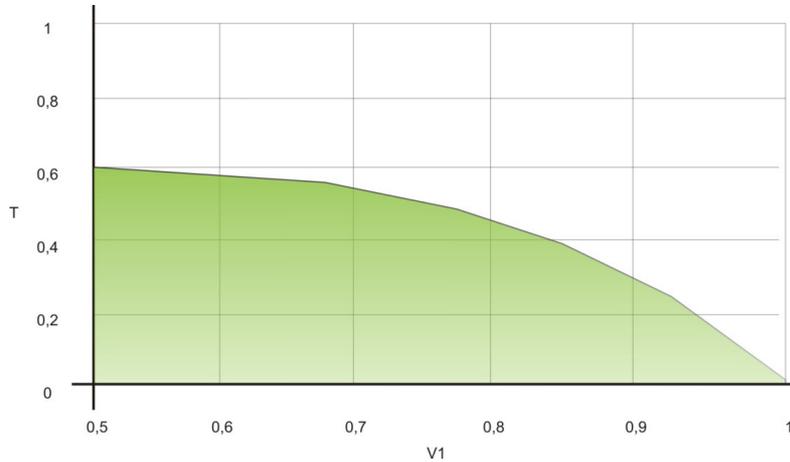
Dengan menggunakan definisi pada persamaan (7), kecepatan di hilir sebagai fungsi dari kecepatan pada rotor dapat ditulis sebagai

$$V_3 = 2V_1 - V_0 \quad (15)$$

Sehingga, *Thrust* dapat ditulis sebagai berikut:

$$T = 2 \rho V_1 A (V_0 - V_1) \tag{16}$$

Dari persamaan di atas, dapat dilihat bahwa jumlah *Thrust* dipengaruhi oleh kecepatan aliran di rotor.



Gambar 6. Hubungan antara kecepatan aliran di rotor dan *Thrust*

Pada Gambar 6, terlihat bahwa pada nilai *Thrust* nol, kecepatan di rotor sama dengan kecepatan aliran bebas. Ketika kecepatan di rotor menurun, jumlah *Thrust* dihasilkan meningkat. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa semakin lambat aliran, semakin besar *Thrust* yang dihasilkan.

**Faktor Penyebab Nilai Batas Efisiensi**

Berikut adalah beberapa poin penting berdasarkan pembahasan sebelumnya. Yang pertama adalah dua unsur penting dalam menentukan kinerja turbin, yaitu *Thrust* dan kecepatan aliran pada rotor. Poin selanjutnya adalah bahwa *Betz Limit* dicapai dalam kondisi di mana *Thrust* dan kecepatan yang dihasilkan memberikan kinerja maksimum turbin. Poin terakhir adalah perlambatan aliran selalu disertai dengan peningkatan *Thrust* yang dihasilkan.

Berdasarkan poin-poin di atas, dapat dikatakan bahwa untuk menghasilkan kinerja (daya); *Thrust* dan kecepatan pada rotor harus ada. Idealnya, untuk mendapatkan sebanyak-banyaknya daya (kinerja), kedua elemen (*Thrust* dan kecepatan) harus besar. Namun, hampir tidak mungkin untuk menurunkan kondisi ini sekaligus. Kondisi yang sebenarnya adalah untuk meningkatkan jumlah satu elemen, jumlah elemen lainnya harus diturunkan. Misalnya, diperlukan untuk menghasilkan sebanyak mungkin *Thrust*,

konsekuensinya adalah harus mengurangi kecepatan pada rotor, dan sebaliknya. Hal ini menyebabkan kinerja akan memiliki nilai maksimum, yang merupakan alasan untuk *Betz Limits*.

**Penjelasan Ekspansi Aliran**

Pada bagian berikut dijelaskan penyebab ekspansi aliran. Turbin aliran beroperasi pada perbedaan potensial yang hampir tidak ada, sehingga untuk menghasilkan momentum, sistem hanya tergantung pada keberadaan rotor itu sendiri yang bertindak sebagai hambatan (*resistance*). Semakin besar *resistance* sebuah rotor, semakin besar pula *Thrust* yang dihasilkan. Namun, ada konsekuensi ketika *Thrust* yang dihasilkan besar; kecepatan harus berkurang. Hal ini menyebabkan adanya perlambatan aliran fluida dalam sistem turbin.

Secara matematis, dapat dijelaskan sebagai berikut. Kecepatan aliran di hilir sebagai fungsi koefisien tahanan dapat ditulis sebagai berikut :

$$V_3 = V_0 \left[ \frac{8}{K+4} - 1 \right] \tag{17}$$

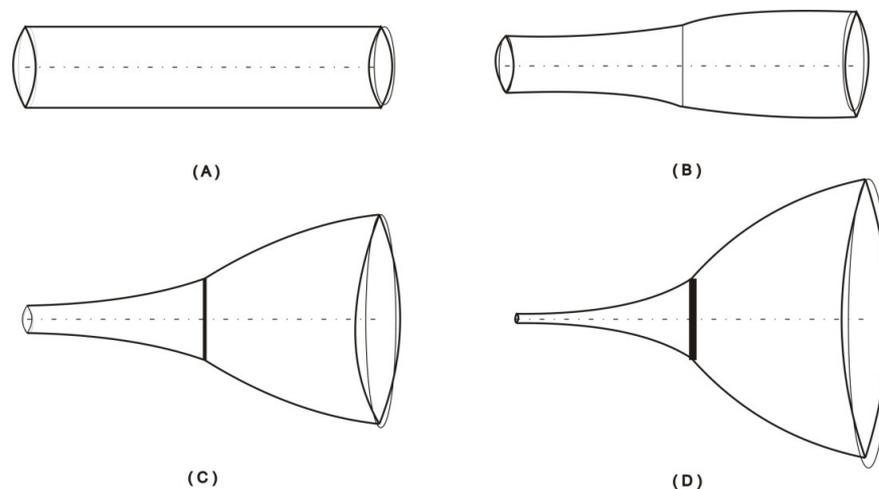
Pada koefisien tahanan nol, kecepatan di hilir adalah setara dengan aliran bebas (hulu). Ketika nilai koefisien tahanan meningkat, yang meningkatkan *Thrust*, berdasarkan persamaan (11), kecepatan alirannya menurun. Karena

jumlah masa aliran di hilir, di rotor dan di hulu menurut Hukum Kontinuitas harus sama, fenomena perlambatan aliran dalam sistem turbin mengakibatkan peningkatan luas penampang melintang aliran dari hulu ke hilir (ekspansi aliran). Hal ini dapat dikatakan bahwa ketika *Thrust* ditingkatkan, luas penampang melintang aliran di hilir meningkat.

Seperti yang dijelaskan sebelumnya, konsekuensi dalam menghasilkan *Thrust* adalah pengurangan jumlah laju aliran masa melalui turbin. Hal ini dapat dijelaskan bahwa ketika koefisien tahanan meningkat untuk meningkatkan *Thrust*, kecepatan di rotor menurun (lihat persamaan (9)). Karena luas

penampang melintang rotor selalu konstan, perlambatan aliran di rotor harus diimbangi dengan pengurangan luas penampang melintang aliran di hulu untuk memenuhi Hukum Kontinuitas. Penurunan pada luas penampang melintang aliran di hulu menurunkan jumlah aliran yang bekerja pada turbin (lihat Gambar 6).

Seperti dijelaskan di atas, beberapa referensi menunjukkan bahwa nilai efisiensi maksimum (*Betz Limits*) dapat diperoleh ketika luas penampang rotor adalah setengah dari yang di hilir. Secara matematis, ini berarti bahwa kecepatan aliran di rotor adalah dua kali dari kecepatan aliran di hilir.



Gambar 7. Hubungan antara *Thrust* dan ekspansi aliran di hilir (A) Tidak ada koefisien tahanan (B) Koefisien tahanan rendah (C) Koefisien tahanan menengah (D) Koefisien tahanan tinggi

Berdasarkan Persamaan (7), kondisi di atas mengakibatkan kecepatan di rotor sama dengan dua pertiga kecepatan aliran di hulu. Berdasarkan Gambar 5, kecepatan rotor pada titik dua pertiga dari kecepatan aliran hulu sesuai dengan nilai koefisien kinerja 0,59, yang sama dengan Betz Limits.

#### KESIMPULAN

Betz Limits adalah batas efisiensi maksimum turbin angin konvensional yang tidak hanya disebabkan oleh cacat desain. Karena untuk menghasilkan daya turbin dibutuhkan dua komponen, yaitu *Thrust* dan laju aliran massa; alasan untuk nilai batas ini adalah bahwa jumlah laju aliran masa yang melalui rotor dibatasi oleh kebutuhan untuk menghasilkan *Thrust* dalam sistem turbin. Hal

ini dapat dijelaskan bahwa dengan asumsi beda potensial pada sistem turbin yang mendekati nol, untuk menghasilkan *Thrust*, sistem hanya tergantung pada keberadaan turbin itu sendiri sebagai hambatan. Sifat resistensi dari turbin digunakan untuk mengubah momentum aliran hulu dan hilir. Konsekuensi dari perubahan momentum adalah perlambatan aliran. Karena berkurangnya kecepatan aliran, perluasan permukaan melintang aliran harus terjadi untuk memenuhi Hukum Kontinuitas.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Bet, F Grassmann, H., 2003, Upgrading conventional wind turbines. *Renewable Energy*, Vol. 28 (1):71–8

- Burton, T, Sharpe D, Jenkins N, Bossanyi E. 2001, *Wind Energy Handbook*, John Wiley & Sons, Ltd Baffins Lane, Chichester West Sussex, PO19 1UD, England
- Chou. R. 2003. *Wind Turbine Aerodynamics*. Applied Aerodynamics Research Group
- Duran. S, 2005. *Computer-aided design of horizontal-axis wind turbine blades*, Master's thesis, Middle East Technical University, Ankara, Turkey
- Grassmann, H, Bet, F, Cabras G, M. Ceschia, D. Cobai, C. DelPapa. 2003. A partially static turbine—first experimental results
- Hartwanger, D, Horvat A. 2008. 3D Modeling of A wind Turbine using CFD, *NAFEMS Conference*, United Kingdom
- Hau. E, 2006, *Wind Turbines, Fundamentals, Technologies, Application, Economics*, Springer Verlag, Berlin
- Lawn, CJ, 2003, Optimization of the power output from ducted turbines, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. ProQuest Science Journals, Vol 217, 1, 107
- Rauh, W. Seelert. 1984. The Betz optimum efficiency for windmills, *Applied Energy*, Vol. 17, Issue 1, Pages 15–23
- Towler F. 2014. Chapter 9 – Wind Energy, *The Future of Energy*, Pages 187–214
- Vennell, R. 2013. Exceeding the Betz limit with tidal turbines, *Renewable Energy*, Vol 55, July, Pages 277–285