Matriks Massa Segitiga dan Massa Neutrino Masif dalam Model Seesaw

Intan Fatimah Hizbullah* dan Agus Purwanto
Laboratorium Fisika Teori dan Filsafat Alam (LaFTiFA), Jurusan Fisika, FMIPA, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Kampus ITS Sukolilo, Surabaya 60111

Intisari

Kami analisa bauran neutrino dalam model seesaw melalui segitigaisasi matriks massa umum. Asumsi bahwa matriks massa Dirac dan quark-u serupa memberikan hubungan sederhana antara parameter neutrino dan massa Majorana. Dilakukan perhitungan eksplisit bagi parameter terkait masalah defisit neutrino surya sebagai implikasi dari hirarki massa Majorana.

KATA KUNCI: osilasi neutrino, matrik bauran dan model seesaw

I. PENDAHULUAN

Salah satu perburuan paling menantang di dalam fisika partikel adalah penentuan sifat intrinsik neutrino yaitu massa dan sudut baur (mixing angle) neutrino. Eksperimen-eksperimen SuperKamiokande, K2K, SNO dan KamLAND [1] memberi bukti kuat bahwa neutrino bermassa dan, tidak seperti sektor quark, sudut baurannya besar. Model paling menarik untuk membangkitkan massa kecil neutrino adalah mekanisme seesaw [2] yakni dengan memperkenalkan suku tambahan berupa matriks massa Dirac dan Majorana.

Matriks massa Dirac dapat diatasi dengan mengikuti gagasan GUT yang menyatakan bahwa matriks ini serupa dengan sektor quark. Tetapi kita tidak mempunyai pengetahuan tentang matriks massa Majorana baik orde maupun strukturnya.

Di dalam artikel ini, struktur umum matriks massa seesaw akan dianalisa, dan tanpa harus kehilangan sifat umumnya kita akan bekerja dengan basis yang mana matriks massa diagonal bagi lepton bermuatan dan Majorana. Di dalam artikel ini diasumsikan bahwa matriks massa Dirac menggunakan analogi dengan matriks massa quark mempunyai nilai eigen hirarkis dan sudut baur kiri kecil. Meskipun demikian, di dalam kasus ini bauran besar dapat terjadi melalui keterkaitan antara matriks Dirac dan Majorana.

Di dalam model seesaw matriks massa neutrino efektif m_ν diberikan oleh hubungan

$$m_\nu = m_D M_N^{-1} m_D^T \tag{1}$$

Secara umum matriks sembarang dapat didekomposisi menjadi perkalian matriks diagonal dan matriks bi-uniter, U_o dan V_o

$$m_D = U_o m_D^{diag} V_o \tag{2}$$

*E-MAIL: `intan@physics.its.ac.id`

Untuk penyederhanaan, kita juga mengabaikan efek simpangan CP sehingga semua matriks bauran dan rotasi adalah riel. Selanjutnya, sesuai asumsi di depan, di dalam basis matriks Majorana diagonal,

$$M_N^{-1} = \begin{pmatrix} W_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & W_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & W_3^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

dengan $M_i = 1/W_i^2$; i=1, 2, 3. Dari hubungan (1) dan (2) tampak bahwa V_o juga mengandung kontribusi dari diagonalisasi matriks massa Majorana M_N sehingga dapat saja mempunyai sudut baur besar. Meskipun demikian, kita akan membatasi diskusi pada sudut kecil di dalam V_o.
Pers.(1), (2) dan (3) dapat ditulis ulang sebagai

$$U_o^{-1} m_\nu U_o = \underbrace{m_D^{diag} V_o M_N^{-1/2}}_{N} \underbrace{M_N^{-1/2} V_o^T m_D}_{N^T} = NN^T \tag{4}$$

yang mana matriks N akan kita gunakan dalam evaluasi lebih lanjut. Matriks Dirac diagonal pers.(2)

$$m_D^{diag} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

dengan hirarki kuat $m_1 << m_2 << m_3$. Massa Dirac neutrino ini pada skala GUT $(m_1 = m_u, m_2 = m_c, m_3 = m_t)$ mempunyai nilai $m_D^{diag} \approx (0,001;\ 0,3;\ 100) GeV$ [3]. Hirarki ini mereduksi hasil perkaliannya dengan V_o menjadi matriks segitiga

$$\begin{aligned} m_D^{diag} V_o &= \begin{pmatrix} m_1 V_{11} & m_1 V_{12} & m_1 V_{13} \\ m_2 V_{21} & m_2 V_{22} & m_2 V_{23} \\ m_3 V_{31} & m_3 V_{32} & m_3 V_{33} \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} m_1 V_{11} & 0 & 0 \\ m_2 V_{21} & m_2 V_{22} & 0 \\ m_3 V_{31} & m_3 V_{32} & m_3 V_{33} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6}$$

sehingga

$$N \approx \begin{pmatrix} m_1V_{11}W_1 & 0 & 0 \\ m_2V_{21}W_1 & m_2V_{22}W_2 & 0 \\ m_3V_{31}W_1 & m_3V_{32}W_2 & m_3V_{33}W_3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Matriks massa segitiga ini memungkinkan penyelesaian masalah menjadi lebih sederhana [4] . Matriks ini dapat didiagonalisasi dengan matriks bi-uniter atau matriks rotasi kiri (LH) dan kanan (RH) dan dituliskan sebagai

$$N = UN^{diag}P \quad (8)$$

Uraian ini memberikan

$$\begin{aligned} m_\nu^{diag} &= \begin{pmatrix} m_{\nu_1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{\nu_2} & 0 \\ 0 & 0 & m_{\nu_3} \end{pmatrix} \\ &= \left(U^{-1}U_o^{-1}\right) m_\nu \left(U_oU\right) \\ &= \left(N^{diag}\right)^2 \end{aligned} \quad (9)$$

Persamaan ini menyatakan bahwa sudut baur untuk massa kecil neutrino berasal dari UU_o, sedangkan nilai eigen dari N merupakan akar kuadrat massa kecil neutrino $\sqrt{m_{\nu_i}}$.

Kita mempunyai data-data rentang sudut baur dan massa maka kita akan mengestimasi massa Majorana, yang terakhir ini diperlukan di antaranya dalam kalkulasi besarnya lepton asimetri bagi leptogenesis. Di dalam evaluasi ini akan digunakan bentuk matriks segitiga bagi massa neutrino.

Hasil eksperimen osilasi neutrino surya memberi tiga solusi bagi masalah neutrino surya yakni sudut bauran kecil (small mixing angle, SMA) MSW (Mikheyev-Smirnov-Wolfstein), sudut bauran besar (large mixing angle, LMA) MSW dan osilasi vakum (VO). Orde besaran bagi neutrino surya $\Delta m_\odot^2$ [5]

$$\begin{aligned} \Delta m_\odot^2 &\approx 10^{-6}eV^2,\ \sin^2 2\theta \approx 8\times 10^{-3}\ (SMA) \\ \Delta m_\odot^2 &\approx 10^{-5}eV^2,\ \sin^2 2\theta \approx 0,6\ (LMA) \\ \Delta m_\odot^2 &\approx 10^{-10}eV^2,\ \theta \approx \pi/4\ (VO) \end{aligned} \quad (10)$$

Sedangkan osilasi atmosferik memberikan

$$\Delta m_{atm}^2 \approx 10^{-3}eV^2 \quad (11)$$

Di bagian II diperlihatkan bahwa matriks 3×3 sembarang selalu dapat dirotasi menjadi matriks segitiga baik segitiga atas maupun segitiga bawah dan selanjutnya dicari nilai eigen dari matriks segitiga tersebut. Bagian III penerapan matriks segitiga untuk matriks massa neutrino efektif dengan input dari data neutrino surya dan neutrino atmosferik. Akhirnya diberikan diskusi dan kesimpulan pada bagian IV.

II. MATRIKS MASSA SEGITIGA

A. Segitigaisasi Matriks Sembarang

Matriks segitiga telah diterapkan untuk penyelesaian masalah eigen matriks massa quark dan matriks massa lepton [4]. Di sini diperlihatkan terlebih dahulu bahwa setiap matriks 3×3 sembarang selalu dapat dirotasi sedemikian rupa sehingga menjadi matriks segitiga. Kita berangkat dari matriks 3×3 riel paling umum

$$N = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Untuk mengantisipasi pemakaian dalam sektor neutrino kita asumsikan

$$a^2 << b^2 \approx c^2 \quad (13)$$

Matriks (12) dan elemen-elemennya dapat dipandang sebagai kumpulan tiga vektor sembarang di dalam ruang Cartesian tiga dimensi. Matriks umum 3×3 dapat ditransformasi menjadi matriks segitiga atas atau matriks segitiga bawah. Matriks segitiga atas

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \quad (14)$$

tidak lain merupakan peralihan vektor basis yaitu salah satu vektor, $\vec{c}$, diambil sebagai sumbu-z, satu vektor lainnya $\vec{b}$ berada pada bidang y-z dan vektor sisanya bebas.

Secara kuantitatif proses segitigaisasi matriks massa 3×3 dilakukan dengan memperkenalkan tiga matriks rotasi secara berurutan. Pertama, matriks rotasi (1-3)

$$R(13) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad (15)$$

dan kalikan dari kanan dengan matriks massa (12). Perkalian dengan elemen-elemen baris ketiga memberikan

$$\vec{c}R(13) = \begin{pmatrix} 0 & c_2 & c_3' \end{pmatrix} \quad (16)$$

dengan $c_3' = \sqrt{c_1^2 + c_3^2}$ jika

$$\tan\alpha = \frac{c_1}{c_3}. \quad (17)$$

Hasil perkalian antara matriks massa dan matriks rotasi (1-3) selanjutnya kalikan dari kanan dengan matriks rotasi (2-3)

$$R(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \quad (18)$$

Elemen-elemen baris ketiga menjadi

$$\vec{c}R(13)R(23) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_3'' \end{pmatrix} \quad (19)$$

dengan

$$c_3'' = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = c \quad (20)$$

jika

$$\tan\beta = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_3^2}} \tag{21}$$

Matriks massa (12) secara umum menjadi

$$N' = NR(13)R(23) = \begin{pmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \vec{a}' \\ \vec{b}' \\ \vec{c}' \end{pmatrix} \tag{22}$$

dengan

$$\begin{aligned} a_1' &= a_1\cos\alpha - a_3\sin\alpha \\ a_2' &= -a_1\sin\alpha\sin\beta + a_2\cos\beta - a_3\cos\alpha\sin\beta \\ a_3' &= a_1\sin\alpha\cos\beta + a_2\sin\beta + a_3\cos\alpha\cos\beta \\ b_1' &= b_1\cos\alpha - b_3\sin\alpha \\ b_2' &= -b_1\sin\alpha\sin\beta + b_2\cos\beta - b_3\cos\alpha\sin\beta \\ b_3' &= b_1\sin\alpha\cos\beta + b_2\sin\beta + b_3\cos\alpha\cos\beta \end{aligned} \tag{23}$$

Vektor $\vec{c}$ dirotasi sampai berimpit dengan sumbu-z. Selanjutnya, perkenalkan matriks rotasi (1-2)

$$R(12) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kalikan dari kanan terhadap pers.(22) dan baris kedua menjadi

$$\vec{b}' R(12) = \begin{pmatrix} 0 & b_2'' & b_3' \end{pmatrix} \tag{24}$$

dengan

$$b_2'' = \sqrt{b_1'^2 + b_2'^2} \tag{25}$$

jika

$$\tan\gamma = \frac{b_1'}{b_2'} \tag{26}$$

Dengan demikian matriks massa segitiga atas dari matriks massa (12) berbentuk

$$\begin{aligned} N_\Delta &= NR(13)R(23)R(12) \\ &= \begin{pmatrix} a_1'' & a_2'' & a_3' \\ 0 & b_2'' & b_3' \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{27}$$

dengan

$$\begin{aligned} a_1'' &= a_1'\cos\gamma - a_2'\sin\gamma \\ a_2'' &= a_1'\sin\gamma + a_2'\cos\gamma \\ b_2'' &= b_1'\sin\gamma + b_2'\cos\gamma \end{aligned} \tag{28}$$

Evaluasi terhadap komponen akhir matriks massa memberikan

$$\begin{aligned} a_3' &= a_1\sin\alpha\cos\beta + a_2\sin\beta + a_3\cos\alpha\cos\beta \\ &= a_1\frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_3^2}}\frac{\sqrt{c_1^2+c_3^2}}{c} + a_2\frac{c_2}{c} \\ &\quad + a_3\frac{c_3}{\sqrt{c_1^2+c_3^2}}\frac{\sqrt{c_1^2+c_3^2}}{c} \\ &= \frac{a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3}{c} \\ &= \vec{a}\cdot\hat{c} \end{aligned} \tag{29}$$

Serupa untuk b_3',

$$b_3' = \vec{b}\cdot\hat{c} \tag{30}$$

Sedangkan tiga komponen lainnya dihitung secara langsung dengan langkah cukup panjang yang akhirnya didapatkan

$$\begin{aligned} a_1'' &= \vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\hat{c}\right)/b_2'' \\ a_2'' &= \vec{a}\cdot\left(\hat{c}\times\left(\vec{b}\times\hat{c}\right)\right)/b_2'' \\ b_2'' &= \left|\vec{b}\times\hat{c}\right| \end{aligned} \tag{31}$$

Langkah serupa untuk merubah matriks umum 3×3 menjadi matriks segitiga bawah

$$NR'(13)R'(12)R'(23) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ \vec{b}\cdot\hat{a} & \left|\vec{b}\times\hat{a}\right| & 0 \\ \vec{c}\cdot\hat{a} & \frac{\vec{c}\cdot\left(\hat{a}\times\left(\vec{b}\times\hat{a}\right)\right)}{\left|\vec{b}\times\hat{a}\right|} & \frac{\vec{c}\cdot\left(\vec{b}\times\hat{a}\right)}{\left|\vec{b}\times\hat{a}\right|} \end{pmatrix} \tag{32}$$

dengan matriks rotasi

$$\begin{aligned} R'(13) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha' & 0 & -\sin\alpha' \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha' & 0 & \cos\alpha' \end{pmatrix} \\ R'(12) &= \begin{pmatrix} \cos\gamma' & -\sin\gamma' & 0 \\ \sin\gamma' & \cos\gamma' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ R'(23) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta' & -\sin\beta' \\ 0 & \sin\beta' & \cos\beta' \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{33}$$

dan sudut-sudut

$$\begin{aligned} \tan\alpha' &= \frac{a_3}{a_1} \\ \tan\gamma' &= \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_3^2}} \\ \tan\beta' &= \frac{(a_1b_3 - a_3b_1)\,a}{(a_1^2 + a_3^2)\,b_2 - a_2\,(a_1b_1 + a_3b_3)} \end{aligned} \tag{34}$$

Hasil di depan memperlihatkan bahwa setiap matriks sembarang dapat ditransformasi menjadi matriks segitiga.

B. Solusi Eigen Matriks Segitiga

Karena matriks massa Majorana adalah matriks simetri maka diagonalisasi dilakukan dengan matriks bi-ortogonal. Untuk mendiagonalisasi matriks N_Δ pertama diagonalisasi terlebih dahulu submatriks (2-3) dengan matriks ortogonal $U_L(23)$ dan $U_R(23)$

$$U_{LR}(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_{23}^{LR} & \sin\theta_{23}^{LR} \\ 0 & -\sin\theta_{23}^{LR} & \cos\theta_{23}^{LR} \end{pmatrix} \quad (35)$$

Diagonalisasi memberikan

$$U_L^T(23)\,N_\Delta U_R(23) \equiv N_\Delta^u = \begin{pmatrix} a_1'' & a_2''\cos\theta_{23}^R - a_3'\sin\theta_{23}^R & a_2''\sin\theta_{23}^R + a_3'\cos\theta_{23}^R \\ 0 & \sqrt{\left(b_2''\cos\theta_{23}^R - b_3'\sin\theta_{23}^R\right)^2 + c^2\sin^2\theta_{23}^R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_2''c}{\sqrt{\left(b_2''\cos\theta_{23}^R - b_3'\sin\theta_{23}^R\right)^2 + c^2\sin^2\theta_{23}^R}} \end{pmatrix} \quad (36)$$

telah diambil

$$\tan\theta_{23}^L = \frac{c\sin\theta_{23}^R}{b_2''\cos\theta_{23}^R - b_3'\sin\theta_{23}^R} \quad (37)$$

dan

$$\tan 2\theta_{23}^R = \frac{2b_2''b_3'}{b_3'^2 + c^2 - b_2''^2} = \frac{2\left|\vec{b}\times\hat{c}\right|\vec{b}\cdot\hat{c}}{\left(\vec{b}\cdot\hat{c}\right)^2 + c^2 - \left|\vec{b}\times\hat{c}\right|^2} \quad (38)$$

Hubungan (37) dan (38) memberikan hubungan lebih lanjut yakni $\tan 2\theta_{23}^L$

$$\tan 2\theta_{23}^L = \frac{2b_3'c}{c^2 - b_2''^2 - b_3'^2} = \frac{2\vec{b}\cdot\vec{c}}{c^2 - b^2} \quad (39)$$

Nilai eigen massa didapatkan dengan mensubtitusi sudut θ_{23}^R pers.(38) ke dalam suku diagonal

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \sqrt{\left(b_2''\cos\theta_{23}^R - b_3'\sin\theta_{23}^R\right)^2 + c^2\sin^2\theta_{23}^R} \\ &= \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(b^2+c^2\right)^2 - 4\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|^2} \end{aligned} \quad (40)$$

dan

$$\begin{aligned} \mu_3 &= \frac{b_2''c}{\sqrt{\left(b_2''\cos\theta_{23}^R - b_3'\sin\theta_{23}^R\right)^2 + c^2\sin^2\theta_{23}^R}} \\ &= \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(b^2+c^2\right)^2 - 4\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|^2} \end{aligned} \quad (41)$$

Selanjutnya, diagonalisasi submatriks (1-3) dengan

$$U_L(13) = \begin{pmatrix} \cos\theta_{13}^L & 0 & \sin\theta_{13}^L \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_{13}^L & 0 & \cos\theta_{13}^L \end{pmatrix} \quad (42)$$

sehingga

$$U_L(13)\,N_\Delta^u \approx \begin{pmatrix} a_1'' & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} \quad (43)$$

Jika sudut baur (1-3) kecil sekali $\tan\theta_{13}^L \approx \sin\theta_{13}^L \approx \theta_{13}^L$

$$\theta_{13}^L = \frac{\alpha_3}{\mu_3} << 1 \quad (44)$$

Terakhir diagonalisasi submatriks (1-2) dengan matriks baur

$$U_{LR}(12) = \begin{pmatrix} \cos\theta_{12}^{LR} & \sin\theta_{12}^{LR} & 0 \\ -\sin\theta_{12}^{LR} & \cos\theta_{12}^{LR} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (45)$$

yaitu

$$U_L^T(12)\,U_L^T(13)\,N_\Delta^u U_R(12) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2' & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} \quad (46)$$

dengan sudut baur (1-2)

$$\tan\theta_{12}^L = \frac{\mu_2\sin\theta_{12}^R}{a_1''\cos\theta_{12}^R - \alpha_2\sin\theta_{12}^R} \quad (47)$$

atau

$$\tan 2\theta_{12}^L = \frac{2\alpha_2\mu_2}{\mu_2^2 - a_1''^2 - \alpha_2^2} \quad (48)$$

dan

$$\tan 2\theta_{12}^R = \frac{2a_1''\alpha_2}{\mu_2^2 + \alpha_2^2 - a_1''^2} \quad (49)$$

dan massa eigen

$$\mu_1 = \sqrt{\left(a_1''\cos\theta_{12}^R - \mu_2\sin\theta_{12}^R\right)^2 + \mu_2^2\sin^2\theta_{12}^R} \quad (50)$$

dan

$$\mu_2' = \frac{a_1''\mu_2}{\sqrt{\left(a_1''\cos\theta_{12}^R - \mu_2\sin\theta_{12}^R\right)^2 + \mu_2^2\sin^2\theta_{12}^R}} \tag{51}$$

III. DISKUSI DAN HASIL NUMERIK

Di dalam analisa berikut ini kita akan menggunakan asumsi adanya hirarki yang kuat bagi massa Majorana. Matriks bauran sektor lepton dikenal sebagai matriks bauran Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS)[6].

Hasil-hasil analisis data eksperimen juga memperlihatkan bahwa massa neutrino surya dan atmosfer memperlihatkan hirarki yang kuat, dan matriks bauran neutrino PMNS $U_{\ell i}$ [7]mempunyai bentuk

$$\begin{aligned} U &= U_{23}(\phi)\, U_{13}(\epsilon)\, U_{12}(\theta) \\ &= \begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta & \epsilon \\ -\left(s_\theta c_\phi + \epsilon c_\theta s_\phi\right) & c_\theta c_\phi - \epsilon s_\theta s_\phi & s_\phi \\ s_\theta s_\phi - \epsilon c_\theta c_\phi & -\left(c_\theta s_\phi + \epsilon s_\theta c_\phi\right) & c_\phi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{52}$$

yang mana $\tan\phi \approx 1$ terkait dengan bauran maksimal dan $\epsilon << 1$ terkait dengan bauran kecil [8]. Sudut baur θ dapat bernilai kecil sehingga secara keseluruhan memberi bauran maksimal tunggal atau bernilai besar dan maksimal sehingga memberi bauran bi-maksimal. Kita akan mendiskusikan kedua kasus tersebut, pertama kasus $\epsilon << s_\theta$ dan kedua $\epsilon >> s_\theta$.

A. Kasus pertama $\epsilon << s_\theta$

Untuk kasus $\epsilon << s_\theta$ matriks bauran U terseduksi

$$U \approx \begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta & \epsilon \\ -s_\theta c_\phi & c_\theta c_\phi & s_\phi \\ s_\theta s_\phi & -c_\theta s_\phi & c_\phi \end{pmatrix} \tag{53}$$

dan matriks N

$$\begin{aligned} N &= U \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} c_\theta n_1 & s_\theta n_2 & \epsilon n_3 \\ -s_\theta c_\phi n_1 & c_\theta c_\phi n_2 & s_\phi n_3 \\ s_\theta s_\phi n_1 & -c_\theta s_\phi n_2 & c_\phi n_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{54}$$

Membandingkan matriks diagonal bagi N (54) dan (8) serta pers.(9) didapatkan bahwa massa efektif neutrino kecil

$$m_{\nu_i} = n_i^2 \tag{55}$$

Asumsi $n_1 << n_2 << n_3$ memberikan $b^2 \approx s_\phi^2 n_3^2$ dan $c^2 \approx c_\phi^2 n_3^2$ sehingga

$$m_{\nu_3} = n_3^2 = \frac{b^2}{s_\phi^2} = \frac{c^2}{c_\phi^2} \tag{56}$$

Sedangkan perbandingan

$$\frac{\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|}{\left|\vec{b}\cdot\vec{c}\right|} \approx \frac{\left(c_\theta c_\phi^2 + c_\theta s_\phi^2\right) n_2 n_3}{s_\phi c_\phi n_3^2} \approx \frac{c_\theta n_2}{s_\phi c_\phi n_3} << 1 \tag{57}$$

berimplikasi bahwa $\vec{b}$ dan $\vec{c}$ mendekati paralel sampai orde n_2/n_3. Matriks (54) juga menyatakan bahwa $a << b \approx c$ sehingga analisis terdahulu juga dapat diterapkan pada kasus N. Matriks (54) dapat dirotasi menjadi matriks segitiga bawah (32) dengan elemen-elemen

$$N \approx \begin{pmatrix} \sqrt{c_\theta^2 n_1^2 + s_\theta^2 n_2^2 + \epsilon^2 n_3^2} & 0 & 0 \\ \frac{c_\phi s_\theta c_\theta n_2^2 + s_\phi \epsilon n_3^2}{a} & \frac{s_\phi s_\theta n_2 n_3}{a} & 0 \\ \frac{-s_\phi s_\theta c_\theta n_2^2 + c_\phi \epsilon n_3^2}{a} & \frac{s_\theta c_\phi n_2 n_3}{a} & \frac{n_1}{s_\theta s_\phi} \end{pmatrix} \tag{58}$$

Orde ϵ akan menentukan suku dominan N. Kesejajaran vektor akan tetap bertahan setelah ketiga vektor dirotasi dan elemen-elemennya membentuk matriks segitiga bawah. Kesejajaran ini memberi pilihan natural bagi parameter ϵ yaitu $\epsilon << m_{\nu_2}/m_{\nu_3} = n_2^2/m_3^2$ dan suku dominan N adalah elemen (2,2) dan (2,3). Dalam limit ini dan $\tan\theta >> n_1/n_2$ memberikan

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{c_\theta^2 n_1^2 + s_\theta^2 n_2^2 + \epsilon^2 n_3^2} \\ &= n_3\sqrt{c_\theta^2\frac{n_1^2}{n_3^2} + s_\theta^2\frac{n_2^2}{n_3^2} + \epsilon^2} \\ &\approx n_3 c_\theta\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\frac{n_2^2}{n_3^2} + \tan^2\theta\frac{n_2^2}{n_3^2}} \\ &= n_2 c_\theta\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} + \tan^2\theta} \\ &\approx n_2 s_\theta \end{aligned} \tag{59}$$

Sehingga matriks N tereduksi menjadi

$$N \approx \begin{pmatrix} n_2 s_\theta & 0 & 0 \\ c_\phi c_\theta n_2 & s_\phi n_3 & 0 \\ -s_\phi c_\theta n_2 & c_\phi n_3 & \frac{n_1}{s_\theta s_\phi} \end{pmatrix} \tag{60}$$

Untuk sudut bauran maksimal $\phi = 45^o$, [9]

$$N \approx \begin{pmatrix} n_2 s_\theta & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} c_\theta n_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} n_3 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} c_\theta n_2 & \frac{1}{\sqrt{2}} n_3 & \sqrt{2}\frac{n_1}{s_\theta} \end{pmatrix} \tag{61}$$

Untuk rotasi kanan V_o mendekati satuan $V_{ii} \approx 1$ dan $V_{ij} << 1, i \neq j$ maka

$$N \approx \begin{pmatrix} m_1 W_1 & 0 & 0 \\ m_2 V_{21} W_1 & m_2 W_2 & 0 \\ m_3 V_{31} W_1 & m_3 V_{32} W_2 & m_3 W_3 \end{pmatrix} \tag{62}$$

Kedua matriks N terakhir dan hubungan massa (55) memberikan

$$\begin{aligned} m_{\nu_1} = n_1^2 = \frac{s_\theta^2 W_3^2 m_3^2}{2} &= \frac{s_\theta^2 m_t^2}{2M_3} \\ m_{\nu_2} = n_2^2 = \frac{W_1^2 m_1^2}{s_\theta^2} &= \frac{m_u^2}{s_\theta^2 M_1} \\ m_{\nu_3} = n_3^2 = 2W_2^2 m_2^2 &= \frac{2m_c^2}{M_2} \end{aligned} \quad (63)$$

Hasil di atas tidak memperlihatkan keteraturan hubungan antara massa neutrino kecil m_{ν_i} dan M_i baik dalam bentuk $m_{\nu_i} \propto M_i$ atau $m_{\nu_i} \propto 1/M_i$. Selain itu, m_{ν_3} berskala m_c^2 bukan m_t^2. Hasil lainnya massa skala menengah M_2 tidak bergantung pada sudut baur θ dan hanya bergantung pada massa neutrino kecil m_{ν_3} dan massa quark m_c^2 sehingga dapat diestimasi terlebih dahulu yakni

$$M_2 = \frac{2m_c^2}{m_{\nu_3}} \quad (64)$$

Data-data massa neutrino dari eksperiman neutrino surya dan atmosfer memberikan $\Delta m_\odot^2 << \Delta m_{atm}^2$. Secara teoritis hasil pengamatan massa kuadrat ini terkait dengan selisih massa eigen kuadrat

$$\begin{aligned} \Delta m_\odot^2 &= m_{\nu_2}^2 - m_{\nu_1}^2 \\ \Delta m_{atm}^2 &= m_{\nu_3}^2 - m_{\nu_2}^2,\ m_{\nu_3}^2 - m_{\nu_1}^2 \end{aligned} \quad (65)$$

Asumsi hirarki kuat n_i memberikan

$$m_{\nu_3} \approx \sqrt{\Delta m_{atm}^2} \quad (66)$$

sehingga, dari data massa cham-quark, diperoleh

$$M_2 \approx \frac{2m_c^2}{\sqrt{\Delta m_{atm}^2}} = 4 \times 10^9 GeV \quad (67)$$

suatu skala yang jauh lebih kecil dari yang diharapkan.

Dua massa Majorana masif lainnya bergantung pada solusi atau data neutrino surya. Analisis osilasi neutrino dan asumsi hirarki juga memberikan

$$m_{\nu_2} \approx \sqrt{\Delta m_\odot^2} \quad (68)$$

sedangkan m_{ν_1} tidak diketahui. Akibatnya, M_3 tidak dapat diketahui kecuali batas bawahnya melalui parameter $r = m_{\nu_2}/m_{\nu_1} >> 1$ yaitu dari pers.(63) pertama

$$M_3 = \frac{s_\theta^2 m_t^2}{2m_{\nu_1}} = \frac{s_\theta^2 m_t^2}{2m_{\nu_2}} \frac{m_{\nu_2}}{m_{\nu_1}}$$

atau

$$M_3/r = \frac{s_\theta^2 m_t^2}{2\sqrt{\Delta m_\odot^2}} \quad (69)$$

Dengan kata lain,

$$M_3 > \frac{s_\theta^2 m_t^2}{2\sqrt{\Delta m_\odot^2}} \quad (70)$$

Sedangkan massa Majorana terkecil

$$M_1 = \frac{m_u^2}{s_\theta^2 \sqrt{\Delta m_\odot^2}} \quad (71)$$

Selanjutnya kita estimasi kedua massa Majorana masif dengan input dari tiga solusi defisit neutrino surya yaitu osilasi vakum (VO), sudut besar MSW (LMA) dan sudut kecil MSW (SMA).

- VO

Sudut baur $\theta = 45^o$ sehingga

$$M_1 = \frac{2\left(10^{-3}\right)^2 GeV^2}{\sqrt{10^{-10}} eV} = 2 \times 10^8 GeV \quad (72)$$

dan

$$M_3 > \frac{100^2 GeV^2}{4\sqrt{10^{-10}} eV} = 2,5 \times 10^{17} GeV \quad (73)$$

- LMA

Dalam kasus ini $\sin^2 2\theta \approx 0,6$ maka $\sin^2\theta \approx 0,18$ seperti perhitungan kasus VO diperoleh

$$\begin{aligned} M_1 &= 1,85 \times 10^6 GeV, \\ M_2 &= 4 \times 10^9 GeV, \\ M_3 &> 8,9 \times 10^{15} GeV \end{aligned} \quad (74)$$

- SMA

Dalam kasus ini $\sin^2 2\theta \approx 8 \times 10^{-3}$ maka $\sin^2\theta \approx 2 \times 10^{-3}$ seperti perhitungan kasus VO diperoleh

$$\begin{aligned} M_1 &= 5 \times 10^8 GeV, \\ M_2 &= 4 \times 10^9 GeV, \\ M_3 &> 1,0 \times 10^{13} GeV \end{aligned} \quad (75)$$

Hasil-hasil di depan diperoleh dengan asumsi $\epsilon \to 0$ tetapi jika $\epsilon >> n_2/n_3$ pers.(54) tidak berlaku. Juga jika $\epsilon >> s_\theta$ matriks N pers.(60) tidak berlaku dan matriks yang relevan akan dibahas lengkap berikut.

B. Kasus kedua $\epsilon >> s_\theta$

Untuk kasus $\epsilon >> s_\theta$ matriks bauran U menjadi

$$U \approx \begin{pmatrix} c_\theta & s_\theta & \epsilon \\ -\epsilon c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi & s_\phi \\ -\epsilon c_\theta c_\phi & -c_\theta s_\phi & c_\phi \end{pmatrix} \quad (76)$$

dan matriks N

$$N \approx \begin{pmatrix} c_\theta n_1 & s_\theta n_2 & \epsilon n_3 \\ -\epsilon c_\theta s_\phi n_1 & c_\theta c_\phi n_2 & s_\phi n_3 \\ -\epsilon c_\theta c_\phi n_1 & -c_\theta s_\phi n_2 & c_\phi n_3 \end{pmatrix} \quad (77)$$

Dalam limit ini matriks segitiga bawah bagi N diberikan oleh

$$N \approx \begin{pmatrix} \epsilon n_3 & 0 & 0 \\ \frac{n_3}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{s2\theta n_2^2}{2\epsilon n_3^2}\right) & \frac{n_2}{\sqrt{2}}\left(c_\theta - \frac{s_\theta}{\epsilon}\right) & 0 \\ \frac{n_3}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{s2\theta n_2^2}{2\epsilon n_3^2}\right) & \frac{n_2}{\sqrt{2}}\left(c_\theta + \frac{s_\theta}{\epsilon}\right) & \frac{\sqrt{2}n_1}{\epsilon} \end{pmatrix} \quad (78)$$

Membandingkan matriks segitiga ini dengan pers.(62) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}n_1}{\epsilon} &= m_3 W_3 \\ \frac{n_2}{\sqrt{2}}\left(c_\theta - \frac{s_\theta}{\epsilon}\right) &= m_2 W_2 \\ \epsilon n_3 &= m_1 W_1 \end{aligned} \quad (79)$$

Setelah mensubtitusi massa quark, massa neutrino surya dan neutrino atmosfer berturut-turut untuk m_{ν_1}, m_{ν_2} dan m_{ν_3} serta parameter $r = m_{\nu_2}/m_{\nu_1}$ diperoleh massa Neutrino masif

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{m_u^2}{\epsilon^2\sqrt{\Delta m_{atm}^2}} \\ M_2 &\approx \frac{2m_c^2}{\left(c_\theta - \frac{s_\theta}{\epsilon}\right)^2\sqrt{\Delta m_\odot^2}} \\ M_3 &= \frac{\epsilon^2 m_t^2}{2\sqrt{\Delta m_\odot^2}} \end{aligned} \quad (80)$$

Data solusi neutrino surya yang memenuhi batasan masalah $\epsilon >> s_\theta$ adalah kasus sudut baur kecil SMA $\sin^2 2\theta \approx 8 \times 10^{-3}$ atau $\sin^2\theta \approx 2 \times 10^{-3}$. Untuk memberi angka tertentu kita ambil $\epsilon = 10^{-1}$, subtitusi nilai-nilai yang relevan pada M_i diperoleh

$$\begin{aligned} M_1 &= 3,16 \times 10^6 GeV \\ M_2 &= 5 \times 10^{11} GeV \\ M_3 &= 5 \times 10^{13} GeV \end{aligned} \quad (81)$$

Hasil-hasil di depan menyatakan bahwa kita dapat memperoleh massa Majorana secara langsung jika parameter-parameter fisis neutrino diketahui dan massa Dirac diidentifikasi sebagai massa quark.

IV. SIMPULAN

Massa kecil neutrino yang diperlihatkan oleh hasil-hasil eksperimen dapat dijelaskan secara alamiah menggunakan model seesaw. Model ini memberi struktur matriks massa yang cukup rumit sehingga tidak mudah memperoleh sudut baur neutrino dari komponen-komponen model seesaw seperti massa Dirac m_D dan massa Majorana M_N^{-1}.

Di dalam risalah ini pertama diperlihatkan bahwa setiap matriks sembarang 3×3 dapat dirotasi menjadi matriks segitiga baik segitiga atas atau segitiga bawah. Matriks segitiga ini diterapkan dalam proses diagonalisasi matriks neutrino dengan langkah-langkah berikut. Pertama, massa Dirac dituliskan sebagai $m_D = U_o m_D^{diag} V_o$ dan neutrino Majorana dipilih dalam basis diagonal sehingga $M_N = M_N^{diag}$. Selanjutnya massa efektif dituliskan sebagai $m_\nu = NN^T$ sehingga N hanya bergantung pada komponen-komponen m_D^{diag}, V_o dan M_N^{-1}. Matriks N direduksi menjadi matriks segitiga dan bentuk matriks segitiga bawah muncul secara alamiah jika m_D^{diag} mempunyai hirarki kuat. Matriks segitiga N memberikan hubungan sederhana antara massa kecil neutrino, massa neutrino Majorana, sudut baur dan matriks Dirac. Hubungan ini memungkinkan penentuan bolak-balik antar keempat kuantitas tersebut.Di dalam evaluasi digunakan input berupa hasil eksperimen neutrino surya dan atmosferik. Kolaborasi SuperKamiokande memberi bauran maksimal bagi neutrino atmosferik, $\theta_{23} \approx \pi/4$, dan evaluasi dibedakan menjadi dua kasus $\theta_{13}(=\epsilon) << \sin\theta_{12}$ dan $\epsilon >> \sin\theta_{12}$.

Di dalam kasus $\epsilon << \sin\theta_{12}$, massa neutrino massif M_2 tidak bergantung pada sudut baur θ_{12} dan berorde 10^9 GeV sedangkan M_3 hanya dapat ditentukan nilai terkecilnya. Orde M_1 dan M_3 masing-masing untuk data VO, LMA dan SMA adalah 10^8, 10^6, 10^8 GeV dan 10^{17}, 10^{16},10^{13} GeV. Orde M_3 yang sangat besar untuk solusi VO ($>> 10^{17}$ GeV) membuatnya tidak diunggulkan sebagai kandidat solusi. Di dalam kajian ini tidak ditinjau renormalisasi mengingat efek persamaan grup renormalisasi (RGE) sangat kecil [10].

Untuk kasus $\epsilon >> \sin\theta_{12}$ hanya data SMA neutrino surya yang relevan dan semua massa neutrino baik neutrino kecil maupun masif bergantung pada sudut baur. Massa neutrino M_3 tetap hanya dapat ditentukan batas nilai terkecilnya. Orde M_1, M_2 dan M_3 masing-masing adalah 10^6, 10^{11} dan 10^{13} GeV.

Ucapan Terima Kasih

Penulis (IFH) berterimakasih pada konsorsium fisika teori Indonesia yang memberi kesempatan mendiskusikan sebagian penelitian ini pada Workshop on Theoretical Physics 2008. Penulis (AP) menyampaikan terimakasih kepada Indonesia Center for Theoretical and Mathematical Physics (ICTMP) yang mendukung penelitian ini.

[1] Y. Fukuda *dkk.*, Phys.Rev.Lett. **81**, 1158(1998); M.H. Ahn *dkk.*,Phys.Rev.Lett. **90**, 041801(2003); Q.R. Ahmad *dkk.*, Phys.Rev.Lett. **89**, 011301; 011302(2002); K.Eguchi *dkk.*, Phys.Rev.Lett. **90**, 021802(2003).

[2] M. Gell-Mann, P.Ramond and R. Slansky, in *Supergravity*, eds. P. van Nieuwenhuizen and D. Freedman (North Hollad, Amsterdam, 1979); T.Yanagida, in *Proceedings of the Workshop on Unified Theories and Baryon Number in the Universe*, eds. O.Sawada and A. Sugamoto (KEK, Tsukuba, 1979).

[3] H. Fusaoka and Y. Koide, Phys. Rev. **D57**, 3986 (1998).

[4] J. Hashida, T. Morozumi, and A. Purwanto, Prog. Theor. Phys. **103**, 379 (2000); T.K. Kuo, G.H. Wu and S.W. Mansour, Phys. Rev. **D61**, 111301 (2000; T. Morozumi, T. Satou, M.N. Rebelo, dan M. Tanimoto, Phys. Lett. **B410** 233 (1997).

[5] J.N. Bahcal, P.I. Krastev and A. Yu. Smirnov, Phys. Rev. **D58**, 096016 (1998); **D60**, 093001 (1999).

[6] B. Pontecorvo, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **33** 549 (1957); Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, Prog. Theor. Phys. **28**, 870 (1962).

[7] E. Kh. Akhmedov, Phys. Lett **B467**, 95 (1999).

[8] M.Appolonio *dkk.* [CHOOZ Collab.], Phys.Lett. **B420**,397(1998).

[9] Y. Fukuda *dkk.*, Phys.Rev.Lett. **81**, 1562(1998).

[10] K.S. Babu, C.N. Leung and J. Pantaleone, Phy. Lett. **B319** 191 (1993).