



Universidad
Zaragoza

Trabajo de fin de grado

Tiempo de vuelo de fotones más allá del marco de la
relatividad especial

Autor

Juan Mairal Ascaso

Directores

José Manuel Carmona Martínez & José Javier Relancio Martínez

Departamento de Física Teórica. Facultad de Ciencias.
2019

Índice

1. Introducción	2
1.1. Posibles modificaciones a la relatividad especial y su fenomenología	4
1.1.1. Violación de invariancia Lorentz	4
1.1.2. Relatividad especial deformada	5
1.2. Breve paréntesis de cosmología	7
1.2.1. La métrica	7
1.2.2. Ecuaciones del movimiento a partir de la acción	8
1.2.3. El <i>redshift</i>	9
2. Tiempos de vuelo	10
2.1. El modelo en relatividad especial	10
2.2. Añadiendo la expansión del universo	11
2.3. Violación de invariancia Lorentz	13
2.3.1. Velocidad del fotón	13
2.3.2. Cálculo del tiempo de vuelo en LIV	16
2.4. Relatividad Especial Deformada	17
2.4.1. Velocidad del fotón sin expansión	17
2.4.2. Añadiendo la expansión del universo a un modelo DSR	19
3. Conclusiones	22

En el presente trabajo de fin de grado se pretende estudiar dos modificaciones a la relatividad especial propuestas en la literatura como posibles caminos hacia una teoría de la gravedad cuántica. Se presentarán estas dos vías y sus principales características y consecuencias: la VIOLACIÓN DE INVARIANCIA LORENTZ (LIV) y la RELATIVIDAD ESPECIAL DEFORMADA (DSR) cuyos efectos solo tendrían importancia a una escala muy alta de energías. Fenomenológicamente, se cree que la única consecuencia observable compartida por ambos contextos es la diferencia en los tiempos de vuelo de fotones de distinta energía emitidos a la vez por la misma fuente. Por todo ello el objetivo final es comparar la posible fenomenología en estos escenarios para un universo en expansión.

1. Introducción

El problema, independientemente del caso (LIV o DSR), se puede dividir en dos partes bien diferenciadas:

- El cálculo de la velocidad de la partícula.
- El cálculo del tiempo de vuelo de la partícula.

En trabajos anteriores [1] se han obtenido resultados para tiempos de vuelo para LIV mediante cálculos que no son válidos en el caso de DSR, ya que es necesario introducir un nuevo espacio-tiempo, como se explicará más adelante. Se utilizará por tanto un método nuevo para hallar los tiempos de vuelo, comparándolo con los obtenidos anteriormente en LIV, asegurando así la validez para los nuevos cálculos. Finalmente, se aplicará a DSR.

Una vez planteado el objetivo principal de este trabajo, vale la pena motivarlo. ¿Por qué la búsqueda de una teoría de gravedad cuántica requiere de modificar la relatividad especial? Para entenderlo, recapitulemos:

A principios del siglo XX surgieron las dos teorías que conformarían los principales pilares de la física del siglo XX, la teoría de la relatividad general y la física cuántica, que tuvo que ser desarrollada durante medio siglo más hasta culminar en la teoría cuántica de campos. No obstante, aunque ambas por separado funcionan de manera excelente, prediciendo con gran exactitud resultados experimentales, resultan incompatibles incluso epistemológicamente.

Las teorías cuánticas de campos son capaces de explicar tres de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza: la electromagnética, la fuerte y la débil. Están basadas en el principio de cuantización de la energía introducido por Plank en el año 1900 como mera herramienta matemática para resolver el problema de la radiación de cuerpo negro. Así nació *el cuanto*, la unidad mínima de energía dada por la constante de Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s. Pero si la energía debe discretizarse en cuantos múltiples de un valor de energía múltiplo de la constante de Planck ($E = h\omega$), también el espacio se considera discreto a distancias del orden de la longitud de Planck $L_p = \sqrt{\frac{hG}{c^3}}$, construida a partir de constantes fundamentales de las teorías cuántica y de relatividad general. Es en este

orden en el que se considera que la idea del espacio continuo se rompe y las teorías de gravedad cuántica tendrían validez.

Paralelamente, en 1905, Albert Einstein formuló una teoría, la Relatividad Especial, que también resultaba revolucionaria por las implicaciones que tenía sobre conceptos bien asentados en la ciencia occidental como son el espacio y el tiempo. Según Einstein, la velocidad de la luz $c = 3 \cdot 10^8$ m/s es una constante universal para todo observador inercial, independientemente de sus velocidades relativas. Además, estos observadores también deben estar de acuerdo en la veracidad de las leyes físicas. Como consecuencia, la noción de simultaneidad resulta depender del movimiento relativo entre observadores y por tanto, también las medidas de distancias o intervalos temporales. La relatividad especial y la mecánica cuántica serían utilizadas por físicos como Dirac para desarrollar las teorías cuánticas de campos, muy exitosas hoy en día a la hora de explicar la física de partículas. Los experimentos llevados a cabo en aceleradores han probado su validez reproduciendo los resultados obtenidos teóricamente.

No obstante, existe una cuarta fuerza fundamental que no es posible explicar mediante una teoría cuántica de campos: la gravedad. Es la relatividad general, introducida por Einstein en 1915, la que explica esta interacción mediante la curvatura del espacio-tiempo.

Es lógico, por tanto, que se trate de encontrar una teoría unificada de las cuatro interacciones, una gravedad cuántica, y esta tarea ha demostrado ser extremadamente complicada. Como esta teoría debe tener validez para distancias del orden de la longitud de Planck, la idea del espacio discreto a esa escala que introducen las teorías cuánticas y la idea de un espacio continuo de la relatividad especial son incompatibles. Además, la discretización estaría basada en un valor L_p que debería ser invariante bajo transformaciones de Poincaré, pero en relatividad especial tal cosa no ocurre y L_p variaría entre observadores inerciales.

Como consecuencia, se propone que una teoría de gravitación cuántica modifique las simetrías bajo transformaciones de Poincaré para solventar estos problemas. Así pues, la teoría que se sustenta sobre estas invariancias, la relatividad especial, debe ser modificada.

Llegados a esta conclusión, cabe preguntarse cómo debe modificarse la relatividad especial, una teoría muy exitosa, cuya validez ha sido probada una y otra vez en los últimos 110 años. De este modo, cualquier modificación debe, a bajas energías o altas distancias, reducirse a la teoría de Einstein que conocemos.

Los dos caminos propuestos más aceptados son la VIOLACIÓN DE INVARIANCIA LORENTZ [2, 3], que elimina el postulado de relatividad de la teoría a energías suficientemente altas, y la RELATIVIDAD ESPECIAL DEFORMADA o RELATIVIDAD DOBLEMENTE ESPECIAL [4, 5], que no solo mantiene el postulado de relatividad, sino que añade un nuevo invariante además de c : una longitud mínima.

Lo que está claro es que, sea cual sea el camino adecuado a seguir, incluso si no es ninguno de los propuestos, para poder avanzar es fundamental investigar qué fenomenología producirían estas teorías y si existe alguna posibilidad de observar tales fenómenos y medirlos. De entrada, la enorme escala de energías a la que esta teoría funciona podría imposibilitar la observación de cualquier tipo de fenomenología. Veremos que no tiene por qué ser así.

1.1. Posibles modificaciones a la relatividad especial y su fenomenología

En el apartado anterior se ha introducido la necesidad de modificar la relatividad especial como primer paso en el camino a una teoría de la gravedad cuántica. Se han presentado también las dos opciones que se consideran en la literatura y se ha planteado la posibilidad de investigar si existiría una fenomenología observable.

1.1.1. Violación de invariancia Lorentz

Una de los posibles caminos que se pueden seguir a la hora de modificar la relatividad especial es despojarla de su postulado más fundamental, el de la invariancia de las leyes físicas ante las transformaciones de Lorentz, ya que para mantenerla serían necesarias contracciones en el espacio que podrían hacer una distancia, vista desde un observador inercial moviéndose a gran velocidad, arbitrariamente pequeña, lo que contradice la idea de la discretización a la longitud de Planck. Es cierto además que varias de las teorías más populares de gravedad cuántica, como la teoría de cuerdas o la gravedad cuántica de bucles, incluyen argumentos que conducen a violaciones de la invariancia Lorentz [6, 7]. Por tanto, existiría un sistema de referencia privilegiado.

Para eliminar la invariancia se introduce una nueva relación de dispersión para las partículas relativistas $\hat{C}(p, \Lambda)$ que no es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Es decir, que dada una transformación $p'_\mu = A'_\mu{}^\nu p_\nu$, esta nueva relación de dispersión cumple $\hat{C}(p', \Lambda) \neq \hat{C}(p, \Lambda)$. El parámetro Λ es una energía que controla que los efectos de la modificación solo sean relevantes para energías muy altas y cuyo valor se estima del orden de la energía de Planck $E_P = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \approx 10^{19}$ GeV.

Recordemos que en relatividad especial la relación de dispersión de una partícula con masa m cumple $C(p) = p_\mu \eta^{\mu\nu} p_\nu = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$, resultado que se debe recuperar a bajas energías en esta nueva teoría.

Se sugiere la siguiente relación de dispersión, obtenida añadiendo un desarrollo en serie de potencias del momento a la relación de dispersión clásica:

$$\hat{C}(p, \Lambda) = p_\mu \eta^{\mu\nu} p_\nu + s \frac{(p_0)^3}{\Lambda} + s' \frac{(p_0)}{\Lambda} \mathbf{p}^2 + \dots \quad (1)$$

donde los s_n son parámetros adimensionales que pueden tomar valores ± 1 , según los fotones de muy alta energía sean más rápidos o más lentos que los de baja energía.

Esta es la característica básica de la violación de invariancia Lorentz: una relación de dispersión modificada.

Fenomenología de LIV

Dado que su aplicación es a altas energías del orden de E_P , observar sus efectos requeriría o bien experimentos en aceleradores con esa energía, cosa hoy día impensable; o bien observaciones astronómicas. No obstante, no se ha encontrado radiación tan energética. Así pues, para poder observar los efectos de estas modificaciones sería necesario que se acumulasen hasta ser lo suficientemente notables como para ser detectados. Es decir, son necesarios mecanismos de amplificación. En general, la fenomenología de la violación de invariancia Lorentz se divide en tres categorías:

- Los umbrales energéticos de ciertas reacciones varían con respecto a los valores conocidos en relatividad especial, llegando incluso a cambiar si estas reacciones están permitidas o no. Esto es posible ya que al no existir un principio de relatividad, el criterio físico de que la reacción se produzca o no cambia de un observador a otro.
- Birrefringencia en el vacío de los fotones, es decir, que la energía dependa de la polarización.
- Diferencias en los tiempos de vuelo de fotones emitidos de una misma fuente muy lejana con energías distintas. Al tener que recorrer unas distancias tan enormes, una pequeña dependencia de la velocidad con la energía daría diferencias de tiempos de vuelos que se podrían medir.

1.1.2. Relatividad especial deformada

La relatividad especial deformada, también denominada la relatividad doblemente especial, está basada en la adición de una nueva constante universal independiente del observador en forma de una longitud invariante (de ahí el “doblemente”), manteniendo el postulado de invariancia ante las leyes físicas. Se ha sugerido que la longitud de Planck podría asumir este papel.

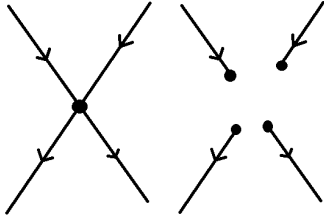
Para modificar la relatividad especial de esta forma es necesario introducir dos cambios:

- Una relación de dispersión modificada $\hat{C}(p)$, que en este caso sí sería invariante Lorentz.
- Una nueva ley de composición de momentos compatible con la implementación no lineal de las transformaciones de Lorentz en el espacio de momentos.

Si bien la relación de dispersión modificada ya ha sido introducida en la violación de invariancia Lorentz, como ahora sí se mantiene el postulado de relatividad, ya que una ley aditiva de momentos no es invariante bajo transformaciones de Lorentz no lineales, debe cumplirse $\hat{C}(p, \Lambda) = \hat{C}(p', \Lambda)$, donde p' es el transformado de p a través de unas transformaciones de Lorentz no lineales, que dependen de la escala de alta energía Λ . Esto implica que se debe cambiar la ley de composición de momentos, lo que tiene consecuencias importantes. El momento total del sistema pasa de ser la

suma $\sum p$ a ser otra ley de composición distinta $\oplus p$.

El teorema de Noether muestra la íntima relación entre las simetrías y las leyes de conservación en los sistemas físicos, de modo que si la manera de componer los momentos cambia, también lo harán las traslaciones, que son las transformaciones generadas por el momento lineal. Una traslación en relatividad especial deformada ya no es un desplazamiento por una constante en las coordenadas espaciales, sino un desplazamiento por una función de momento. Este cambio tiene consecuencias devastadoras, alterando la estructura del espacio-tiempo para hacerla mucho más complicada. Al depender las traslaciones del momento, dos *worldlines* solo se cruzan para un observador cuyo origen está situado en el punto de cruce.



Para observadores desplazados el punto de la interacción no está bien definido. En la figura se observa el cruce de worldlines para un observador en el lugar donde se produce la interacción (izquierda) y para otro observador trasladado (derecha). Esta propiedad se conoce como pérdida de la localidad absoluta. Si se desea mantener una definición de interacción que sea invariante es necesario añadir una nueva cláusula: el cruce de worldlines será interacción cuando el origen del observador se encuentre en el punto de cruce. Esta propiedad se conoce como localidad relativa.[8]

La pérdida de la localidad absoluta y su sustitución por una localidad relativa provoca que las interacciones no definan puntos del espacio-tiempo canónico, por lo que es necesario introducir un nuevo espacio-tiempo \tilde{x}

$$\tilde{x}^\mu = x^\nu \varphi_\nu^\mu \left(\frac{p}{\Lambda} \right). \quad (2)$$

Este es el espacio-tiempo físico que se utiliza en DSR, a diferencia del espacio-tiempo canónico utilizado en LIV o en relatividad especial sin modificar. Es una combinación de las coordenadas canónicas con coeficientes que dependen del momento y, por supuesto, de la escala energética Λ que limita los efectos de la modificación a bajas energías para recuperar los resultados de relatividad especial. La elección de estos coeficientes φ está relacionada con la elección de la relación de dispersión modificada de forma que no se pueden tomar a la ligera. En esta cuestión en particular inciden trabajos como [9], ya que en realidad, la mayor dificultad a la hora de plantear el problema de los tiempos de vuelo en DSR es el gran abanico de elecciones que se pueden hacer a la hora de escoger el espacio-tiempo y la relación de dispersión.

Volveremos a este problema una vez abordemos el cálculo de tiempos de vuelo en DSR. Por ahora, basta con decir que combinar la expansión del universo y el nuevo espacio-tiempo no es en absoluto sencillo y habrá que hacerlo con cuidado.

La conclusión de este apartado es que modificar la relatividad especial introduce nuevas posibili-

dades para elegir coordenadas que se encuentran íntimamente relacionadas entre ellas. Es necesario pensar qué coordenadas serán las físicas que podríamos medir y los argumentos para ello no son del todo firmes. Aun así, parece que \tilde{x}^μ son las coordenadas espacio temporales físicas. Queda entonces por elegir la relación de dispersión modificada \hat{C} y los coeficientes φ_ν^μ .

Fenomenología de DSR

La fenomenología de la relatividad especial deformada es mucho más limitada que en el caso de violación de invariancia Lorentz. Para empezar, la existencia de un principio de relatividad impide que distintos observadores estén en desacuerdo sobre si una reacción puede producirse o no, por lo que los cambios en el umbral de las reacciones quedan descartados. La birrefringencia tampoco se da necesariamente en modelos de DSR, por lo que al final queda como única posibilidad la diferencia de tiempos de vuelo entre fotones de distinta energía.

Es por ello que muchos trabajos se han centrado últimamente en tratar de predecir si distintos modelos de DSR producirían diferencias en los tiempos de vuelo, sin encontrar consenso. En particular, trabajos como [6] sugieren que para modelos DSR sin expansión y utilizando espacio-tiempos no conmutativos, no hay dependencia con la energía en la velocidad de los fotones, por lo que no hay diferencia en los tiempos de vuelo.

Como veremos más adelante, la inclusión de la expansión del universo en la relatividad general tampoco predicen diferencias en los tiempos de vuelo. Por tanto, resultaría extraño que dos modelos que por separado no producen este efecto, sí lo produzcan al juntarse, y sin embargo esto parece ser lo que ocurre. Uno de los retos que quedan por resolver es encontrar un caso en el que la velocidad del fotón en DSR con expansión sea independiente de la energía.

1.2. Breve paréntesis de cosmología

En la sección anterior se han introducido la violación de invariancia Lorentz y la relatividad espacial deformada como modificaciones a la relatividad especial clásica a muy altas energías. Antes de proceder al cálculo de las velocidades y tiempos de vuelo de las partículas, teniendo en cuenta que se incluirá la expansión del universo en el modelo, es necesario introducir algunos conceptos de cosmología, que si bien son sencillos, es importante tener claros para que los cálculos siguientes se puedan realizar con agilidad.

Los contenidos de esta sección son estándares en cualquier libro de cosmología. Aquí se ha utilizado [10] como referencia.

1.2.1. La métrica

Será necesario, en primer lugar, especificar qué métrica se utiliza en la resolución del problema. Usaremos la métrica de Friedman-Robertson-Walker (FRW) plana

$$ds^2 = dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu = dt^2 - a^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (3)$$

En ocasiones será ventajoso hacer un cambio de coordenadas y utilizar el tiempo conforme η , definido como el tiempo que le costaría a un fotón viajar desde nuestra posición hasta el horizonte cosmológico sin expansión del universo y cuya expresión es $d\eta = \frac{dt}{a(t)}$. Así, la métrica queda

$$ds^2 = dx^\mu g_{\mu\nu} dx^\nu = a^2(\eta)d\eta^2 - a^2(\eta)(dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (4)$$

utilizando el tiempo conforme, r , una coordenada radial comóvil y el ángulo sólido Ω . No le prestaremos más atención a la parte angular. Finalmente, $a(\eta)$ es el conocido factor de escala del universo, muy utilizado en cosmología. Su valor aumenta con el paso del tiempo y se puede parametrizar en función del tiempo físico t , del redshift z o del tiempo conforme η .

De la expresión anterior se puede leer el tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a^2} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

viendo así lo ventajoso que resulta elegir $x^0 = \eta$. Es cierto que lo que se desea medir es el tiempo de vuelo, un tiempo físico. Pero el tiempo conforme se utiliza únicamente para obtener la trayectoria, a la hora de obtener el tiempo de vuelo, es posible simplemente realizar un cambio de variable. A lo largo de este trabajo será importante elegir bien las coordenadas que se utilizan, teniendo claro en todo momento con cuál se mide el tiempo de vuelo.

Recordemos además que para pasar de un espacio a otro, la métrica se cambia utilizando las tétradas $e_\alpha^\mu(x)$ definidas como $g^{\mu\nu(x)} = e_\alpha^\mu(x)\eta^{\alpha\beta}e_\beta^\nu(x)$.

1.2.2. Ecuaciones del movimiento a partir de la acción

Si bien la métrica nos da el marco espacio-temporal, todavía necesitamos de dónde obtener las ecuaciones del movimiento del fotón. Esto se plantea como un problema de mecánica analítica consistente en encontrar la curva, parametrizada por τ , que minimice la acción de una partícula libre en relatividad especial²

$$S = \int [\dot{x}^\mu p_\mu - \lambda(\tau)C(p)]d\tau, \quad (6)$$

donde x y p son variables posición y momento canónicas conjugadas, $C(p)$ es la relación de dispersión del fotón y λ es un parámetro introducido para hacer la acción invariante ante reparametrizaciones de τ . A partir de esta acción se obtienen las ecuaciones del movimiento $x^\mu(\tau)$ y $p_\mu(\tau)$, utilizando el principio varacional, que tiene como consecuencia las ecuaciones de Euler-Lagrange.

No obstante, al introducir la expansión del universo, la variable momento en la relación de dispersión cambia, de forma que se pasa de $C(p)$ a $C(\bar{p})$. El cambio viene dado simplemente por cómo transforma un vector covariante, usando la tétrada e_β^α mencionada anteriormente, por lo que

²En las primeras páginas de [11] hay una explicación más detallada del origen de esta acción.

$\bar{p}_\alpha = e_\alpha^\mu(x)p_\mu$. La expresión de la tétrada puede ser entonces obtenida porque sabemos cómo cambia el tensor métrico de base, que es precisamente lo que hemos hecho al pasar de una métrica de Minkowski ($\eta^{\mu\nu} = \text{diag}[1, -1]$) convencional a una FRW plana. Así

$$g^{\mu\nu}(x) = e_\alpha^\mu(x)\eta^{\alpha\beta}e_\beta^\nu(x) = \frac{1}{a^2}\eta^{\mu\nu} \implies e_\alpha^\mu(x^0) = \frac{1}{a(x^0)}\delta_\alpha^\mu, \quad (7)$$

donde vemos que la tétrada depende solo de la coordenada temporal y no de las otras coordenadas del espacio-tiempo. De esta forma, sabemos cómo cambiar la coordenada momento para incluir la expansión del universo: $\bar{p}_\mu = \frac{1}{a(x)}p_\mu$.

1.2.3. El *redshift*

Otro concepto de cosmología que merece la pena explicar un poco es el *redshift*, en español *corrimiento al rojo*, ya que es lo que se mide para conocer la distancia a la que se encuentran las fuentes astronómicas lejanas. Se define como $z = \frac{\lambda_{det}}{\lambda_{emit}} - 1$, es decir, da idea de la diferencia entre la longitud de onda de la radiación que se detecta respecto a la que se ha emitido en la fuente. A este fenómeno astronómico se le han dado varias explicaciones, la más básica de ellas siendo el efecto Döppler. No obstante, en el contexto de un universo en expansión se entiende que el cambio en la longitud de onda, que es una distancia física y no cómovil, es precisamente debido a la expansión. Así, será proporcional al factor de escala $\lambda(t) = \frac{a(t)\lambda_0}{a_0}$ y esta expresión se puede reescribir utilizando el *redshift* como $z = \frac{a_{det}}{a_{emit}} - 1$ por lo que en general

$$a(z) = \frac{a_0}{1+z}. \quad (8)$$

Como la coordenada temporal que utilizaremos es el tiempo conforme, sería conveniente hallar su relación con el *redshift*. Para ello, primero obtenemos la relación entre el tiempo físico t y el *redshift* tomando $a'(t) = \frac{da(t)}{dt}$ y definiendo $H(t) = \frac{a'(t)}{a(t)}$ o bien $H(z) = \frac{a'(z)}{a(z)}$. Así

$$dt = -\frac{dz}{(z+1)H(z)} \quad (9)$$

y sustituyendo $d\eta = \frac{dt}{a(t)}$

$$a(z)d\eta = -\frac{dz}{(z+1)H(z)} \longrightarrow d\eta = -\frac{dz}{a_0H(z)}. \quad (10)$$

Esta relación será muy útil más adelante.

Finalmente, terminamos esta sección con un comentario sobre la *coordenada comóvil*. Se dice que r es comóvil si permanece constante con la expansión del universo, mientras que la coordenada R se dice física si aumenta con la expansión del universo. Así, están relacionadas como $R(t) = a(t)r$.

2. Tiempos de vuelo

El objetivo de esta sección es la obtención del tiempo de vuelo de un fotón de muy alta energía en los dos escenarios distintos de modificación de la relatividad especial que se han mostrado en la introducción.

Se define el tiempo de vuelo como el tiempo físico, es decir, el que mediría un reloj, que tarda el fotón en ser detectado desde que es emitido por una fuente. Este problema consta de dos partes bien diferenciadas y que merece la pena considerar por separado:

- Obtener la trayectoria del fotón $x^\mu(\tau)$ y su velocidad $v^j = \frac{dx^j}{dx^0}$.
- Calcular, a partir de la trayectoria, el tiempo de vuelo.

Para poder explicarlo todo de forma clara y ordenada, primero se va a presentar el modelo más básico, al que se le irán añadiendo los “ingredientes” de la modificación y la expansión del universo poco a poco.

2.1. El modelo en relatividad especial

El modelo que se va a utilizar está basado en la acción presentada en la introducción de cosmología, que es la de una partícula libre de masa nula,

$$S = \int [\dot{x}^\mu p_\mu - \lambda(\tau)C(p)]d\tau, \quad (11)$$

la trayectoria del fotón se puede obtener, mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\dot{x}^\mu = \lambda(\tau) \frac{\partial C(p)}{\partial p_\mu}. \quad (12)$$

$$\dot{p}_\mu = 0. \quad (13)$$

La segunda ecuación indica que p_μ no varía a lo largo de la trayectoria, es constante en τ . Así pues, $C(p)$ y $\frac{\partial C}{\partial p_\mu}$ también lo son.

Conviene ahora estudiar el parámetro $\lambda(\tau)$, pues es un grado de libertad del sistema. No obstante, depende de τ , el parámetro de la curva, y de hecho, elegir τ determina λ . Por ejemplo, si elegimos τ como la coordenada canónica temporal $\tau = x^0$, inmediatamente de la ecuación (12) en $\mu = 0$ se obtiene

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{dx^0}{dx^0} = \lambda(\tau) \frac{\partial C(p)}{\partial p_0} = 1, \quad (14)$$

y por tanto

$$\lambda = \frac{1}{\frac{\partial C}{\partial p_0}}. \quad (15)$$

Para las coordenadas espaciales x^j , la ecuación queda

$$\frac{dx^j}{dx^0} = \frac{\frac{\partial C}{\partial p_j}}{\frac{\partial C}{\partial p_0}}. \quad (16)$$

En el caso de que x^0 sea el tiempo físico, la ecuación (16) nos da la velocidad que buscamos para poder obtener el tiempo de vuelo.

Por otro lado, el camino se puede tomar a la inversa. Eligiendo $\lambda(t) = \text{cte} = 1$, entonces \dot{x}^μ es constante a lo largo de la curva. La posición espacio-temporal de una partícula libre en este modelo se puede expresar como un movimiento rectilíneo uniforme

$$x^\mu(\tau) = \dot{x}^\mu \tau + x^\mu(0) = \frac{\partial C(p)}{\partial p_\mu} \tau + x^\mu(0). \quad (17)$$

Tomando $x^\mu(0) = 0$ por comodidad, la velocidad sería

$$\frac{dx^j}{dx^0} = \frac{d\left(\frac{\partial C}{\partial p_j} \tau\right)}{d\left(\frac{\partial C}{\partial p_0} \tau\right)} = \frac{\frac{\partial C}{\partial p_j}}{\frac{\partial C}{\partial p_0}}. \quad (18)$$

El mismo resultado se obtiene independientemente de la elección de λ , por lo que en los casos más complicados contaremos con esta herramienta. En este modelo, el más sencillo, usando la conocida relación de dispersión de los fotones $C = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = 0$, se ve que existen dos posibles elecciones de signo, ya que $p_0^2 = \mathbf{p}^2 \rightarrow p_0 = \pm \mathbf{p}$. Si se elige el signo $-$, entonces la velocidad

$$v = \frac{\frac{\partial C}{\partial p_1}}{\frac{\partial C}{\partial p_0}} = \frac{-p_1}{p_0} = 1, \quad (19)$$

que es el resultado esperado en relatividad especial.

2.2. Añadiendo la expansión del universo

Para tener en cuenta la expansión del universo se introducen dos cambios en el modelo. En primer lugar, la métrica pasa de ser la de Minkowski ($\eta^{\mu\nu}$) a ser la de Friedmann-Robertson-Walker ($g^{\mu\nu}$) tal y como se ha explicado en el apartado de cosmología. Además, se introduce una nueva coordenada para el momento \bar{p}_μ que está relacionada con el momento canónico p_μ mediante la tetrada tal y como se ha mostrado en la ecuación (7). Así, la acción queda

$$\bar{S} = \int [\dot{x}^\mu p_\mu - \lambda(\tau) C(\bar{p})] d\tau \quad (20)$$

y las ecuaciones del movimiento son

$$\dot{x}^\mu = \lambda(\tau) \frac{\partial C(\bar{p})}{\partial \bar{p}_\alpha} e_\alpha^\mu(x) \quad (21)$$

$$\dot{p}_\mu = -\lambda(\tau) \frac{\partial C(\bar{p})}{\partial \bar{p}_\alpha} \frac{\partial e_\beta^\alpha(x)}{\partial x_\mu} p_\beta, \quad (22)$$

mostrando que al introducir la expansión del universo el momento del fotón deja de ser constante, por lo menos su componente $\mu = 0$. En particular, estas ecuaciones se pueden escribir diferenciando la coordenada temporal x^0 y la coordenada espacial³ x^1

$$\begin{aligned}\dot{x}^0 &= \lambda(\tau) \frac{1}{a(x^0)} \frac{\partial C(\bar{p})}{\partial \bar{p}_0}, & \dot{x}^1 &= \lambda(\tau) \frac{1}{a(x^0)} \frac{\partial C(\bar{p})}{\partial \bar{p}_1} \\ \dot{p}_0 &= \lambda(\tau) \frac{1}{a^2(x^0)} \frac{da(x^0)}{dx^0} \frac{\partial C(\bar{p})}{\partial \bar{p}_\alpha} p_\alpha, & \dot{p}_1 &= 0.\end{aligned}$$

Ahora, la opción de poder elegir una λ conveniente supone una gran ventaja para simplificar las ecuaciones. Por ejemplo, se puede elegir tal que $\dot{x}^0 = 1$, es decir

$$\lambda(\tau = x^0) = a(x^0) \frac{1}{\frac{\partial C(\bar{p})}{\partial \bar{p}_0}}, \quad (23)$$

y entonces, las ecuaciones quedan mucho más simplificadas

$$\dot{x}^0 = 1, \quad \dot{x}^1 = \frac{\frac{\partial C(\bar{p})}{\partial \bar{p}_1}}{\frac{\partial C(\bar{p})}{\partial \bar{p}_0}} \quad (24)$$

$$\dot{p}_0 = \frac{1}{a(x^0)} \frac{da}{dx^0} \frac{\frac{\partial C(\bar{p})}{\partial \bar{p}_\alpha} p_\alpha}{\frac{\partial C(\bar{p})}{\partial \bar{p}_0}}, \quad \dot{p}_1 = 0. \quad (25)$$

Finalmente, imponiendo de nuevo $p_0 = -p_1$, la expresión de la variación de la energía del fotón se simplifica a

$$\dot{x}^1 = 1; \quad \dot{p}_0 = \frac{1}{a^2} \frac{da}{dx^0} \frac{p_0^2 - p_1^2}{p_0^2} = 0. \quad (26)$$

Añadir la expansión del universo al modelo no altera la velocidad a la que se propagan los fotones. ¿Qué hay de su energía? Observando la ecuación anterior, como $\dot{p}_0 = 0$, parece que su energía tampoco varía. No obstante, p_μ no es la coordenada física en el espacio de fases, \bar{p}_μ sí lo es y por eso fue introducida. Para ver cómo evoluciona, tomamos la derivada con respecto a τ en su definición. Como $\dot{p}_0 = 0$, uno de los términos se desvanece y queda

$$\dot{\bar{p}}_0 = -\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} \bar{p}_0. \quad (27)$$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene la expresión de la coordenada \bar{p} , viendo que es idéntica a la variación de la energía de un fotón debida a la expansión del universo, lo que se conoce como *redshift*

$$\bar{p}_0(\tau) = \frac{1}{a(\tau)} p_0(0). \quad (28)$$

Este ejemplo muestra la necesidad de, a pesar de estar trabajando con coordenadas distintas, ser consciente siempre de cuál de ellas es la que se corresponde con la magnitud física medible. La

³Reducimos el problema a 1+1 dimensiones, tomando la dirección de propagación del fotón como la única dimensión espacial.

variable p_μ es la variable momento conjugada de r , que es la coordenada comóvil. La coordenada espacio-tiempo física difiere de la comóvil en el factor de escala, lo cual sugiere identificar la variable \bar{p}_μ con la coordenada de momento físico.

Volviendo a lo que nos incumbe, la obtención de la velocidad es inmediata a partir de la ecuación (24) utilizando la relación de dispersión $C(\bar{p}) = \bar{p}_0^2 - \bar{p}_1^2 = 0$

$$v = \dot{x}^1 = \frac{-2\bar{p}_1}{2\bar{p}_0} = 1. \quad (29)$$

Vemos que es constante, por lo que es imposible que haya diferencias en los tiempos de vuelo entre fotones de distinta energía.

En los dos últimos apartados se ha trabajado con modelos muy sencillos y cuya fenomenología es bien conocida, lo cual ha servido para comprobar su validez y para extraer lecciones importantes. Ahora sabemos utilizar la libertad de elección de λ para simplificar considerablemente los cálculos, y cómo esto está ligado a elegir un parámetro de la curva τ . Además, hemos visto cómo trabajar con distintas coordenadas para una misma magnitud, y cuán importante es saber a qué se corresponde cada una. Con estas lecciones en mente, podemos añadir la última pieza del modelo de violación de invariancia Lorentz.

2.3. Violación de invariancia Lorentz

2.3.1. Velocidad del fotón

En este apartado se busca añadir el “ingrediente” final al modelo para obtener la velocidad de una partícula suponiendo una violación de invariancia Lorentz con expansión del universo. El resultado que se obtenga se podrá comparar con el presentado en [1] y así comprobar la validez del nuevo modelo que hemos desarrollado.

Como se ha explicado en la introducción, la violación de invariancia Lorentz introduce una relación de dispersión modificada mediante un desarrollo en serie de potencias en $1/\Lambda$. A partir de ahora tomaremos únicamente los términos de orden lineal y despreciaremos los superiores siempre que aparezcan. Como dimensionalmente Λ es una energía, se mantendrán los términos de orden cúbico en p . Además, en los términos de orden $(1/\Lambda)$ se puede reemplazar \mathbf{p}^2 por p_0^2 . El error introducido por esta aproximación es de orden $(1/\Lambda^2)$ y por tanto despreciable en la aproximación que estamos utilizando. Así, se puede escribir un único término

$$\hat{C}(p) = p_\mu \eta^{\mu\nu} p_\nu + s \frac{p_0^3}{\Lambda}, \quad (30)$$

donde s toma valores $s = \pm 1$ e indica sencillamente si los fotones de mayor energía son más rápidos o más lentos que los de menor energía. Esta va a ser la relación de dispersión utilizada en toda la sección de violación de invariancia Lorentz.

Ahora, teniendo en cuenta que para los fotones $\hat{C}(p) = m^2 = 0$, en la expresión anterior se puede despejar \mathbf{p}^2 en función de p_0

$$|\mathbf{p}| = \pm p_0 \sqrt{1 + s \frac{p_0}{\Lambda}}. \quad (31)$$

Se repite el proceso que hemos introducido en los apartados anteriores, presentando primero la acción para obtener de ella las ecuaciones de variación de las coordenadas.

$$S_0 = \int \{ \dot{x}^\mu p_\mu - \lambda(\tau) [\hat{C}(\bar{p})] \} d\tau, \quad (32)$$

y las ecuaciones de evolución de las coordenadas x^μ y p_μ se pueden obtener simplemente hallando los extremos

$$\dot{x}^\mu = \lambda(\tau) \frac{\partial \hat{C}(\bar{p})}{\partial p_\mu} = \lambda(\tau) \frac{\partial \hat{C}(\bar{p})}{\partial \bar{p}_\alpha} \frac{\partial \bar{p}_\alpha}{\partial p_\mu} = \lambda(\tau) \frac{\partial \hat{C}(\bar{p})}{\partial \bar{p}_\alpha} e_\alpha^\mu(x(\tau)). \quad (33)$$

$$\dot{p}_\mu = -\lambda(\tau) \frac{\partial \hat{C}(\bar{p})}{\partial x^\mu} = -\lambda(\tau) \frac{\partial \hat{C}(\bar{p})}{\partial \bar{p}_\alpha} \frac{\partial \bar{p}_\alpha}{\partial x^\mu} = -\lambda(\tau) \frac{\partial \hat{C}(\bar{p})}{\partial \bar{p}_\alpha} p_\nu \frac{\partial e_\alpha^\nu(x(\tau))}{\partial x^\mu}. \quad (34)$$

Eligiendo de nuevo $\tau = x^0$, se conoce el parámetro λ que se puede sustituir. Las tétradas $e_\nu^\mu(x^0)$ también son conocidas, así que sin más preámbulos se pueden obtener las ecuaciones de evolución de las coordenadas

$$\dot{x}^0 = 1, \quad \dot{x}^1 = \frac{\partial \hat{C}(\bar{p})}{\partial \bar{p}_1} \frac{\partial \bar{p}_1}{\partial \bar{p}_0} \quad (35)$$

$$\dot{p}_0 = \frac{da}{dx^0} \left[\bar{p}_\mu \frac{\partial \hat{C}(\bar{p})}{\partial \bar{p}_\mu} \right], \quad \dot{p}_j = 0 \quad (36)$$

$$\frac{d\bar{p}_0}{d\tau} = \frac{\bar{p}_j \frac{\partial \hat{C}(\bar{p})}{\partial \bar{p}_j}}{\frac{\partial \hat{C}(\bar{p})}{\partial \bar{p}_0}} \left[\frac{1}{a(\tau)} \frac{da}{d\tau} \right], \quad \frac{d\bar{p}_j}{d\tau} = -\bar{p}_j \left[\frac{1}{a(\tau)} \frac{da}{d\tau} \right]. \quad (37)$$

Para poder obtener la trayectoria $x^\mu(\tau)$ hay que resolver la ecuación diferencial (35). Teniendo en cuenta la relación de dispersión dada por (30) y realizando las derivadas parciales, la evolución de x^1 viene dada por

$$\dot{x}^1 = \frac{-2\bar{p}_1}{2\bar{p}_0 \left(1 + \frac{3s}{2} \frac{\bar{p}_0}{\Lambda} \right)} = \frac{\sqrt{1 + s \frac{\bar{p}_0}{\Lambda}}}{\left(1 + \frac{3s}{2} \frac{\bar{p}_0}{\Lambda} \right)} = \frac{\sqrt{1 + y}}{\left(1 + \frac{3}{2} y \right)} \approx 1 - y$$

$$\dot{x}^1 \approx 1 - s \frac{\bar{p}_0}{\Lambda}, \quad (38)$$

donde se han utilizado desarrollos en serie de potencias en la raíz del numerador y en el denominador, despreciando, como siempre, los términos de orden cuadrático o superior en $1/\Lambda$.

En teoría este resultado solo es un paso intermedio, pues buscamos la velocidad v de la partícula, dada por $\frac{dx^1}{dx^0}$. No obstante, la elección \dot{x}^0 implica que ahora $v = \dot{x}^1$, por lo que este resultado

ya es el que buscamos.

Cabe destacar que en el caso de la relatividad especial, esto es, si se toma $\Lambda \rightarrow \infty$, entonces $\dot{x}^1 = 1$, recuperando el conocido resultado $v = 1$ tal y como debe ser⁴. Se observa además que la ecuación está en función de \bar{p}_0 , es decir, que la velocidad del fotón depende de su energía, tal y como se había propuesto que debía ocurrir en la fenomenología de LIV.

Como consecuencia, ahora es necesario hallar la expresión de $\bar{p}_0(\tau)$ para poder sustituirla poder escribir la velocidad en función de magnitudes medibles. Volviendo entonces a la ecuación (37)

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}_0}{d\tau} &= \bar{p}_1 \dot{x}^1 \frac{1}{a(\tau)} \frac{da}{d\tau} = -\bar{p}_0 \sqrt{1 + s \frac{\bar{p}_0}{\Lambda}} \left(1 - s \frac{\bar{p}_0}{\Lambda}\right) \left(\frac{1}{a(\tau)} \frac{da}{d\tau}\right) \\ \frac{d\bar{p}_0}{d\tau} &= -\frac{1}{a(\tau)} \frac{da}{d\tau} \left(1 - \frac{s \bar{p}_0}{2 \Lambda}\right) \bar{p}_0, \end{aligned} \quad (39)$$

donde, de nuevo, se ha utilizado el desarrollo en serie de la raíz cuadrada despreciando los términos cuadráticos y superiores. Esta es una ecuación diferencial que se debe resolver para obtener $\bar{p}(\tau)$. No obstante, existe una manera de hacer la resolución mucho más fácil. Con el argumento de que Λ es un umbral energético muy elevado, se han tomado únicamente los terminos lineales en $1/\Lambda$. El resultado obtenido de esta ecuación diferencial se desea para sustituir en (38), donde \bar{p}_0 está dividido entre Λ . De esa manera, las partes de $\bar{p}(\tau)$ que contengan un término $1/\Lambda$, irán con $1/\Lambda^2$ en la evolución de x^1 y serán despreciadas. Para hacer la resolución más sencilla, es posible despreciarlas antes de realizar los cálculos, evitando así hacer desarrollos de partes que luego van a ser despreciadas de todas formas. Así, se aproxima

$$\frac{d\bar{p}_0}{d\tau} \approx -\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} \bar{p}_0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d\bar{p}_0}{\bar{p}_0} \approx -\frac{1}{a(\tau)} \frac{da}{d\tau} d\tau. \quad (40)$$

No obstante, para poder resolver esto sería necesario conocer la dependencia de a con τ . Es por esta razón por la que se introdujo en el apartado de cosmología la coordenada redshift, cuya relación con el factor de escala la da (8). Además, el redshift es una magnitud que se mide, por lo que al final desearemos tener nuestros resultados en función de él. Realizando este conveniente cambio, la ecuación diferencial (40) se puede reescribir

$$\frac{d\bar{p}_0}{\bar{p}_0} \approx \frac{dz}{(z+1)} \quad \longrightarrow \quad \int_{\bar{p}_0}^{\bar{p}_0^{(det)}} \frac{d\bar{p}'_0}{\bar{p}'_0} \approx \int_z^{z^{(det)}} \frac{dz'}{(z'+1)}, \quad (41)$$

utilizando la energía de detección del fotón $\bar{p}_0^{(det)} \equiv E_0$ y el redshift al momento de la detección $z^{(det)}$. Así pues, se obtiene $\bar{p}_0(z)$

$$\bar{p}_0(z) = \frac{z+1}{z^{(det)}+1} E_0. \quad (42)$$

⁴Es aquí donde entra en juego la elección del signo de p_1 . Si se hubiese elegido el signo +, entonces habría un cambio de signo global y la evolución de x^1 sería negativa, es decir, el cambio en la cordenada espacial con respecto a la coordenada tipo-tiempo que recorre la trayectoria (τ) tendría el signo opuesto al momento. No es incorrecto, tan solo es una elección.

De aquí, la obtención de la velocidad es inmediata a partir de \dot{x}^1 , dada por la ecuación (38)

$$v = \dot{x}^1 = 1 - s \frac{z+1}{z^{(det)}+1} \frac{E_0}{\Lambda}. \quad (43)$$

2.3.2. Cálculo del tiempo de vuelo en LIV

Para calcular el tiempo de vuelo de un fotón de muy alta energía suponemos que es emitido por una fuente a gran distancia del detector, que estaría situado en la Tierra. Dado este sistema, lo único que se puede medir es el redshift de la fuente y la energía con la que se detecta el fotón. Como coordenada espacial se toma r , la distancia comóvil entre la fuente y el detector, que, por definición, permanecerá constante ya que se desprecian todos los movimientos peculiares en el sistema. Así, aplicando lo desarrollado en el apartado anterior

$$\dot{x}^1 = \dot{r} = \frac{dr}{d\eta} \longrightarrow dr = \dot{r} d\eta. \quad (44)$$

En el límite de energías bajas se tiene $\dot{x}^1 \rightarrow 1$. El fotón será emitido a un cierto z_{em} y detectado a z_{det} . La distancia comóvil que recorre viene dada por la integral

$$r = \int_{\eta_{em}}^{\eta_{det}} d\eta = - \int_{z_{em}}^{z_{det}} \frac{dz}{a_0 H(z)}, \quad (45)$$

haciendo el cambio de variable al redshift dado por la ecuación (10). En cambio, para altas energías, aunque el fotón se emita a al mismo z_{em} , el redshift de detección será distinto puesto que su velocidad es distinta. La diferencia en el redshift de llegada se denota como Δz . Lo que sí se mantendrá igual es la distancia comóvil, por tanto

$$r = - \int_{z_{em}}^{z_{det}+\Delta z} \left(1 - s(z+1) \frac{E_0}{\Lambda} \right) \frac{dz}{a_0 H(z)}. \quad (46)$$

Igualando ambas expresiones para r

$$\int_{z_{det}+\Delta z}^{z_{em}} \left(1 - s(z+1) \frac{E_0}{\Lambda} \right) \frac{dz}{H(z)} = \int_{z_{det}}^{z_{em}} \frac{dz}{H(z)}.$$

La parte izquierda de la igualdad se separa en dos partes

$$\int_{z_{det}}^{z_{em}} \left(1 - s(z+1) \frac{E_0}{\Lambda} \right) \frac{dz}{H(z)} + \int_{z_{det}+\Delta z}^{z_{det}} \left(1 - s(z+1) \frac{E_0}{\Lambda} \right) \frac{dz}{H(z)} = \int_{z_{det}}^{z_{em}} \frac{dz}{H(z)}$$

y así las dos integrales con iguales límites se pueden sumar, simplificándose la expresión

$$\int_{z_{det}+\Delta z}^{z_{det}} \left(1 - s(z+1) \frac{E_0}{\Lambda} \right) \frac{dz}{H(z)} = \int_{z_{det}}^{z_{em}} \left[s(z+1) \frac{E_0}{\Lambda} \right] \frac{dz}{H(z)}.$$

Ahora se puede suponer que Δz será pequeño comparado con z_{det} , puesto que es la diferencia entre el redshift de detección del fotón de baja energía y el de alta energía. De esta manera, en la parte izquierda de la igualdad se toma $H(z) \approx H_0 = const$ y se desprecian los términos cuadráticos de z_{det} , por lo que la resolución de la integral es muy sencilla

$$\left(1 - s \frac{E_0}{\Lambda}\right) \frac{\Delta z}{H_0} = s \frac{E_0}{\Lambda} \int_{z_{det}}^{z_{em}} \frac{(z+1)dz}{H(z)}$$

$$\Delta z = s \frac{H_0}{1 - s \frac{E_0}{\Lambda}} \frac{E_0}{\Lambda} \int_{z_{det}}^{z_{em}} \frac{(z+1)dz}{H(z)}.$$

Realizando el desarrollo en serie del denominador y despreciando los términos cuadráticos en $1/\Lambda$ se obtiene una expresión más compacta que indica la diferencia entre los redshifts a los que se detectan cada uno de los fotones

$$\Delta z = s H_0 \frac{E_0}{\Lambda} \int_{z_{det}}^{z_{em}} \frac{(z+1)dz}{H(z)}, \quad (47)$$

a partir de la cual se puede obtener la diferencia de tiempos de vuelo entre un fotón de alta energía y uno de baja energía

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{H_0} = s \frac{E_0}{\Lambda} \int_{z_{det}}^{z_{em}} \frac{(z+1)dz}{H(z)}. \quad (48)$$

Este resultado muestra que el modelo (violación de invariancia Lorentz en un universo en expansión) predice diferencias en los tiempos de vuelo y coincide con el resultado obtenido en [1] utilizando un método alternativo. Esto nos da la confirmación que necesitamos para aplicarlo al caso de deformación de la relatividad especial, que es más complicado.

2.4. Relatividad Especial Deformada

Como se ha explicado en la introducción, la relatividad especial deformada se caracteriza por una relación de dispersión modificada, de la misma forma que ocurre en LIV, y por una ley de composición del momentos distinta. Esto tiene como consecuencia no trivial que ya no se pueden definir bien los sucesos en el espacio-tiempo canónico, lo que se denomina *localidad relativa*, marcando una diferencia fundamental entre LIV y DSR. La primera posee localidad absoluta, es decir, si un suceso se define como el cruce de dos worldlines, éste será el mismo para distintos observadores. No ocurre así en DSR, pues una interacción entre dos partículas definirá un suceso en el espacio-tiempo solo para un observador en el origen. Para el resto, las worldlines de dichas partículas no llegarán a cruzarse.

2.4.1. Velocidad del fotón sin expansión

El objetivo, como en la sección anterior, es hallar la diferencia de tiempos de vuelo entre fotones de alta y baja energía para ver si es o no nulo, lo que indicaría la existencia de una posible fenomenología observable. Hay que añadir un último ingrediente para tratar una deformación de la relatividad especial, un nuevo espacio-tiempo. Se ha preferido estudiar primero el efecto de la deformación primero sin una expansión, para ver qué características tiene. Finalmente se añadirá la expansión del universo en el apartado siguiente.

Se introduce el espacio-tiempo físico \tilde{x}^μ tal y como lo hemos definido en la ecuación (2) de la introducción, dado por

$$\tilde{x}^\mu = x^\nu \varphi_\nu^\mu \left(\frac{p}{\Lambda} \right), \quad (49)$$

una combinación lineal de las coordenadas canónicas con coeficientes que dependen del momento y de una escala de energías Λ , de forma que a bajas energías se recupera el resultado de relatividad especial. La acción de la que se desean obtener las ecuaciones es la misma que se ha venido utilizando durante todo el trabajo

$$S = \int [\dot{x}^\mu p_\mu - \lambda(\tau) \hat{C}(p)] d\tau. \quad (50)$$

Las ecuaciones de evolución de las coordenadas son entonces las mismas que en modelo más básico sin expansión del universo, a excepción de la relación de dispersión modificada, desconocida de momento, que incluye DSR

$$\dot{x}^\mu = \lambda(\tau) \frac{\partial \hat{C}(p)}{\partial p_\mu}. \quad (51)$$

$$\dot{p}_\mu = 0. \quad (52)$$

Podría parecer entonces que la worldline de la partícula ya es conocida, puesto que como $p_\mu = \text{cte}$, entonces, al elegir $\lambda = 1$, \dot{x}^μ también es constante y se puede escribir la trayectoria como un movimiento rectilíneo uniforme cuya velocidad depende de la relación de dispersión modificada. No obstante, no es así. La worldline estará en realidad dada por la nueva coordenada física \tilde{x}^μ , cuya ecuación de evolución será

$$\dot{\tilde{x}}^\mu = \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau} = \frac{d\varphi_\nu^\mu(p)}{d\tau} x^\nu + \frac{dx^\nu}{d\tau} \varphi_\nu^\mu(p),$$

pero según la ecuación (52), p_μ es constante en τ , luego el primer sumando se anula la ecuación queda

$$\dot{\tilde{x}}^\mu = \lambda(\tau) \varphi_\nu^\mu(p) \frac{\partial \hat{C}(p)}{\partial p_\nu}. \quad (53)$$

Ahora nos aprovechamos de nuevo de la libertad de elección de λ , imponiendo $\dot{\tilde{x}}^0 = 1$, lo que implica a su vez una elección del parámetro de la curva $\tau = \tilde{x}^0$, pero es algo que podemos hacer. De esta manera, encontrar la velocidad no requiere una inversión $\tau(x^0)$ que podría ser complicada y su expresión se simplifica a

$$\tilde{v} = \dot{\tilde{x}}^1 = \lambda(\tau) \varphi_\nu^1(p) \frac{\partial \hat{C}(p)}{\partial p_\nu} = \frac{\varphi_\mu^1(p) \frac{\partial \hat{C}(p)}{\partial p_\mu}}{\varphi_\nu^0(p) \frac{\partial \hat{C}(p)}{\partial p_\nu}}. \quad (54)$$

En principio, parece que dados una relación de dispersión modificada y una nueva estructura del espacio-tiempo, es posible encontrar la velocidad de la partícula y calcular si hay diferencia en

los tiempos de vuelo. Veamos un ejemplo especificando unos φ y \hat{C} dados en [12] que son

$$\hat{C}(p) = \Lambda^2 \left(e^{p_0/\Lambda} + e^{-p_0/\Lambda} - 2 \right) - e^{p_0/\Lambda} p_1^2 \quad \varphi_\nu^\mu(p) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{p_1}{\Lambda} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (55)$$

El espacio-tiempo definido de esta manera se denomina “no conmutativo”. Es precisamente en este tipo de espacio-tiempos en el que trabajos como [6] han demostrado que existen modelos de DSR sin expansión. Así pues, esperamos que el resultado de este cálculo sea $v = 1$. Empecemos por obtener las derivadas parciales de la relación de dispersión, que además, recordemos, cumple $\hat{C}(p) = 0$, lo que permite obtener p_1 como función de p_0

$$p_1^2 = \Lambda^2 (1 - e^{-p_0/\Lambda})^2. \quad (56)$$

Ahora ya se pueden calcular las derivadas parciales y aprovechar la ecuación anterior para sustituir p_1 y dejarlo en función de p_0

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial p_0} = \Lambda (e^{p_0/\Lambda} - e^{-p_0/\Lambda}) - \frac{1}{\Lambda} e^{p_0/\Lambda} p_1^2 = 2\Lambda (1 - e^{-p_0/\Lambda}) \quad (57)$$

$$\frac{\partial \hat{C}}{\partial p_1} = 2e^{p_0/\Lambda} p_1 = 2\Lambda (e^{p_0/\Lambda} - 1). \quad (58)$$

Con estas expresiones hallar la velocidad ya es cuestión de operar

$$v = \frac{\frac{\partial \hat{C}(p)}{\partial p_1}}{\frac{\partial \hat{C}(p)}{\partial p_0} - \frac{p_1}{\Lambda} \frac{\partial \hat{C}(p)}{\partial p_1}} = \frac{\Lambda (e^{p_0/\Lambda} - 1)}{\Lambda (1 - e^{-p_0/\Lambda}) - p_1 (e^{p_0/\Lambda})} = \frac{\Lambda (e^{p_0/\Lambda} - 1)}{\Lambda (1 - e^{-p_0/\Lambda}) + \Lambda (e^{p_0/\Lambda} + e^{-p_0/\Lambda} - 2)}$$

$$\tilde{v} = \frac{e^{p_0/\Lambda} - 1}{e^{p_0/\Lambda} - 1} = 1. \quad (59)$$

En efecto, parece que la velocidad de propagación en este modelo es igual para todos los fotones, independientemente de su energía. Lógicamente, no puede haber retraso en los tiempos de vuelo.

2.4.2. Añadiendo la expansión del universo a un modelo DSR

En este apartado finalmente se unirán todas las piezas del rompecabezas, construyendo un modelo de relatividad especial deformada que incluya la expansión del universo. No es fácil e inmediatamente surge una pregunta fundamental. ¿En qué orden debemos hacerlo?

Como hemos visto, incluir la expansión del universo consiste en introducir como coordenadas físicas del momento unos ciertos \bar{p} cuya definición se hace a partir de unas tétradas que dependen del espacio-tiempo, pero al deformar la relatividad especial se ha introducido un nuevo espacio-tiempo. ¿En qué espacio-tiempo se da la expansión, tal y como la conocemos?

La cuestión se puede plantear también a la inversa: el nuevo espacio-tiempo físico \tilde{x} se define mediante unos coeficientes que dependen de la coordenada momento. ¿De cuál? ¿De la que incluye la expansión del universo o de la que no?

$$\begin{aligned}\tilde{x}^\mu &= \varphi_\nu^\mu(p)x^\nu & \bar{p}_\alpha &= e_\alpha^\beta(x)p_\beta \\ \tilde{x}^\mu &= \varphi_\nu^\mu(\bar{p})x^\nu & \bar{p}_\alpha &= e_\alpha^\beta(\tilde{x})p_\beta\end{aligned}$$

En resumen, es necesario elegir una definición del espacio-tiempo de la columna de la izquierda y combinarla con una definición del espacio de fases de la columna de la derecha. Cómo, no está claro. Se proponen entonces las elecciones cruzadas, puesto que ejemplifican las dos maneras opuestas de añadir la expansión del Universo. La primera consiste en añadir la expansión al espacio-tiempo físico construido sin expansión (primera opción). En la segunda, la expansión se añade sobre las coordenadas canónicas y a partir de estas nuevas coordenadas momento, se construye el nuevo espacio-tiempo.

De todas formas, en cualquiera de los dos casos las ecuaciones diferenciales que resultan son demasiado difíciles de resolver. Por ello se va a utilizar el método alternativo presentado en el anexo I que incluye hallar los corchetes de Poisson. Además, será necesario elegir una estructura del espacio-tiempo φ , una relación de dispersión modificada $\hat{C}(\bar{p})$ y las tétradas de la expansión e_α^β , que son consecuencia de la métrica.

Elegiremos los presentados en el subapartado anterior en las igualdades (55), añadiendo la tétrada

$$e_\alpha^\beta(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a(x^0) \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Primera elección Se toman unas expresiones cruzadas, concretamente

$$\tilde{x}^\mu = \varphi_\nu^\mu(p)x^\nu \quad \bar{p}_\alpha = e_\alpha^\beta(\tilde{x})p_\beta, \quad (61)$$

de forma que los corchetes de Poisson serán

$$\dot{\tilde{x}}^0 = \{\tilde{x}^0, \hat{C}\} = \varphi_\mu^0(p) \frac{\partial \hat{C}}{\partial \bar{p}_\alpha} e_\alpha^\mu(\tilde{x}) - \frac{\partial \varphi_\nu^0(p)}{\partial p_\mu} x^\nu \frac{\partial \hat{C}(\bar{p})}{\partial \bar{p}_\alpha} \frac{\partial e_\alpha^\beta(\tilde{x})}{\tilde{x}^\rho} \varphi_\mu^\rho(p) p_\beta \quad (62)$$

$$\dot{\tilde{x}}^1 = \{\tilde{x}^1, \hat{C}\} = \varphi_\mu^1(p) \frac{\partial \hat{C}}{\partial \bar{p}_\alpha} e_\alpha^\mu(\tilde{x}) - \frac{\partial \varphi_\nu^1(p)}{\partial p_\mu} x^\nu \frac{\partial \hat{C}(\bar{p})}{\partial \bar{p}_\alpha} \frac{\partial e_\alpha^\beta(\tilde{x})}{\tilde{x}^\rho} \varphi_\mu^\rho(p) p_\beta. \quad (63)$$

Echando un primer vistazo a estas expresiones, parece que los segundos sumandos pueden dar problemas. No obstante, se ve que en la ecuación de $\dot{\tilde{x}}^1$ se va a anular porque ningún término φ_ν^1 depende de p_μ , luego esa derivada parcial se anula independientemente de los valores de ν y μ .

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}^0 &= \varphi_0^0(p) \frac{\partial \hat{C}}{\partial \bar{p}_0} e_0^0(\tilde{x}) + \varphi_1^0(p) \frac{\partial \hat{C}}{\partial \bar{p}_1} e_1^0(\tilde{x}) - \frac{\partial \varphi_1^0(p)}{\partial p_1} x^1 \frac{\partial \hat{C}(\bar{p})}{\partial \bar{p}_1} \frac{\partial e_1^1(\tilde{x})}{\tilde{x}^0} \varphi_1^0(p) p_1 = \\ &= \frac{\partial \hat{C}}{\partial \bar{p}_0} - \frac{ap_1}{\Lambda} \frac{\partial \hat{C}}{\partial \bar{p}_1} - x^1 \left(\frac{p_1^2}{\Lambda^2} \right) \frac{\partial \hat{C}(\bar{p})}{\partial \bar{p}_1} \frac{da}{dx^0} = \\ \dot{\tilde{x}}^0 &= 2\Lambda(e^{\bar{p}_0/\Lambda} - 1) - \frac{2\Lambda}{a^2} x^1 \frac{da}{d\tilde{x}^0} (e^{\bar{p}/\Lambda} - 3 - 3e^{-\bar{p}/\Lambda} - e^{-2\bar{p}/\Lambda}).\end{aligned} \quad (64)$$

$$\dot{\tilde{x}}^1 = \varphi_1^1(\bar{p}) \frac{\partial \hat{C}(\bar{p})}{\partial \bar{p}_1} e_1^1(\tilde{x}) = 2a\Lambda(e^{\bar{p}_0/\Lambda} - 1). \quad (65)$$

Claramente, debido a la presencia del segundo sumando en $\dot{\tilde{x}}^0$, la velocidad tiene una forma bastante complicada, con dependencias no solo de la energía, también del factor de escala y de su derivada. Finalmente, la velocidad resulta ser

$$\tilde{v} = \frac{\dot{\tilde{x}}^1}{\dot{\tilde{x}}^0} = \frac{(e^{\bar{p}_0/\Lambda} - 1) - \frac{x^1}{a^2} \frac{da}{d\tilde{x}^0}(e^{\bar{p}_0/\Lambda} - 3 - 3e^{-\bar{p}_0/\Lambda} - e^{-2\bar{p}_0/\Lambda})}{a(e^{\bar{p}_0/\Lambda} - 1)}. \quad (66)$$

Este resultado se diferencia mucho del obtenido para el caso anterior. No solo depende de la energía, también depende del factor de escala, su derivada e incluso coordenadas del espacio-tiempo. Esto podría indicar que introducir la expansión de esta manera, sobre un espacio-tiempo físico, no sea la manera de proceder, pero no se puede asegurar.

Segunda elección Ahora se toman las expresiones cruzadas de manera opuesta, eligiendo

$$\tilde{x}^\mu = \varphi_\nu^\mu(\bar{p}) x^\nu \quad \bar{p}_\alpha = e_\alpha^\beta(x) p_\beta, \quad (67)$$

y los corchetes son

$$\{\tilde{x}^0, \hat{C}\} = \varphi_\mu^0(\bar{p}) \frac{\partial \hat{C}}{\partial \bar{p}_\alpha} e_\alpha^\mu(x) - \frac{\partial \varphi_\nu^0(\bar{p})}{\partial \bar{p}_\gamma} e_\gamma^\nu(x) x^\nu \frac{\partial \hat{C}(\bar{p})}{\partial \bar{p}_\alpha} \frac{\partial e_\alpha^\beta}{x^\mu} p_\beta \quad (68)$$

$$\{\tilde{x}^1, \hat{C}\} = \varphi_\mu^1(\bar{p}) \frac{\partial \hat{C}}{\partial \bar{p}_\alpha} e_\alpha^\mu(x) - \frac{\partial \varphi_\nu^1(\bar{p})}{\partial \bar{p}_\gamma} e_\gamma^\nu(x) x^\nu \frac{\partial \hat{C}(\bar{p})}{\partial \bar{p}_\alpha} \frac{\partial e_\alpha^\beta}{x^\mu} p_\beta. \quad (69)$$

Pero si nos fijamos en el segundo sumando de la primera ecuación, vemos que el índice γ sólo puede ser 1, lo que fuerza $\mu = 1$. Sin embargo, la tétrada e_α^β sabemos que no depende de x^1 si no de x^0 , por lo que todo el término se anula, igual que ha ocurrido con la primera elección. Las ecuaciones entonces resultan ser

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}^0 &= \varphi_0^0(\bar{p}) \frac{\partial \hat{C}}{\partial \bar{p}_0} e_0^0(x) + \varphi_1^0(\bar{p}) \frac{\partial \hat{C}}{\partial \bar{p}_1} e_1^0(x) = 2\Lambda(1 - e^{-\bar{p}_0/\Lambda}) + 2\Lambda(e^{\bar{p}_0/\Lambda} + e^{-\bar{p}_0/\Lambda} - 2) \\ \dot{\tilde{x}}^0 &= 2\Lambda(e^{\bar{p}_0/\Lambda} - 1). \end{aligned} \quad (70)$$

$$\dot{\tilde{x}}^1 = \varphi_1^1(\bar{p}) \frac{\partial \hat{C}(\bar{p})}{\partial \bar{p}_1} e_1^1(x) = 2a\Lambda(e^{\bar{p}_0/\Lambda} - 1). \quad (71)$$

Finalmente, la velocidad en este caso resulta ser simplemente

$$\tilde{v} = \frac{\dot{\tilde{x}}^1}{\dot{\tilde{x}}^0} = \frac{2a\Lambda(e^{\bar{p}_0/\Lambda} - 1)}{2\Lambda(e^{\bar{p}_0/\Lambda} - 1)} = a(x^0). \quad (72)$$

Curiosamente, el resultado no es $\tilde{v} = 1$ como se podría esperar, pero tampoco se obtiene una velocidad que dependa explícitamente de la energía. No obstante, la coordenada x^0 no es física y al cambiar el argumento a \tilde{x}^0 resulta que aparece una dependencia con \bar{p}_1 . Por tanto, sí existe una dependencia con la energía en la velocidad.

3. Conclusiones

El objetivo de este trabajo, tal y como se expone a su inicio, era el estudio de las implicaciones fenomenológicas en relación con tiempos de vuelo de fotones en varios marcos que van más allá de la relatividad especial: la violación de invariancia Lorentz y la relatividad especial deformada, incluyendo además efectos debidos a la expansión del Universo.

En el trabajo hemos explorado un problema abierto, la pregunta de si hay o no retrasos en el tiempo de vuelo de fotones en relatividad especial deformada en un espacio-tiempo curvo. Hemos visto que en este problema se plantean dificultades importantes. La mayor de ellas ha sido la gran libertad de elección que existe en el modelo. No solo nos hemos encontrado con que hay que elegir la relación de dispersión modificada y la estructura del espacio-tiempo de forma adecuada; además, hay que pensar sobre qué espacio-tiempo se aplica la expansión del universo. En este trabajo hemos visto que hay dos posibles elecciones de espacio-tiempo: las coordenadas canónicas conjugadas de las variables momento y el espacio-tiempo físico que se introduce para recuperar la localidad en el marco de DSR. Introducir la curvatura en uno u otro espacio-tiempo da resultados diferentes. No faltan argumentos a favor de una manera u otra. Así pues, se puede esgrimir que si el espacio-tiempo \tilde{x}^μ es el físico, este será sobre el que se realicen las medidas y por tanto sobre el que ocurra la expansión del universo. No obstante, a alguien con más afinidad por las matemáticas puras y la geometría le puede causar reparo aplicar conclusiones de relatividad general a un espacio-tiempo que no es el canónico. Recordemos que la relatividad general está construida sobre la relatividad especial sin modificar. Por tanto, al incluir la expansión y utilizar la métrica de Friedmann–Robertson–Walker sobre una teoría de la relatividad especial modificada, se está mezclando DSR con la teoría de la relatividad especial sin modificar. Al final, debemos admitir que algunas de las elecciones que hemos tomado son un poco arbitrarias a falta de criterios físicos adicionales.

El resultado final obtenido en el trabajo es que, a pesar de que en modelos de DSR sin expansión y en modelos de relatividad general no hay dependencia de la energía en la velocidad, sí parece haberla en el caso de DSR con expansión, lo cual resulta algo confuso. Ocurre entonces que, o bien la dependencia se introduce de manera inesperada y en efecto hay diferencia en los tiempos de vuelo, o bien la expansión no se ha introducido de manera correcta. Esto es una respuesta parcial a una pregunta interesante: ¿cómo depende la velocidad de los fotones en DSR con expansión?

Como continuación se podría buscar, a partir de lo planteado en este trabajo, la forma de conseguir una velocidad independiente de la energía, lo que requeriría tomar las elecciones de espacio-tiempo y relación de dispersión adecuada, además de introducir la expansión del universo correctamente. No obstante, si se lograra, quedaría demostrado que existe, al menos, una posibilidad de replicar el resultado de DSR sin expansión y que esta podría ser la forma de tratar este tipo de modelos.

Referencias

- [1] L. P. Sáinz, J. Carmona, and J. Relancio, “Tests de simetría Lorentz utilizando observaciones astrofísicas de alta energía,” *Universidad de Zaragoza (TFG)*, 2018.
- [2] D. Colladay and A. Kostelecký, “Lorentz-violating extension of the standard model,” *Physical Review D*, vol. 58, no. 11, p. 116002, 1998.
- [3] S. Liberati, “Tests of lorentz invariance: a 2013 update,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 30, no. 13, p. 133001, 2013.
- [4] G. Amelino-Camelia, “Quantum spacetime phenomenology,” *Physics Letters B*, vol. 510, no. 1-4, pp. 255–263, 2001.
- [5] J. Kowalski-Glikman, “Lorentz invariance violation and its role in quantum gravity phenomenology,” in *Doubly special relativity* (D. Oriti, ed.), Cambridge University Press, 2009.
- [6] J. Carmona, J. Cortés, and J. Relancio, “Observers and their notion of spacetime beyond special relativity,” *Symmetry*, vol. 10, no. 7, p. 231, 2018.
- [7] J. Collins, A. Pérez, and D. Sudarsky, “Lorentz invariance violation and its role in quantum gravity phenomenology,” in *Approaches to quantum gravity: Toward a new understanding of space, time and matter* (D. Oriti, ed.), Cambridge University Press, 2009.
- [8] G. Amelino-Camelia, L. Freidel, J. Kowalski-Glikman, and L. Smolin, “Relative locality: A deepening of the relativity principle,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 20, no. 14, pp. 2867–2873, 2011.
- [9] J. Carmona, J. Cortés, and J. Relancio, “Relativistic deformed kinematics from momentum space geometry,” *arXiv preprint arXiv:1907.12298*, 2019.
- [10] S. Weinberg, *Cosmology*. Oxford university press, 2008.
- [11] F. Girelli, T. Konopka, J. Kowalski-Glikman, and E. R. Livine, “Free particle in deformed special relativity,” *Physical Review D*, vol. 73, no. 4, p. 045009, 2006.
- [12] J. Carmona, J. Cortés, and J. Relancio, “Spacetime from locality of interactions in deformations of special relativity: The example of κ -poincaré hopf algebra,” *Physical Review D*, vol. 97, no. 6, p. 064025, 2018.

Anexo 1: Corchetes de Poisson

Los corchetes de Poisson son una herramienta muy útil para tratar problemas de mecánica analítica. Dado un conjunto de coordenadas (x^μ, p_μ) en un espacio de fases, se define el corchete de Poisson de dos funciones f, g como

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial g}{\partial p_\mu} - \frac{\partial g}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial p_\mu}. \quad (73)$$

Dada la acción presentada en el apartado 2.2, sus ecuaciones del movimiento se podían escribir como

$$\begin{aligned} \dot{x}^\mu &= \lambda \frac{\partial C(\bar{p})}{\partial p_\mu} = \lambda \{x^\mu, C(\bar{p})\} \\ \dot{p}_\mu &= \lambda \frac{\partial C(\bar{p})}{\partial x^\mu} = \lambda \{p_\mu, C(\bar{p})\}, \end{aligned}$$

utilizando simplemente la definición de corchete de Poisson y que $\{x^\mu, p_\nu\} = \delta_\nu^\mu$. Gracias a esto, para cualquier función $f(x, p)$ se cumple

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} f(x, p) &= \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu + \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \dot{p}_\mu = \lambda \left[\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \{x^\mu, C\} + \frac{\partial f}{\partial p_\mu} \{p_\mu, C\} \right] = \lambda \left[\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial C(\bar{p})}{\partial p_\mu} - \frac{\partial f(\bar{p})}{\partial p_\mu} \frac{\partial C(\bar{p})}{\partial x^\mu} \right] \\ \frac{d}{d\tau} f(x, p) &= \lambda \{f, C\}. \end{aligned} \quad (74)$$

Este resultado simplifica considerablemente el proceso para obtener la velocidad puesto que no es necesario resolver ninguna ecuación diferencial. Basta con obtener $\dot{\tilde{x}}^1$ y $\dot{\tilde{x}}^0$ como corchetes de Poisson

$$v = \frac{d\tilde{x}^1}{d\tilde{x}^0} = \frac{\dot{\tilde{x}}^1}{\dot{\tilde{x}}^0} = \frac{\lambda \{\tilde{x}^1, C\}}{\lambda \{\tilde{x}^0, C\}}. \quad (75)$$

En casos sencillos no es necesario utilizar esta herramienta, pero los casos más complejos, como los presentados en los apartados finales referidos a DSR, serían muy difíciles de resolver sin ella.