

Reformulación kepleriana de un tipo de movimiento pseudokepleriano



Alejandro Rendón Aznar
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo:
Alberto Abad Medina
Luis Floría Gimeno

Septiembre de 2019

Summary

In Dynamics, problems of motion can be mathematically formulated by means of systems of differential equations, supplemented with initial conditions or initial data (initial–value problems), and/or boundary conditions or boundary data (boundary–value problems). The dynamical model, or force model, at issue is essentially described by the differential system of equations of motion, or by certain scalar functions (e. g., the Lagrangian function in Lagrangian Mechanics; the Hamiltonian function in Hamiltonian Mechanics) from which the equations of motion can be derived according to certain rules. We are concerned with the formulation and treatment of the problem of motion of a single point mass as an *initial–value problem*.

For launching space vehicles, and for space–operation and space–navigation purposes, diverse types of engines have been (and are being) used. In particular, there are two main ways of modifying the Keplerian orbit of an artificial satellite or a spacecraft: an instantaneous change in the velocity vector (produced by an engine ignition), or the application of a continuous force (much smaller, in magnitude, than the Keplerian force) by means of a low–thrust engine. The first option, achieved by chemical engines, can be contemplated as a *change of initial conditions without changing the differential equations* of motion. On the contrary in the second case, in which ionic engines are used, *the initial conditions are not modified, but some new term is added in the differential equations*, which means that *the force model is changed*.

Some types of propulsion systems based on propulsion produced by external bodies, in a radial or transversal direction, are being studied as alternatives to ionic engines. The most immediate alternative is provided by *solar sails*, which obtain impulse from solar radiation or even solar wind. This type of propulsion is a propulsion in the radial direction. Another alternative for propulsion which is being studied is the *Mini-Magnetospheric Plasma Propulsion* (M2P2); this system is based on the deflection of plasma by means of the unfurling of a magnetic bubble surrounding the spaceship, thanks to which certain manoeuvres can be carried out with low consumption of plasma.

On the basis of some space–navigation concepts related to solar sails and the M2P2 system, McInnes [8] considers, in plane polar coordinates (r, θ) , *a case of pseudo-Keplerian problem* of motion of an orbiter under the effect of a non-conservative central force. The vector differential equation of the motion at issue can be

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mu \beta(\theta) \mathbf{r}}{r^3}.$$

The first term on the right–hand side characterizes the central force governing the standard Keplerian motion, and the second term formalises a non-conservative central force whose magnitude is also proportional to the reciprocal of the square of the distance r separating the orbiter from the centre of force, while its coefficient is no longer constant but a variable quantity depending on a function $\beta(\theta)$ of the polar angle θ .

Notice that in the Keplerian case $\beta(\theta) = 0$. On the other hand, if $\beta(\theta) = 1$ the Keplerian term is balanced out by the second term (related to the propulsion–system model), which is too difficult to achieve with current technology. Although the model analysed by McInnes reproduces the case of solar sails and the M2P2 system (in which $\beta(\theta)$ is called the *reflectivity parameter*) rather accurately, we approach the problem purely and simply from the viewpoint of Dynamics, irrespective of the specific type of orbiter and/or technological aspects related to propulsion systems.

By using the *Binet method* for the study of motion under central forces, McInnes reduces the differential equations of motion for the unknown scalar functions $r = r(t)$ and $\theta = \theta(t)$, with physical time t as the independent variable, to a scalar, second-order, linear, non-homogeneous differential equation for the unknown scalar function $u(\theta) = 1/r(\theta)$, with the polar angle θ as the new independent variable; that equation is the differential equation of the orbits. The differential relation between t and θ is a consequence of the conservation of angular momentum in any central-force problem.

The said differential equation for $u(\theta)$ coincides with that of a one-dimensional harmonic oscillator with unit angular frequency and forced by a variable external force represented by the non-homogeneous part of that differential equation.

The corresponding second-order homogeneous equation associated with this constant-coefficient linear problem is easily solved and its general solution is given in terms of circular functions.

Starting from the general solution to that homogeneous equation, McInnes obtains a particular solution to the non-homogeneous equation by the Method of Variation of Constants, after which he builds the general solution to the non-homogeneous equation for $u(\theta)$. Therefore he gives, in finite terms, a parametric equation $u = u(\theta)$ for the orbits that are solutions to the problem. However, the functional form of this expression cannot be readily interpreted in geometric terms, and calculations with such solutions can become rather cumbersome.

Then McInnes studies some examples of orbits $u = u(\theta)$. These orbits are obtained for particular expressions or choices of the function $\beta(\theta)$. He also considers the *inverse problem*: given an orbit $u = u(\theta)$, determine the force model (that is, the specific function or functions $\beta(\theta)$) that can give rise to motion along the said orbit. The results are also applied to the study of some transfer orbits between two given coplanar circular orbits.

Once the main questions treated by McInnes have been described, the purpose of this Undergraduate Dissertation consists in a *reformulation and treatment of the same problem by using vector first integrals* (or vector constants of motion) of the differential equations governing this pseudo-Keplerian motion.

It is well known that the conventional Kepler problem possesses the classical vector constants of motion of the angular momentum and the Laplace integral, apart from the scalar first integral of the Keplerian energy. Unlike the Kepler problem, our pseudo-Keplerian system does not admit the Keplerian Laplace vector and the Keplerian energy as first-integrals any more. The only classical first integral of our pseudo-Keplerian motion is angular momentum. However *we have found a new vector quantity that remains constant along our pseudo-Keplerian motion and “resembles” the Laplace integral of a Keplerian system.*

The derivation of this new Laplace-like vector first integral is based on an appropriate adaptation of a procedure (described by Leach and Flessas [6, Cap. 2, §§2.1, §§2.1.2, pp. 350–355] to our problem.

Consequently, a simple and elegant expression for the parametric representation (with the polar angle θ as the parameter) of the orbits that are solutions to the pseudo-Keplerian problem considered by McInnes can be obtained. This expression, in plane polar coordinates, exhibits a great formal analogy with the focal equation of the Keplerian conic-section orbits; however, unlike the Kepler problem, some of the quantities occurring in that expression are functions of the angular variable θ in the pseudo-Keplerian problem.

This way of proceeding allows us to deal with some cases of orbital manoeuvres and transfer orbits in which the formalization and calculations become considerably easier thanks to the simplicity of the solution that we have obtained.

The content of this Undergraduate Dissertation is organised into a summary in English, four main chapters, a section with the conclusions, a bibliography, and an appendix.

CHAPTER 1, “Introduction”, provides the reader with an overview of the context, statement of the problem under consideration, approach, treatment, main results and structure of this Memoir.

In CHAPTER 2, after a brief review of the main concepts and results related to motion of a material particle within a completely general (not necessarily conservative) central–force field, the type of pseudo-Keplerian problem under consideration in this Dissertation is presented, and the main results of McInnes’ article (especially those concerning his treatment, solution and some possible application to the inverse problem) are collected. The special case of $\beta(\theta) \equiv \text{const.} \neq 1$, not considered by McInnes, is studied in detail and compared with the Keplerian case.

CHAPTER 3 is devoted to an alternative approach to the solution of the aforementioned pseudo-Keplerian problem, by means of vector first integrals of the second–order vector differential equation governing that pseudo-Keplerian system. It is proved that, amongst the three classical first integrals of the Kepler problem (angular movement, Keplerian energy and Laplace vector), only the angular momentum provides us with a vector constant of motion for our pseudo-Keplerian problem. However, starting from some considerations by Leach and Flessas, we build a vector quantity that provides us with a new vector constant of motion for the pseudo-Keplerian system; this new conserved quantity can be considered as a natural generalisation of the traditional Laplace vector of the conventional Kepler problem. With the help of that vector, and proceeding as in the classical Keplerian case, a simple parametric representation $r = r(\theta)$ of the orbits which are the solutions to the pseudo-Keplerian model considered in this Dissertation can be obtained. Unlike McInnes’ solution, the functional form of our solution can be written in a form that shows a great formal analogy with the polar equation of the classical Keplerian conic–sections, from which advantages in its geometrical and physical interpretation, as well as simplifications in later calculations, can be taken.

In CHAPTER 4 some pseudo–Keplerian orbits are studied in detail. Circular pseudo–Keplerian orbits (circular orbits whose geometry –namely shape and size– coincides with that of a circular Keplerian orbit, although the orbital velocity along them is not that corresponding to a circular Keplerian motion) are considered. In addition to this, some cases of transfer orbits along pseudo–Keplerian orbits are presented; for instance, transfer along a straight line, or along a logarithmic spiral. The well–known Hohmann transfer orbit is also revisited.

Finally, the concept and main results concerning the Hohmann transfer orbit are summarized in APPENDIX A.

Índice general

Summary	III
1. Introducción	1
2. Problema pseudokepleriano	5
2.1. Movimiento bajo la acción de fuerzas centrales	5
2.2. Formulación de un problema pseudokepleriano	7
2.3. Integración del problema	8
2.3.1. Ley horaria del movimiento	10
2.4. Caso $\beta \neq 1$ constante	10
2.5. Problema inverso	11
3. Reformulación kepleriana del problema pseudokepleriano	13
3.1. Integrales primeras clásicas del problema de Kepler	13
3.1.1. Vector momento angular	13
3.1.2. Vector de Laplace	13
3.1.3. Integral de la energía	14
3.2. Alternativa al vector de Laplace en el problema pseudokepleriano	14
3.3. Trayectoria <i>kepleriana</i> del problema pseudokepleriano	15
4. Aplicaciones	19
4.1. Cambio de velocidad en una órbita circular	19
4.2. Órbitas de transferencia pseudokeplerianas	20
4.2.1. Transferencia de tipo Hohmann	20
4.2.2. Órbita rectilínea	21
4.2.3. Órbita espiral logarítmica	21
Conclusiones	23
Bibliografía	25
A. Transferencia de Hohmann	27

Capítulo 1

Introducción

Johannes Kepler fue un astrónomo alemán nacido en 1571, al cual se deben las tres leyes que describen el movimiento de los planetas de nuestro Sistema Solar. Kepler en principio supuso que las órbitas planetarias eran perfectamente circulares y se propuso perfeccionar el sistema heliocéntrico de Copérnico sirviéndose de las observaciones de Marte que había recopilado Tycho Brahe, así como de sus propias observaciones. A partir de estos datos logró formular tres leyes del movimiento planetario:

1.- Los cuerpos celestes se desplazan siguiendo una trayectoria elíptica alrededor del Sol, estando este en uno de los focos de la elipse.

2.- El radio vector con origen en el Sol y extremo en el punto de la posición instantánea de cada planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

3.-El cuadrado de los periodos de revolución de los cuerpos celestes es proporcional al cubo de los semiejes mayores de sus órbitas elípticas.

Con ayuda de estas leyes Isaac Newton formuló la *Ley de la Gravitación Universal*: todos los cuerpos se atraen con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. Con esta ley Newton explicó algunos de los fenómenos físicos más importantes del universo observable y generalizó las tres leyes de Kepler.

Kepler y Newton son considerados los padres de la *Mecánica Celeste*, que nació como la disciplina científica que estudia el movimiento de planetas, satélites, cometas, y cualquier otro cuerpo sometido a la Ley de Gravitación de Newton.

El problema de Kepler describe el movimiento relativo de un punto material de masa unidad, que llamaremos *orbitador*, respecto de otro, que representa el centro de atracción, cuando ambas se atraen de acuerdo con la Ley de Gravitación Universal. Las órbitas keplerianas, que verifican las leyes de Kepler, pueden obtenerse como soluciones del *problema de valores iniciales* dado por la ecuación diferencial vectorial $\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_k = -\mu \mathbf{r}/r^3$ y las condiciones iniciales $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$, $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(0)$.

La aparente sencillez del problema de Kepler contrasta con las dificultades encontradas en el estudio de las órbitas en el Sistema Solar, sobre todo de la Luna, donde los cuerpos dejan de ser puntos y, además, no están aislados, convirtiendo el problema en un *problema de n sólidos*. Poincaré demostró la no integrabilidad del problema de tres cuerpos puntuales y la aparición de caos en determinados casos de este problema. Por supuesto el caso de n sólidos introduce mucha mayor complejidad en el problema.

El problema puede tratarse más fácilmente si aproximamos el movimiento de cada orbitador con respecto al centro de atracción por medio de la *órbita* solución del problema de valores iniciales

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \mathcal{P}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0), \quad \dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(0), \quad (1.1)$$

donde \mathcal{P} , que representa una fuerza de perturbación del problema de Kepler, es, en magnitud, mucho menor que el término kepleriano: $\|\mathcal{P}\| \ll \|\mu \mathbf{r}/r^3\|$.

El 4 de octubre de 1957 el primer satélite artificial, el Sputnik I, fue lanzado al espacio y puesto en órbita alrededor de la Tierra. Este hecho, independientemente de su alcance social y político, supuso

un enorme desafío para la Ciencia y la Ingeniería; de hecho, representó la extensión y ampliación de los problemas clásicos considerados en la Mecánica Celeste, y la aparición de una nueva disciplina científica, la *Astrodinámica*.

Entre los nuevos problemas tratados por la Astrodinámica cabe destacar la inserción de un satélite artificial en una órbita determinada, bien por un lanzamiento desde Tierra o bien por la necesidad de modificar una órbita previa que se ha degradado por efecto de las perturbaciones o que ya no cumple la misión para la que fue diseñada. La idea del *cohete* espacial, necesario para realizar estas *maniobras*, comienza en el año 1897 cuando el ingeniero peruano Pedro Paulet diseña, inspirado en el movimiento del calamar, el primer *motor a reacción*. Posteriormente Konstantin Tsiolkovsky, Robert H. Goddard y Hermann Oberth desarrollan la tecnología de los cohetes que, junto con la teoría matemática del movimiento desarrollada por Kepler y Newton, permiten que el hombre pueda llegar al espacio exterior.

Debido al vacío del espacio exterior, cualquier aceleración deberá basarse en la *tercera ley Newton* (o ley de acción y reacción), según la cual para cada fuerza que actúa sobre un cuerpo este opone una fuerza de igual intensidad y dirección pero de sentido contrario. De esta manera, si un objeto expulsa parte de su masa en una dirección y sentido, el resto del objeto se desplazará en la misma dirección pero en sentido contrario. Este es el fundamento de los motores a reacción. En ellos el combustible de la nave se expulsa a cierta velocidad en una dirección determinada, haciendo que el resto de la nave se desplace en el sentido opuesto.

En la actualidad existen dos tipos de motores de propulsión para los cohetes: los de *propulsión química*, basados en la expulsión de los gases generados en un proceso de combustión, y los de *propulsión iónica o eléctrica*, que por medio de campos magnéticos aíslan iones y los expulsan a gran velocidad. Los motores químicos expulsan una gran cantidad de masa a poca velocidad, mientras que los iónicos expulsan muy poca masa pero a velocidades muy altas. Esta diferencia afecta notablemente al resultado de la maniobra que modifica la órbita. Distinguimos dos tipos de maniobras: *impulsivas* y *no impulsivas*.

Las *maniobras impulsivas*, que se realizan por medio de los motores de propulsión química, son maniobras en las que se supone que la velocidad de un vehículo espacial cambia instantáneamente, es decir, en tiempo cero. En la práctica, una maniobra impulsiva se consigue con un breve encendido de los motores que permite cambiar la magnitud y la dirección del vector velocidad de la nave espacial consiguiendo, de esta forma, *un cambio en las condiciones iniciales* $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$, $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(0) + \Delta\mathbf{v}$, *sin modificar las ecuaciones diferenciales del problema*. La dirección del vector $\Delta\mathbf{v}$ depende únicamente de la dirección en la que expulsemos los gases, por lo que no tiene coste; sin embargo la norma, Δv , de este vector depende de la cantidad de masa expulsada y por tanto determina el coste de la maniobra. Así pues, el *impulso* necesario para realizar esta maniobra se denota como Δv .

Las *maniobras no impulsivas*, que se realizan generalmente por medio de motores iónicos, son aquellas en las cuales se aplica un empuje débil durante intervalos de tiempo más largos. Ese tipo de maniobras resultan mucho más baratas que las impulsivas por la cantidad de combustible gastado; sin embargo el tiempo de recorrido para un mismo viaje resulta mucho mayor con este tipo de motores. Un viaje a la Luna puede durar aproximadamente tres días con motores químicos y hasta un año con motores iónicos. En las maniobras no impulsivas *las condiciones iniciales no cambian, pero sí lo hacen las ecuaciones diferenciales* (1.1) en las que se debe añadir una fuerza de perturbación \mathcal{P} que coincide con la variación de la cantidad de movimiento o momento lineal ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$) generada por la pérdida de masa de la nave.

Actualmente se están estudiando, como alternativa a los motores iónicos, varios métodos de maniobras no impulsivas que pueden resultar muy útiles y económicas para la navegación interplanetaria: las *velas solares* [7] y la *propulsión mediante mini-magnetosfera de plasma* (en inglés Mini-Magnetospheric Plasma Propulsion, abreviado M2P2) [4] y [8]. Ambas tecnologías están basadas en la presión de la radiación emitida por el Sol, que produce un cambio en el momento lineal de la nave. Esta presión, que, considerando una órbita solar, empuja la nave en la dirección radial, depende de las dimensiones de la vela. La tecnología M2P2 consiste en crear alrededor de la nave una burbuja magnética que conduce el viento solar, o radiación solar, modificando también el momento lineal.

Origen y motivación de este Trabajo. El artículo de McInnes [8] constituye el punto de partida de este Trabajo de Fin de Grado.

Inspirándose en problemas de navegación espacial con ayuda de propulsión mediante velas solares o por el sistema M2P2, en dicho artículo este autor considera, en coordenadas polares planas (r, θ) , un caso de *problema pseudokepleriano* de movimiento de un orbitador sometido a una fuerza que puede descomponerse como suma de dos términos,

$$\mathbf{F}(r, \theta) = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} + \frac{\mu \beta(\theta)}{r^3} \mathbf{r}.$$

El primero corresponde a la fuerza central de atracción que gobierna el movimiento kepleriano, mientras que el segundo es un término que formaliza una fuerza central no conservativa y de magnitud también proporcional al recíproco del cuadrado de la distancia r entre el centro de fuerzas y el orbitador, pero con la salvedad de que el coeficiente ya no es constante sino variable, y depende de una función $\beta(\theta)$ del ángulo polar θ .

Nótese que si $\beta(\theta) = 0$ estamos ante el caso kepleriano, y que si $\beta(\theta) = 1$ estamos igualando y contrarrestando la fuerza del problema de Kepler, lo cual requiere unos requisitos que son imposibles con la tecnología actual para sistemas de propulsión producidos por empujes. Sin embargo, aunque este modelo reproduzca bien el movimiento de las velas solares o del sistema M2P2, en los cuales la función $\beta(\theta)$ se llama *parámetro de reflectividad*, en esta Memoria lo trataremos desde el punto de vista de la Dinámica, independientemente del tipo de orbitador (ya sea natural o artificial).

Por medio del conocido como *método de Binet* [5, Cap. 3, §3.5, pp. 85–86, y §3.7, p. 94], [3, Cap. 2, §2.1, pp. 134–135], para el tratamiento de problemas de movimiento bajo fuerzas centrales, McInnes reduce las ecuaciones diferenciales del movimiento [8, Ecs. (1a) y (1b), p. 743] para las funciones incógnita $r = r(t)$ y $\theta = \theta(t)$, con el tiempo físico t como variable independiente, a una ecuación diferencial escalar, lineal y no homogénea de segundo orden [8, Ec. (3), p. 744] para la función incógnita $u(\theta) = 1/r(\theta)$, con el ángulo polar θ como nueva variable independiente; la relación diferencial entre t y θ es una mera consecuencia de la ley de conservación del momento angular en los movimientos regidos por fuerzas centrales (sean estas conservativas o no).

Cabe destacar que, en concreto, la ecuación diferencial a la que obedece u es la de un oscilador armónico unidimensional de frecuencia angular unidad forzado por una fuerza externa variable representada por la parte no homogénea de dicha ecuación diferencial. Como la ecuación homogénea de segundo orden asociada a este problema es lineal y de coeficientes constantes, su resolución y la obtención de su solución general [*ibidem*, Ec. (5)] es inmediata.

A partir de la solución general de dicha ecuación homogénea, McInnes obtiene una solución particular [*ibidem*, Ec. (9)] de la ecuación completa por medio del Método de Variación de las Constantes, y construye la solución general [*ibidem*, Ec. (10)] de la ecuación no homogénea para $u(\theta)$, con lo cual *dispone, en términos finitos, de una ecuación paramétrica $u = u(\theta)$ para las órbitas solución de su problema*. Sin embargo la forma funcional de esa expresión parece “*poco manejable*” para efectuar cálculos posteriores, y resulta *difícilmente interpretable desde el punto de vista geométrico y físico*.

A continuación McInnes [8, pp. 744-746] estudia algunos ejemplos concretos de órbitas $u = u(\theta)$ obtenidas para expresiones particulares de la función $\beta(\theta)$ y, asimismo, considera el “*problema inverso*” [*ibidem*, p. 745], que consiste en determinar qué modelo de fuerzas (en última instancia, qué función o funciones $\beta(\theta)$) admite el movimiento a lo largo de una órbita $u = u(\theta)$ dada y conocida de antemano. También aplica sus resultados [*ibidem*, pp. 746-749] para el estudio de algunas órbitas de transferencia entre dos órbitas circulares coplanarias dadas.

Algunas de estas consideraciones de McInnes se presentarán con mayor detalle, y en notación matemática, en algunas partes de esta Memoria, especialmente en el Capítulo 2. En este mismo capítulo se presenta desarrollado el caso $\beta = \text{cte.} \neq 1$ (no considerado por McInnes) que, en particular, incluye el caso de Kepler para $\beta = 0$.

Tras esta descripción de los principales resultados tratados en el artículo de McInnes, el propósito de este Trabajo de Fin de Grado consiste en una *reformulación y tratamiento del problema*, y de los desarrollos de este autor, por medio de unas integrales *primeras vectoriales* (o constantes vectoriales del movimiento) de este problema, *alternativas a las integrales clásicas del movimiento kepleriano*, a saber: la propia integral clásica del vector momento angular, y una nueva constante vectorial del movimiento que “recuerda” a la *integral de Laplace* (o vector de Laplace) de un sistema kepleriano.

La deducción de esa nueva integral primera del tipo del vector de Laplace se basa en una adecuada adaptación a nuestro problema de algunos de los contenidos de Leach y Flesias [6, Cap. 2, §2.1, §§2.1.2, pp. 350–355].

Este modo de proceder nos permite obtener para las órbitas solución de este problema de McInnes una expresión, en coordenadas polares planas, que, a diferencia de la solución de McInnes [8, Ec. (10), p. 744], presenta una *gran analogía formal* con la ecuación focal de las cónicas keplerianas, si bien las cantidades constantes que intervienen en dicha ecuación en general serán, en el caso del problema pseudokepleriano, funciones de la variable angular θ .

Además nos permitirá considerar algunos ejemplos de maniobras orbitales y de órbitas de transferencia en los que el planteamiento y el trabajo de cálculo queda considerablemente facilitado por la *sencillez de la forma de la solución* obtenida.

El material presentado en esta Memoria se organiza en un resumen en inglés, cuatro capítulos (entre los que se incluye esta Introducción), un apartado de conclusiones, una sección bibliográfica y un Anexo.

En el CAPÍTULO 2, tras una breve revisión de los principales conceptos y resultados relacionados con el movimiento de una partícula material en el seno de un campo de fuerzas central completamente general (no necesariamente conservativo), se presenta el *tipo de problema pseudokepleriano* objeto de estudio en este TFG, y se recogen los principales resultados del artículo de McInnes [8] en relación con el tratamiento, resolución y algunas aplicaciones de las soluciones de dicho problema.

El CAPÍTULO 3 está dedicado a una *resolución alternativa de ese problema pseudokepleriano por medio de integrales primeras* de la ecuación diferencial vectorial de segundo orden que gobierna el movimiento del sistema pseudokepleriano en cuestión. Se comprueba que, de entre las tres integrales primeras clásicas del problema de Kepler (momento angular, energía total y vector de Laplace), únicamente el momento angular proporciona una constante vectorial del movimiento para nuestro problema pseudokepleriano, perdiéndose la conservación de la energía y la del vector de Laplace. Sin embargo, a partir de las consideraciones de Leach and Flesias [6, Cap. 2, §2.1, §§2.1.2, pp. 350–355], es posible construir un vector que proporciona *una nueva constante vectorial del movimiento para el problema pseudokepleriano* y que puede considerarse como una *generalización natural del vector de Laplace del movimiento kepleriano* puro. Con ayuda de dicho vector, y procediendo como en el caso kepleriano clásico, puede obtenerse *una sencilla representación paramétrica $r = r(\theta)$ de las órbitas solución del problema pseudokepleriano* considerado en esta Memoria. A diferencia de la solución de McInnes [8, Ec. (10), p. 744], la forma funcional de esta solución puede llevarse a una expresión que presenta una gran analogía formal con la ecuación polar de las cónicas keplerianas clásicas, con las ventajas que ello conlleva de cara a su interpretación geométrica y física y para la realización de cálculos posteriores.

En el CAPÍTULO 4 se estudian maniobras de transferencia que pueden efectuarse a partir de fuerzas pseudokeplerianas. En primer lugar se obtienen órbitas cuya geometría coinciden con la de una órbita kepleriana circular, aunque con distinta velocidad. Otra aplicación estudiada son las transferencias orbitales mediante órbitas pseudokeplerianas, a saber, transferencias de “tipo Hohmann”, a lo largo de una recta y a lo largo de una espiral logarítmica.

Tras el capítulo 4, se recogen las principales conclusiones de este Trabajo. El ANEXO A contiene los conceptos y resultados fundamentales relativos a las *órbitas de transferencia de Hohmann*.

Parte de este trabajo fue presentado como comunicación oral, bajo el título *On a Special Case of Radially Perturbed Keplerian System* [9], en las XVII Jornadas de Trabajo en Mecánica Celeste que tuvieron lugar en la Universidad de Santiago de Compostela en junio de 2018.

Capítulo 2

Problema pseudokepleriano

2.1. Movimiento bajo la acción de fuerzas centrales

Para poder expresar la posición de un punto P en el espacio \mathbb{R}^3 es preciso definir [1, Cap. 1, Cap. 6, §6.2, pp. 97-99] un *sistema de referencia espacial* $\mathcal{S} = \{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, donde O es un punto cualquiera que se elige como el *origen* de coordenadas y $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ es una base de \mathbb{R}^3 que supondremos ortonormal y positivamente orientada¹. De esta forma la *posición* de P respecto del origen O se podrá expresar por medio del vector $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$. La *trayectoria* de una partícula sometida a un campo de fuerzas será una curva

$$\mathbf{r}: \begin{array}{l} I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \longmapsto \mathbf{r}(t), \end{array}$$

donde la variable independiente t designa el *tiempo absoluto* de la Mecánica Newtoniana. Así se definen fácilmente los conceptos de velocidad, $\dot{\mathbf{r}}$, y aceleración, $\ddot{\mathbf{r}}$, como las derivadas primera y segunda del vector de posición \mathbf{r} respecto de t .

Si suponemos que el sistema de referencia es *inercial* [1, Cap. 6, §6.3, pp. 99-101] o, lo que es igual, que $\dot{\mathbf{e}}_i = \mathbf{0}$, la ecuación del movimiento de P vendrá dada por la segunda ley de Newton,

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad (2.1)$$

donde \mathbf{F} representa la fuerza por unidad de masa que actúa sobre la partícula.

Supondremos, en lo que sigue, que la fuerza es *central* [3, Cap. 1, Cap. 2, §2.1, pp. 126-136], [5, Cap. 3, pp. 70-127], esto es, tiene la forma

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{F}_r(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = F(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (2.2)$$

donde \mathbf{e}_r es el vector unitario en la *dirección radial*.

Para comprender mejor el movimiento de una partícula sometida a un campo central definiremos, en primer lugar, el vector *momento angular* [1, Cap. 8, §8.2, p. 124], [2, Cap. 3, §3.3, p. 115], [3, Cap. 2, §2.1, p. 129], [5, Cap. 1, §1.1, p. 2] mediante

$$\mathbf{G} = G \mathbf{k} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}, \quad (2.3)$$

donde hemos llamado $G = \|\mathbf{G}\|$ a su norma y $\mathbf{k} = \mathbf{G}/G$ a su dirección. De acuerdo con esta definición el vector momento angular es un vector ortogonal, en cada instante t , a los vectores de posición y velocidad, o, lo que es igual, al *plano instantáneo del movimiento*, $\Pi = \langle \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}} \rangle$, que contiene, en todo instante, al punto O .

¹Es decir, que se cumple $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$

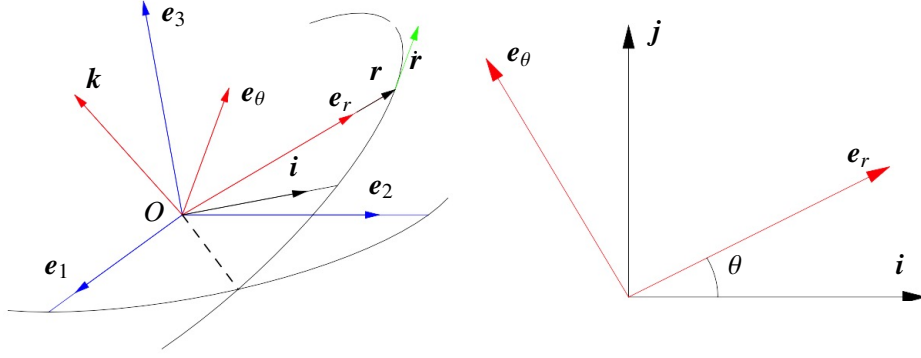


Figura 2.1: Plano del movimiento de una partícula en un campo central

Consideremos una partícula sometida a un campo central. Derivando la expresión (2.3) de \mathbf{G} , y sustituyendo la expresión de \mathbf{F}_r dada por (2.2), se obtiene

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \underbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}}_{\mathbf{0}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_r = \frac{F(t, r, \dot{r})}{r} \underbrace{\mathbf{r} \times \mathbf{r}}_{\mathbf{0}} = \mathbf{0}, \quad (2.4)$$

lo que demuestra que \mathbf{G} es un *vector constante* y por tanto el plano del movimiento es fijo, y el movimiento de la partícula tiene lugar en ese *plano fijo* definido por el vector \mathbf{k} como *vector normal*.

Si en el plano del movimiento elegimos una dirección fija \mathbf{i} , el sistema de referencia ortonormal $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, con $\mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}$, es un *sistema inercial* respecto del cual el vector $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ tiene sólo dos componentes.

Resulta conveniente reformular el problema en un sistema de *coordenadas polares planas*, (r, θ) , definidas en el plano del movimiento tomando la dirección constante \mathbf{i} como *eje polar* [1, Cap. 6, §6.4, pp. 101-103]. De esta forma tendremos

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (2.5)$$

Además del sistema de referencia inercial $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, resulta de gran interés en esta formulación el sistema de referencia ortonormal *no inercial* $\{O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{k}\}$ formado por la *dirección radial*, \mathbf{e}_r , definida anteriormente, y la *dirección transversal*, $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{k} \times \mathbf{e}_r$. La relación entre estos dos sistemas de referencia vendrá dada a través de las expresiones (Figura 2.1)

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}, \quad (2.6)$$

y sus inversas

$$\mathbf{i} = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{j} = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta. \quad (2.7)$$

Si derivamos las expresiones (2.7) y tenemos en cuenta que \mathbf{i} y \mathbf{j} son constantes podremos poner

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r, \quad (2.8)$$

lo que finalmente nos permite obtener las relaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r \mathbf{e}_r, \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta, \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Combinando (2.1) y (2.2) con la tercera expresión de (2.9) tendremos las ecuaciones del movimiento

$$(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = F(t, r, \dot{r}), \quad (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 0. \quad (2.10)$$

De la segunda de las relaciones anteriores podemos deducir que $r^2\dot{\theta}$ es una constante, que, teniendo en cuenta la fórmula de $\mathbf{G} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = (r^2\dot{\theta}) \mathbf{k}$, coincide con G . Finalmente, las expresiones (2.10) se podrán reescribir como

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad r^2\dot{\theta} = G, \quad (2.11)$$

que constituyen las ecuaciones diferenciales del movimiento plano de un punto material de masa unidad sometido a una fuerza central $F_r(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$.

2.2. Formulación de un problema pseudokepleriano

El *Problema de Kepler* [1, Cap. 8, §8.1, p. 123], [2, Cap. 3, §3.1, p. 108], [3, Cap. 2, §2.1, p. 131], [5, Cap. 3, §3.7, p. 94], [6, Cap. 2, §2.1, §§2.1.1, p. 346], corresponde a un sistema dinámico autónomo dado por la ecuación diferencial vectorial

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}, \quad (2.12)$$

donde μ es una constante positiva llamada *parámetro gravitatorio del sistema kepleriano*. Este problema considera el movimiento de una partícula de masa unidad sometida a una fuerza central, $\mathbf{F}_r = F(r) \mathbf{e}_r = F_k(r) \mathbf{e}_r$, con $F_k(r) = -\mu/r^2$, que llamaremos *fuerza kepleriana*.

En la presente Memoria estudiaremos un caso particular [8] de lo que llamaremos *problema pseudokepleriano*, que consistirá, en concreto, en el estudio del movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza que *formalmente* se parece a la fuerza kepleriana, pero sustituyendo el parámetro constante μ por otro variable $\mu(1 - \beta)$. Puesto que esta sustitución no elimina el carácter *central* de la fuerza, se deduce que nuestro movimiento pseudokepleriano será plano, por lo que podremos introducir las coordenadas polares (r, θ) y definir la variabilidad del parámetro β en función de la variable angular polar θ , $\beta = \beta(\theta)$.

De esta forma el *problema pseudokepleriano* en cuestión corresponde a un sistema dinámico definido por la ecuación diferencial vectorial y las *condiciones iniciales*

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu(1 - \beta(\theta))}{r^3} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{v}_0, \quad (2.13)$$

donde μ es una constante positiva y $\beta(\theta)$ un parámetro variable². En este problema se aborda el estudio del movimiento de una partícula de masa unidad sometida a una fuerza central

$$\mathbf{F}_\beta(r, \theta) = F_\beta(r, \theta) \mathbf{e}_r, \quad F_\beta(r, \theta) = -\frac{\mu(1 - \beta(\theta))}{r^2}, \quad (2.14)$$

que será la *fuerza pseudokepleriana* de nuestro problema.

En principio β puede tomar valores positivos o negativos. Valores negativos corresponden a fuerzas radiales de tipo atractivo que aumentan el efecto de la fuerza kepleriana. Valores positivos corresponden a fuerzas repulsivas que disminuyen la fuerza kepleriana. Como principal ejemplo de fuerza repulsiva puede considerarse la *presión de radiación solar*, bien a través de una *vela solar*, con valores pequeños de β , o de la futura tecnología *M2P2*. Cuando el valor de β alcance la unidad la fuerza kepleriana queda compensada por esta otra fuerza.

Presentamos a continuación los detalles esenciales del tratamiento de este problema que efectúa McInnes [8].

Reformulando este problema pseudokepleriano en variables polares planas como en el apartado anterior tendremos que las ecuaciones diferenciales del movimiento (2.11) son ahora

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\mu \frac{(1 - \beta)}{r^2}, \quad r^2\dot{\theta} = G. \quad (2.15)$$

²De aquí en adelante supondremos que el parámetro β es función de θ pero, en general, no escribiremos explícitamente esta dependencia.

Despejando $\dot{\theta}$ a partir de la segunda de las expresiones anteriores, y llevando el resultado a la primera, el sistema diferencial de las ecuaciones del movimiento (2.15) se reescribe como

$$\ddot{r} - \frac{G^2}{r^3} = -\mu \frac{(1-\beta)}{r^2}, \quad \dot{\theta} = \frac{G}{r^2}. \quad (2.16)$$

Las ecuaciones (2.11), y como consecuencia (2.15) y (2.16), no son en general lineales ni regulares, con una *singularidad* para $r = 0$. En lo que sigue presentaremos una transformación, llamada *transformación de Binet* [3, Cap. 2, §2.1, pp. 134-135], [5, Cap. 3, §3.5, pp. 85-86 y §3.7, p. 94], que permite convertir la primera ecuación de (2.16) en otra, lineal y regular, que, en ciertas ocasiones, representa un oscilador perturbado. Para ello efectuaremos un cambio de la variable dependiente r y de la independiente t , reemplazándolas respectivamente por las variables u y θ dadas por

$$r = \frac{1}{u(\theta)}, \quad dt = \frac{r^2}{G} d\theta. \quad (2.17)$$

Denotando

$$u' = \frac{du}{d\theta}, \quad u'' = \frac{d^2u}{d\theta^2},$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{G}{r^2} = G u^2, \quad (2.18)$$

calculamos \dot{r} y \ddot{r} en función de la variable u y de sus derivadas respecto de θ , obteniendo para \dot{r}

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(1/u)}{d\theta} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = - \left(\frac{u'}{u^2} \right) (G u^2) = -G u',$$

y para \ddot{r}

$$\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(-G u')}{d\theta} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) = (-G u'') (G u^2) = -G^2 u'' u^2.$$

Así, la primera ecuación de (2.16) tras la transformación de Binet se convierte en

$$\begin{aligned} -G^2 u' u^2 - G^2 u^3 &= -\mu(1-\beta) u^2, \\ -G^2 u^2 (u'' + u) &= -\mu(1-\beta) u^2, \end{aligned}$$

y que finalmente se expresará como

$$u'' + u = \frac{\mu(1-\beta(\theta))}{G^2}, \quad (2.19)$$

que corresponde a un oscilador unidimensional de frecuencia unidad forzado por una fuerza variable $\frac{\mu(1-\beta)}{G^2}$.

2.3. Integración del problema

La ecuación (2.19) es una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes y no homogénea. Para su resolución, McInnes [8, p. 744] procede a hallar en primer lugar la solución general u_H de la ecuación homogénea y, posteriormente, una solución particular u_p de la ecuación no homogénea. De este modo la solución general del problema será $u(\theta) = u_H(\theta) + u_p(\theta)$.

La solución general de la ecuación homogénea

$$u''(\theta) + u(\theta) = 0 \quad (2.20)$$

viene dada por la expresión

$$u_H(\theta; C_1, C_2) = C_1 u_1(\theta) + C_2 u_2(\theta),$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias que pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales del problema, y $u_1(\theta)$ y $u_2(\theta)$ son dos soluciones linealmente independientes de (2.20). Dos posibles soluciones linealmente independientes son $u_1(\theta) = \cos \theta$ y $u_2(\theta) = \sin \theta$, que corresponden a un sistema fundamental de soluciones para un oscilador armónico unidimensional de frecuencia unidad no forzado.

Mediante el wronskiano $W(\theta)$ se comprueba la independencia lineal de estas dos soluciones, ya que

$$W(\theta) = \begin{vmatrix} u_1(\theta) & u_2(\theta) \\ u_1'(\theta) & u_2'(\theta) \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

De esta forma la expresión final de la solución general de la ecuación homogénea se podrá poner como

$$u_H(\theta; C_1, C_2) = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta. \quad (2.21)$$

Mediante el *Método de Variación de Constantes* se halla una solución particular de la ecuación no homogénea (2.19); para ello se postulan soluciones de la forma

$$u_p(\theta) = \Phi_1(\theta) \cos \theta + \Phi_2(\theta) \sin \theta, \quad (2.22)$$

donde las funciones $\Phi_1(\theta)$ y $\Phi_2(\theta)$ deben satisfacer las relaciones

$$\begin{aligned} \Phi_1'(\theta) \cos \theta + \Phi_2'(\theta) \sin \theta &= 0, \\ -\Phi_1'(\theta) \sin \theta + \Phi_2'(\theta) \cos \theta &= \frac{\mu(1-\beta)}{G^2}. \end{aligned}$$

Puesto que $W(\theta) = 1$, la solución de este sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden para las funciones incógnita $\Phi_1(\theta)$ y $\Phi_2(\theta)$ vendrá dada por

$$\begin{aligned} \Phi_1(\theta) &= -\frac{\mu}{G^2} \int [1 - \beta(\theta)] \sin \theta \, d\theta, \\ \Phi_2(\theta) &= \frac{\mu}{G^2} \int [1 - \beta(\theta)] \cos \theta \, d\theta, \end{aligned} \quad (2.23)$$

por lo que una solución particular de la ecuación no homogénea (2.19) podría escribirse como

$$u_p(\theta) = -\frac{\mu}{G^2} \cos \theta \int [1 - \beta(\theta)] \sin \theta \, d\theta + \frac{\mu}{G^2} \sin \theta \int [1 - \beta(\theta)] \cos \theta \, d\theta. \quad (2.24)$$

Finalmente, la solución general de la ecuación no homogénea (2.19) vendrá dada por

$$u(\theta) = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + \Phi_1(\theta) \cos \theta + \Phi_2(\theta) \sin \theta, \quad (2.25)$$

o bien, en forma más explícita [8, Ec. (10), p. 744], como

$$u(\theta; C_1, C_2) = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta - \frac{\mu}{G^2} \cos \theta \int [1 - \beta(\theta)] \sin \theta \, d\theta + \frac{\mu}{G^2} \sin \theta \int [1 - \beta(\theta)] \cos \theta \, d\theta. \quad (2.26)$$

Para la primera ecuación de (2.16) se tendría la solución general $r(\theta; C_1, C_2) = 1/u(\theta; C_1, C_2)$. Compárese con la solución (3.17), (3.18) obtenida en el Capítulo 3 por medio de integrales primeras del movimiento pseudokepleriano.

2.3.1. Ley horaria del movimiento

Las expresiones (2.25) o (2.26) proporcionan la ecuación de la órbita de nuestro movimiento pseudokepleriano, esto es, su *geometría*. Sin embargo, si queremos conocer la posición de la partícula en cada instante t , es decir, su *cinemática*, es preciso conocer la *ley horaria*, o relación entre la variable θ y el tiempo t [8, Ec. (11)]. Para ello tendremos en cuenta la expresión (2.18), de la que se puede despejar

$$dt = \frac{1}{G u^2} d\theta.$$

De esta forma, si suponemos que el instante inicial t_0 se corresponde con el valor θ_0 , tendremos finalmente

$$\int_{t_0}^t d\tau = t - t_0 = \frac{1}{G} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{[u(\theta; C_1, C_2)]^2}. \quad (2.27)$$

Dada una expresión concreta de la función $\beta(\theta)$ podemos calcular, a partir de (2.26), la órbita $u(\theta; C_1, C_2)$ que, llevada a (2.27), permite establecer la relación entre el tiempo t y la variable θ . Invertiendo dicha relación (bien analíticamente, o, si esto no es posible, numéricamente), podemos determinar la posición de la partícula en su plano por medio de las ecuaciones paramétricas $u = u(t)$ y $\theta = \theta(t)$, con t como parámetro.

A partir de la fórmula (2.27) se puede obtener el *periodo* en el caso de órbitas periódicas cerradas.

2.4. Caso $\beta \neq 1$ constante

Para el caso particular $\beta \neq 1$ constante, no considerado por McInnes, la ecuación (2.26) se reduce a

$$u(\theta; C_1, C_2) = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta - \frac{\mu}{G^2}(1 - \beta) \cos \theta \int \sin \theta d\theta + \frac{\mu}{G^2}(1 - \beta) \sin \theta \int \cos \theta d\theta,$$

que, finalmente, calculando las correspondientes primitivas, conduce a

$$u(\theta; C_1, C_2) = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + \frac{\mu(1 - \beta)}{G^2}, \quad (2.28)$$

donde las constante C_1, C_2 se obtienen a partir de las condiciones iniciales, resultando

$$C_1 = u(0) - \frac{\mu(1 - \beta)}{G^2}, \quad C_2 = u'(0).$$

Tomando δ, θ_0 como nuevas constantes arbitrarias, llamadas respectivamente *amplitud* y *fase inicial*, tales que $\delta = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\cos \theta_0 = C_1/\delta$, $\sin \theta_0 = C_2/\delta$, se tiene

$$u(\theta) = u(\theta; \delta, \theta_0) = \delta \cos(\theta - \theta_0) + \frac{\mu}{G^2}, \quad (2.29)$$

donde, de aquí en adelante, prescindiremos de la mención explícita a las constantes δ, θ_0 en la representación de la órbita $u(\theta)$.

Invertiendo el cambio de variable dependiente $r = 1/u$, obtenemos la conocida ecuación focal de una *cónica* en coordenadas polares planas, con origen de coordenadas en un foco de la cónica,

$$r(\theta) = \frac{\frac{G^2}{\mu(1 - \beta)}}{1 + \left(\frac{\delta G^2}{\mu(1 - \beta)}\right) \cos(\theta - \theta_0)} = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}, \quad (2.30)$$

y eligiendo los ejes de la órbita de tal forma que la fase inicial θ_0 sea cero se obtendrá finalmente la ecuación de una *cónica*

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}. \quad (2.31)$$

En el caso kepleriano $\beta = 0$, y los valores de p y e obtenidos así coinciden con el semilado recto y excentricidad de una cónica kepleriana obtenidos en la forma clásica [1, Cap. 8, §8.3, p. 127], [2, Cap. 3, §3.3, p. 117], [3, Cap. 2, §2.1, p. 132], [5, Cap. 3, §3.7, p. 94, p. 98].

Si suponemos un problema con unas condiciones iniciales dadas, el valor de G queda determinado. Tanto si aplicamos una fuerza kepleriana como una pseudokepleriana con $0 \neq \beta \neq 1$ constante, obtenemos una órbita con forma de cónica. La *diferencia* en ambos casos son los valores del semilado recto y de la excentricidad de la misma.

2.5. Problema inverso

En la sección 2.3 hemos resuelto el *problema directo*, esto es: dada una expresión de la función $\beta = \beta(\theta)$, que modela la fuerza que actúa sobre la partícula, hemos obtenido la ecuación (2.26) de la órbita y la ley horaria del movimiento (2.27).

Sin embargo, desde el punto de vista de la Astrodinámica resulta también muy útil para el diseño de órbitas la resolución del que llamaremos *problema inverso* [8, p. 745], esto es: dada una posible órbita $u = u(\theta)$ de la partícula, encontrar, si existe, la fuerza de tipo pseudokepleriano que la hace posible.

Para ello bastará con tener en cuenta que, a partir de la expresión (2.19), y conocida $u = u(\theta)$, podremos despejar

$$\beta(\theta) = 1 - \frac{G^2}{\mu} [u''(\theta) + u(\theta)]. \quad (2.32)$$

Para ilustrar esta manera de proceder supongamos, por ejemplo, que queremos conseguir una *órbita pseudokepleriana periódica* (véase Figura 2.2) dada por la ecuación en coordenadas polares

$$r(\theta) = \frac{6}{3 + 2 \cos \theta + \cos 2\theta}, \quad (2.33)$$

con $r(0) = 1, \dot{r}(0) = 0$. Además, elegiremos unas condiciones iniciales³ que hagan $G^2 = \mu$.

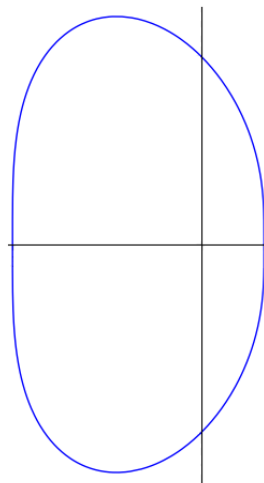


Figura 2.2: Órbita pseudokepleriana periódica de ecuación (2.33) obtenida con un parámetro $\beta = \cos^2 \theta$.

³Para esto basta elegir la norma $\|\dot{r}\|$ del vector velocidad igual a $\sqrt{\mu}$.

Si expresamos la órbita (2.33) en función de la variable u , tendremos

$$u(\theta) = \frac{1}{6} (3 + \cos \theta + \cos 2\theta), \quad (2.34)$$

que derivada dos veces respecto a θ y llevada a (2.32) nos da una expresión

$$\beta(\theta) = 1 - \frac{G^2}{\mu} \sin^2 \theta,$$

y, finalmente, de acuerdo con las condiciones iniciales elegidas, se tendrá $G^2 = \mu$, y llegaremos para la función $\beta(\theta)$ a una expresión

$$\beta(\theta) = \cos^2 \theta. \quad (2.35)$$

Puede observarse que la función $\beta = \beta(\theta)$ aquí obtenida llega a alcanzar un valor igual a la unidad, lo que representará una fuerza que compensa en magnitud a la fuerza kepleriana, por lo que no puede considerarse una mera perturbación de una órbita kepleriana, sino que da lugar a una *órbita fuertemente no kepleriana*.

Para obtener el *periodo* T de la órbita basta aplicar la relación (2.27), integrando entre $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$,

$$T = \frac{1}{G} \int_0^{2\pi} \frac{36}{(3 + 2 \cos \theta + \cos 2\theta)^2} d\theta = \frac{6}{G} \sqrt{3 + 2\sqrt{3}} \pi \approx 47,92 G^{-1} \quad (2.36)$$

que viene expresado en las unidades de tiempo elegidas para dar a la constante G el valor $\sqrt{\mu}$.

Capítulo 3

Reformulación kepleriana del problema pseudokepleriano

3.1. Integrales primeras clásicas del problema de Kepler

En el estudio del problema de Kepler desempeñan un papel esencial tres constantes, dos de ellas vectoriales y una escalar, que representan las integrales primeras que permiten determinar el movimiento del sistema [1, Cap. 8, §8.2, pp. 124-126], [2, Cap. 3, §3.3, pp. 114-119], [3, Cap. 2, §2.1, pp. 128-133], [5, Cap. 3, §3.2, pp. 71-74, §3.9, pp. 102-105], [6, Cap. 2, §2.1, §§2.1.1, pp. 346-347]. Dichas constantes se denominan, respectivamente, *vector momento angular*, *vector de Laplace* e *integral de la energía* (o *constante de la energía*).

3.1.1. Vector momento angular

El *vector momento angular* $\mathbf{G} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ permanece constante (véase ecuación (2.4)), tanto en el caso kepleriano como en el pseudokepleriano, por ser ambos problemas de movimiento bajo fuerzas centrales.

El carácter constante de la dirección \mathbf{k} de este vector conduce a un *movimiento plano*, mientras que su norma constante determina la variación, $\dot{\theta} = G/r^2$, de la variable angular respecto al tiempo y, por tanto, determina la *ley horaria* del problema, es decir, su cinemática.

3.1.2. Vector de Laplace

El *vector de Laplace* se define como

$$\mathbf{A} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G} - \frac{\mu \mathbf{r}}{r}. \quad (3.1)$$

Este vector, al igual que el momento angular, es un vector constante en el problema de Kepler.

La dirección del vector de Laplace proporciona una dirección fija en el plano del movimiento que determina el *eje de la cónica solución* del problema, o, lo que es igual, la dirección del *pericentro*, o punto de la órbita de la partícula más próximo al origen de coordenadas. Por otro lado, su norma es proporcional a la excentricidad e de la cónica solución del problema, siendo $\|\mathbf{A}\| = A = \mu e$.

Sin embargo en el caso pseudokepleriano este vector ya no es constante. En efecto,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G} + \overbrace{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{G}}}^{\mathbf{0}} - \frac{\mu}{r} \dot{\mathbf{r}} + \frac{\dot{r}\mu}{r^2} \mathbf{r},$$

y, teniendo en cuenta (2.13), se obtiene

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{\mu(1-\beta)}{r^3} \right) [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})] - \frac{\mu}{r} \dot{\mathbf{r}} + \frac{\dot{r}\mu}{r^2} \mathbf{r},$$

que, desarrollada, conduce a

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\mu\beta}{r} \left(\dot{r} \mathbf{r} - \dot{\mathbf{r}} \right), \quad (3.2)$$

que es el vector cero para el caso kepleriano, $\beta = 0$, pero no lo es cuando $\beta(\theta)$ sea distinto de cero.

3.1.3. Integral de la energía

La *energía* del problema de Kepler se define como

$$h = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{\mu}{r}. \quad (3.3)$$

La variación temporal de la energía viene dada por

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{1}{2} (\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) + \frac{\mu}{2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{-\frac{3}{2}} \cdot (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \frac{r \dot{r} \mu}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{3/2}} = \\ &= \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \frac{\dot{r} \mu}{r^2} = \dot{r} \left(\ddot{r} + \frac{\mu}{r^2} \right) = \dot{r} \left(\frac{\mu\beta(\theta)}{r^2} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{\mu}{r^2} \right), \end{aligned}$$

y, finalmente

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\mu\beta(\theta)\dot{r}}{r^2}, \quad (3.4)$$

que, al igual que el vector de Laplace, es constante en el caso kepleriano, $\beta = 0$, pero ya no lo es en el caso pseudokepleriano en el que $\beta \neq 0$.

3.2. Alternativa al vector de Laplace en el problema pseudokepleriano

De acuerdo con las ecuaciones (2.13) y (2.14), la ecuación diferencial vectorial del problema pseudokepleriano es

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu(1-\beta(\theta))}{r^3} \mathbf{r} \implies \ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{F}_\beta = \mathbf{0}, \quad (3.5)$$

donde \mathbf{F}_β es la fuerza pseudokepleriana dada en (2.14). Siguiendo el procedimiento presentado por Leach y Flessas [6, Cap. 2, §2.1, §§2.12, pp. 350-355], esta ecuación puede integrarse para conseguir un vector de la forma

$$\mathcal{H} = \dot{\mathbf{r}} - \int_{t_0}^t \mathbf{F}_\beta(r, \theta) d\tau, \quad (3.6)$$

Este vector, llamado por algunos autores [6, Cap. 2, §2.1, §§2.1.2, Ec. (2.1.31), p. 350] *vector de Hamilton*, es un vector constante.

Calcularemos, a continuación, la expresión explícita del segundo sumando de la ecuación (3.6),

$$I_{\mathcal{H}} = - \int_{t_0}^t \mathbf{F}_\beta d\tau = \int_{t_0}^t \frac{\mu}{r^3} [1 - \beta(\theta)] \mathbf{r} d\tau, \quad (3.7)$$

para lo que tendremos en cuenta las relaciones $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ y $G dt = r^2 d\theta$, que permiten poner

$$I_{\mathcal{H}} = \int_0^\theta \frac{\mu}{G} [1 - \beta(\vartheta)] \mathbf{e}_r d\vartheta,$$

donde hemos considerado, como anteriormente, que el instante t_0 corresponde al ángulo $\theta_0 = 0$.

Sustituyendo la fórmula de \mathbf{e}_r dada en (2.6), podremos poner

$$I_{\mathcal{H}} = \frac{\mu}{G} \left(\mathbf{i} \int_0^\theta \cos \vartheta d\vartheta + \mathbf{j} \int_0^\theta \sin \vartheta d\vartheta - \mathbf{i} \int_0^\theta \beta(\vartheta) \cos \vartheta d\vartheta - \mathbf{j} \int_0^\theta \beta(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \right).$$

Si integramos los dos primeros sumandos de la expresión, aplicamos de nuevo (2.6) y sustituimos \mathbf{i} y \mathbf{j} , en los dos últimos sumandos por sus expresiones dadas en (2.7), se tendrá

$$I_{\mathcal{H}} = \frac{\mu}{G} \left(-\mathbf{e}_{\theta} - \mathbf{e}_r \cos \theta \int_0^{\theta} \beta(\vartheta) \cos \vartheta d\vartheta + \mathbf{e}_{\theta} \sin \theta \int_0^{\theta} \beta(\vartheta) \cos \vartheta d\vartheta - \mathbf{e}_r \sin \theta \int_0^{\theta} \beta(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta - \mathbf{e}_{\theta} \cos \theta \int_0^{\theta} \beta(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta \right),$$

que se puede poner como

$$I_{\mathcal{H}} = \frac{\mu}{G} \left[\left(- \int_0^{\theta} \beta(\vartheta) \cos(\theta - \vartheta) d\vartheta \right) \mathbf{e}_r - \left(1 - \int_0^{\theta} \beta(\vartheta) \sin(\theta - \vartheta) d\vartheta \right) \mathbf{e}_{\theta} \right].$$

Si introducimos las funciones auxiliares

$$\Psi(\theta) = 1 - \int_0^{\theta} \beta(\vartheta) \sin(\theta - \vartheta) d\vartheta, \quad \Psi'(\theta) = \frac{d\Psi}{d\theta} = - \int_0^{\theta} \beta(\vartheta) \cos(\theta - \vartheta) d\vartheta, \quad (3.8)$$

obtendremos la expresión final del *vector de Hamilton para nuestro problema pseudokepleriano*,

$$\mathcal{H} = \dot{\mathbf{r}} + I_{\mathcal{H}} = \dot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{G} [\Psi'(\theta) \mathbf{e}_r - \Psi(\theta) \mathbf{e}_{\theta}]. \quad (3.9)$$

El objetivo de esta sección es construir un vector constante para el movimiento pseudokepleriano que nos sirva de *alternativa al vector de Laplace del problema de Kepler*. Para ello basta tener en cuenta que, puesto que el vector de Hamilton es un vector constante, si multiplicamos vectorialmente éste por cualquier otro vector constante (como, por ejemplo, el vector momento angular), el resultado será otro vector constante. Así podemos introducir el vector

$$\mathcal{A} = \mathcal{H} \times \mathbf{G} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G} + \frac{\mu}{G} [\Psi'(\theta) \mathbf{e}_r \times \mathbf{G} - \Psi(\theta) \mathbf{e}_{\theta} \times \mathbf{G}]. \quad (3.10)$$

Si tenemos en cuenta que $\mathbf{G} = G \mathbf{k}$ y que los vectores $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{\theta}, \mathbf{k}\}$ forman una base ortonormal directa de \mathbb{R}^3 , se verificarán las relaciones $\mathbf{e}_r \times \mathbf{G} = -G \mathbf{e}_{\theta}$, y $\mathbf{e}_{\theta} \times \mathbf{G} = G \mathbf{e}_r$, que llevadas a (3.10) permiten escribir

$$\mathcal{A} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G} - \mu [\Psi'(\theta) \mathbf{e}_{\theta} + \Psi(\theta) \mathbf{e}_r], \quad (3.11)$$

que es un vector constante, por construcción, al que llamaremos *vector del Laplace del movimiento pseudokepleriano*.

Observemos que para el caso kepleriano $\beta = 0$, por lo que se tendrá $\Psi = 1$, $\Psi' = 0$, y en consecuencia el vector \mathcal{A} se reduce a

$$\mathcal{A} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G} - \mu \mathbf{e}_r = \mathbf{A}, \quad (3.12)$$

es decir, coincide con el vector de Laplace del movimiento kepleriano.

3.3. Trayectoria kepleriana del problema pseudokepleriano

Haciendo coincidir la dirección \mathbf{i} , que representa el eje polar del sistema de coordenadas polares, con la dirección del vector de Laplace \mathbf{A} , podemos obtener fácilmente la ecuación de la órbita cónica del problema de Kepler sin más que efectuar el producto escalar del vector de Laplace \mathbf{A} por el vector de posición \mathbf{r} (véase [1, Cap. 8, §8.3, p. 127], [2, Cap. 3, §3.3, p. 117], [3, Cap. 2, §2.1, p. 132], [5, Cap. 3, §3.9, pp. 103-104], [6, Cap. 2, §2.1, §§2.1.1, pp. 346-347]).

En el caso pseudokepleriano el vector de Laplace no es constante por lo que su dirección no puede usarse como eje polar. Sin embargo hemos encontrado otro vector, \mathcal{A} , que sí lo es, por lo que realizaremos con él la misma operación que en el caso kepleriano para hallar la ecuación de la órbita.

Si hacemos coincidir la dirección del vector i con la del vector \mathcal{A} y tenemos en cuenta que θ representa el ángulo entre i y r , podremos poner

$$\mathcal{A} \cdot r = \mathcal{A} r \cos \theta. \quad (3.13)$$

Por otro lado, atendiendo a la expresión de \mathcal{A} , dada en (3.11), y a las relaciones $r \cdot (\dot{r} \times G) = G^2$, $e_r \cdot r = r$, y $e_\theta \cdot r = 0$, podremos también poner

$$\mathcal{A} \cdot r = G^2 - \mu \Psi(\theta) r. \quad (3.14)$$

Combinando las expresiones (3.13) y (3.14), se tendrá

$$\mathcal{A} r \cos \theta = G^2 - \mu \Psi(\theta) r,$$

o, lo que es igual,

$$r(\theta) = \frac{G^2/\mu}{\Psi(\theta) + (\mathcal{A}/\mu) \cos \theta}. \quad (3.15)$$

En el movimiento kepleriano se tiene, por un lado, que $\Psi(\theta) = 1$, $\mathcal{A} = A$, y por otro se definen el semilado recto $p = G^2/\mu$, la excentricidad $e = A/\mu$, y la anomalía verdadera $f = \theta$ que coincide con el ángulo polar, de manera que la ecuación de la órbita es la *cónica*

$$r(f) = \frac{p}{1 + e \cos f}. \quad (3.16)$$

Volviendo al caso del movimiento pseudokepleriano, en el que, a pesar de tener el mismo significado que la anomalía verdadera f continuaremos usando la variable θ , la ecuación de la órbita se podrá poner como

$$r(\theta) = \frac{p(\theta)}{1 + e(\theta) \cos \theta}, \quad (3.17)$$

donde hemos introducido dos funciones

$$p(\theta) = \frac{G^2}{\mu \Psi(\theta)}, \quad e(\theta) = \frac{\mathcal{A}}{\mu \Psi(\theta)}. \quad (3.18)$$

Como puede verse el movimiento del problema pseudokepleriano puede describirse por medio de una *falsa cónica* (3.17), la cual puede interpretarse como una órbita osculatriz en la que en *cada instante*, determinado por el ángulo θ , la órbita es kepleriana con semilado recto $p(\theta)$ y excentricidad $e(\theta)$.

A continuación, para ilustrar los conceptos que se acaban de exponer, volveremos sobre el ejemplo de órbita pseudokepleriana considerado en la sección 2.5, para el cual hemos encontrado una expresión $\beta = \beta(\theta) = \cos^2 \theta$, dada en (2.35). Veremos cómo, a partir de la ecuación (3.15), podemos representar la ecuación $r = r(\theta)$ de la órbita tanto en la forma de una “falsa cónica” (ecuación (3.17)) como en la forma (2.33).

En primer lugar debemos hallar la función auxiliar Ψ , mediante la primera expresión de (3.8),

$$\Psi(\theta) = 1 - \int_0^\theta \cos^2 \vartheta \sin(\theta - \vartheta) d\vartheta = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos \theta + \frac{1}{6} \cos 2\theta.$$

Derivando la expresión anterior con respecto a θ , obtenemos la segunda función auxiliar necesaria para calcular el vector \mathcal{A} de Laplace (3.10) o (3.11) de una órbita pseudokepleriana,

$$\Psi'(\theta) = -\frac{1}{3} (\sin \theta + \sin 2\theta).$$

Además,

$$\dot{r} \times G = \begin{vmatrix} e_r & e_\theta & k \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{vmatrix} = (Gr\dot{\theta}, -G\dot{r}, 0) = \left(\frac{G^2}{r}, -G\dot{r}, 0 \right).$$

Por lo tanto el vector de Laplace del movimiento pseudokepleriano, dado por la ecuación (3.11), será

$$\mathcal{A} = \left(\frac{G^2}{r} - \frac{\mu}{6} (3 + 2 \cos \theta + \cos 2\theta), -G\dot{r} + \frac{\mu}{3} (\sin 2\theta + \sin \theta), 0 \right).$$

De acuerdo con las condiciones iniciales elegidas al introducir este ejemplo en la sección 2.5 se tendrá $r(0) = 1$, $\dot{r}(0) = 0$, así como $G^2 = \mu$, por lo que podremos poner

$$\mathcal{A} = (0, 0, 0) \implies \mathcal{A} = 0,$$

con lo que, a partir de la (3.15),

$$r(\theta) = \frac{1}{\Psi(\theta)} = \frac{6}{3 + 2 \cos \theta + \cos(2\theta)},$$

que coincide con la expresión dada en (2.33).

Por otro lado, puesto que $\mathcal{A} = 0$ para las condiciones iniciales dadas, y al ser \mathcal{A} una constante del movimiento, este valor se mantiene a lo largo de toda la órbita. Es decir, a partir de la ecuación (3.18) vemos que $p(\theta) = r(\theta)$ y $e(\theta) = 0 \forall \theta$. Efectivamente, la órbita en un instante dado es circular y el radio instantáneo coincide con el semilado recto. Sin embargo el valor de \mathcal{A} será distinto de 0 cuando imponamos otras condiciones iniciales; es decir, cuando varíemos la velocidad inicial.

Capítulo 4

Aplicaciones

Hemos visto en los capítulos anteriores que la aplicación de una fuerza pseudokepleriana permite obtener órbitas muy distintas de las órbitas keplerianas. Por ello estas fuerzas pueden aplicarse en Astrodinámica para conseguir órbitas cuyas propiedades difieren de las propiedades de las cónicas keplerianas clásicas.

Por ejemplo, como sabemos, una órbita kepleriana circular tiene una velocidad constante que depende del radio [1, Cap. 8, §8.3, Ec. (8.11), p. 128 y Tabla 8.1, p. 129]. En este capítulo veremos cómo, por medio de una fuerza pseudokepleriana, podemos *modificar la velocidad orbital manteniendo la forma y el tamaño de la órbita circular*.

Otro problema importante en Astrodinámica es el de las *transferencias orbitales*. En particular analizaremos el tipo de transferencia más frecuente en Astrodinámica: las transferencias entre dos órbitas circulares de radio distinto. Tradicionalmente estas transferencias se realizan siguiendo una trayectoria elíptica, llamada *órbita de transferencia de Hohmann*, que conecta un punto de la primera órbita con otro de la segunda (véase Anexo A). Para seguir dicha trayectoria el orbitador debe recibir dos impulsos en los dos puntos de contacto de la órbita de transferencia con las órbitas circulares.

En este capítulo propondremos nuevas órbitas de transferencia, basadas en fuerzas pseudokeplerianas, y analizaremos el tiempo de transferencia comparándolo con el tiempo de la transferencia de Hohmann.

4.1. Cambio de velocidad en una órbita circular

En lo que sigue supondremos una *órbita pseudokepleriana circular* de radio r_c . Para esta órbita el vector de posición es ortogonal, en todo instante, al vector velocidad. Para un cierto instante se tendrá $\mathbf{r} = r_c \mathbf{e}_r$, $\dot{\mathbf{r}} = v_c \mathbf{e}_\theta$, por lo que obtenemos $\mathbf{G} = r_c v_c \mathbf{k}$, y $G = r_c v_c$. Notemos que por ser G y r_c constantes, v_c debe ser también constante. En el caso en que la órbita sea kepleriana la velocidad en una órbita circular de radio r_c vendrá dada por la expresión $v_k = \sqrt{\mu/r_c}$ [1, Cap. 8, §8.3, pp. 126-129].

La ecuación de la órbita circular puede ponerse como $r(\theta) = r_c$ o, lo que es igual, $u(\theta) = 1/r_c$. Por tanto, aplicando (2.32), obtendremos

$$\beta(\theta) = 1 - \frac{G^2}{\mu r_c} = 1 - \frac{v_c^2 r_c^2}{\mu r_c} = 1 - \frac{v_c^2}{v_k^2}, \quad (4.1)$$

que es un valor constante.

De acuerdo con la expresión anterior, si queremos que la órbita pseudokepleriana circular tenga una velocidad distinta de la velocidad en el caso kepleriano, debemos aplicar una fuerza con el parámetro β constante y distinto de cero. Observemos que el valor de β será positivo o negativo según que v_c sea menor o mayor que v_k , y más próximo a cero cuanto más próximos entre sí estén los valores de v_c y v_k .

Para obtener el *periodo* P de una órbita de este tipo basta efectuar la cuadratura dada por la ecuación (2.27) entre los límites 0 y 2π , y para una órbita pseudokepleriana circular $u(\theta) = 1/r_c$ obtenemos

$$P = 2\pi \frac{r_c}{v_c},$$

que coincidiría, para el caso kepleriano, con la expresión del periodo dada por la tercera ley de Kepler.

Si partimos de una órbita kepleriana circular inicial, con velocidad v_k , para conseguir cambiar la velocidad a una velocidad v_c deberemos efectuar dos acciones:

- Aplicar un impulso tangencial $\Delta v = v_c - v_k$ que modifique instantáneamente la velocidad.
- Mantener la velocidad v_c aplicando una fuerza pseudokepleriana con β correspondiente a (4.1).

4.2. Órbitas de transferencia pseudokeplerianas

Supondremos en lo sucesivo un orbitador que recorre una órbita kepleriana circular de radio r_0 y velocidad $v_k = \sqrt{\mu/r_0}$. Nos proponemos llevar este orbitador desde un punto de la órbita circular inicial a otro de una órbita circular de radio $r_f = k r_0$ sin efectuar ningún impulso inicial. Para ello buscaremos una órbita pseudokepleriana que conecte ambos puntos y analizaremos el valor de β necesario, así como el *tiempo de la transferencia*, esto es, el tiempo que emplea el orbitador en ir de la órbita inicial a la final.

Para simplificar la notación supondremos que el radio r_0 de la órbita inicial es la *unidad de longitud*, esto es, $r_0 = 1$. Partiremos de un punto de esa órbita con la misma velocidad que el cuerpo en su movimiento kepleriano, es decir, sin aplicar ningún impulso, de manera que las condiciones iniciales son $\mathbf{r} = \mathbf{e}_r$, $\dot{\mathbf{r}} = v_k \mathbf{e}_\theta$, siendo $v_k = \sqrt{\mu}$. Por lo tanto se tendrá $G = \sqrt{\mu}$, $G^2/\mu = 1$, y $r_f = k$.

Aunque lo que veremos es válido tanto para órbitas alrededor de un planeta como para órbitas alrededor del Sol, y obtendremos las expresiones en términos de la razón k entre los radios de las órbitas, para ilustrar los resultados simularemos una transferencia para efectuar un viaje a Marte desde un punto de la órbita de la Tierra hasta uno de la órbita de Marte. Para ello supondremos que tanto la órbita de la Tierra como la de Marte son circulares, y usando la Unidad Astronómica¹ (U.A.) como unidad de longitud y el día como unidad de tiempo, podremos decir que $r_0 = 1$, $r_f = k = 1,5$ y $\mu = \mu_\odot = \mathcal{G} m_\odot \approx 0,000295939$, llamado *parámetro gravitatorio heliocéntrico*.

4.2.1. Transferencia de tipo Hohmann

En primer lugar ensayaremos una transferencia en una órbita *geoméricamente* idéntica a la de Hohmann pero obtenida por medio de una fuerza pseudokepleriana. Con las unidades elegidas su trayectoria queda descrita por una elipse de semilado recto $p = 2k/(k+1)$ y excentricidad $e = (k-1)/(k+1)$ (A).

De acuerdo con lo visto en la sección 2.4 y la expresión (2.30), una fuerza pseudokepleriana con un valor β constante genera una órbita en forma de cónica de *semilado recto* $p = G^2/[\mu(1-\beta)]$. En nuestro caso, para obtener una elipse de semilado recto $p = 2k/(k+1)$ debemos aplicar una fuerza con un valor de β dado por

$$\beta = \frac{k-1}{2k}, \quad (4.2)$$

que llevado a (2.30) permite comprobar que $e = (k-1)/(k+1)$, lo que es compatible con la trayectoria de Hohmann. Hay que destacar que esta trayectoria se alcanza *sin recurrir a ningún impulso inicial*, sino aplicando la fuerza pseudokepleriana desde ese mismo instante.

Para hallar el tiempo de la transferencia debemos integrar la expresión (2.27) entre 0 y π ,

$$\Delta t_H = \frac{1}{G} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{d\theta}{[u(\theta)]^2} = \frac{1}{G} I_e.$$

¹Distancia media entre la Tierra y el Sol

Puesto que la ecuación de la elipse es la misma tanto para el caso kepleriano como para el pseudokepleriano, el valor de I_e será igual en ambos casos, lo único que cambiará será el valor de G . En el caso pseudokepleriano, en el que no se aplica ningún impulso, se tendrá $G = \sqrt{\mu}$, mientras que en caso kepleriano se pasa a la órbita elíptica a través de un impulso que modifica el valor de p , por lo que $G^2 = \mu p$. Así pues, si llamamos Δt_H^k al tiempo de transferencia en el caso kepleriano y Δt_H^p al del caso pseudokepleriano, ambos estarán relacionados por la igualdad $\Delta t_H^p = \sqrt{p} \Delta t_H^k$. Si tenemos en cuenta la expresión de Δt_H^k de la transferencia kepleriana de Hohmann dada en la fórmula (A.4) del Anexo A y el valor de p en función de la razón k obtendremos

$$\Delta t_H^p = \sqrt{p} \Delta t_H^k = \pi \sqrt{\frac{2k}{k+1}} \sqrt{\frac{(1+k)^3}{8\mu}}.$$

Tomando para el parámetro gravitatorio heliocéntrico el valor de μ dado anteriormente, y el valor de $k = 1,5$, se obtiene, para una transferencia a Marte en una órbita de Hohmann kepleriana clásica un valor de $\Delta t_H^k = 255,2194$ días, mientras que en una transferencia de Hohmann pseudokepleriana se tiene $\Delta t_H^p = 279,5788$ días.

Como conclusión tenemos que para un viaje a Marte el uso de una transferencia de Hohmann no kepleriana nos evita el impulso inicial para la inserción en el órbita elíptica a cambio de algo más de tiempo de viaje y una fuerza pseudokepleriana con $\beta = 1/6$.

4.2.2. Órbita rectilínea

Para reducir el tiempo de tránsito podemos pensar en órbitas más cortas en longitud que una de Hohmann. Por ejemplo, una recta que una dos puntos de las órbitas circulares. Puesto que en el instante inicial el orbitador lleva la dirección del vector velocidad, que es tangente a la primera órbita, la única recta que se puede conseguir a través de una órbita pseudokepleriana *sin efectuar ninguna maniobra* debe ser la recta de ecuación en coordenadas polares

$$r(\theta) = \sec \theta, \quad (4.3)$$

como puede verse en la Figura 4.2.

Haciendo el cambio $u(\theta) = 1/r(\theta)$, y sustituyendo en la ecuación (2.32), se obtiene un parámetro $\beta = 1$, lo que indica que debemos aplicar una fuerza que literalmente compensa la fuerza gravitatoria y mantiene al orbitador en una trayectoria rectilínea con velocidad constante.

Para llegar a la órbita de radio k debemos conseguir que $\sec \theta = k$, es decir, debemos alcanzar el valor $\theta = \arccos(1/k)$. De esta forma, aplicando (2.27) obtendremos el tiempo empleado en la transferencia rectilínea,

$$\Delta t_r = \frac{1}{G} \int_0^{\arccos(1/k)} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2G} \left(\frac{\sqrt{k^2 - 1}}{k^2} + \arccos \frac{1}{k} \right).$$

Particularizando al caso de Marte obtenemos que $\Delta t_r = 38,89$ días, que es mucho menor que el de la transferencia de Hohmann; sin embargo el valor constante de β es, comparativamente, muy grande ($\beta = 1$).

4.2.3. Órbita espiral logarítmica

Ensayaremos ahora una órbita con forma de espiral logarítmica, que tendrá una longitud mucho mayor que las dos anteriores. Esta órbita está definida, en coordenadas polares, por la ecuación

$$r(\theta) = e^{\lambda \theta}, \quad (4.4)$$

donde λ será un valor positivo *muy pequeño*.

De esta forma, $u(\theta) = e^{-\lambda\theta}$ y, sustituyendo esta expresión en la ecuación (2.32) y teniendo en cuenta que para las condiciones iniciales elegidas $G^2 = \mu$, se obtiene una expresión de β

$$\beta(\theta) = 1 - (\lambda^2 + 1)e^{-\lambda\theta}. \quad (4.5)$$

Para llegar a la órbita de radio k debemos conseguir que $e^{\lambda\theta} = k$ o, lo que es igual, alcanzar un valor $\theta = \lambda^{-1} \ln k$. El número de vueltas de la espiral necesario para llegar al punto final vendrá dado por $\theta/2\pi = (\ln k)/(2\pi\lambda)$.

El tiempo empleado en alcanzar la segunda órbita será

$$\Delta t_e = \frac{1}{G} \int_0^{\lambda^{-1} \ln k} e^{2\lambda\theta} d\theta = \frac{k^2 - 1}{2k^2 \lambda \sqrt{\mu}}.$$

Si hacemos $k = 1,5$, $\mu = \mu_\odot$ y tomamos un valor de $\lambda = 1/(10\pi)$, se obtendrá un tiempo de tránsito de $\Delta t_e = 507,278$ días en una órbita espiral que da algo más de dos vueltas (ver Figura 4.3) para llegar a su destino, y con una fuerza pseudokepleriana con β que va creciendo, desde cero hasta un valor $\beta = 0,3327$.

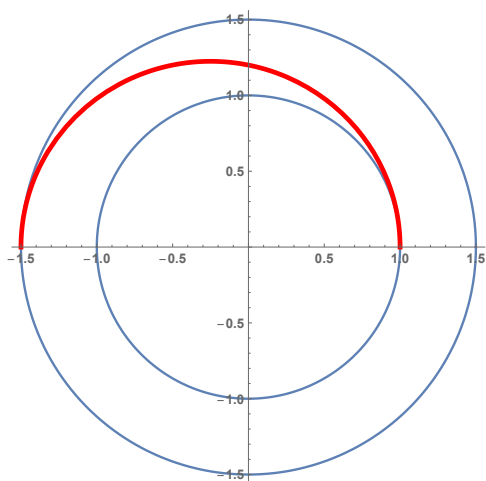


Figura 4.1: Órbita de transferencia tipo Hohmann.

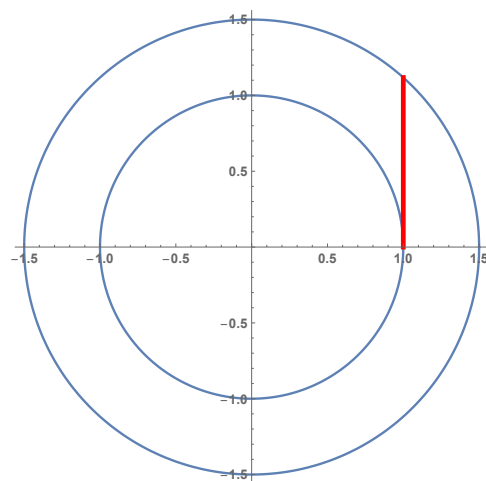


Figura 4.2: Órbita de transferencia rectilínea.

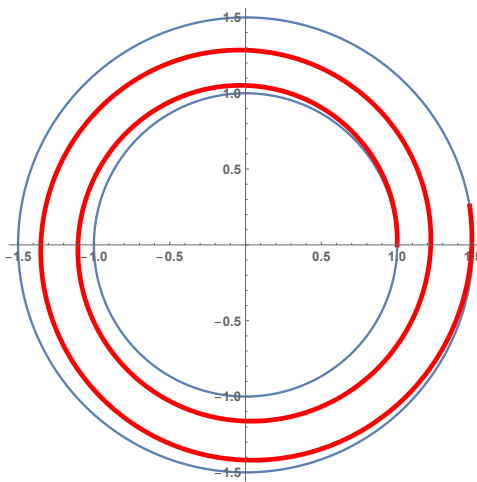


Figura 4.3: Órbita de transferencia con forma de espiral logarítmica.

Conclusiones

Se ha considerado un tipo de problema pseudokepleriano en coordenadas polares planas y

- se ha obtenido en forma cerrada una solución exacta del mismo.
- Se ha construido una nueva integral primera vectorial para dicho problema pseudokepleriano; esta nueva constante del movimiento puede considerarse como una generalización, para el caso pseudokepleriano en cuestión, del vector de Laplace del movimiento kepleriano.
- Con ayuda de esta nuevo vector constante, y procediendo como en el caso del problema de Kepler, se ha obtenido una sencilla representación paramétrica de las órbitas solución del problema pseudokepleriano, en contraste con la forma funcional más complicada de la solución presentada por McInnes; nuestra solución guarda una gran analogía con la expresión de las cónicas solución del problema de Kepler, si bien algunas de las constantes que aparecen en dicha solución son ahora funciones del ángulo polar. Esta forma de la solución puede interpretarse como una “falsa cónica”, la cual puede considerarse como una “órbita osculatriz” en la que en *cada instante*, determinado por el ángulo θ , la órbita es kepleriana con semilado recto $p(\theta)$ y excentricidad $e(\theta)$.
- Se han estudiado distintos casos de órbitas pseudokeplerianas, tanto desde un punto de vista puramente teórico como su aplicación a distintas maniobras de transferencias orbitales, destacando que
 - para una β constante se consiguen órbitas con forma de cónica, las cuales no son keplerianas, ya que difieren de estas en la velocidad en cada punto,
 - se ha conseguido variar la velocidad de una órbita circular, manteniendo la geometría (forma y tamaño),
 - se han estudiado órbitas de transferencia que no requieren ningún impulso.

Bibliografía

- [1] A. ABAD, *Astrodinamica*, Bubok Publishing, S.L, 2012.
Disponible en: <https://www.bubok.es/libro/detalles/219952/Astrodinamica>, .
- [2] R. H. BATTIN, *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, AIAA Education Series. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc, New York, 1987.
- [3] D. BOCCALETTI Y G. PUCACCO, *Theory of Orbits (Vol. 1: Integrable System and Non-perturbative Methods)*, Astronomy and Astrophysics Library. Springer, 1996.
- [4] A. BOLLE Y C. CIRCI, *Optimal Trajectories For Spacecrafts with M2P2 Propulsion System*, Communications to SIMAI Congress, ISSN 1827-9015, Vol. 3 (2009), Article 304 (12pp). DOI: 10.1685/CSC09304.
- [5] H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics (Second Edition)*, Addison–Wesley Series in Physics. Addison–Wesley Publishing Company, 1980.
- [6] P.G.L. LEACH Y G.P. FLESSAS, *Generalisations of the Laplace-Runge-Lenz Vector*, Journal of Non-linear Mathematical Physics, Volume 10, Number 3 (2003), 340-423.
- [7] C. R. MCINNES, *Solar Sailing: Technology, Dynamics and Mission Applications*, Springer, London, 1999.
- [8] C. R. MCINNES, *Orbits in a Generalized Two-Body Problem*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 26, No 5, September-October 2003, pp. 743-749.
- [9] A. RENDÓN, L. FLORÍA Y A. ABAD, *On a Special Case of Radially Perturbed Keplerian System*, XVII Jornadas de Trabajo en Mecánica Celeste, Santiago de Compostela, Junio de 2018. Comunicación oral.

Anexo A

Transferencia de Hohmann

En el año 1925 Walter Hohmann conjeturó, y posteriormente se comprobó numéricamente, que la transferencia de mínimo coste entre dos órbitas circulares requiere dos impulsos tangenciales realizados en el pericentro y apocentro de una elipse tangente en estos puntos a las dos órbitas circulares. Actualmente, este tipo de transferencia es el más usado en la tecnología aeroespacial, tanto para conexión de órbitas de satélites artificiales como para navegación interplanetaria. Este es el tipo de órbita empleado, por ejemplo, para los viajes a Marte.

Supondremos que r_0 es el radio de la órbita inicial y r_f es el radio de la órbita final. El radio final r_f puede ser mayor o menor que el radio inicial r_0 . Con objeto de ilustrar el método supondremos que $r_0 < r_f$, aunque todo lo que se diga es válido para el otro caso.

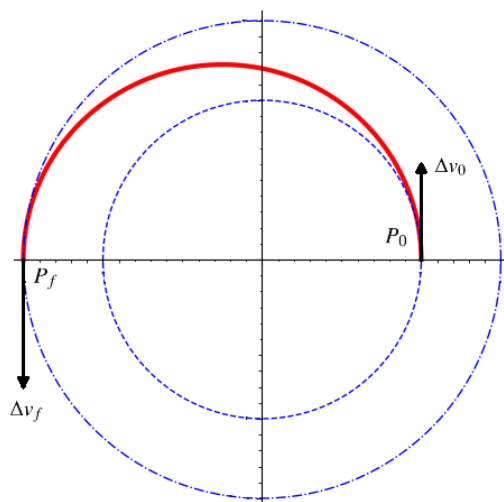


Figura A.1: Órbita de transferencia de Hohmann entre dos órbitas circulares.

Para comprender mejor esta transferencia nos basaremos en dos propiedades básicas del movimiento kepleriano que pueden verse en [1, Cap. 8, §8.3, Tabla. (8.1)].

- En cualquier punto de una órbita circular de radio r el vector velocidad es ortogonal al vector de posición, y su magnitud es igual a

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}}.$$

- En una órbita elíptica los únicos puntos en los que el vector velocidad es ortogonal al vector de posición son el pericentro y el apocentro (puntos de mínima y máxima distancia entre ambos

cuerpos, respectivamente). En estos puntos las velocidades tienen, respectivamente, el valor

$$v_p = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \quad v_a = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.$$

Como consecuencia de estas propiedades si damos a un cuerpo en órbita circular un impulso tangencial, es decir, modificamos la magnitud del vector velocidad pero no su dirección, entraremos necesariamente en una órbita elíptica y además el punto donde se efectúa la maniobra será el pericentro de la nueva órbita si aumentamos la magnitud de la velocidad (y el apocentro si la disminuimos).

La primera *maniobra*, o impulso, se realizará en el punto P_0 de la órbita interior. Efectuaremos un primer impulso tangencial (como el indicado en el párrafo anterior), de magnitud $\Delta v = v_e^p - v_0$, diferencia entre las velocidades en el pericentro de la órbita elíptica y en la órbita circular interior de radio r_0 que aumente su velocidad de manera que el orbitador quedará insertado en un órbita elíptica de transferencia, y el punto P_0 será el pericentro de dicha órbita.

Para poder terminar la transferencia debemos lograr que la órbita de transferencia tenga su apocentro en un punto de la órbita circular exterior de manera que un nuevo impulso tangencial que aumente su velocidad en una cantidad $\Delta v = v_f - v_e^a$, diferencia entre las velocidades en la órbita circular exterior y la velocidad en el apocentro de la órbita elíptica, determine la magnitud del segundo impulso.

Para que una órbita elíptica conecte de esta forma dos órbitas circulares su distancia al pericentro debe coincidir con el radio de la órbita interior, mientras que su distancia al apocentro debe coincidir con el radio de la exterior,

$$r_0 = a(1 - e), \quad r_f = a(1 + e). \quad (\text{A.1})$$

Así pues, obtendremos el semieje a , la excentricidad e y el semilado recto p de la órbita de transferencia,

$$a = \frac{r_0 + r_f}{2}, \quad e = \frac{r_f - r_0}{r_f + r_0}, \quad p = a(1 - e^2) = \frac{2r_0 r_f}{r_0 + r_f}, \quad (\text{A.2})$$

que expresados en función de la razón $k = r_f/r_0$ entre los radios de las órbitas circulares nos da

$$a = \frac{1+k}{2} r_0, \quad e = \frac{k-1}{k+1}, \quad p = \frac{2k}{1+k} r_0. \quad (\text{A.3})$$

El primer impulso tiene un coste, o Δv , igual a la diferencia entre la velocidad en el pericentro de la órbita elíptica de transferencia y la velocidad de la órbita circular inicial, que para esta elipse nos da un valor

$$\Delta v_0 = \sqrt{\frac{2\mu r_f}{r_0(r_0 + r_f)}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}.$$

El segundo impulso tiene un coste igual a la diferencia entre la velocidad de la órbita circular final y la velocidad en el apocentro de la órbita de transferencia, y en este caso es

$$\Delta v_f = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} - \sqrt{\frac{2\mu r_0}{r_0(r_0 + r_f)}}.$$

El coste final de la maniobra será la suma $\Delta v_0 + \Delta v_f$.

En una transferencia, tan importante como el coste de la misma es el tiempo que tarda en conectar la órbita inicial con la órbita final. En este caso basta tener en cuenta que el tiempo de la transferencia será la mitad del periodo orbital [1, Cap. 8, §8.4, Ec. (8.12)] de la órbita elíptica de transferencia que, en este caso, puede ponerse como

$$\Delta t = \frac{P}{2} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = \pi \sqrt{\frac{(r_0 + r_f)^3}{8\mu}} = \pi \sqrt{r_0^3} \sqrt{\frac{(1+k)^3}{8\mu}}. \quad (\text{A.4})$$