J. Math. and Its Appl.
ISSN: 1829-605X
Vol. 3, No. 2, Nov 2006, 81–93

Kajian Integral Cavalieri-Wallis dan Integral Porter-Wallis serta Kaitannya dengan Integral Riemann

Ratna Sari Dewi dan Sunarsini
Jurusan Matematika ITS
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
sunarsini@matematika.its.id

Abstrak

Integral Cavalieri-Wallis dan integral Porter-Wallis adalah suatu konsep baru dalam Matematika, dibangun berdasarkan konsep indivisible yang dikembangkan oleh Cavalieri dan Wallis. Metode indivisible adalah pemikiran tentang area di bawah kurva sebagai jumlah dari seluruh garis vertikal yang sejajar, yang ada di bawah kurva. Integral Cavalieri-Wallis dan Porter-Wallis dibangun melalui pendekatan limit dari jumlahan tinggi kurva pada masing-masing subinterval. Pada makalah ini dikaji bagaimana membangun integral Cavalieri-Wallis dan integral Porter-Wallis dan sifat-sifatnya, serta keterkaitan antara kedua integral tersebut dengan integral Riemann. Dalam kenyataannya, setiap fungsi yang terintegral Riemann pasti terintegral Cavalieri-Wallis dan Porter-Wallis.

Kata Kunci: *integral Cavalieri-Wallis, integral Porter-Wallis, integral Riemann, metode indivisible.*

1. Pendahuluan

Integral Riemann adalah integral yang paling banyak digunakan untuk menyelesaikan persoalan matematika, baik dalam matematika murni maupun aplikasinya. Akan tetapi terdapat kekurangan pada integral Riemann, yaitu terdapat kelas fungsi terintegral Riemann yang relatif kecil, karena dibatasi oleh kekontinuan atau kekontinuan sepotong-sepotong dan operasi limit sering kali menemui kesulitan yang tidak dapat ditangani. Hal ini menyebabkan munculnya banyak teori integral yang baru. Bronislaw Czarnocha dan Vunda Prabhu dalam "Indivisibles in Contemporary Calculus"[**?**], memunculkan suatu integral baru yang belum banyak dibahas, yaitu integral Cavalieri-Wallis dan integral Porter-Wallis. Dalam kedua integral itu, penghitung-an luas area dilakukan dengan metode indivisible. Metode Indivisible adalah suatu pemikiran tentang area di bawah kurva sebagai jumlah dari seluruh garis vertikal yang sejajar, yang ada di bawah kurva.

2. Integral Riemann

Sebelum di bahas mengenai kaitan antara integral Cavalieri-Wallis dan integral Porter-Wallis dengan integral Riemann, terlebih dahulu akan di bahas mengenai integral Riemann.

Integral Riemann adalah integral dengan fungsi terbatas f yang didefinisikan pada interval tertutup terbatas $[a, b]$. Partisi dari $[a, b]$ adalah P yaitu koleksi terbatas dari titik-titik di $[a, b]$ sedemikian hingga $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$. Titik-titik ini membagi $[a, b]$ menjadi sub interval $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \cdots, n$.

Diberikan $f : I \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terbatas pada I dan $P := (x_0, x_1, \cdots, x_k)$ adalah partisi dari I. Untuk $k = 1, 2, \cdots, n$, didefinisikan

$$\begin{aligned} m_k &= inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ M_k &= sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \end{aligned}$$

Jumlahan bawah (lower sum) dari f terkait dengan P partisi didefinisikan sebagai

$$L(P; f) := \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

Jumlahan atas (upper sum) dari f terkait dengan P partisi didefinisikan sebagai

$$U(P; f) := \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

Misal $\mathcal{P}(I)$ menotasikan koleksi semua partisi dari interval I. Jika $f : I \to \mathbb{R}$ terbatas, maka masing-masing partisi P dalam $\mathcal{P}(I)$ menentukan dua bilangan yaitu jumlahan bawah $L(P; f)$ dan jumlahan atas $U(P; f)$.

Berikut ini akan diberikan definisi integral atas dan integral bawah.

Definisi 2.1 *[1] (R.G. Bartle dan D.R. Sherbert, hal.233) Diberikan $I := [a, b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terbatas. Integral bawah dari f pada I adalah*

$$L(f) := \sup\{L(P, f) : P \in \mathcal{P}(I)\}$$

Integral atas dari f pada I adalah

$$U(f) := \sup\{U(P, f) : P \in \mathcal{P}(I)\}$$

Definisi 2.2 *[1] (R.G. Bartle dan D.R. Sherbert, hal.234) Diberikan $I := [a, b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terbatas, maka f dikatakan terintegral Riemann pada I jika $L(f) = U(f)$. Integral Riemann dari f pada I didefinisikan sebagai nilai dari $L(f) = U(f)$, dan dinotasikan oleh*

$$\int_a^b f \qquad \textit{atau} \qquad \int_a^b f(x)\ dx$$

.

Kaitan antara integral Cavalieri-Wallis dan integral Porter-Wallis dengan integral Riemann akan dicari melalui jumlahan Riemann. Oleh karena itu di bawah ini akan diberikan definisi dan teorema mengenai jumlahan Riemann.

Definisi 2.3 *[1] (R.G. Bartle dan D.R. Sherbert, hal.262) Diberikan $I := [a, b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terbatas. Jika $P := (x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ adalah partisi dari I dan jika $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ adalah titik-titik di dalam interval I sedemikian hingga $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ untuk $k = 1, 2, \cdots, n$, maka jumlahan*

$$S(P; f) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

disebut jumlahan Riemann (Riemann sum) dari yang terkait dengan partisi dan nilai antara .

Teorema 2.4 *[1] (R.G. Bartle dan D.R. Sherbert, hal.263) Diberikan $I := [a, b]$ dan $f : I \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terintegral pada I. Jika diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat P_ε partisi dan jika $S(P; f)$ adalah jumlahan Riemann, maka*

$$\left| S(P; f) - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

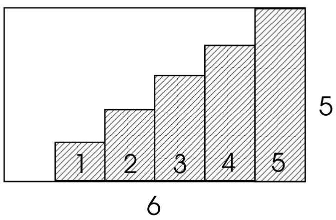
$\int_a^b f$ dalam Teorema 2.4 dapat ditulis sebagai

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S(P; f)$$

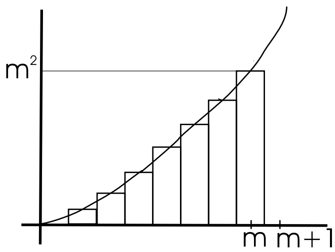
3. Integral Cavalieri-Wallis dan Integral Porter-Wallis

Integral Cavalieri-Wallis dan integral Porter-Wallis adalah teori yang dibangun berdasarkan konsep *indivisible* dari Cavalieri dan Wallis.

Dengan menggunakan prinsip *indivisible*, Bonaventura Cavalieri membentuk metode untuk menghitung luas daerah segitiga. Luas segitiga adalah setengah dari luas persegi empat yang mempunyai panjang dan lebar yang sama dengan panjang alas dan tinggi segitiga tersebut. Cavalieri mendekati daerah segitiga dengan persegi empat-persegi empat kecil, seperti pada Gambar 1. Pada saat lebar (alas) persegi empat itu semakin kecil, maka persegi empat tersebut akan berubah menjadi garis-garis vertikal dan membentuk segitiga



Gambar 1:



Gambar 2:

Gambar 1 adalah gambar sebuah persegi empat dengan panjang 6 satuan dan lebar 5 satuan. Luas persegi panjang pada Gambar 1 adalah . Untuk menghitung luas daerah yang diarsir yang ada didalam persegi panjang adalah dengan menjumlahkan luas seluruh persegi panjang yang kecil. Jika dibandingkan antara luas daerah yang diarsir dengan luas persegi panjang, yang selanjutnya akan disebut sebagai rasio, maka diperoleh

$$\frac{\textit{Luas daerah yang diarsir}}{\textit{Luas daerah persegi panjang}} = \frac{0+1+2+3+4+5}{5\times 6} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

Dengan cara yang sama pada persegi panjang yang lebih besar, diperoleh rasio

$$\frac{\textit{Luas daerah yang diarsir}}{\textit{Luas daerah persegi panjang}} = \frac{\sum_{i=0} ni}{n(n+1)} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n(n+1)} = \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbf{N}$$

Kemudian Cavalieri mengembangkan metode untuk menghitung luas area di bawah kurva $y = x^2$. Gambar 2 adalah gambar kurva $y = x^2$, $x \geq 0$. Pada Gambar 2 terlihat bahwa masing-masing persegi panjang kecil mempunyai panjang alas (lebar) 1 satuan di sepanjang sumbu-x, dan tinggi (panjang) x^2 di sepanjang sumbu-y. Sedangkan luas persegi panjang yang besar mempunyai panjang alas (lebar) $m+1$ dan tinggi (panjang) m^2, sehingga diperoleh rasio

$$\frac{\textit{Luas m persegi panjang}}{\textit{Luas yang dibatasi persegi panjang}} = \frac{0^2+1^2+2^2+\cdots+m^2}{(m+1)m} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6m}$$

Pada saat m semakin besar mendekati tak hingga, maka

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6m}\right) = \frac{1}{3}$$

Wallis menggunakan *indivisibles* seperti yang dilakukan oleh Cavalieri untuk menghitung rasio luas daerah di bawah kurva $y = x^2$ pada $[0, 1]$ dengan luas daerah persegi panjang yang mengelilinginya. Untuk menghitung rasio dari luas daerah di bawah kurva dengan persegi panjang yang mengelilinginya, Wallis memberikan rasio dari kurva dengan interval adalah $x^2 : 1^2$. Wallis menghitung rasio dari jumlahan n subinterval dengan interval, sehingga diperoleh

$$\frac{(\frac{0}{n})^2+(\frac{1}{n})^2+(\frac{2}{n})^2+\cdots+(\frac{n}{n})^2}{1^2+1^2+1^2\cdots+1^2} = \frac{(\frac{0}{n})^2+(\frac{1}{n})^2+(\frac{2}{n})^2+\cdots+(\frac{n}{n})^2}{(\frac{n}{n})^2+(\frac{n}{n})^2+(\frac{n}{n})^2+\cdots+(\frac{n}{n})^2}$$

untuk $n \in \mathbf{N}$.

Pada saat n semakin besar atau n mendekati tak hingga, diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{0}{n})^2+(\frac{1}{n})^2+(\frac{2}{n})^2+\cdots+(\frac{n}{n})^2}{1^2+1^2+1^2\cdots+1^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{0}{n})^2+(\frac{1}{n})^2+(\frac{2}{n})^2+\cdots+(\frac{n}{n})^2}{(\frac{n}{n})^2+(\frac{n}{n})^2+(\frac{n}{n})^2+\cdots+(\frac{n}{n})^2}$$

Karena

$$\frac{(\frac{0}{n})^2+(\frac{1}{n})^2+(\frac{2}{n})^2+\cdots+(\frac{n}{n})^2}{1^2+1^2+1^2\cdots+1^2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{6n}$$

maka

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{0}{n})^2+(\frac{1}{n})^2+(\frac{2}{n})^2+\cdots+(\frac{n}{n})^2}{1^2+1^2+1^2\cdots+1^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}+\frac{1}{6n} = \frac{1}{3}$$

Teknik Cavalieri-Wallis adalah suatu teknik untuk mengukur luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ pada $[0, 1]$, yang berdasarkan pada kerja Bonaventura

Cavalieri dan John Wallis (metode Indivisible). Rasio Cavalirieri-Wallis (CW_n) dibentuk dari Metode Wallis kedalam bentuk pendekatan limit dari jumlahan, yang dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
CW_1 &= \frac{0^2+1^2}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6\times 1} \\
CW_2 &= \frac{0^2+1^2+2^2}{2^2+2^2+2^2} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6\times 2} \\
CW_3 &= \frac{0^2+1^2+2^2+3^2}{3^2+3^2+3^2+3^2} = \frac{14}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6\times 3} \\
\vdots &= \vdots \\
CW_n &= \frac{0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2+n^2+n^2+\cdots+n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6\times n}, \quad n\in\mathbf{N}
\end{aligned}$$

Bentuk CW_n dapat diekspresikan dengan fungsi $f(x) = x^2$ pada $[0,1]$ yang dibagi menjadi n interval yang sama.

$$\begin{aligned}
CW_n &= \frac{0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2+n^2+n^2+\cdots+n^2} \\
&= \frac{0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2(n+1)} \\
&= \frac{\frac{0^2}{n^2}+\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2}}{(n+1)} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2}{n+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)}{1\times(n+1)}
\end{aligned}$$

dengan $f_{max} = 1$, sehingga diperoleh

$$CW_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)}{f_{max}(n+1)}$$

Jika f fungsi yang terbatas pada interval $[0,1]$ maka $M = f_{max}$, sehingga CW_n bisa ditulis

$$CW_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)}{M(n+1)} \tag{1}$$

dengan $x_i = a + \frac{(b-a)i}{n}$ untuk $n \in \mathbf{N}$ dan M adalah supremum dari fungsi f.

Jika n semakin besar mendekati tak hingga, maka $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ untuk $i = 1, 2, \cdots$ akan semakin kecil dimana

$$\Delta x_i = \left(a + \frac{(b-a)(i+1)}{n}\right) - \left(a + \frac{(b-a)i)}{n}\right) = \frac{b-a}{n}$$

sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} = 0$$

Dengan demikian persegi empat yang digunakan untuk mendekati luas daerah di bawah kurva, akan menjadi garis-garis vertikal yang sejajar di bawah kurva (*indivisible*).

Selanjutnya akan diberikan definisi integral Cavalieri-Wallis.

Definisi 3.1 *Diberikan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fungsi terbatas. Integral Cavalieri-Wallis dari fungsi f pada $[a,b]$ didefinisikan sebagai $CW \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} CW_n$ atau $CW \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)}{M(n+1)}$, dengan $x_i = a + \frac{(b-a)i}{n}$ dan M adalah supremum dari fungsi f.*

Suatu fungsi terbatas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dikatakan terintegral Cavalieri-Wallis jika $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)}{M(n+1)}$ ada.

Setelah mengetahui definisi integral Cavalieri-Wallis, berikut ini akan diberikan definisi integral Porter-Wallis. Akan tetapi sebelumnya akan diberikan terlebih dahulu mengenai jumlahan rata-rata tinggi (PW_n).

Diberikan suatu fungsi terbatas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, untuk setiap $n \in \mathbf{N}$ maka jumlahan rata-rata tinggi (PW_n) didefinisikan sebagai

$$PW_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)}{M(n+1)} \tag{2}$$

dengan $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \cdots, x_n = a + \frac{n(b-a)}{n} = b$.

Definisi 3.2 *Diberikan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ adalah fungsi terbatas dan untuk setiap n, didefinisikan jumlahan rata-rata tinggi $PW_n = \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)}{n+1}$, dengan $x_0 = a$,*

$x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \cdots, x_n = a + \frac{n(b-a)}{n} = b$. *Integral Porter-Wallis didefinisikan sebagai* $(b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)}{(n+1)}$ *atau* $(b-a) \lim_{n\to\infty} PW_n(f)$ *dan ditulis sebagai* $PW \int_a^b f(x)dx$.

4. Kaitan antara Integral Cavalieri- Wallis dan Integral Porter-Wallis dengan Integral Riemann

Dari Definisi 2.2 akan dibahas mengenai keterkaitan integral Cavalieri-Wallis dengan jumlahan Riemann.

Jika f fungsi terbatas maka $M = f_{max}$, sehingga

$$\begin{aligned} CW \int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} f\left(a + \frac{(b-a)}{n} i\right)}{f_{max}(n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(a)}{f_{max}(n+1)} + \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{(b-a)}{n} i\right)}{f_{max}(n+1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(a)}{f_{max}(n+1)} + \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)A_r} R_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)A_r} R_n \end{aligned} \tag{3}$$

dengan $R_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$ adalah jumlahan Riemann dan $A_r = f_{max}(b-a)$ adalah luas area persegi empat dengan panjang alas $(b-a)$ dan tinggi f_{max}.

Untuk mendapatkan hubungan antara integral Cavalieri-Wallis dengan integral Porter-Wallis yang merupakan bentuk kasus tertentu dari integral Cavalieri-Wallis, akan diuraikan Definisi 2.3.

$$\begin{aligned} PW \int_a^b f(x)dx &= (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)}{(n+1)} \\ &= (b-a)M \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)}{M(n+1)} \\ &= (b-a)M \lim_{n\to\infty} CW_n \end{aligned} \tag{4}$$

Selanjutnya akan diberikan teorema mengenai keterkaitan antara integral Cavalieri-Wallis dan integral Porter-Wallis dengan integral Riemann.

Teorema 4.1 *Kelas dari fungsi terintegral Riemann berada di dalam kelas fungsi terintegral Cavalieri-Wallis atau Porter-Wallis.*

Bukti:
Untuk membuktikan Teorema di atas, akan ditunjukkan bahwa

$$\lim_{n\to\infty}((b-a)\times M\times CW_n) = \lim_{n\to\infty} R_{n+1}$$

R_{n+1} adalah jumlahan Riemann dengan $n+1$ partisi. Misalkan f fungsi terintegral Riemann pada $[a,b]$ dan adalah supremum dari f, maka terdapat partisi P_{n+1} dari $[a,b]$, dengan

$$\begin{aligned} x_0 &= a,\ x_1 = a+\frac{b-a}{n+1},\ x_2 = a+\frac{2(b-a)}{n+1},\cdots \\ x_n &= a+\frac{n(b-a)}{n+1},\ x_{n+1} = a+\frac{(n+1)(b-a)}{n+1} \end{aligned}$$

Jika $(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n+1})$ adalah suatu bilangan sedemikian hingga untuk $x+k-1\leq \xi_k\leq x_k$ untuk $k=1,2,\cdots,(n+1)$, maka

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} f(\xi_k)}{n+1}$$

Misalkan diambil ξ_k sedemikian hingga $\xi_k=\xi_{k-1}$, sehingga diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} f(x_{k-1})}{M(n+1)}$$

Dari Persamaan (1), CW_n, $x_0=a$, $x_n=b$ dan M adalah supremum dari fungsi f. Oleh karena itu untuk n yang sangat besar berlaku $\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{n+1}$, maka

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = (b-a)M\lim_{n\to\infty} CW_n$$

Hal ini berarti bahwa jika f fungsi terintegral Riemann maka f juga terintegral Cavalieri-Wallis. Karena integral Porter-Wallis merupakan bentuk kasus tertentu dari integral Cavalieri-Wallis (Persamaan (4), maka teorema ini berlaku juga untuk integral Porter-Wallis.

Di bawah ini akan diberikan Teorema Fundamental Kalkulus untuk integral Porter-Wallis.

Teorema 4.2 *(Teorema Fundamental Kalkulus untuk Integral Porter-Wallis)* *Diberikan* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*. Jika* f' *kontinu pada* $[a, b]$ *dengan* a *dan* b *anggota bilangan real, maka:*

$$PW \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Bukti:

f' kontinu pada $[a, b]$, menurut Teorema 2.4 f' kontinu seragam pada $[a, b]$. Menurut Teorema 4.2 terintegral Riemann. Misalkan $P := (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ partisi yang sama dari $[a, b]$, maka

$$PW \int_a^b f'(x)dx = (b - a) \lim_{n\to\infty} PW_n(f') = (b - a) \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} f'(x_i)}{(n + 1)}$$

Untuk n yang sangat besar, maka untuk $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, dengan $i = 1, 2, \cdots, n$ berlaku $f'(x_i) \approx f'(t_i)$, berdasarkan Teorema Nilai Tengah, diperoleh

$$\begin{aligned} PW \int_a^b f(x)dx &= (b - a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n + 1} \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \\ PW \int_a^b f'(x)dx &= (b - a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n + 1} \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i) - f(x_{i-1})}{\frac{(b-a)}{n}} \\ &= (b - a) \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n + 1} (f(b) - f(a)) = f(b) - f(a) \qquad \square \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dibahas mengenai sifat-sifat integral Cavalieri-Wallis dan integral Porter-Wallis.

Teorema 4.3 *(Sifai-sifat Integral Cavalieri-Wallis dan Porter-Wallis)* *Diberikan* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *fungsi terintegral Cavalieri-Wallis, untuk* $\alpha \in \mathbb{R}$*, mak dan* $f + g$ *terintegral Cavalieri-Wallis serta*

i. $$CW \int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha(CW) \int_a^b f(x)dx$$

ii. $$CW \int_a^b (f(x) + g(x))dx = CW \int_a^b f(x)dx + CW \int_a^b g(x)dx$$

iii. *Jika* $f(x) \geq 0$ *untuk semua* $x \in I$*, maka* $CW \int_a^b f(x)dx \geq 0$

iv. *Jika* $f(x) \leq g(x)$ *untuk semua* $x \in I$*, maka* $CW \int_a^b f(x)dx \leq CW \int_a^b g(x)dx$

Bukti:

i. Akan dibuktikan bahwa

$$CW \int_a^b \alpha f(x)dx \; = \; \alpha(CW) \int_a^b f(x)dx, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

- Jika $\alpha = 0$, maka $\alpha f = 0$, sehingga $CW \int_a^b \alpha f(x)dx \; = 0$
- Jika $\alpha > 0$, maka
$$CW \int_a^b \alpha f(x)dx \; = \; \alpha \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)}{M(n+1)} = \alpha(CW) \int_a^b f(x)dx$$
- Jika $\alpha < 0$, maka
$$CW \int_a^b \alpha f(x)dx \; = \; \alpha \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)}{M(n+1)} = \alpha(CW) \int_a^b f(x)dx \qquad \square$$

ii. Akan dibuktikan bahwa

$$CW \int_a^b (f(x)+g(x))dx \; = \; CW \int_a^b f(x)dx + CW \int_a^b g(x)dx$$

Karena $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, maka

$$
\begin{aligned}
CW\int_a^b (f(x)+g(x))dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n}(f+g)(x_i)}{M(n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)}{M(n+1)} + \frac{\sum_{i=0}^{n} g(x_i)}{M(n+1)} \right) \\
&= CW\int_a^b f(x)dx + CW\int_a^b g(x)dx \qquad \square
\end{aligned}
$$

iii. Akan dibuktikan jika $f(x) \geq 0$ untuk semua $x \in I$, maka $CW\int_a^b f(x)dx \geq 0$
Karena $f(x) \geq 0$ untuk semua $x \in I$, maka $f(x_i) \geq 0$ untuk semua x_i dan M supremum dari f. Karena $f(x_i) \geq 0$, maka $\frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)}{M(n+1)} \geq 0$, sehingga $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i)}{M(n+1)} = CW\int_a^b f(x)dx \geq 0 \qquad \square$

iv. Akan dibuktikan jika $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in I$, maka $CW\int_a^b f(x)dx \leq CW\int_a^b g(x)dx$
Jika $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in I$, maka $g(x) - f(x) \geq 0$, dengan menggunakan Sifat iii dan ii, diperoleh

$$CW\int_a^b (g(x) - f(x))dx = CW\int_a^b g(x)dx - CW\int_a^b f(x)dx$$

sehingga

$$CW\int_a^b f(x)dx \leq CW\int_a^b g(x)dx \qquad \square$$

Sifat-sifat ini juga berlaku untuk integral Porter-Wallis.

5. Penutup

Berdasarkan pembahasan di atas dapat diketahui bahwa setiap fungsi yang terintegral Riemann maka fungsi tersebut juga terintegral Cavalieri-Wallis dan Porter-Wallis. Akibatnya kelas fungsi terintegral Riemann termasuk dalam kelas fungsi terintegral Cavalieri-Wallis dan integral Porter-Wallis. Perlu penelitian lebih lanjut mengenai contoh suatu fungsi yang terintegral Cavalieri-Wallis dan Porter-Wallis tetapi tidak terintegral Riemann. Demikian juga dengan keterkaitan antara integral Cavalieri-Wallis dan Porter-Wallis dengan integral Lebesgue.

Pustaka

[1] Bartle, Robert.G. dan Sherbet, Donald.R., (1994), Introduction To Real Analysis, John Wiley and sons. Singapore.

[2] Czarnocha, B. dan Vrunda Prabhu. Indivisibles in Contemporary Calculus, NSF Grant #0126141, ROLE.

[3] Czarnocha, B., Dubinsky, E., Loch, S., Prabhu, V. dan Vidakowic, D., (2001), Conception of Area: In Student and In history, College Mathematics Journal v.32, #3.

[4] Prabhu, V., Porter, J. dan Czarnocha, B., (2004), Research into Learning Calculus, History of Mathematics and Mathematical Analysis, ICME-10, e-proceedings.