# DÜZGÜN ÖLÇÜM

**Ali DÖNMEZ**
*Doğuş Üniversitesi, Fen Bilimleri Bölümü*

**Halit ORHAN**
*Atatürk Üniversitesi, Matematik Bölümü*

**Özet:** Düzgün ölçüm üzerine bazı teoremler ispatlandı.

**Anahtar sözcükler:** *Ölçüm, düzgün ölçüm, simetrik fark.*

**Abstract:** We have proved some theorems on regular measures

**Key words:** *Measure, regular measure, symetric dıfference.*

## GİRİŞ

Herhangi bir $A$ kümesinin dış ölçümü

$$\inf \sum_{A \subseteq \cup P_k} m(P_k)$$

olarak tanımlanır ve bu,

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{A \subseteq \cup P_k} m(P_k)$$

biçiminde gösterilir. Buna bağlı olarak $A$ kümesinin iç ölçümü $\mu_*(A)$ işareti ile gösterilir ve $\mu_*(A) = 1 - \mu^*(E \setminus A)$ olarak tanımlanır (2, s. 258). İç ve dış ölçüm arasında her zaman $\mu_*(A) \leq \mu^*(A)$ bağıntısı vardır. Eğer $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ oluyorsa, $A$ kümesine Lebesgue anlamında ölçülebilirdir denir ve bu, $\mu_*(A) = \mu(A) = \mu^*(A)$ olarak gösterilir (2, s.258).

$A$ kümesinin ölçülebilir olması için gerekli ve yeterli koşulun $\mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) = 1$ olmasıdır (2, s.261-263).

$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ kümeleri ölçülebilirse, bu kümelerin bileşimleri ve kesişimleri de ölçülebilirdir. Ayrıca,

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

ise

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

olur. Eğer $A_n$ kümeleri ikişer ikişer ayrıksa,

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

olur (2, s. 262-263).

Sayılabilir kümelerin ölçümü sıfırdır (3, s.35). Fakat, bu önermenin tersinin doğru olması gerekmez. Çünkü, Cantor kümesi ters bir örnektir.

$A$ kümesinin ölçülebilir olması için gerekli ve yeterli koşul her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$ olacak biçimde ilkel bir $B$ kümesinin olmasıdır (2, s.261).

$A$ kümesi ölçülebilirse bu kümenin tümleyeni olan $A' = E \setminus A$ kümesi de ölçülebilirdir (2, s.263).

Eğer bir özellik bir $E$ kümesinin sıfır ölçümlü bir küme oluşturan noktalar dışındaki tüm noktalarda sağlanıyorsa, bu özelliğe $E$ kümesi üzerinde hemen hemen heryerde (hhh) sağlanıyor denilir (3, s. 33), (2, s. 288).

**TEOREMLER:**

**1. Teorem:** E temel kümesinde A,B $\subset$ E olmak üzere hemen hemen her yerde (hhh) A=B ise $\mu(A \setminus B) = 0 = \mu(B \setminus A)$ olur ve $\mu(A \cap B) = \mu(A \cup B)$ eşitliği vardır.

**İspat:** Hemen hemen her yerde $A = B$ olduğundan $\mu(A \setminus B) = 0 = \mu(B \setminus A)$ olduğu tanımdan yazılır. Diğer yandan $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ eşitliğindeki $A \setminus B$ ve $B \setminus A$ kümeleri ayrık ve (hhh) $A = B$ olduğundan, $\mu(A \Delta B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) = 0$ yazılır. Buradan $\mu(A \Delta B) = 0$ bulunur.

Ayrıca,

$$A \cap B \subseteq A \cup B \text{ ve } A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

biçiminde olduklarından

$$0 = \mu(A \Delta B) = \mu(A \cup B) - \mu(A \cap B)$$

yazılır. Buradan, $\mu(A \cup B) = \mu(A \cap B)$ bulunur. Bu da teoremde gösterilmek istenen sonuçtur.

İkinci bir yol da şöyledir. Ayrık olan $A \setminus B$ , $A \cup B$ ve $B \setminus A$ kümeleri için

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$$

eşitliğinin her iki yanının ölçümleri alınırsa,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $\mu(A \setminus B) = 0 = \mu(B \setminus A)$ olduğu kullanılırsa, $\mu(A \cup B) = \mu(A \cap B)$ sonucu bulunur.

Örneğin, $A = Z$ tamsayılar kümesi ve $B = Q$ rasyonel sayılar kümesi olsun. Buna göre (hhh) $Z = Q$ olduğu için, $\mu(A) = \mu(B)$, $\mu(A \setminus B) = 0 = \mu(B \setminus A)$ ve

$$0 = \mu(A \Delta B) = \mu(A \cup B) - \mu(A \cap B)$$

olduğu görülür. Buradan $\mu(A \cup B) = \mu(A \cap B)$ ya da $\mu(Q) = \mu(Z)$ yazılır.

**Tanım:** Sayılabilir sonsuzluktaki kümelerin genelleştirilmiş olan simetrik farkı $A_1 \Delta A_2 \Delta A_3 \Delta \ldots = \Delta A_i$ ile gösterilir ve

$$\Delta A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \left\{ \bigcup_{i \neq j} (A_i \cap A_j) \right\}$$

olarak tanımlanır.

**2. Teorem:** Eğer $A_1, A_2, A_3,\ldots$ kümeleri ölçülebilirse, bu kümelerin simetrik farkı olan $\Delta A_i$ kümesi de ölçülebilirdir.

**İspat:** $i \neq j$ için $A_i$ ve $A_j$ kümeleri ölçülebilir olduklarından, $A_i \cap A_j$ kesişim kümesi ölçülebilirdir. Ölçülebilir kümelerin sayılabilir sayıdasının bileşimi ölçülebilir olacağından

$$\bigcup_{i \neq j}^{\infty} (A_i \cap A_j)$$

bileşim kümesi de ölçülebilirdir.

Benzer olarak,

$$\Delta A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \setminus \left\{ \bigcup_{i \neq j} (A_i \cap A_j) \right\}$$

eşitliğinin ikinci yanı da ölçülebilirdir. Buradan $\Delta A_i$ simetrik farkı ölçülebilirdir.

**Tanım:** Eğer her $T$ kümesi için

$$\mu^* (T) = \mu^* (T \cap A) + \mu^* (T \cup A')$$

oluyorsa, $A$ kümesi Caratheodory anlamında $\mu^*$ ölçümüne göre ölçülebiliyor denilir (3, s. 31).

Buradan hemen şu sonucu söyleyebiliriz.

$A$ kümesinin $\mu^*$ ölçümüne göre ölçülebilir olması için gerekli ve yeterli koşulun her $T$ kümesine karşılık

$$\mu^* (T) \geq \mu^* (T \cap A) + \mu^* (T \cap A')$$

olmasıdır.

**3. Teorem:** $A$ ve $B$ kümeleri Caratheodory tanımına göre ölçülebilirse $A \Delta B$ ve $A \setminus B$ kümeleri de aynı tanıma göre ölçülebilirdir.

**İspat:** Tüm $T$ kümeleri için

$$\mu^* (T) \geq \mu^* (T \cap (A \Delta B)) + \mu^* (T \cap (A \Delta B)')$$

olduğunu göstermeliyiz. $A$ ve $B$ kümeleri bu ölçüme göre ölçülebilir olduklarından her $T$ kümesi için

$$\begin{aligned}\mu^*(T) &= \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A') \\ &= \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap (A' \cap B)) + \mu^*(T \cap (A' \cap B')) \\ &= \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A' \cap B) + \mu^*(T \cap (A \cup B)')\end{aligned} \tag{1}$$

yazılır. Öte yandan,

$$T \cap (A \Delta B) = \{T \cap (A' \cap B) \cup [(T \cap A) \setminus (T \cap A \cap B)]\}$$

ifadesinin her iki yanının dış ölçümünden,

$$\mu^*(T \cap (A \Delta B)) \leq \mu^*((T \cap (A' \cap B)) + \mu^*(T \cap A) - (T \cap A \cap B)$$

olur. Buradan,

$$\mu^*(T \cap (A \Delta B)) + \mu^*(T \cap A \cap B) \leq \mu^*((T \cap (A' \cap B)) + \mu^*(T \cap A)$$

yazılır. Buna göre (1) ifadesinde

$$\mu^*(T \cap (A' \cap B)) + \mu^*(T \cap A)$$

ifadesinden daha küçük olan

$$\mu^*(T \cap (A \Delta B)) + \mu^*(T \cap (A \cap B))$$

değeri yazılırsa,

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap (A \Delta B)) + \mu^*(T \cap (A \cup B)') + \mu^*(T \cap A \cap B)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da istenen sonuçtur. Burada, Venn şemasıyla,

$$T \cap (A \Delta B)' = \{(T \cap (A \cup B)')\} \cup \{(T \cap A \cap B)\}$$

eşitliğinden

$$\mu^*(T \cap (A \Delta B)') + \mu^*(T \cap (A \cup B)') + \mu^*(T \cap A \cap B)$$

olduğu daha kolay bir şekilde görülebilir.

Benzer olarak her $T$ kümesi için

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap (A \setminus B)) + \mu^*(T \cap (A \setminus B)')$$

olduğunu göstermeliyiz. $A$ ve $B$ kümeleri ölçülebilir olduklarından, her $T$ kümesi için,

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A')$$

$$\left.\begin{aligned}\mu^*(T) &= \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap (A \cup B)') + \mu^*(T \cap (A' \cup B)) \\ \mu^*(T) &= \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A' \cap B) + \mu^*(T \cap (A' \cup B'))\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

yazılır. Diğer yandan,

$$T \cap (A \setminus B) = (T \cap A) \setminus (T \cap A \cap B)$$

eşitliğinin her iki yanına dış ölçüm tanımı uygulanırsa,

$$\mu^*(T \cap (A \setminus B)) \leq \mu^*(T \cap A) - \mu^*(T \cap A \cap B)$$

yazılır. Buradan,

$$\mu^*(T \cap (A \setminus B)) + \mu^*(T \cap A \cap B) \leq \mu^*(T \cap A)$$

eşitsizliği çıkar. Böylece (2) eşitliğinde $\mu^*(T \cap A)$ ifadesi yerine bundan daha küçük olan

$$\mu^*(T \cap (A \setminus B)) + \mu^*(T \cap A \cap B)$$

ifadesi yazılırsa,

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A' \cap B') + \mu^*(T \cap A' \cap B) + \mu^*(T \cap A \cap B) + \mu^*(T \cap (A \setminus B))$$

eşitsizliği elde edilir. Venn şemasıyla,

$$T \cap (A \setminus B)' = (T \cap A' \cap B') \cup (T \cap A' \cap B) \cup (T \cap A \cap B)$$

olduğundan,

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap (A \setminus B)) + \mu^*(T \cap (A \setminus B)')$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da istenen sonuçtur.

**Tanım:** Verilen bir $A$ kümesi ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için R halkası (2, s.31) içinde

$$A' \subseteq A \subseteq A'' \text{ve } m(A'' \setminus A') < \varepsilon$$

olacak şekilde $A'$ ve $A''$ kümeleri varsa $A$ kümesine Jordan anlamında ölçülebilirdir denir (2, s.281). Burada $A'$ ve $A''$ kümeleri tümleyen anlamında kullanılmamıştır.

**4. Teorem:** $A$ ve $B$ kümeleri Jordan anlamında ölçülebilirse, $A \cup B$ , $A \cap B, A \setminus B$ ve $A \Delta B$ kümeleri de Jordan anlamında ölçülebilirdir.

**İspat:** $A$ ve $B$ kümeleri tanıma göre ölçülebilirse, her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$A' \subseteq A \subseteq A'' \text{ ve } m(A'' \setminus A') < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$B' \subseteq B \subseteq B'' \text{ ve } m(B'' \setminus B') < \frac{\varepsilon}{2}$$

koşullarını sağlayan $A', B', A''$ ve $B''$ kümeleri vardır. Bu halde,

$$A' \cup B' \subseteq A \cup B \subseteq A'' \cup B''$$

ve

$$A' \setminus B'' \subseteq A \setminus B \subseteq A'' \setminus B''$$

kapsamaları yazılır. Ayrıca,

$$(A'' \cup B'') \setminus (A' \cup B') \subseteq (A'' \setminus A') \cup (B'' \setminus B')$$

kapsamından,

$$m\{(A'' \cup B'') \setminus (A' \cup B')\} \leq m\{(A'' \setminus A') \cup (B'' \setminus B')\} \leq m(A'' \setminus A') + m(B'' \setminus B') \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Bu da, $A \cup B$ kümesinin Jordan anlamında ölçülebilir olması demektir.

Öte yandan,

$$(A'' \cap B'') \setminus (A' \cap B') \subseteq (A'' \setminus A') \cup (B'' \setminus B')$$

kapsamından,

$$m\{(A'' \cap B'') \setminus (A' \cap B')\} \leq m\{(A'' \setminus A') \cup (B'' \setminus B')\}$$

yazılır. Buradan,

$$m\{(A'' \cap B'') \setminus (A' \cap B')\} \leq m\{(A'' \setminus A') + m(B'' \setminus B') \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. $\varepsilon$ sayısı keyfi olduğundan, $A \cup B$ ve $A \cap B$ kümeleri Jordan anlamında ölçü-lebilir olduğu gösterilmiş olunur.

Şimdi $A \Delta B$ kümesinin Jordan anlamında ölçülebilir olduğunu gösterelim. $A$ ve $B$ kümeleri Jordan anlamında ölçülebilirse,

$$A' \subseteq A \subseteq A'' \text{ ve } m(A'' \setminus A') < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$B' \subseteq B \subseteq B'' \text{ ve } m(B'' \setminus B') < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $A', B', A''$ ve $B''$ kümeleri vardır. Buna göre,

$$A' \subseteq A \subseteq A'' \text{ ve } B' \subseteq B \subseteq B''$$

kapsamlarından,

$$A'\Delta B' \subseteq A\Delta B \subseteq A''\Delta B''$$

yazılır. Buradan,

$$m(A''\Delta B''\setminus A'\Delta B') < \varepsilon$$

olacak şekilde $A', B', A''$ ve $B''$ kümelerinin olduklarını göstermeliyiz. Bir kere,

$$A' \subseteq A \subseteq A''$$

ve

$$B' \subseteq B \subseteq B''$$

kapsamlarından,

$$A' \setminus B'' \subseteq A \setminus B \subseteq A'' \setminus B' \tag{3}$$

ve

$$B' \setminus A'' \subseteq B \setminus A \subseteq B'' \setminus A' \tag{4}$$

yazılır. (3) ve (4) ifadelerinin taraf tarafa bileşimi alınırsa,

$$(A' \setminus B'') \cup (B' \setminus A'') \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq (A'' \setminus B') \cup (B'' \setminus A')$$

veya

$$(A' \setminus B'') \cup (B' \setminus A'') \subseteq (A \,\Delta\, B) \subseteq (A'' \setminus B') \cup (B'' \setminus A') \tag{5}$$

yazılır. Ayrıca,

$$A' \setminus B' \subseteq A \setminus B \subseteq A'' \setminus B''$$

ve

$$B' \setminus A' \subseteq B \setminus A \subseteq B'' \setminus A''$$

kümelerinin bileşiminden,

$$(A' \setminus B') \cup (B' \setminus A') \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq (A'' \setminus B'') \cup (B'' \setminus A'')$$

veya,

$$A'\Delta B' \subseteq A \Delta B \subseteq A''\Delta B'' \tag{6}$$

yazılır. Bu halde işlemlerimizi (6) ifadesi yerine (5) ifadesi ile devam ettirelim.

$$(A'' \cup B'') \setminus (A' \cup B') \subseteq (A'' \setminus A') \setminus (B'' \setminus B')$$

olduğundan, $\varepsilon$ keyfi sayısı için,

$$m\{(A''\cup B'')\setminus(A'\cup B')\}\leq m\{(A''\setminus A')\cup(B''\setminus B')\}\leq m(A''\setminus A')+m(B''\setminus B')\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

elde edilir. Bu da, $A\Delta B$ kümesinin Jordan anlamında ölçülebilir olması demektir.

Son olarak,

$$A'\subseteq A\subseteq A'' \text{ ve } B'\subseteq B\subseteq B''$$

ve

$$A'\setminus B''\subseteq A\setminus B\subseteq A''\setminus B'$$

kapsamlarından,

$$\{(A''\setminus B')\setminus(A'\cup B'')\subseteq (A''\setminus A')\cup(B''\setminus B')$$

bağıntısı yazılır. Bu kapsamın her iki yanının ölçümünden,

$$m\{(A''\setminus B')\setminus(A'\setminus B'')\}\leq m\{(A''\setminus A')\cup(B''\setminus B')\}\leq m(A''\setminus A')+m(B''\setminus B')\leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

bulunur. $\varepsilon$ sayısı keyfi olduğundan $A\setminus B$ kümesinin de, Jordan anlamında ölçülebilir olduğu gösterilmiş olunur.

**Tanım:** $E$ temel kümesi üzerinde $\mu$ ölçümünün düzgün olması için gerekli ve yeterli koşulun, her bir $A\subseteq E$ kümesi için $A\subseteq B$ ve $\mu(A)=\mu(B)$ olacak şekilde ölçülebilir bir $B$ kümesinin olmasıdır (1.a, s.56 - 1.b, s.271).

**5. Teorem:** $A$ ve $B$ kümeleri verildiğinde $A\subseteq B$ için $\mu(A)=\mu(B)$ oluyorsa, $A'$ ve $B'$ tümleyen kümeleri için de $\mu(A')=\mu(B')$ olur.

**İspat:** $A' = B'\cup(B\setminus A)$ şeklinde ayrık iki kümenin bileşimi olduğundan,

$$\mu(A')=\mu(B')+\mu(B\setminus A) \tag{7}$$

yazılır.

Diğer yandan, $A$ ve $B\setminus A$ kümeleri ayrık olduklarından $B = A\cup(B\setminus A)$ ve $\mu(A)=\mu(B)+\mu(B\setminus A)$ olur. $A\subseteq B$ ve $\mu(A)=\mu(B)$ olduğundan, $\mu(B\setminus A)=0$ gelir. Bu sonuç (7) ifadesinde kullanılırsa, $\mu(A')=\mu(B')$ elde edilir. Bu da gösterilmek istenen sonuçtur.

**6. Teorem:**

$$A\subseteq B \text{ ve } \mu(A)=\mu(B)$$

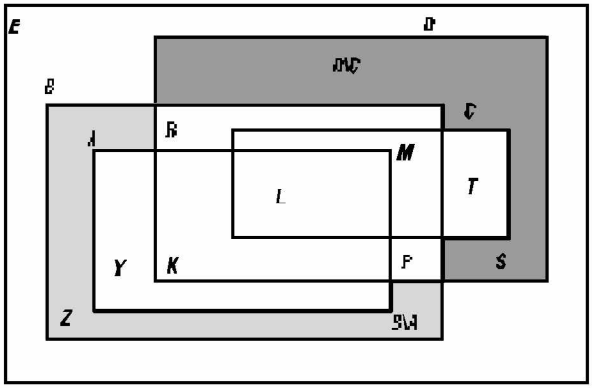
$$C\subseteq D \text{ ve } \mu(C)=\mu(D)$$

ise,

$$A\cup C\subseteq B\cup D \text{ ve } \mu(A\cup C)=\mu(B\cup D)$$

olur.

**İspat:** Aşağıdaki şekle dikkat edilirse,




$$A \cup C = Y \cup K \cup L \cup M \cup T$$

yazılır. Burada her iki yanının ölçümünden,

$$\mu(A \cup C) = \mu(Y \cup K \cup L \cup M \cup T)$$

olur. Ayrıca,

$$Y \cap K \cap L \cap M \cap T = \emptyset$$

olduğundan, $\mu(A \cup C) = \mu(Y) + \mu(K) + \mu(L) + \mu(M) + \mu(T)$ yazılır. Yine, $K$ ve $M$ kümelerinin ölçümleri sıfır olduğundan,

$$\mu(A \cup C) = \mu(Y) + \mu(L) + \mu(T) \tag{8}$$

yazılır. Diğer yandan,

$$B \cup D = Z \cup Y \cup K \cup L \cup P \cup R \cup M \cup T \cup S$$

ifadesinin her iki yanının ölçümünden ,

$$\mu(B \cup D) = \mu(Z) + \mu(Y) + \mu(K) + \mu(L) + \mu(P) + \mu(R) + \mu(M) + \mu(T) + \mu(S)$$

yazılır. Yine burada şekle dikkat edilirse, $Z, K, P, R, M, S$ kümelerinin ölçümlerinin sıfıra eşit olduğu görülür. Sonuç olarak,

$$\mu(B \cup D) = \mu(Y) + \mu(L) + \mu(T) \tag{9}$$

bulunur. (8) ve (9) eşitliğinden $\mu(A \cup C) = \mu(B \cup D)$ elde edilir. Bu da gösterilmek istenen sonuçtur.

**7. Teorem:**

$$A_1 \subseteq B_1 \quad \text{ve} \quad \mu(A_1) = \mu(B_1) \tag{10}$$
$$A_2 \subseteq B_2 \quad \text{ve} \quad \mu(A_2) = \mu(B_2) \tag{11}$$

ise,

$$A_1 \cap A_2 \subseteq B_1 \cap B_2 \text{ ve } \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(B_1 \cap B_2)$$

olur.

**İspat:** Bir kere, $A_1 \cap A_2 \subseteq B_1 \cap B_2$ olduğu açıktır. Şimdi,

$$\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(B_1 \cap B_2)$$

olduğunu gösterelim. Verilen hipoteze göre, (10) ve (11) ifadelerinden, $B_1 = A_1 \cup C_1$ ve $B_2 = A_2 \cup C_2$ olacak şekilde $\mu(C_1) = 0 = \mu(C_2)$ olan $C_1$ ve $C_2$ kümeleri vardır. Buradan,

$$B_1 \cap B_2 = (A_1 \cup C_1) \cap (A_2 \cup C_2) \subseteq (A_1 \cup C_1) \cup (A_2 \cup C_2)$$

ve

$$B_1 \cap B_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (C_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap C_2)$$

ifadelerinden,

$$\mu(B_1 \cap B_2) \leq \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(C_1 \cap A_2) + \mu(A_1 \cap C_2) + \mu(C_1 \cap C_2)$$

$$\leq \mu(A_1 \cap A_2) + \mu(C_1) + \mu(C_2) + \mu(C_1) + \mu(C_2)$$

yazılır. Ayrıca, $\mu(C_1) = 0$ ve $\mu(C_2) = 0$ olduklarından,

$$\mu(B_1 \cap B_2) \leq \mu(A_1 \cap A_2) \tag{12}$$

gelir. Öte yandan, $A_1 \cap A_2 \subseteq B_1 \cap B_2$ kapsamından,

$$\mu(A_1 \cap A_2) \leq \mu(B_1 \cap B_2) \tag{13}$$

yazılır. (12) ve (13) ifadelerinden,

$$\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(B_1 \cap B_2)$$

eşitliği elde edilir. Bu da gösterilmek istenen sonuçtur.

**8. Teorem:**

$$A_1 \subseteq A_2 \text{ ve } \mu(A_1) = \mu(B_1)$$
$$A_2 \subseteq A_2 \text{ ve } \mu(A_2) = \mu(B_2)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

olsun. Bu halde,

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = B \text{ ve } \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i)$$

olur.

**İspat:**

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \cup C_1 \text{ ve } \mu(C_1) = 0 \\ B_2 &= A_2 \cup C_2 \text{ ve } \mu(C_2) = 0 \\ &\;\;\vdots \end{aligned}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) = 0$$

olacak şekilde $C_1, C_2, \ldots$ kümeleri vardır. Böylece,

$$\begin{aligned} B &= \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i \cap C_j) \\ &= \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \cup \left[ \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap C_j) \right] \\ &\subseteq A \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) \end{aligned}$$

kapsamı yazılır. Böylece,

$$\begin{aligned} \mu(B) &\leq \mu(A) + \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) \\ &\leq \mu(A) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) \\ &= \mu(A) \end{aligned} \tag{14}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = B$$

kapsamından,

$$\mu(A) \leq \mu(B) \tag{15}$$

olur. (14) ve (15) ifadelerinden,

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu(A) = \mu(B) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$

elde edilir.

**9. Yardımcı Teorem:** $A \subseteq B$ ve $\mu(A) = \mu(B)$ olsun. Bu halde, $A \cup C = B$ ve $A \cap C = \emptyset$ olacak şekilde ölçümü sıfır olan bir $C$ kümesi vardır.

**İspat:** Burada $\mu(C) = 0$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için, Venn şemasına göre,

$$\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

yazılır. Hipotezde, $\mu(A) = \mu(B)$ olduğundan, $\mu(C) = \mu(A \cap C) = \mu(\emptyset) = 0$ elde edilir. Böylece, $\mu(C) = 0$ olduğu gösterilmiş olunur.

**10. Teorem:** Sayılabilir sonsuzluktaki $A_1, A_2, A_3, \ldots$ kümeleri için,

$$\begin{array}{l} A_1 \subseteq B_1 \text{ ise } \mu(A_1) = \mu(B_1) \\ A_2 \subseteq B_2 \text{ ise } \mu(A_2) = \mu(B_2) \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \\ A_n \subseteq B_n \text{ ise } \mu(A_n) = \mu(B_n) \\ \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \end{array}$$

ise,

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = B \text{ ve } \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$

olur.

**İspat:** Önce,

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = B$$

diyelim. Buna göre, B= $A \cup C$ ve $A \cap C = \emptyset$ olacak şekilde ölçümü sıfır olan bir $C$ kümesi vardır. Ayrıca, B= $A \cup C$ eşitliğinden,

$$\mu(B) = \mu(A \cup C) = \mu(A) + \mu(C)\ ) - \mu(A \cap C)$$

yazılır. Böylece, $\mu(C) = 0$ ve $\mu(A \cap C) = \mu(\emptyset) = 0$ olduklarından $\mu(A) = \mu(B)$ olduğu gösterilmiş olunur. Bu da,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$

demektir.

**11. Sonuç:** $A$ ve $B$ kümeleri için, $A \subseteq B$ ve $\mu(A) = \mu(B)$ ise, bu kümeler ancak ölçümü sıfır olan bir küme farkıyla eşittirler.

**İspat:** $A \subseteq B$ ve $\mu(A) = \mu(B)$ olduğundan $A \cup C = B$ olacak şekilde en az bir $C$ kümesi vardır. Buradan, $A \cup C = B$ ise, $B \setminus A = C$ ve $\mu(B) - \mu(A) = \mu(C)$ olur. $\mu(A) = \mu(B)$ ifadesi kullanılırsa, $\mu(A) = \mu(B) = 0 = \mu(C)$ olduğu bulunur. Bu da, istenen sonuçtur.

**12. Örnek:** $A$, $[a,b]$ kapalı aralığındaki tam sayılar kümesi, $B$, $[a,b]$ kapalı aralığındaki rasyonel sayılar kümesi, $C \setminus B$, $[a,b]$ kapalı aralığındaki irrasyonel sayılar kümesi ve $C$, $[a,b]$ kapalı aralığındaki gerçel sayılar kümesi olmak üzere,

$$C \setminus B \subseteq C \text{ ve } \mu(C \setminus B) = \mu(C)$$
$$A \subseteq B \text{ ve } \mu(A) = \mu(B)$$

ise,

$$\mu((C \setminus B) \cup A) = \mu(C \cup B)$$

olur.

**Çözüm:** Yukarıdaki eşitliğin birinci yanı,

$$\begin{aligned} \mu((C \setminus B) \cup A) &= \mu(C \setminus B) + \mu(A) - \mu((C \setminus B) \cup A) \\ &= b - a + 0 - 0 = b - a \end{aligned}$$

bulunur. İkinci yana da aynı işlem uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \mu(C \cup B) &= \mu(C) + \mu(B) - \mu(C \cap B) \\ &= b - a + 0 - 0 = b - a \end{aligned}$$

olduğu bulunur.

**13. Teorem:**

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A' \text{ ve } \mu(B') = \mu(A')$$
$$C \subseteq D \Leftrightarrow D' \subseteq C' \text{ ve } \mu(D') = \mu(C')$$

ise,

$$\mu(B' \cup D') = \mu(A' \cup C')$$

olur.

**İspat:**

$$\left.\begin{array}{l} D' \subseteq C' \\ \\ B' \subseteq A' \end{array}\right\} B' \cup D' \subseteq A' \cup C'$$

yazılır. Her iki yanın ölçümü alınırsa,

$$\mu(B' \cup D') \leq \mu(A' \cup C')$$

olduğu görülür. Bu ifadeyi açarsak,

$$\mu(B') + \mu(D') - \mu(B' \cap D') \leq \mu(A') + \mu(C') - \mu(A' \cap C')$$

$$\mu(A' \cap C') \leq \mu(B' \cap D') \tag{16}$$

yazılır. Öte yandan,

$$\left.\begin{array}{l} D' \subseteq C' \\ B' \subseteq A' \end{array}\right\} \Rightarrow B' \cap D' \subseteq A' \cap C'$$

ve

$$\mu(B' \cap D') \leq \mu(A' \cap C') \tag{17}$$

olur. (16) ve (17) ifadelerinden

$$\mu(A' \cap C') = \mu(B' \cap D')$$

yazılır.

Öte yandan, $(B' \cup D') \cup K = A' \cup C'$ ve $(B' \cup D') \cap K = \emptyset$ olacak şekilde ölçümü sıfır olan bir $K$ kümesi vardır. Böylece, yukarıdaki eşitliğin her iki yanının ölçümünden,

$$\mu(B' \cup D') + \mu(K) = \mu(A' \cup C')$$

$$\mu(B') + \mu(D') - \mu(B' \cap D') + \mu(K) = \mu(A') + \mu(C') - \mu(A' \cap C')$$

yazılır. Buradan,

$$\mu(K) - \mu(B' \cap D') = -\mu(A' \cap C')$$

olur. Böylece,

$$\mu(K) = \mu(B' \cap D') - \mu(A' \cap C') = 0$$

olduğu görülür.

Sonuç olarak,

$$\mu(B' \cup D') + \mu(K) = \mu(A' \cup C')$$

ve

$$\mu(B' \cup D') = \mu(A' \cup C')$$

yazılır.

## KAYNAKLAR

[1.a]. FEDERER, H., (1969), Geometrik Measure Theory, Springer-Verlag, New York (p. 52-57).

[1.b]. FEDERER, H. AND MORSE, A.P., (1943), Some properties of measurable functions, Bull., Am., Math., Soc., 49, 270-277.

[2]. GOLMOGOROV, A.N. AND FOMİN, S. V., (1970), Introduction to Real Analysis, Revised English Edition, Translated and Edited by Silverman, R. A., 270 Madison Avenue, New York, p. 255-283.

[3]. MURRAY, R. S., (1969), Real Variables Lebesgue Measure and Integration With Applications to Fourier Series, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill Book Company, New York, p. 30-40.