AFİNOR ALANLARIN HORİZONTAL LİFTİNİN NİJENHUİS-SHİROKOV TENSÖRÜ HAKKINDA

Necmi CENGİZ
Atatürk Üniversitesi, Matematik Bölümü

Arif SALİMOV
Atatürk Üniversitesi, Matematik Bölümü

ÖZET: Bu çalışmada almost kompleks yapının Nijenhuis tensörünün almost cebirsel yapılara genişlemesi olan Nijenhuis-Shirokov tensörü invaryant formda verilmiş ve bu tür tensörler tanjant demette incelenmiştir. Tanjant demette horizontal lift yardımıyla oluşan almost cebirsel yapının Nijenhuis-Shirokov tensörünün sıfıra eşit olmasını sağlayan şartlar bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: *Tensör, afinor alan, tanjant demet, horizontal lift.*

ABSTRACT: The main purpose of the present paper is first of all to study Nijenhuis-Shirokov tensors for an almost algebraic structure and then to apply the results to the study of tangent bundles.

Key words: *Tensor, affinor field, tangent bundle, horizontal lift.*

1. Giriş

M_n, C^∞ sınıfından n-boyutu diferensiyellenebilen bir manifold, A_m , m-boyutlu birimli, değişmeli, birleşmeli cebir olsun. M_n manifoldu üzerinde alınmış (1,1) tipli tensör (afinor) alanlarının herhangi kümesi Π olsun. Eğer $\Pi \leftrightarrow A_m$ izomorfizmi varsa Π-yapıya almost cebirsel yapı denir. A_m cebirinin bazı $\{e_\alpha\}$ olmak üzere, karşılık gelen $\underset{\alpha}{\varphi} \leftrightarrow e_\alpha$ afinorları için

$$\underset{\alpha}{\varphi}\,\underset{\beta}{\varphi} = C^{\gamma}_{\alpha\beta}\,\underset{\gamma}{\varphi}$$

yazılır. Burada $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$, A_m cebirinin yapı sabitleri, $\underset{\alpha}{\varphi}\,\underset{\beta}{\varphi}$ ise $\underset{\alpha}{\varphi}$ ve $\underset{\beta}{\varphi}$ afinorlarının kontraksiyonlu çarpımıdır. Koordinatlarla bu çarpım $\underset{\alpha}{\varphi}{}^{i}_{m}\,\underset{\beta}{\varphi}{}^{m}_{j}$ olarak gösterilir.

2. Nijenhuis-Shirokov Tensörü

M_n manifoldu üzerinde $(1,q)$ tipli tüm tensör alanlarının kümesini $\Im^1_q(M_n)$ ile gösterelim. $\Im^1_q(M_n)$, $F(M_n)$ (M_n manifoldu üzerindeki C^∞ sınıfından olan tüm fonksiyonlar cebiri) üzerinde bir modül oluşturur.

$t \in \Im^1_q(M_n)$ tensör alanı ve $\forall \underset{\alpha}{\varphi} \in \Pi,\ \alpha = 1,\ldots,m,$ için aşağıdaki şart sağlanıyorsa, t tensör alanının almost cebirsel yapıya göre pür tensör alanı denir:

$$\varphi(t(X_1,\ldots,X_q)) = t(\varphi X_1,\ldots,X_q) = \ldots = t(X_1,\ldots,\varphi X_q)\ \ \forall X_1,\ldots,X_q \in \Im^1_0(M_n).$$

Kabul edelim ki, $\psi \in \Im^1_1(M_n)$ almost cebirsel yapıya göre bir pür afinor alanı olsun. Bu afinora uygulanan Tachibana operatörüne bakalım [1],[2]:

$$(\Phi_\varphi \psi)(X,Y) = \varphi[\psi Y, X] + \psi[Y, \varphi X] - [\psi Y, \varphi X] - \psi\varphi[X,Y]. \tag{1}$$

Almost cebirsel Π -yapısı için $Q_{\varphi,\psi}(X,Y)$, $\forall \varphi,\psi \in \Pi$ Nijenhuis-Shirokov tensörü

$$Q_{\varphi,\psi}(X,Y) = [\psi X, \varphi Y] - \varphi[\psi X, Y] - \psi[X, \varphi Y] + \psi\varphi[X,Y] \tag{2}$$

biçiminde tanımlanır [3]. (1) ve (2) denklemlerinden

$$Q_{\varphi\psi}(X,Y) = -(\Phi_\varphi \psi)(Y,X) \tag{3}$$

bulunur.

Özel durumda, eğer $\varphi = \psi$ ve almost cebirsel Π-yapı almost kompleks yapı ise $(\varphi^2 = id)$ $Q_{\varphi,\varphi}(X,Y) = -N_\varphi(Y,X)$ Nijenhuis tensörü bulunur ve (3) eşitliğinden de $N_\varphi(X,Y) = -N_\varphi(Y,X)$ özelliğine göre

$$(\Phi_\varphi \varphi)(X,Y) = N_\varphi(X,Y)$$

olduğu yazılır [2].

Nijenhuis tensörü almost kompleks yapının, Nijenhuis-Shirokov tensörü ise almost cebirsel yapının integrallenmesi problemlerinde önemli rol oynar.

3. Tanjant Demette Nijenhuis-Shirokov Tensörü

M_n, n-boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold olsun. M_n manifoldu üzerinde

$$T(M_n)=\bigcup_{p\in M_n} T_p(M_n)$$

tanjant demet ve $\pi : T(M_n \to M_n \ \ (\tilde{p}\to p)$ tabii izdüşümü verilmiş olsun. M_n manifoldunun U koordinat komşuluğunun p noktasındaki lokal koordinatlar $x^h, h=1,...,n$ olmak üzere $T(M_n)$ tanjant demette $\pi^{-1}(U)$ koordinat komşuluğundaki indirgenmiş lokal koordinatlar $(x^h, y^h)=(x^h, x^{\bar{h}}),\ \bar{h}=n+1,...,2n$ olarak alınır. Burada $x^{\bar{h}}=v^h$ $T_p(M_n)$ tanjant vektör uzayında ki $\tilde{p}$ vektörünün $\{\partial_h=\dfrac{\partial}{\partial x^h}\}$ bazında koordinatlarıdır. Lokal koordinatlarda $M_n : x^{j'}=x^{j'}(x^j)$ koordinat dönüşümüne karşılık $T(M_n)$ tanjant demette koordinat dönüşümü

$$\begin{cases} x^{j'}=x^{j'}(x^j) \\ y^{j'}=A_j^{j'}y^j,\ A_j^{j'}=\dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^j},\ y^j=x^{\bar{j}} \end{cases} \tag{4}$$

biçiminde olur. (4) dönüşümünün Jacobian matrisi

$$\left(\frac{\partial x^{J'}}{\partial x^J}\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} & \dfrac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\bar{j}}} \\ \dfrac{\partial x^{\bar{j}'}}{\partial x^j} & \dfrac{\partial x^{\bar{j}'}}{\partial x^{\bar{j}}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_j^{j'} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^j\partial x^i}y^i & A_j^{j'} \end{pmatrix} \tag{5}$$

olarak yazılır.

M_n manifoldunun U koordinat komşuluğunda keyfi $w=w_i dx^i$ 1-formu verilmiş ise $\pi^{-1}(U)$ da indirgenmiş koordinatlarda lokal ifadesi $\imath w=w_i y^i$ biçiminde olan fonksiyonu tanımlanır.

M_n manifoldu üzerinde X vektör alanı verilmiş olsun. w keyfi 1-form olmak üzere $T(M_n)$ tanjant demette

$$^{v}X(\imath w)={}^{v}(w(X)) \tag{6}$$

olarak tanımlanan X vektör alanına X vektör alanının vertical lifti denir. X vektörünün $T(M_n)$ tanjant demette vertical liftinin bileşenleri

$$^{v}X:\begin{pmatrix} {}^{v}X^h \\ {}^{v}X^{\bar{h}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix} \tag{7}$$

olarak verilir. (7) ifadesiyle tanımlanmış vertical liftin tanjant demette bir vektör alanı olduğu (5) ile verilen Jakobian matrisinin yardımıyla da gösterilebilir.
Sonuç olarak (7) denkleminden

$$\begin{cases} {}^vX{}^vf = 0, \ {}^v(X+Y) = {}^vX + {}^vY \\ {}^v(fX) = {}^vf{}^vX, \ X,Y \in \Im_0^1(M_n), f \in \Im_0^0(M_n) \end{cases} \tag{8}$$

elde edilir. Ayrıca X ve Y keyfi vektör alanları olmak üzere (7) denkleminden Lie parentezi için

$$[{}^vX, {}^vY] = 0 \tag{9}$$

elde edilir.

Diğer taraftan M_n diferensiyellenebilir manifoldunda Γ_{ij}^k katsayıları ile ∇ afin konneksiyonu verilmiş olsun. M_n manifoldunda keyfi tipli S tensör alanının $T(M_n)$ tanjant demetdeki horizontal lifti

$${}^HS = {}^cS - \nabla_\gamma S \tag{10}$$

olarak tanımlanır [4, s.94]. Burada ${}^cS$ -tam lifti gösterir, $\nabla_\gamma S$ ise

$$\nabla_\gamma S = (y^l \nabla_l S_{k\ldots j}^{i\ldots h}) \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dx^k \otimes \ldots \otimes dx^j$$

gibi verilir. Burada $\nabla_l S_{k\ldots j}^{i\ldots h}$ S tensör alanının kovaryant türevidir. O halde $X \in \Im_0^1(M_n)$, $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ vektör alanlarının $T(M_n)$ tanjant demette horizontal liftinin bileşenleri

$$\begin{cases} {}^HX = \begin{pmatrix} X^h \\ -\Gamma_i^h X^i \end{pmatrix} \\ {}^H\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_i^h & 0 \\ -\Gamma_t^h \varphi_i^t + \Gamma_i^t \varphi_t^h & \varphi_i^h \end{pmatrix}, \Gamma_i^h = y^j \Gamma_{ji}^h \end{cases} \tag{11}$$

olarak yazılır.

$\check{R}$, $\check{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X,Y]$, biçimindeki $\check{\nabla}$ konneksiyonunun eğrilik tensörü olmak üzere (lokal koordinatlarda $\check{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$) aşağıdaki formüller yazılır:

$$\begin{aligned} [{}^vX, {}^HY] &= {}^v[X,Y] - {}^v(\nabla_X Y) \\ [{}^HX, {}^vY] &= {}^v[X,Y] + {}^v(\nabla_Y X) \\ [{}^HX, {}^HY] &= {}^H[X,Y] - \gamma \check{R}(X,Y) \end{aligned} \tag{12}$$

$\varphi \in \Im_1^1(M_n)$, $X \in \Im_0^1(M_n)$ olmak üzere

$${}^H\varphi{}^vX = {}^v(\varphi X), \ {}^H\varphi{}^HX = {}^H(\varphi X) \tag{13}$$

olur.

1. Teorem $\tilde{S}$ ve $\tilde{T}$, $T(M_n)$, tanjant uzayında $(1,s)$ tipinde iki tensör alanı olsun. $\tilde{X}_t$ $(t=1,...,s)$ ile ${}^vX$ veya ${}^HX$ vektör alanlarını işaret edelim. Eğer $\tilde{X}_t$ alanları için

$$\tilde{S}(\tilde{X}_s,...,\tilde{X}_1)=\tilde{T}(\tilde{X}_s,...,\tilde{X}_1),\ \forall X\in\Im_0^1(M_n)$$

ise, bu taktirde $\tilde{S}=\tilde{T}$ olur ([4, s.101]).

M_n manifoldu üzerinde değişmeli almost cebirsel Π- yapısı verilmiş olsun. $\forall \underset{\alpha}{\varphi},\underset{\beta}{\varphi}\in\Pi,\ \forall X,Y\in\Im_0^1(M_n)$ için Nijenhuis-Shirokov tensörleri

$Q_{\underset{\alpha}{\varphi},\underset{\beta}{\varphi}}(X,Y)=\underset{\alpha\beta}{Q}(X,Y)$ olmak üzere

$$\underset{\alpha\beta}{Q}(X,Y)=[\underset{\beta}{\varphi}X,\underset{\alpha}{\varphi}Y]-\underset{\alpha}{\varphi}[\underset{\beta}{\varphi}X,Y]-\underset{\beta}{\varphi}[X,\underset{\alpha}{\varphi}Y]+C_{\alpha\beta}^{\gamma}\underset{\gamma}{\varphi}[X,Y] \tag{14}$$

biçiminde yazılır.

${}^H\varphi\,{}^H\psi={}^H(\varphi\psi),\ \forall\varphi,\psi\in\Im_1^1(M_n)$ olduğunu biliyoruz [4,s.102]. Buna göre

$${}^H\underset{\alpha}{\varphi}\,{}^H\underset{\beta}{\varphi}={}^H(\underset{\alpha}{\varphi}\underset{\beta}{\varphi})={}^H(C_{\alpha\beta}^{\gamma}\underset{\gamma}{\varphi})=C_{\alpha\beta}^{\gamma}\,{}^H\underset{\gamma}{\varphi}$$

olur. Bu ise ${}^H\Pi=\{{}^H\varphi\}$ yapısının da almost cebirsel yapı olması demektir.

${}^H\Pi=\{{}^H\varphi\}$ yapıya göre $\overset{*}{\underset{\alpha\beta}{Q}}$ Nijenhuis-Shirokov tensörleri için, (9), (12), (13), (14) formülleri yardımıyla

$$\overset{*}{\underset{\alpha\beta}{Q}}({}^vX,{}^vY)=0$$

$$\overset{*}{\underset{\alpha\beta}{Q}}({}^vX,{}^HY)={}^v(\underset{\alpha\beta}{Q}(X,Y))-{}^v\{(\nabla_{\underset{\beta}{\varphi}X}\underset{\alpha}{\varphi})Y-\underset{\beta}{\varphi}(\nabla_X\underset{\alpha}{\varphi})Y\}$$

$$\overset{*}{\underset{\alpha\beta}{Q}}({}^HX,{}^vY)={}^v(\underset{\alpha\beta}{Q}(X,Y))+{}^v\{(\nabla_{\underset{\alpha}{\varphi}Y}\underset{\beta}{\varphi})X-\underset{\alpha}{\varphi}(\nabla_Y\underset{\beta}{\varphi})X\}$$

$$\overset{*}{\underset{\alpha\beta}{Q}}({}^HX,{}^HY)={}^H(\underset{\alpha\beta}{Q}(X,Y))-\gamma\check{R}(\underset{\beta}{\varphi}X,\underset{\alpha}{\varphi}Y)+{}^H\underset{\alpha}{\varphi}\gamma\check{R}(\underset{\beta}{\varphi}X,Y)$$
$$+{}^H\underset{\beta}{\varphi}\gamma\check{R}(X,\underset{\alpha}{\varphi}Y)-C_{\alpha\beta}^{\gamma}\,{}^H\underset{\gamma}{\varphi}\gamma\check{R}(X,Y)$$

bulunur.

1. Teoremi kullanarak aşağıdaki Teoremi ispatlamış oluruz:

2. Teorem M_n manifoldu üzerinde cebirsel Π- yapısı verilmiş olsun. Eğer

$$\underset{\alpha\beta}{Q}=0$$

$$(\nabla\underset{\alpha}{\varphi})(\underset{\beta}{\varphi}X,Y)-\underset{\beta}{\varphi}(\nabla\underset{\alpha}{\varphi})(X,Y)=0$$

$$(\nabla\underset{\beta}{\varphi})(\underset{\alpha}{\varphi}Y,X)-\underset{\alpha}{\varphi}(\nabla\underset{\beta}{\varphi})(Y,X)=0$$

$$\check{R}(\underset{\beta}{\varphi}X,\underset{\alpha}{\varphi}Y)-\underset{\alpha}{\varphi}\check{R}(\underset{\beta}{\varphi}X,Y)-\underset{\beta}{\varphi}\check{R}(X,\underset{\alpha}{\varphi}Y)+C_{\alpha\beta}^{\gamma}\underset{\gamma}{\varphi}\check{R}(X,Y)=0$$

eşitlikleri sağlanıyorsa $\underset{\alpha\beta}{\overset{*}{Q}}=0$ olur.

Eğer almost cebirsel Π-yapı almost integrallenebilirse, yani burulmasız ∇ konneksiyonu için $\nabla\varphi=0$ oluyor ise bu durumda $\underset{\alpha\beta}{Q}=0$ olur [3]. Diğer taraftan $\underset{\alpha\beta}{Q}(X,Y)=-\underset{\beta\alpha}{Q}(Y,X)$ olduğunu dikkate alırsak [5], bu tür yapılar için

$$0=\underset{\alpha\beta}{Q}(X,Y)=-(\Phi_{\underset{\alpha}{\varphi}}\underset{\beta}{\varphi})(Y,X)=-\{(\nabla\underset{\beta}{\varphi})(\underset{\alpha}{\varphi}Y,X)-\underset{\alpha}{\varphi}(\nabla\underset{\beta}{\varphi})(Y,X)\},$$

$$0=\underset{\beta\alpha}{Q}(X,Y)=-(\Phi_{\underset{\beta}{\varphi}}\underset{\alpha}{\varphi})(X,Y)=-\{(\nabla\underset{\alpha}{\varphi})(\underset{\beta}{\varphi}X,Y)-\underset{\beta}{\varphi}(\nabla\underset{\alpha}{\varphi})(X,Y)\}$$

olduğundan dolayı 2. Teoremden aşağıdaki sonucu çıkartırız.

Sonuç: Eğer M_n manifoldu üzerinde almost integrallenebilen almost cebirsel Π-yapı verilmiş

$$R(\underset{\beta}{\varphi}X,\underset{\alpha}{\varphi}Y)-\underset{\alpha}{\varphi}R(\underset{\beta}{\varphi}X,Y)-\underset{\beta}{\varphi}R(X,\underset{\alpha}{\varphi}Y)+C_{\alpha\beta}^{\gamma}\underset{\gamma}{\varphi}R(X,Y)=0$$

şartı sağlanıyorsa, bu taktirde $\underset{\alpha\beta}{\overset{*}{Q}}=0$ olur. Burada, R, ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörüdür.

Kaynaklar

[1]. TACHIBANA, S. (1960), Analytic tensor and its generalization, Tohoku Math. J., 12N.2, 208-221.

[2]. YANO, K., AKO, M. (1968), On certain operators associated with tensor fields, Kodai Math. Sem., Rep., 20, 414-436.

[3]. KRUCHKOVICH, G.I. (1972), Hypercomplex structures on manifolds, I. Trudy sem. vector. tensor. anal, Moscow Univ., N.16, 174-201.

[4]. YANO, K., ISHIHARA, S. (1973),Tangent and Cotangent bundles, Marcel Dekker Inc., New York.

[5]. SALIMOV, A.A. (1994), The Generalized Yano-Ako operator and complete lift of the tensor fields, Tensor N.S., Tensor Soc. of Japan, 55, N.2, 142-146.