Universidad Zaragoza
1542

Trabajo Fin de Máster

Vectores y rectas en el plano: una propuesta didáctica para el primer curso de Bachillerato

Vectors and straight lines in the plane: a didactic proposal for the first year of Bachillerato

Autor:

Mariano Abadía López

Director:

Sergio Martínez Juste

Facultad de Educación

2019

ÍNDICE

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar 2

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje de los objetos matemáticos............ 4

C. Sobre los conocimientos previos del alumno 15

D. Sobre las razones de ser de los objetos matemáticos... 22

E. Sobre el campo de problemas... 28

F. Sobre la técnicas 40

G. Sobre las tecnologías 45

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma 50

I. Sobre la evaluación... 52

J. Bibliografía... 60

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

1. Objetos matemáticos a enseñar junto con curso y asignatura en la que se sitúan los mismos.

En este trabajo vamos a diseñar una secuencia didáctica sobre los vectores y las rectas en el plano, parte central del contenido de geometría analítica en la asignatura de Matemáticas I en el curso de 1º de Bachillerato.

Para abordar este punto, vamos a definir antes cómo se encuadra este campo de la Geometría, tanto dentro de las matemáticas en sí, como en el currículo de Aragón.

Según Hernández y Villalba (2001) citado en Gamboa y Vargas (2012) la geometría puede concebirse como:

- La ciencia del espacio, vista como una herramienta para describir y medir figuras, como base para construir y estudiar modelos del mundo físico y otros fenómenos del mundo real.
- Un método para las representaciones visuales de conceptos y procesos de otras áreas en Matemáticas y en otras ciencias; por ejemplo, gráficas y teoría de gráficas, histogramas, entre otros.
- Un punto de encuentro entre una Matemática teórica y una Matemática como fuente de modelos.
- Una manera de pensar y entender.
- Un ejemplo o modelo para la enseñanza del razonamiento deductivo.
- Una herramienta en aplicaciones, tanto tradicionales como innovadoras, como por ejemplo, gráficas por computadora, procesamiento y manipulación de imágenes, reconocimiento de patrones, robótica, investigación de operaciones.

Según el currículo oficial, esta parte de las matemáticas se encuentra en el bloque 4 de Geometría y debe contar con las siguientes características:

Contenidos:

Cont.4.1 Vectores libres en el plano. Operaciones geométricas.

Cont.4.2 Producto escalar. Módulo de un vector. Ángulo de dos vectores.

Cont.4.3 Bases ortogonales y ortonormales.

Cont.4.4 Geometría métrica plana. Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas.

Criterios de evaluación:

Crit.4.1. Manejar la operación del producto escalar y sus consecuencias. Entender los conceptos de base ortogonal y ortonormal. Distinguir y manejarse con precisión en el plano euclídeo y en el plano métrico, utilizando en ambos casos sus herramientas y propiedades.

Crit.4.2. Interpretar analíticamente distintas situaciones de la geometría plana elemental, obteniendo las ecuaciones de rectas y utilizarlas, para resolver problemas de incidencia y cálculo de distancias.

Estándares de aprendizaje

Est.4.3.1. Emplea con asiduidad las consecuencias de la definición de producto escalar para normalizar vectores, calcular el coseno de un ángulo, estudiar la ortogonalidad de dos vectores o la proyección de un vector sobre otro.

Est.4.3.2. Calcula la expresión analítica del producto escalar, del módulo y del coseno del ángulo.

Est.4.4.1. Calcula distancias, entre puntos y de un punto a una recta, así como ángulos de dos rectas.

Est.4.4.2. Obtiene la ecuación de una recta en sus diversas formas, identificando en cada caso sus elementos característicos.

Est.4.5.1. Reconoce y diferencia analíticamente las posiciones relativas de las rectas.

Est.4.5.2. Realiza investigaciones utilizando programas informáticos específicos en las que hay que seleccionar, estudiar posiciones relativas (y realizar intersecciones entre rectas y las distintas cónicas estudiadas).

Como vemos, en el currículo no se hace mucha referencia acerca de los conceptos que Hernández y Villalba consideran esenciales de la Geometría, se centra en asegurarse que los alumnos saben resolver problemas, corremos con ello el riesgo de que los alumnos entiendan que calcular la distancia entre dos rectas consiste en aplicar una fórmula, el objetivo de esta propuesta sería que los alumnos abordasen las matemáticas como algo que puede ser interesante en sí y no solo como "fórmulas para resolver problemas".

Para ello, trataremos de plantear la Unidad de tal forma que los alumnos vayan descubriendo los objetos y buscando respuesta a las preguntas que les surjan y así vayan construyendo su conocimiento sobre dicho objeto. Para esto primero debemos conocer cómo se enseñan estos objetos y qué dificultades encuentran habitualmente los alumnos en ellos.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje de los objetos matemáticos

Según nos indican Vargas y Gamboa (2012), varios autores coinciden en identificar el problema en la enseñanza de la Geometría en que habitualmente se ha relegado la enseñanza de esta parte de la Geometría al final de los contenidos, por lo que no se llega a todos los contenidos del tema y esto hace que los docentes lleguen a la enseñanza sin referencias acerca de cómo enseñar esta parte y nuevamente prioricen la impartición de otros temas más "asequibles", lo que vuelve a retroalimentar el problema.

El otro problema al que hacen referencia también estos autores es a que no suele guiarse al alumno hacia *"el descubrimiento de la geometría como generadora de conocimiento"*. El cual también puede estar condicionado por el hecho, indicado anteriormente, de que los docentes no tienen referencia acerca de cómo enseñar estos contenidos y se tiende a lo que es más conocido, normalmente porque tienen como referencia la forma en la que ellos aprendieron los conceptos, que habitualmente se centra en aprender y utilizar fórmulas que resuelven determinados problemas.

1. Justificación habitual de la introducción de los objetos matemáticos

Para ver esta justificación voy a hacer un breve estudio acerca de cómo introducen los objetos libros de texto de cuatro editoriales distintas:

- ECIR (Deusa, M., Esteve, R., Montesinos, P., Ramírez, A. J. y Vives, E., 2008),
- Santillana (Antonio, M., González, L., Lorenzo J., Molano, A., del Río, J., Santos, D. y de Vicente, M., 2008)
- Oxford (Bescós i Escruela, E. y Pena i Terrén, Z., 2011)
- EDITEX (González García, C., Llorente Medrano, J. y Ruiz Jiménez, M. J., 2006)

De ello sacaremos una idea de cómo se justifica habitualmente, aunque hay que tener en cuenta que ambos objetos han sido ya introducidos en cursos anteriores y en este curso (1º de Bachillerato) lo que se pretende es introducir los objetos nuevamente para comprenderlos a fondo y ser capaces de trabajar con ellos.

Vamos a separar el estudio de ambos objetos:

Vectores

ECIR: Los autores justifican muy brevemente la aparición de este objeto con un corto párrafo al inicio de la unidad con una justificación física, ya que nos encontramos con magnitudes cuyas características no se pueden determinar dando únicamente un número, sino que requieren otros datos como su dirección y su sentido.

OXFORD: En este libro se hace una introducción histórica para la geometría analítica, en la que nos habla de Euclides, sin embargo, la necesidad del vector como herramienta geométrica no se da. El tema empieza definiendo el vector como un segmento orientado.

SANTILLANA: En las primeras páginas de la unidad dedicada a la geometría analítica, se introducen una serie de casos en los que se requieren los objetos a tratar. El primero de estos casos es una situación física en la que se requiere de unidades vectoriales, no se trata de unos casos en forma de problema, sino más bien una situación para recordar conceptos .

EDITEX: Se hace una introducción histórica a la unidad de la geometría analítica, en la que se habla de Euclides, Descartes, Gauss, etc… Sin embargo, al igual que en el libro de la editorial OXFORD, no se justifica la necesidad de los vectores, directamente se definen como segmentos orientados y se procede a deducir sus propiedades.

Rectas

ECIR: En este libro se introduce la recta en el plano en un tema distinto a los vectores. En un breve párrafo al inicio de la unidad, se justifica la introducción de la recta ya que es, para los autores, el elemento más importante de la geometría plana. Incluso hace una breve reflexión sobre el hecho de que tradicionalmente se haya definido como la distancia más corta entre dos puntos, definición que ha sido más que discutida con posterioridad. Después de esta introducción, procede a determinar la recta mediante un punto y un vector y de aquí deducir las demás formas de representación y propiedades.

OXFORD: Se hace un razonamiento, partiendo de los conocimientos adquiridos de los vectores, en el que se llega a la conclusión de que si tres puntos están alineados si los vectores que los unen son linealmente dependientes, o sea paralelos, de aquí deduce que una recta se determina por un punto y un vector director, demostrando que cojamos el punto que cojamos de dicha recta y cojamos el vector que uno dos puntos cualesquiera de ella, la recta determinada es siempre la misma. De aquí deduce el resto de las ecuaciones y sus propiedades.

SANTILLANA: Después de ver los vectores y los sistemas de referencia, en este libro se llega a la conclusión de que cualquier recta queda determinada por un punto, junto su vector de posición, y una dirección, junto a su vector direccional. A partir de esto deduce las distintas ecuaciones de la recta y sus propiedades.

EDITEX: A partir de los vectores, los autores de este libro inducen a deducir que con un punto y un vector, queda definida una única recta, a partir de esta idea empieza a desarrollar las distintas ecuaciones de la recta junto con el estudio de sus propiedades.

2. Campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente

Del mismo modo que en el punto anterior, para ver los campos de problemas habituales voy a realizar un breve estudio de los libros de texto de las mismas cuatro editoriales.

De nuevo, estudiamos ambos objetos por separado.

Vectores

Los campos de problemas son prácticamente comunes a los cuatro libros de texto:

- Determinar vectores:

    Dados sus extremos.

    Dados un extremo y una dirección.

    Calculando algún parámetro para que cumpla distintas condiciones.

- Operaciones con vectores:

    Suma.

Producto vectorial.

Producto escalar.

- Cálculo de distancias.
- Cálculo de ángulos entre vectores.
- Posiciones relativas de vectores.
- Determinar puntos según direcciones y distancias (Determinar vértices en paralelogramos o triángulos, etc.).

Además de estos campos comunes, observo algunos ejercicios que se salen de estos campos y que me parece interesante nombrar:

En el libro de la editorial OXFORD, hay algún problema de calcular proyecciones de un vector sobre otro.

En el libro de la editorial SANTILLANA, aunque los campos de problemas son los habituales, propone, además de la resolución algebraica, una interpretación geométrica de los resultados obtenidos que me parece interesante para ayudar a la comprensión de los contenidos.

En el libro de EDITEX hay un ejercicio en concreto en el que propone realizar la demostración de un teorema de lecciones anteriores, utilizando los contenidos que acaban de ver, me parece una buena forma de profundizar en la comprensión de los objetos estudiados y a la vez de introducir a los alumnos en la demostración de resultados matemáticos.

Rectas

De nuevo, observo que los campos de problemas son comunes a los cuatro libros de texto:

- Determinar las distintas ecuaciones de una recta.
- Determinar parámetros de la ecuación de una recta para que esta cumpla determinadas propiedades
- Estudiar posición relativa entre rectas.
- Determinar rectas con una determinada posición respecto a otra dada.
- Calcular ángulos entre rectas.

- Hallar simétricos de puntos respecto a una recta.
- Determinar puntos mediante la intersección de rectas.
- Calculo de distancias y áreas de figuras determinadas por rectas.

Otros tipos de problemas que observo son los siguientes:

En los libros de las editoriales ECIR y OXFORD, proponen una serie de ejercicios en los que busca determinar puntos o las ecuaciones de rectas en problemas geométricos clásicos, como mediatrices, circuncentros, medianas y baricentros.

En el libro de SANTILLANA, hay un último grupo de ejercicios que se plantean de una forma geométrica, cosa que puede ayudar a la visión espacial de los alumnos y a la comprensión del sentido de las distintas técnicas de resolución.

En el libro de la editorial EDITEX, encontramos un ejercicio muy interesante en el que se plantea un problema que describe una mesa de billar, de la que conocemos la recta que determina uno de sus lados, nos describe una situación en la que la bola se golpea en una dirección que nos dan y que tras rebotar contra ese lado conocido, acaba en un punto que también nos da el enunciado, el objetivo es saber el punto de la recta en el que rebota la bola.

Conclusiones

Estos campos de problemas que hemos visto para vectores y para rectas van dirigidos a trabajar las técnicas aprendidas, pero no hay problemas que tengan como fin la aparición de la mismas. Así que podemos deducir que los alumnos se encuentran con muchos ejercicios para practicar distintas técnicas de resolución pero no tantos problemas que inviten a reflexionar sobre las técnicas necesarias para su resolución. Estas técnicas de resolución de problemas son habitualmente la aplicación de una fórmula y la interpretación del resultado obtenido, las tecnologías que justifican estas técnicas de resolución suelen ser una demostración de cómo se deducen dichas fórmulas a partir de los conocimientos previos.

3. Efectos que produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno

Para ver estos efectos, he realizado un pequeño estudio sobre los resultados obtenido en la evaluación de esta unidad en una clase de 1º de Bachillerato del instituto en el que realicé las prácticas (IES Santiago Hernández), cabe destacar que en este centro utilizan como libro de texto de referencia el libro digital gratuito de la plataforma *Marea Verde*. Para hacer este estudio, solicité las correcciones de los exámenes del curso de 1º de Bachillerato Científico y observé los tipos de errores que cometían los alumnos.

El examen consta de 8 preguntas acerca de unos datos dados al inicio del mismo, los datos son los siguientes:

En todo este ejercicio se consideran los puntos $A\ (-3, -1)$, $B\ (5, -2)$, $C\ (3, 2)$ y la recta $s: \frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 1$

Estudiamos ahora cada pregunta con los errores que cometen los alumnos en ellas:

Pregunta 1:

1. Encuentra un vector director de la recta *r* que pasa por los puntos *A* y C. Calcula la pendiente de esta recta. (1 punto)

Errores más comunes:

- Fallos aritméticos o de transcripción del problema, algún signo erróneo. Puede significar un simple despiste o una técnica mal aprendida.
- La mayoría de los alumnos calcula el vector que une los puntos A y C y lo toma como director, casi ningún alumno simplifica dicho vector para facilitar el cálculo de la pendiente. No es un error en sí, pero podría indicar dificultades para diferenciar en qué tipo de problemas necesitan únicamente la dirección de un vector y cuando necesitan también el módulo o dificultades en identificar estar características.
- A la hora de calcular la pendiente, algunos alumnos calculan la ecuación punto-pendiente de la recta. No se puede considerar como error, pero parece que algunos alumnos no relacionan la pendiente con la dirección de la recta.

Otros errores:

- Cálculo del vector que une dos puntos de forma errónea. Parece que el alumno que comete este error confunde la técnica para generar un vector ortogonal con la técnica para calcular un vector que une dos puntos y las mezcla.

1. vector director que pase por los puntos A y C

$A(-3,-1)$ y $C(3,2)$

$\vec{v}(2-(-3);\ 3-(-1)) = \vec{V}_{AC}(5,4)$

- Fallo al buscar la pendiente en la función de la recta. Parece producto de haber aprendido que “la pendiente es el coeficiente que acompaña a la variable ‘x’ ”.

$r \begin{cases} C\ (3,2) \\ \vec{v}_{AC}(6,3) \leftarrow \text{vector director de "r"} \end{cases}$

$r: 3x-6y+3=0$ la pendiente de "r" es +3

Pregunta 2:

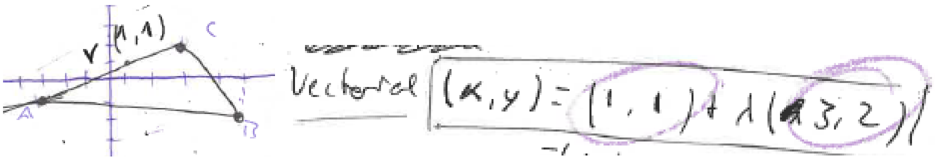
2. Deduce y nombra las seis ecuaciones de la recta *r*. (2 puntos)

Errores más comunes:

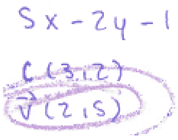
- Fallos aritméticos y algebraicos al pasar de la Ec. Continua a la Ec. Punto-Pendiente y de la Ec. Punto-Pendiente a la Ec. Explícita.
- No conseguir deducir la Ec. Punto-Pendiente de la Ec. Continua, a pesar de conocer tanto la pendiente como un punto de la misma. No contemplan la opción de resolver el problema de distintas formas.
- Como en el enunciado inicial del examen hay tres puntos y con los dos de ellos han sacado el vector director, utilizan el tercer punto que aparece en el enunciado como un punto de la recta (aunque no es así) para calcular la Ec. Vectorial. Piensan que al haber utilizado ya dos puntos, no pueden volver a utilizarlos y se inventan que el tercero pertenece a la recta para poder resolver el ejercicio, esto indica que no entienden bien los elementos que están manejando.
- Confundir nombres de las ecuaciones.

Otros errores:

- Calcular un tercer punto “a ojo” viendo una gráfica dibujada a mano alzada. En este caso, además comete otro error al calcular el vector director, ya que toma el punto C como tal. Parece indicar que ha visto una resolución gráfica e intenta imitarla sin saber los elementos que intervienen.



- Tomar la recta “s” del principio del examen como si fuese la del problema. Esto sería un fallo de comprensión de la pregunta. Después hay un fallo algebraico al deducir de esta su Ec. General.



Pregunta 3:

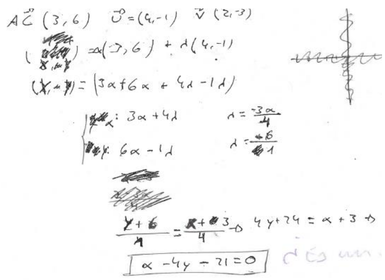
3. Expresa el vector $\overrightarrow{AC}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u} = (4,-1)$ y $\vec{v} = (2,-3)$.
(1 punto)

Errores comunes:

- Fallos en la resolución del sistema de ecuaciones.
- Olvidar de poner la combinación lineal tras calcular los parámetros. Puede ser un despiste o no entender el ejercicio, solo saber una técnica que lo resuelve.
- Fallos al calcular el vector que une dos puntos. Como en la Pregunta 1.
- Simplificar el vector $\overrightarrow{AC}$ como si no importase el módulo.

Otros errores:

- Con los datos dados, dar la ecuación de una recta. Parece indicar que no sabe en absoluto lo que es una combinación lineal. Además suma los vectores de una forma errónea.



- Plantear la combinación lineal y no saber plantear el sistema que la resuelve. Puede indicar falta de tiempo o desconocimiento del objeto.

- Confundir combinación lineal con producto escalar e intentar cuadrar los datos con la fórmula del producto escalar.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha \to (5,-1)\cdot(2,-3)=\cos\alpha \qquad \cos\alpha=(8,3)$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\alpha \to (-3,-1)\cdot(3,2)\cdot(8,3)=\cancel{(-72,-6)}$$

Pregunta 4:

4. Deduce la ecuación de la recta que pasa por C y es paralela a s. (1 punto)

Errores comunes:

- En vez de buscar la pendiente de la recta 's', buscan su vector directo y cometen algun fallo aritmético o algebraico en el proceso.
- Errores al intentar poner la ecuación de la recta 's' en forma Punto-Pendiente o Explícita. También son errores de tipo algebraico.
- Algún alumno se da cuenta de que la recta 's' está con la Ec. General y saca el vector de los coeficientes de dicha ecuación, pero no se da cuenta de que dichos coeficientes dan su vector normal y no el director. Fruto de no entender las ecuaciones y simplemente saber propiedades de memoria.

Otros errores:

- Dar valores a la recta 's' y asignárselos a la recta paralela. No entiende bien el concepto.
- Sacar el vector director de la recta paralela de los datos dados al inicio del examen, uniendo dos puntos que no están en la recta buscada. No sabe resolver el problema y deduce que debe usar datos que se le proporcionan, aunque no sabe cómo.

Pregunta 5:

5. Deduce la ecuación de la recta que pasa por C y es perpendicular a s. (1 punto)

Los errores son comunes a la Pregunta 4, algunos errores distintos:

- Un alumno parece tener una confusión entre paralelismo y perpendicularidad, ya que contesta con la misma recta que en la Pregunta 4. Podría ser que no distingue cual es cual y él sabe calcular la paralela, por lo que decide contestar con ella a ambas preguntas para asegurarse contestar correctamente a una.
- Error al modificar la pendiente de la recta original, si la pendiente era $\frac{2}{5}$ la pendiente perpendicular será $\frac{-5}{2}$, pero varios alumnos o solo cambian numerador por denominador o solo cambian el signo. Fruto de aprender de memoria como cambiar la pendiente y no entender bien el concepto.

Pregunta 6:

6. Comprueba que el triángulo ABC es rectángulo y calcula su área. (2 puntos)

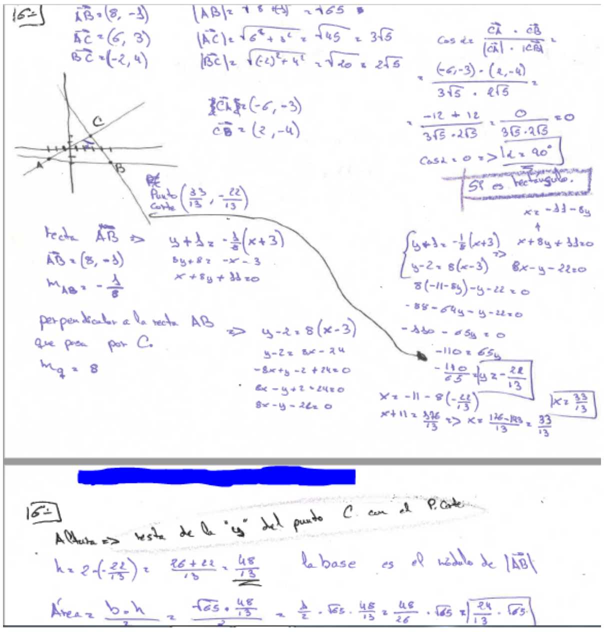
Errores comunes:

Los errores son de muy variadas formas, dado las distintas formas que tiene los alumnos de abordar el problema.

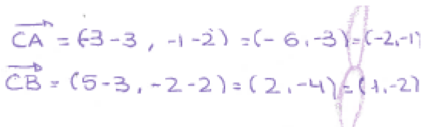
- Errores derivados de no tener claros conceptos trigonométricos o de propiedades de los triángulos.
- Errores al elegir los catetos con los que comprobar si es o no rectángulo.
- Errores de cálculo en los módulos al fallar con los signos de las componentes al no aplicar correctamente el cuadrado.
- Varios alumnos buscan construir la altura del triángulo mediante la intersección de dos rectas, algunos abandonan a mitad, otros simplemente calculan la recta que representaría a la altura y no saben seguir, otros cometen errores al resolver el sistema.

Otros errores:

- El alumno razona correctamente que se trata de un triángulo rectángulo, sin embargo decide calcular como altura la "intuitiva" según su dibujo, por lo que calcula la recta de la base, la de la altura y el punto de corte entre ambas, todo correctamente. Sin embargo, es de suponer que confundido por el dibujo, posteriormente deduce que esa altura es perpendicular al eje de abscisas y por lo tanto razona que su módulo será la diferencia entre las coordenadas 'y'.



- Un alumno simplifica los vectores cambiando sus módulos, esto puede indicar que ha interiorizado que toda la información que hay en un vector es la dirección ya que es lo único que se utiliza al trabajar con rectas.



Pregunta 7:

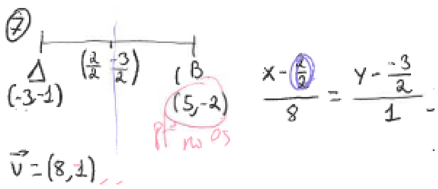
7. Calcula la mediatriz del segmento AC. (1 punto)

Errores comunes:

- Errores al calcular el punto medio debido a haber aprendido la formula incorrectamente y restar componentes en lugar de sumarlas.
- Errores aritméticos y algebraicos al calcular la ecuación de la recta.

Otros errores:

- Calcular la recta que pasa por el punto medio pero con la misma dirección que el segmento. Indica que sabe que la mediatriz es una recta que pasa por el punto medio de un segmento, pero o no sabe que es perpendicular o no entiende el papel que juegan los vectores en cuanto a esta característica (Obviando el fallo al copiar el punto).



4. Conclusiones

Lo primero que se observa es que la mayoría de los alumnos trabajan con vectores como con un objeto extraño que tiene unas normas especiales, pero sin entender lo que es este objeto ni cuáles son esas normas. La mayoría de los errores aparentemente vienen de la memorización de una serie de técnicas que no se entienden, por lo tanto se pueden cometer fallos por no recordar correctamente dichas técnicas o por no saber cuándo aplicarlas. En el caso particular del examen estudiado, también se observan casos claros de “contrato didáctico”, ya que se plantea el examen de una forma diferente a la habitual, con unos datos dados al principio del mismo y a los cuales se hace referencia a lo largo de todo el examen, lo que hace que muchos alumnos busquen datos extra de la pregunta entre estos dados, aunque no participen en la misma. En cuanto al concepto de recta, parece que les genera dificultad entender los conceptos que entran en juego en la misma, de nuevo la mayoría de los errores se dan por malas mecanizaciones de técnicas que no se comprenden.

En definitiva, parece que los alumnos tienen problemas para entender el concepto de vector y de relacionarlo con la dirección, así como para observar una recta como un conjunto de puntos que siguen una dirección a partir de un punto en concreto.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

1. Conocimientos previos que necesitan los alumnos

Para poder comprender los contenidos que se indican en el currículo, los alumnos van a necesitar los siguientes contenidos previos:

Vectores:

Los vectores son unos objetos matemáticos que, junto con las matrices, tienen unas características distintas a todos los demás objetos con los que están acostumbrados, por ello las dificultades empiezan desde las primeras propiedades como son el módulo y la dirección y continúan con la suma entre ellos. Además aparecen nuevas operaciones que por primera vez dan como resultado un objeto distinto como es el *producto escalar*, deberán comprender este producto y su utilidad en la búsqueda de ángulos y para ello se deberá tener un conocimiento de trigonometría suficiente, ya que deberán utilizar conceptos de esta área junto con otros como el de proyección de un vector sobre otro.

Rectas:

Las rectas ya deben conocerlas de cursos anteriores, deberán conocer bien *las características de las rectas y sus distintas posiciones relativas*, para después buscar relacionar las mismas con direcciones, etc. y relacionar estas direcciones con los vectores. Cuanto mejor dominen los *conceptos de pendiente y de ordenada en el origen* y cuanto mejor entiendan la información necesaria para poder determinar una recta en el plano, más fácil les resultará entender el paso a la geometría analítica. Será imprescindible, además, que dominen con soltura la resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado. Sería una ventaja también que hubiesen trabajado con construcciones con regla y compás (o con escuadra y cartabón), ya que esto les ayudará a pensar en la resolución gráfica de los problemas que propongamos y simplemente tengan que traducir dicha resolución al álgebra, ya que estos ejercicios de visualización espacial suelen ser muy complicados si nunca se han abordado gráficamente.

2. Cómo ha propiciado la enseñanza anterior a la adquisición de estos conocimientos

Para responder a esta cuestión, hay que acudir a los currículos anteriores, para ver los contenidos que se han dado acerca de estos objetos matemáticos en cursos anteriores.

Vectores

Los vectores entran en el currículo oficial de Aragón en el curso de 4º de la ESO. Entre los contenidos en el bloque de Geometría de este curso nos encontramos con *Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad.* En este contenido aparecen por primera vez los vectores.

Si observamos los estándares en base a los cuales se evalúa el aprendizaje nos encontramos las siguientes:

Est.MAAC.3.3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores

Est.MAAC.3.3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector.

Los cuales son los únicos estándares en los que se evalúa contenido en el que intervienen los vectores.

De esto podemos deducir que no tienen ninguna noción de anillo vectorial, o por lo menos no se les exige nada al respecto, por lo que las operaciones con vectores pueden suponer un problema para muchos alumnos que no entiendan bien el funcionamiento de las mismas. A la vez que les cueste diferenciar este objeto de los números, ya que no se hace una ruptura entre el espacio de los vectores y el de los números, por lo que cueste entender propiedades como dirección y módulo.

Rectas

La primera vez que la recta aparece en el currículo de forma indirecta es en 1º y en 2º de la ESO, en el bloque de Geometría, en el contenido *Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad.* Así como en *Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz. Propiedades.* Donde se trabajan propiedades de algunas rectas específicas. La primera vez que los alumnos entran en contacto explícitamente con el concepto de una recta es en 2º de ESO en el bloque de Funciones con el contenido *Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.* En la que se evalúa el conocimiento sobre este contenido en base a los siguientes estándares:

Est.MA.4.4.1. Reconoce y representa una función lineal a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente.

Est.MA.4.4.2. Obtiene la ecuación de una recta a partir de la gráfica o tabla de valores.

Est.MA.4.4.3. Escribe la ecuación correspondiente a la relación lineal existente entre dos magnitudes y la representa.

Est.MA.4.4.4. Estudia situaciones reales sencillas y, apoyándose en recursos tecnológicos, identifica el modelo matemático funcional (lineal o afín) más adecuado para explicarlas y realiza predicciones y simulaciones sobre su comportamiento.

En 3º aparece *Geometría del plano.* Y *Lugar geométrico.* En el bloque de Geometría, donde También han podido tomar contacto con el concepto de recta. Pero es en el bloque de Funciones donde aparece el contenido de *Expresiones de la ecuación de la recta.* En el que se evalúan ciertos conocimientos de las rectas en función de los siguientes estándares:

Est.MAAC.4.2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente.

Pero es de nuevo en 4º de la ESO donde aparece el contenido *Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores. Ecuaciones de la recta. Paralelismo, perpendicularidad.* En el que por primera vez se les evalúan los siguientes estándares de aprendizaje:

Est.MAAC.3.3.3. Conoce el significado de pendiente de una recta y diferentes formas de calcularla.

Est.MAAC.3.3.4. Calcula la ecuación de una recta de varias formas, en función de los datos conocidos.

Est.MAAC.3.3.5. Reconoce distintas expresiones de la ecuación de una recta y las utiliza en el estudio analítico de las condiciones de incidencia, paralelismo y perpendicularidad.

Por lo que podemos ver en el currículo, el concepto de recta acompaña a los alumnos desde 2º de la ESO, por lo que los alumnos deberían estar muy familiarizados con este objeto. Sin embargo, parece que están acostumbrados a tratar el objeto como una función algebraica y no como un lugar geométrico, por lo que su relación con los vectores y su estudio geométrico puede ser difícil.

3. Actividades con las que trataremos de asegurarnos de que los alumnos posean los conocimientos previos necesarios

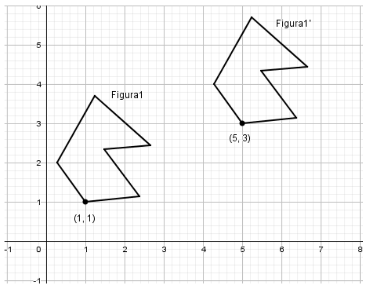
Después de lo visto en el punto anterior, podemos concluir que donde más falta de conocimientos previos puede haber es en el concepto de vector y en la relación de estos con las rectas, para ello vamos a diseñar unas actividades que permitan a los alumnos recordar los conocimientos previos que tengan y a la vez les permitan comprender mejor los conceptos relacionados con este objeto.

Actividades previas de vectores

Realizaremos dos actividades, una primera actividad en la que buscaríamos que surgiese el vector como objeto matemático para indicar una dirección, un objeto que nos indica cuántas unidades nos debemos mover sobre el eje de las X y cuántas sobre el eje de las Y para realizar un movimiento; y una segunda actividad en la que exploraremos unas primeras propiedades y operaciones con vectores.

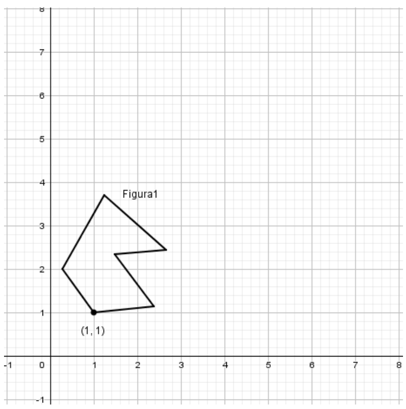
Actividad 1:

En la siguiente imagen vemos que la Figura1 se ha desplazado mediante una traslación hasta la Figura1':



Queremos hacer ese movimiento en dos veces, primero paralelo al eje x y luego paralelo al eje Y.

1- Dibuja la situación después de hacer el primer movimiento. ¿Cuántos cuadros te has movido y hacia dónde?



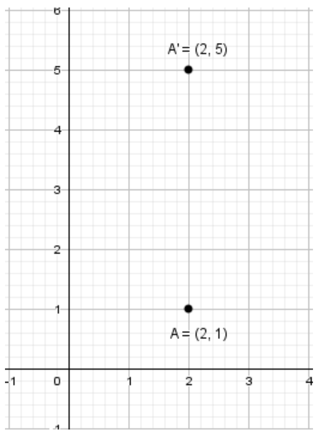
2- Para llegar a la situación final después del segundo movimiento ¿Cuántos cuadros debes moverte y hacia dónde?

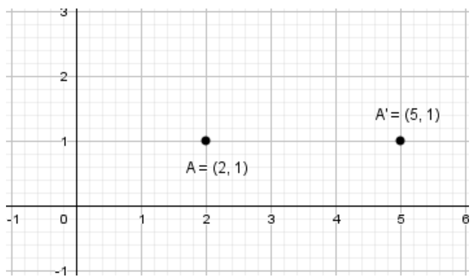
3-¿Conoces algún objeto matemático que te indique esos movimientos? Escríbelo.

4-Con el objeto que acabas de indicar ¿Cómo indicarías el movimiento que lleva la Figura1' a la Figura1?

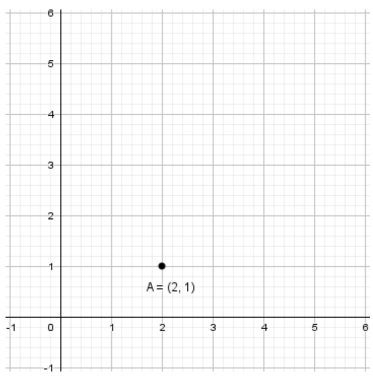
Actividad 2:

1- Indica el vector que describe la dirección del movimiento que va del punto A al punto A' en los dos casos que se muestran a continuación. ¿Cuánto miden dichos vectores?¿Qué relación hay entre lo que miden esos vectores y la distancia que hay entre A y A'?





2- Si ahora le aplicamos al punto A los dos movimientos anteriores a la vez, ¿dónde se encontrará al final del movimiento? Dibuja la situación.



3- Escribe el vector que describe la dirección de ese movimiento. ¿Cuánto mide dicho vector?

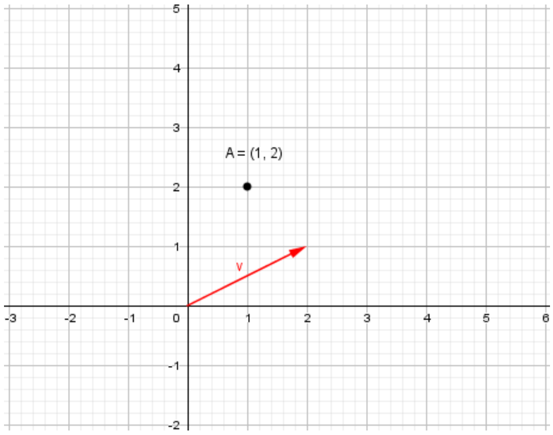
4- Ahora queremos mover el punto A en la misma dirección que en el ejercicio 2, pero queremos que esté a la mitad de distancia al final del movimiento, ¿qué vector es el que describe este movimiento? ¿y si queremos hacer un movimiento en la misma dirección y con la misma distancia pero en sentido contrario?

Actividades previas de rectas

Realizaremos unas actividades en las que, a partir del concepto de vector, nos aparezca el de recta. De esta manera esperamos que les resulte más natural trabajar conjuntamente con dos objetos que hasta ahora han tenido tan diferenciados uno del otro.

Actividad 1:

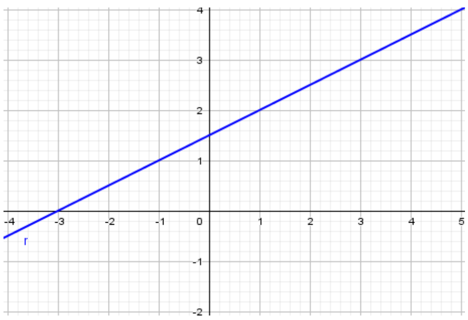
1- Vamos a aplicarle al punto A movimientos en la dirección del vector v. En concreto vamos aplicarle el movimiento que describe el vector v, el vector $\frac{1}{2}v$, *el vector* $2v$ *y el vector* $-\frac{3}{2}v$. *Dibuja el punto resultante después de cada movimiento.*



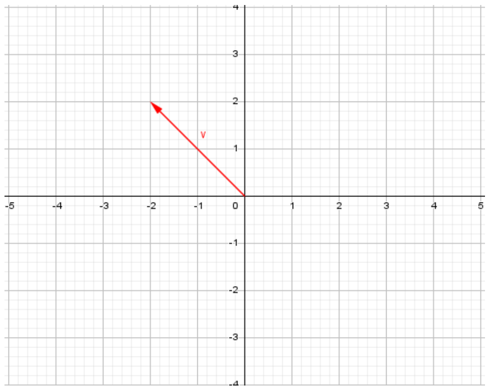
2- Si dibujásemos todos los puntos resultantes de aplicarle A un movimiento en la misma dirección de v pero con distintas distancias y sentidos, ¿qué figura obtendríamos?

Actividad 2:

1- Dibuja un vector que tenga la misma dirección que la recta r. ¿Cuántos vectores con esa misma dirección hay?



2- Dibuja dos rectas que tengan la dirección dada por el vector v. ¿Cuántas rectas con esa misma dirección hay?



Actividad 3:

Actividad con GeoGebra: Se propondrán unas construcciones con el programa GeoGebra que buscarán facilitar la comprensión del objeto matemático para los alumnos.

1- Dibuja un punto P y un vector v*, posteriormente construye un deslizador* k *con valores entre* -10 *y* 10 *con un incremento pequeño (0.001 por ejemplo) y construye el punto* $X = P + kv$ *resultado de desplazar el punto P mediante el vector* kv*. Ahora haz que este punto X deje rastro y mueve el deslizador* k*. ¿Qué dibujo aparece?*

2- Haz lo mismo con otro vector w y otro deslizador l*. ¿Qué tiene que pasar para que los dibujos no se corten nunca entre sí? ¿Y para que sean el mismo dibujo?*

D. Sobre las razones de ser de los objetos matemáticos

1. Razones de ser que vamos a tener en cuenta en la introducción de los objetos

Este tema pretende ser una primera toma de contacto con la geometría analítica moderna. En la geometría moderna, que es en la que nos introducimos en este tema, podemos encontrar dos elementos: la *geometría analítica* junto con el *elemento vectorial*. Por lo que la razón de ser de nuestros objetos podría justificarse como los elementos más simples que componen la geometría moderna.

De forma resumida, la razón de ser que vamos a introducir para los *vectores* va a estar relacionada con la necesidad de representar movimientos en el plano mediante una dirección, un sentido y un módulo. Mientras que la razón de ser de la *recta* va a ser como elemento más simple de la geometría plana, un primer elemento con el que conocer el funcionamiento de la *geometría cartesiana*.

Para llegar a estas razones de ser, propondremos a los alumnos unos problemas mediante los cuales buscaremos que ellos mismos lleguen a la necesidad de buscar un objeto matemático que les ayude a representar la situación que se muestra en dichos problemas.

2. Razones de ser históricas que dieron origen a los objetos

En cuanto a la razón de ser histórica de los *vectores*, como hemos visto en los libros de texto consultados, la mayoría de autores sitúan su aparición cuando surgió la necesidad de representar ciertas características de algunas magnitudes, sobre todo en la física, que se pueden representar con una dirección, un sentido y un módulo o valor numérico. Es por esto, que la razón de ser de los vectores aparecería en la física para representar fuerzas u otras magnitudes como la velocidad o la aceleración. Actualmente, también se utilizan los vectores para representar otras características de la física moderna como campos descritos por la función de onda de algunas partículas, en las que es necesario representar cada punto del espacio con un número complejo, por lo que se asigna un par vector a cada uno de esos puntos cuyas componentes representan las partes imaginaria y real de dicho número complejo.

Mientras que la *recta* es uno de los objetos básicos de la geometría, su aparición puede venir de unir dos puntos en un plano de la forma más corta posible, mientras que hay otro concepto que aparece por primera vez de una forma seria en este curso que es la *geometría analítica.*

Como indica González Urbaneja (2007), en cuanto a la razón de ser histórica, un primer paso hacia la geometría analítica lo da Apolonio al realizar una primera aplicación de coordenadas en su obra *las cónicas*, mientras que es Vieta en su *Arte Analítica* el primero que desarrolla el álgebra simbólica, pero no aplica coordenadas a sus trabajos. Es Descartes el que aúna ambos conceptos, el del álgebra simbólica y el uso de coordenadas, dando lugar en su obra *La Geometría* a la geometría que recibe cartesiana.

Para profundizar más en este apartado, se recomienda acudir a González Urbaneja (2007) y al estudio que realiza también González Urbaneja en su *Estudio crítico de tres* *obras cumbres de la literatura matemática: Los Elementos de Euclides, El método de Arquímedes y La Geometría de Descartes.*

En cuanto a las razones de ser que vamos a utilizar en esta propuesta didáctica no van a coincidir exactamente con las razones de ser históricas. En el caso de los vectores, a pesar de que si que hay problemas del ámbito de la física, la principal razón de ser van a ser las traslaciones. En cuanto a las rectas, se va a partir del concepto de vector y como razón de ser se utilizará el conjunto de puntos que siguen una dirección a partir de uno dado, es semejante a la razón de ser histórica, pero utilizamos el concepto de vector que es posterior. En cuanto a la razón de ser de la geometría cartesiana como herramienta de estudio de los objetos estudiados, sí que la presentaremos como su razón de ser histórica mediante un problema en el que los alumnos vean la necesidad de representar de una forma analítica los objetos.

3. Problemas con los que constituir las razones de ser de los objetos

Tanto en el caso de los vectores como en el de la recta, vamos a proponer una serie de problemas para resolver geométricamente, usando escuadra, cartabón y compás. De esta forma podremos introducir posteriormente la geometría cartesiana como elemento para poder resolver problemas de esta índole sin necesidad de utilizar estas herramientas.

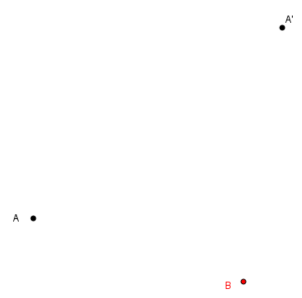
En primer lugar se les proporcionará a los alumnos las herramientas de dibujo con las que van a trabajar, que serán, como hemos dicho, escuadra, cartabón y compás.

Posteriormente emplearemos unos minutos de la sesión para recordar a los alumnos como utilizar estas herramientas para trazar líneas paralelas y perpendiculares, así como para trasladar medidas de un sitio a otro.

Problema para introducir los vectores

Problema V1:

Al punto A se le ha realizado una traslación y ha dado como resultado el punto A'. Aplica esa misma traslación al punto B para encontrar el punto B'.



a) *Escribe los pasos que has realizado durante el proceso de hallar B'.*

b) *¿Qué información necesitarías para encontrar B' si no tuvieses los puntos A y A'?*

c) *Diseña un objeto matemático que te de toda la información necesaria para poder realizar esa traslación a cualquier punto sin necesidad de ver un ejemplo.*

<u>Finalidad del Problema:</u> El objetivo de este problema es que los alumnos lleguen a la necesidad de crear la herramienta vector para representar una situación como la que se da en el enunciado. Para ello se guía a los alumnos mediante cada apartado para que terminen diseñando un objeto del cual puedan extraer la información necesaria para mover correctamente el punto B.

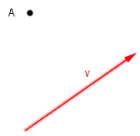
<u>Desarrollo de la actividad:</u> Ya que los alumnos han visto en cursos anteriores el objeto, es fácil que enseguida lleguen a la conclusión de que estamos buscando un vector, aprovecharemos esto para ir poniendo en común con el resto de la clase las ideas que vayan surgiendo con el objetivo de que todos vean la utilidad de los vectores y la información que pueden extraer de ellos. Se deberá llegar a una definición geométrica de vector, que será un segmento orientado o una flecha.

Problema para introducir las rectas

Serán problemas a resolver con herramientas de dibujo, las cuales debemos habernos asegurado anteriormente que saben utilizar, y en las que trabajarán propiedades como la perpendicularidad y el paraleleismo.

Problema R1:

Dibuja todos los puntos que podemos obtener trasladando el punto A con la dirección del vector v.



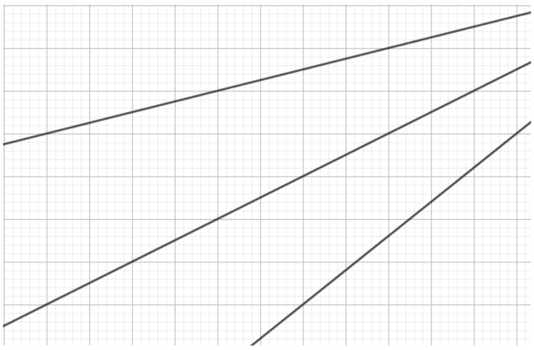
<u>Finalidad del Problema:</u> El objetivo de este problema es que los alumnos lleguen a la definir una recta a partir de todos los puntos que se encuentran siguiendo una dirección a partir de un punto dado. Con esto queremos que para los alumnos nazca de una manera más natural la representación vectorial de una recta como punto de partida hacia la representación cartesiana de la misma.

<u>Desarrollo de la actividad:</u> Después de haber trabajado y dominado el concepto de vector y sus propiedades, es de esperar que los alumnos sean capaces de representar varios puntos cambiando el módulo y la dirección del vector dado. Queremos con esto que poco a poco los alumnos vayan descubriendo que el objeto descrito es una recta y que lleguen así a una primera definición de la recta como lugar geométrico.

Problema para introducir la geometría cartesiana

Problema C1:

Indica si las siguientes rectas se cortan o no en el mismo punto.



<u>Finalidad del Problema:</u> El objetivo de este problema es que los alumnos vean la necesidad de trabajar con herramientas más sencillas que no requieran dibujar los objetos para resolver problemas. En este caso los alumnos deberán buscar un sistema de referencia y a partir de él asignar puntos a cada recta. Una vez asignados estos

puntos se deberá tratar de ver si siguiendo las direcciones se puede deducir que pasarán por un mismo punto o no.

Desarrollo de la actividad: *Para este problema, es de suponer que los alumnos requieran de más ayuda. Aquellos alumnos que recuerden la ecuación de una recta, esperamos que, tras conseguir definir dos puntos de cada recta, sean capaces de dar la ecuación y de resolver el problema, en este caso habremos conseguido que los alumnos lleguen a haber llegado a la necesidad de la Geometría Cartesiana. Otro más largo sería a través de mover los puntos en la dirección de los vectores de sus rectas y ver si para algún módulo los puntos llegan al mismo punto. De ambas maneras, los alumnos llegarán a la necesidad de traducir el problema gráfico a un problema numérico-algebraico, por lo que conseguiremos el objetivo de que vean la utilidad de la Geometría Cartesiana.*

4. Metodología a seguir para la implementación en el aula

Según Vargas y Gamboa (2012, p. 81):

> "*el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes dividiéndolo en cinco niveles consecutivos: la visualización, el análisis, la deducción informal, la deducción formal y el rigor, los cuales se repiten con cada aprendizaje nuevo.*"

En este caso, no es un conocimiento nuevo propiamente dicho al que acceden los alumnos, ya que han estado en contacto con estos objetos desde cursos anteriores, sin embargo, vamos a buscar en estos primeros problemas una evolución en el conocimiento del alumno que se podría relacionar con los 3 primeros niveles de Van Hiele.

Para trabajar estos niveles podemos plantear algunos problemas de representación, para facilitar a los alumnos el reconocer las figuras, representándolas ellos mismos, bien con herramientas de dibujo como hemos indicado en los "Problemas para introducir la recta", bien con programas informáticos y a la vez ir viendo aparecer propiedades de estos objetos como puede ser el módulo en los vectores o el paralelismo o la perpendicularidad, con el objetivo de que, al plantear problemas de Geometría Cartesiana, el alumno consiga hacer el paso al álgebra de una forma menos agresiva y sea capaz de seguir deducciones geométricas del mismo tipo a las que ha realizado gráficamente pero en este caso algebraicamente, lo que podríamos relacionar con ese tercer nivel de Van Hiele.

El profesor deberá servir de guía en los razonamientos y se deberá encargar de la institucionalización de los conocimientos que vayan surgiendo, asegurándose del máximo rigor posible.

El trabajo de los alumnos se podrá realizar individualmente o por parejas y el profesor deberá facilitar a todos los alumnos los materiales necesarios para su realización.

E. Sobre el campo de problemas

1. Diseño de los distintos tipos de problemas

Se van a dividir los tipos de problemas en Problemas de Vectores, Problemas de Representación de la Recta y Problemas de Propiedades de la Recta. El objetivo va a ser ir justificando las técnicas que vamos a ir necesitando para construir los contenidos de cada objeto, estas técnicas van a irse utilizando para construir y justificar otras más complejas y de esta forma iremos construyendo el conocimiento de los alumnos.

Problemas de Vectores (PV)

PV.1. Propiedades de vectores (dirección, sentido y módulo)

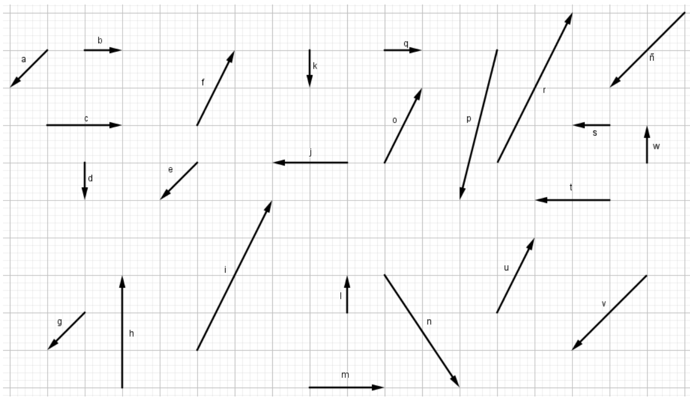
PV.2. Suma de vectores

PV.3. Vectores linealmente independientes, bases de vectores y coordenadas en distintas bases.

PV.4. Producto escalar y ángulo entre vectores

Diseño de algunos problemas:

PV.1.1. *Agrupa los siguientes vectores en función de la relación que encuentres entre ellos. Explica por qué los organizas de esa manera. ¿Habría más formas de organizarlos?*



Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos descubran las distintas características presentes en un vector. Al finalizar la actividad, los alumnos deberán haber ordenado los vectores en función de su dirección, en función de su sentido y en función de su módulo.

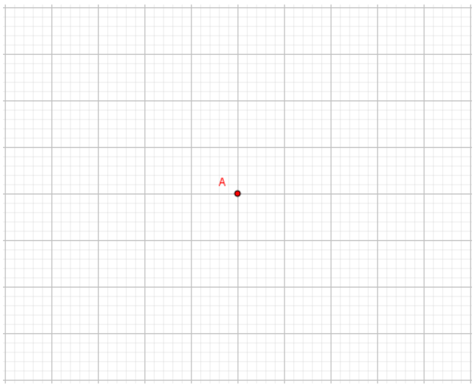
Desarrollo de la actividad: Es de esperar que surjan multitud de clasificaciones distintas, ya que el problema es muy abierto la mayoría de ellas serán válidas, pero será labor del profesor ir orientando a los alumnos hacia descubrir las propiedades de dirección, sentido y módulo.

PV.1.2. *Se quieren unir los pueblos A y B con una carretera en línea recta, tomando como origen el pueblo A, las coordenadas de B son 20 Km al Este y 15 Km al norte. ¿Cuánto deberá medir dicha carretera? Dibuja la situación.*

Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos trabajen con coordenadas y relacionen las distancias con módulos de vectores.

Desarrollo de la actividad: Los alumnos deberán interpretar el problema y representar la situación para traducirlo a un problema de vectores. El profesor deberá guiarles a la vez que pone en común las ideas que surgen de los alumnos.

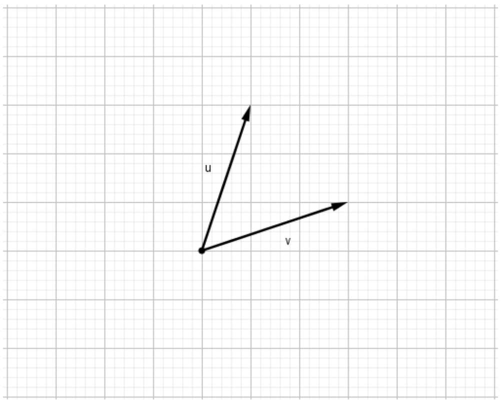
PV.2.1. *Queremos aplicarle al punto A las traslaciones que generan el vector* $\vec{v} = (2,3)$ *primero y el vector* $\vec{u} = (-4,5)$ *después. ¿Dónde acabará el punto A después de aplicarle esas traslaciones? ¿Hay algún vector que represente la suma de esas traslaciones* $\vec{u} + \vec{v}$*? Ahora queremos representar la resta* $\vec{u} - \vec{v}$ *¿Qué vector representará esa resta? ¿Es el mismo que* $\vec{v} - \vec{u}$*?*



Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos vean la representación gráfica de la suma y de la resta de dos vectores.

Desarrollo de la actividad: El profesor animará a los alumnos a que representen los vectores gráficamente para ver el resultado. Es de esperar que de problemas la resta, ya que para ello los alumnos deberán deducir lo que significa restar un vector, par esto pondremos en común las ideas que vayan surgiendo.

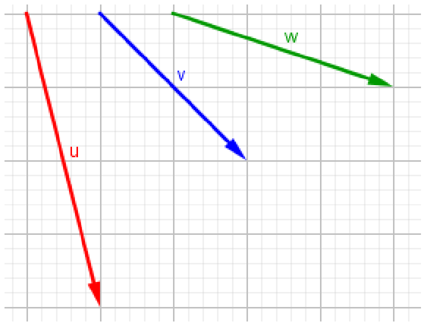
PV.2.2. *Representa a continuación los vectores* $\vec{u}+\vec{v}$ *,* $\vec{u}-\vec{v}$ *y* $\vec{v}-\vec{u}$ *. Escribe cada uno de ellos de forma numérica.*



Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es completar el problema PV.2.1 con la representación gráfica del vector suma y del vector resta.

Desarrollo de la actividad: Esperamos que los alumnos no encuentren grandes dificultades en la resolución de este problema.

PV.2.3. *Para los siguientes vectores da las coordenadas de los vectores resultantes de las operaciones que se piden en cada caso:*



a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$

c) $5\vec{v}$

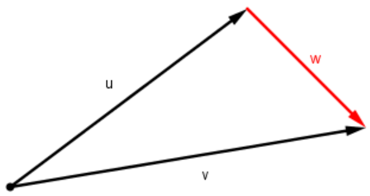
d) $2\vec{v} - \vec{w}$

e) $-\vec{v} + 2\vec{u} + 3\vec{w}$

Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos sigan trabajando las operaciones con vectores y también su interpretación geométrica.

Desarrollo de la actividad: La principal dificultad que pueden encontrar los alumnos en esta actividad puede ser la traducción de la representación gráfica a numérica.

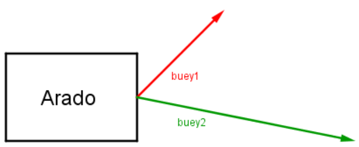
PV.2.4. *Escribe el vector* $\vec{w}$ *en función de los vectores* $\vec{v}$ *y* $\vec{u}$.



Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es institucionalizar la representación gráfica del vector resta con el objetivo de ir preparando una técnica para llegar a la tecnología del producto escalar.

Desarrollo de la actividad: Esperamos que los alumnos vean enseguida que el vector que buscan tiene misma dirección mismo sentido y mismo módulo que el vector resta, por lo tanto es ese mismo vector.

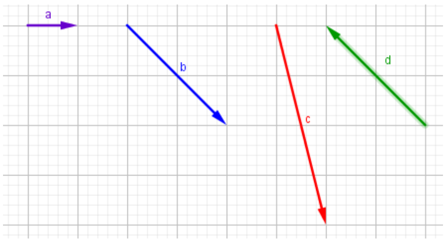
PV.2.5. *Tenemos 2 Mulas que tiran del arado con la fuerza y la dirección que se indica en la imagen. Dibuja la dirección en la que se moverá y su dirección.*



Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos utilicen las técnicas que han aprendido para resolver un problema relacionado con una situación real más propia quizás de la física.

Desarrollo de la actividad: Se espera que los alumnos sean capaces de relacionar rápidamente el problema con la suma de vectores, en caso de que haya dificultades, el profesor buscará guiar a los alumnos hacia ese razonamiento.

PV.3.1. *¿Cuáles de los siguientes vectores forman una base?*

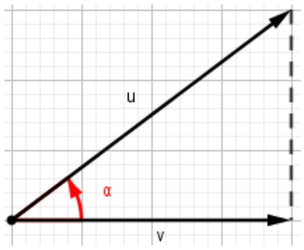


Escribe todas las bases que encuentres y pon en coordenadas de estas bases el punto $P = (2,2)$.

Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos comprendan el concepto de base y de vectores linealmente independientes.

Desarrollo de la actividad: Los alumnos deberán contar con la definición de base de vectores y deberán ver que pares de vectores la cumplen. El profesor deberá guiar a los alumnos acerca de cómo comprobar que se cumplen las condiciones de la definición, así como ayudar a comprender el significado de cambio de base con ayuda de dibujos que realice en la pizarra animando a los alumnos a representar las situaciones.

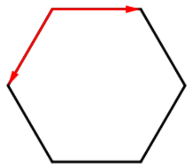
PV.4.1. *El vector* $\vec{v} = (4, 0)$ *y el vector* $\vec{u} = (4, 3)$ *forman el ángulo* α. *¿Cuál es el valor de dicho ángulo?*



Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es seguir preparando las técnicas necesarias para justificar el producto escalar. En este caso deberán relacionar el ángulo entre vectores con sus conocimientos sobre trigonometría y sobre Pitágoras.

Desarrollo de la actividad: Dado el planteamiento del problema, es de esperar que los alumnos pronto relacionen el problema con un problema típico de resolución de triángulos. Al haber trabajado ya los conceptos, no debería haber dificultad en relacionar el módulo de cada vector con la medida del cateto adyacente y de la hipotenusa y conseguir calcular el coseno del ángulo pedido.

PV.4.2. *Calcula el producto vectorial de dos vectores que forman dos lados contiguos de un hexágono de 6 unidades de lado.*



Calcula el producto vectorial de dos vectores contiguos de un hexágono de lado l.

Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos trabajen con la definición de producto escalar a la vez que tratan de institucionalizar una técnica para un problema particular aplicando sus conocimientos acerca de vectores y de figuras geométricas. El objetivo final es que los alumnos lleguen a una fórmula que del producto vectorial de los vectores que forman dos lados contiguos de un hexágono a partir de la medida de los lados.

Desarrollo de la actividad: Es de esperar que cueste mucho a los alumnos interpretar lo que pide el enunciado, el profesor deberá observar como abordan los alumnos el problema y poner en común las ideas interesantes que vayan surgiendo.

Problemas de Representación de la Recta (PRR)

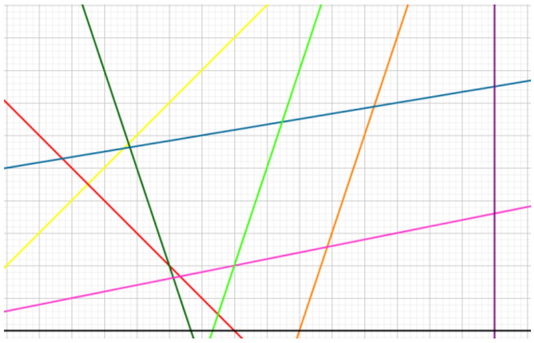
PRR.1. Distintas características de la recta (pendiente y dirección) y su representación tanto gráfica como algebraica.

PRR.2. Deducción de la Ecuación de la recta a partir de su representación gráfica.

PRR.3. Deducción de las ecuaciones de una recta a partir de una dada.

Diseño de algunos Problemas:

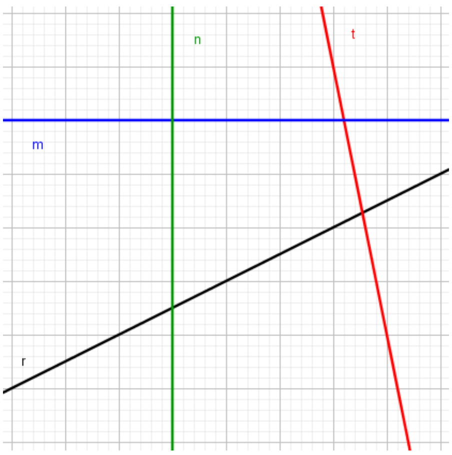
PRR.1.1. *Agrupa las siguientes rectas en función de características que veas que compartan. Explica las características que observas para hacer la clasificación.*



Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos observen las características que tienen las rectas y que las diferencian unas de otras. Este problema pretende ser una primera toma de contacto con las rectas y su finalidad es que surjan propiedades que acaben por relacionar la pendiente con la dirección.

Desarrollo de la actividad: Es una actividad muy abierta y pretende hacer que surjan las primeras ideas antes de entrar más a fondo. La intención es que se empiece a hablar de paralelismo, de pendientes, etc... El profesor deberá buscar relacionar las ideas que surjan con los conocimientos de los alumnos sobre vectores.

PRR.1.2. *Calcula la pendiente de las siguientes rectas:*



Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos emiezen a ver rápidamente el vector director de las rectas y a relacionar con este la pendiente de las mismas.

Desarrollo de la actividad: Esperamos que los alumnos encuentren sin mucha dificultad el método de resolución de este problema, dado que llevan un tiempo trabajando de este modo.

PRR.1.3. *Ordena las rectas que llevan las siguientes direcciones según su pendiente sea mayor o menor:*

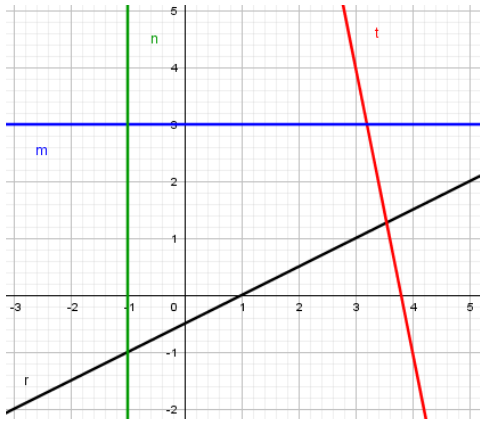
$$r \rightarrow \vec{v} = (3,1)\ ;\ s \rightarrow \vec{w} = (2,3);\ \ t \rightarrow \vec{u} = (2,1);\ \ m \rightarrow \vec{a} = (8,3);\ \ n \rightarrow \vec{b} = (16,8)$$

¿Cómo calcularías la pendiente de una recta d con dirección $\vec{d} = (d_1, d_2)$?

Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos lleguen a la conclusión de que la pendiente de una recta se puede dar observando su dirección y que no es más que la comparación de lo que avanza la recta en vertical y lo que avanza en horizontal.

Desarrollo de la actividad: En esta actividad los alumnos deberán explorar como afecta a la pendiente de una recta su dirección. Para ello los alumnos podrán buscar representar rectas con esas direcciones y compararlas, pero el objetivo es que lleguen a la conclusión de que dicha pendiente se obtiene dividiendo las componentes de su vector director.

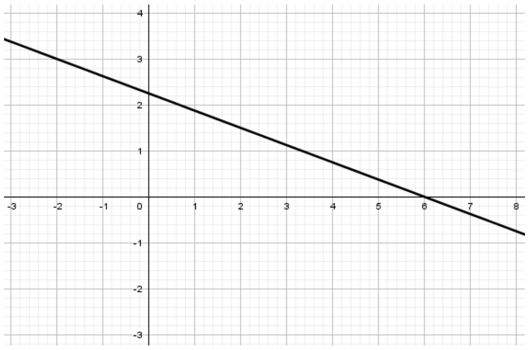
PRR.2.1. *Escribe la ecuación vectorial de las siguientes rectas:*



Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que una vez interiorizadas las partes que definen una recta, los alumnos busquen la expresión algebraica de unas rectas dadas gráficamente.

Desarrollo de la actividad: Esperamos que los alumnos sean capaces de resolver el ejercicio sin encontrar muchas dificultades.

PRR.3.1. *Escribe todas las ecuaciones de la siguiente recta:*



Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es completar al PRR.2.1. calculando todas las ecuaciones de una recta dada gráficamente.

Desarrollo de la actividad: Esperamos que los alumnos sean capaces de resolver el ejercicio sin encontrar muchas dificultades.

Problemas de Propiedades de la Recta (PPR)

PPR.1. Posición relativa de rectas.
PPR.2. Ángulos formados por rectas.
PPR.3. Distancia Punto-Recta.
PPR.4. Distancia entre Recta-Recta.

Diseño de algunos Problemas:

PPR.1.1. *En los siguientes casos para las rectas r y s, indica que posibles posiciones relativas pueden tener ambas rectas y por qué:*

– r *tiene a* $\vec{v} = (2,2)$ *como vector dirección y* s *tiene a* $\vec{u} = (0,2)$.

– *Tanto* r *como* s *tienen a* $\vec{v} = (2,1)$ *como vector dirección,* s *pasa por el punto* $Q = (4,0)$ *y* r *pasa por el punto* $P = (0,0)$.

– r *tiene a* $\vec{v} = (2,2)$ *como vector dirección y* s *tiene a* $\vec{u} = (0,2)$ *y las dos pasan por el punto* $P = (5,2)$.

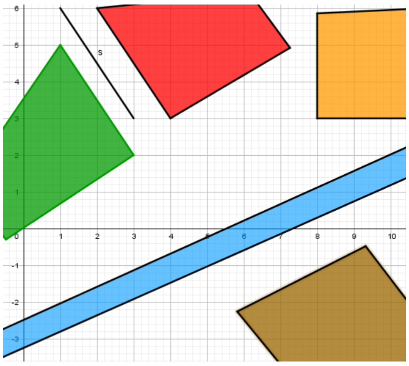
– r *tiene a* $\vec{v} = (2,1)$ *como vector dirección y* s *tiene a* $\vec{u} = (4,2)$ *y ambas rectas pasan por el punto* $P = (0,0)$.

– *Tanto* r *como* s *tienen a* $\vec{v} = (3,1)$ *como vector dirección,* s *pasa por el punto* $Q = (3,1)$ *y* r *pasa por el punto* $P = (0,0)$.

Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos vean las características que entran en juego a la hora de estudiar las posiciones relativas de dos rectas.

Desarrollo de la actividad: Los alumnos deberán buscar de distintas formas la respuesta para cada caso, puede que muchos alumnos busquen una representación de cada situación para resolverlo, esto es bueno, ya que verán cómo influyen los datos de cada caso en la situación. El profesor debe recopilar y poner en común los resultados y hacer hincapié en los puntos clave de cada situación.

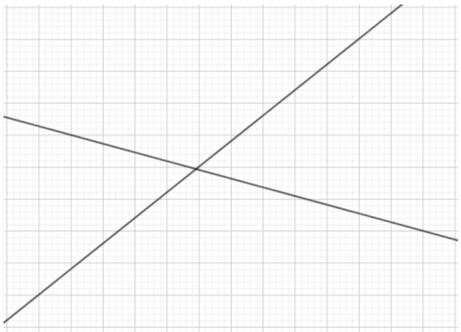
PPR.1.2. *El siguiente dibujo representa el mapa de un trozo de un pueblo, se quiere alargar la calle que pasa entre las casas verde y roja (representada por el segmento s) para unir el pueblo con la casa marrón, que se ha construido al otro lado del río, la calle debe ser perfectamente recta pero se quiere empezar a construir el puente que van a necesitar. Calcula el punto exacto en el que la calle llegará al río para saber dónde construir el puente.*



Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos aplique los conocimientos que tienen sobre la posición relativa de rectas para resolver un problema de la vida real mediante el cálculo de la intersección entre dos rectas.

Desarrollo de la actividad: Los alumnos deberán traducir el problema a un lenguaje algebraico y buscar unas rectas que solucionen el problema. El profesor deberá guiar a los alumnos para que interpreten el problema de forma geométrica y lo transformen en u problema de rectas y para que busquen estas rectas de una manera coherente.

PPR.2.1. *Calcula los ángulos que forman las dos rectas de la imagen:*



Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que lleguen a la conclusión de que para calcular ángulos entre rectas basta con calcular ángulos entre sus vectores directores. También tendrán que pensar cómo hacer para calcular los dos ángulos que se forman

Desarrollo de la actividad: Los alumnos deberán llegar a la conclusión de que deben estudiar los vectores directores, si no es así, el profesor les recordará que sabían calcular ángulos entre vectores y que miren si pueden encontrar alguna relación. Como en cada ejercicio, se irán poniendo en común las ideas más interesantes y se irán institucionalizando técnicas.

PPR.3.1. *Calcula la distancia del punto* $Q = (2, -3)$ *a la recta* $3x - 4y - 3 = 0$.

Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos usen técnica para calcular distancias entre recta y puntos.

Desarrollo de la actividad: Los alumnos deberán hacer ellos la construcción que han visto en la primera parte con los conocimientos y técnicas que han obtenido en actividades anteriores. El profesor deberá ir ayudando a los alumnos a hacer los razonamientos apoyándose en explicaciones gráficas en la pizarra para facilitar la visualización de los alumnos.

PPR.4.1. *Calcula la distancia de la recta que pasa por el punto* $P = (0,1)$ *con la dirección* $v = (2,5)$ *a la recta* $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{5}$.

Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos utilicen la técnica para calcular distancia entre dos rectas.

Desarrollo de la actividad: Los alumnos deberán resolver el problema utilizando las técnicas que hayan aprendido. El profesor deberá ir ayudando a los alumnos a hacer los razonamientos apoyándose en explicaciones gráficas en la pizarra para facilitar la visualización de los alumnos con el fin de asentar los conocimientos.

2. Modificaciones en la técnica inicial para la resolución de estos problemas

Hay muchas técnicas distintas para resolver los problemas propuestos. En los PV y en los PRR se sienta la base de las técnicas que ayudarán a resolver los PPR, por lo tanto no hay tanto una modificación de una técnica inicial, sino que se van construyendo las mismas apoyándose en las anteriores.

3. Metodología a seguir para la implementación en el aula

Los alumnos tendrán un *Cuaderno de Problemas y Teoría* en el que deberán resolver estos problemas así como dejar constancia de los contenidos teóricos y técnicas que vayamos institucionalizando. En muchos casos, los alumnos recibirán fotocopias con los problemas que se deberán ir resolviendo, estas fotocopias las recibirá cada alumno individualmente, independientemente de que para su resolución se proponga un trabajo en grupo o en parejas. Estas fotocopias, junto con su resolución y junto con las notas de teoría que exponga el profesor en clase, deberán guardarse de forma ordenada y entregarse cuando el profesor lo pida, para llevar una evaluación del trabajo de cada alumno y para obligar al trabajo continuo de los alumnos.

Los alumnos trabajarán individualmente, por parejas y en ocasiones en grupo, según indique el profesor, atendiendo a lo que sea más positivo para el funcionamiento de la clase. El profesor deberá ir sirviendo de guía y recopilando las ideas que vayan surgiendo en los distintos alumnos o grupos para acabar institucionalizando los contenidos. Podrán mandarse ejercicios para que los alumnos los realicen en casa con el fin de asentar conceptos o trabajar técnicas que parezcan no haber quedado suficientemente claras, estos ejercicios no será necesario que estén en el *Cuaderno de Problemas y Teoría*, pero sí que deberán constar en otro *Cuaderno de Ejercicios* con el que deberán contar los alumnos.

F. Sobre la técnicas

1. Distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula

Los ejercicios tendrán como fin asentar y afianzar las técnicas que hayan surgido de la resolución de los distintos campos de problemas, por ello estos ejercicios seguirán el mismo esquema que los campos de problemas (con un ejemplo en de cada tipo):

Ejercicios de Vectores (EV)

EV.1. Módulo de vectores

EV.2. Suma de vectores.

EV.3. Vectores linealmente independientes, bases de vectores y coordenadas en distintas bases.

EV.4. Producto escalar y ángulo entre vectores.

EJ1. *Calcula el módulo de los siguientes vectores*:

$a)\ \vec{u} = (0,3)$ $\quad b)\ \vec{v} = (3,6)$ $\quad c)\ \vec{w} = (\frac{3}{2}, 5)$

$d)\ \vec{w} = (\frac{4}{6}, -\frac{5}{2})$ $\quad e)\ \vec{w} = (-\frac{7}{2}, 0)$ $\quad f)\ \vec{w} = (5, -2)$

EJ2. *Suma los siguientes vectores:*

$a)\ \vec{u} = (1,3)\ con\ \vec{v} = (-3,6)$ $\quad c)\ \vec{w} = (\frac{3}{2}, 0)\ con\ \vec{o} = (-3,0)$

$d)\ \vec{a} = (\frac{4}{3}, -\frac{5}{2})\ con\ \vec{b} = (\frac{3}{5}, 1)$ $\quad f)\ \vec{c} = (5, -7)\ con\ \vec{d} = (-2, -\frac{6}{7})$

EJ3. *Pon los siguientes puntos en coordenadas de la base* $B = \left\{(3,0), \left(\frac{2}{3}, 1\right)\right\}$

$a)\ P = (2,7)$ $\quad b)\ Q = (3,0)$ $\quad c)\ D = (\frac{3}{2}, \frac{3}{5})$

EJ4. Calcula el ángulo que forman los siguientes vectores:

$a)\ \vec{u} = (1,3)\ con\ \vec{v} = (-1,4)$ $\quad c)\ \vec{w} = (\frac{3}{2}, 1)\ con\ \vec{o} = (-3,9)$

$d)\ \vec{a} = \left(\frac{4}{3}, 0\right)\ con\ \vec{b} = (\frac{3}{5}, \frac{1}{8})$ $\quad f)\ \vec{c} = (-1,7)\ con\ \vec{d} = (6, -\frac{2}{3})$

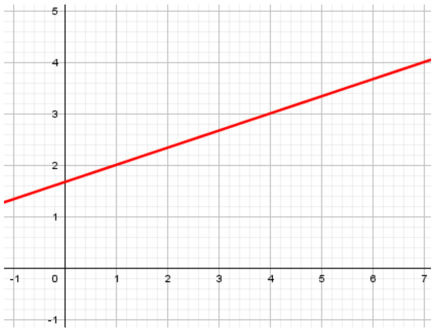
Ejercicios de Representación de la Recta (ERR)

ERR.1.Calculo de ecuaciones de rectas dada su representación gráfica.

ERR.2. Calculo de ecuaciones de rectas dados un punto y una dirección o dados dos puntos.

ERR.3. Calculo del resto de ecuaciones de una recta dada una de ellas.

EJ5. *Calcula las ecuaciones de la siguiente recta:*



EJ6. *Calculas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto* $P = (\frac{2}{3}, \frac{3}{8})$ *con dirección* $\vec{v} = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$.

EJ7. *Calcula el resto de ecuaciones de la recta cuya ecuación General es* $2x - 5y + 1 = 0$.

Ejercicios de Propiedades de la Recta (EPR)

EPR.1. Posición relativa de rectas.

EPR.2. Ángulos formados por rectas.

EPR.3. Distancia Punto-Recta.

EPR.4. Distancia entre Recta-Recta.

EJ8. *Calcula la posición relativa de la recta* $y = \frac{2}{3}(x + 2)$ *respecto a las siguientes rectas:*

a) $3x - y = 0$

b) $\frac{x}{5} = \frac{y-3}{2}$

c) $y = \frac{2}{3}x - 256$

EJ9. *Calcula el ángulo formado por la recta* $y = \frac{2}{3}(x + 2)$ *y cada una de las siguientes las siguientes:*

a) $3x - y = 0$

b) $\frac{x}{5} = \frac{y-3}{2}$

c) $y = \frac{2}{3}x$

EJ10. *Calcula la distancia del punto* $P = (1, 5)$ *a cada una de las siguientes rectas:*

a) $3x - 2y = 0$

b) $\frac{x}{2} = \frac{4-y}{3}$

c) $y = 256$

EJ11. *Calcula la distancia la recta* $(x, y) = (1,3) + k(2,3)$ *a cada una de las siguientes rectas:*

a) $y = \frac{3}{2}(x - 5)$

b) $\frac{x}{4} = \frac{4-y}{6}$

c) $y = 2x - 3$

2. Técnicas que se ejercitan con los ejercicios

A través de los campos de problemas que hemos diseñado, aparecen las siguientes técnicas que son las que se trabajarán a través de ejercicios:

Técnicas de Vectores (TV)

En el campo de problemas PV.1 aparecen las siguientes técnicas:

TV.1.1. Cálculo del módulo de un vector.

TV.1.2. Vectores linealmente independientes.

TV.1.3. Cálculo de bases de vectores.

En el campo de problemas PV.2 aparecen las siguientes técnicas:

TV.2.1. Suma de vectores.

TV.2.2. Cambio de coordenadas en distintas bases.

En el campo de problemas PV.3 aparecen las siguientes técnicas:

TV.3.1. Cálculo de vectores ortogonales.

TV.3.2. Cálculo de ángulos entre vectores.

TV.3.3. Calculo del producto escalar entre dos vectores.

Técnicas de Representación de la Recta (TRR)

En el campo de problemas PRR.1 aparecen las siguientes técnicas:

TRR.1.1. Cálculo del vector director de una recta.

TRR.1.2. Cálculo de la pendiente de una recta mediante su vector director.

TRR.1.3. Cálculo de la pendiente de una recta mediante cualquiera de sus ecuaciones.

En el campo de problemas PRR.2 aparecen las siguientes técnicas:

TRR.2.1. Deducción de la ecuación de una recta a partir de su gráfica buscando dos puntos de ésta y tomando uno de estos puntos como punto de la recta y el vector que une ambos como vector director.

En el campo de problemas PRR.3 aparecen las siguientes técnicas:

TRR.3.1. Deducción de todas las ecuaciones de la recta a partir de la ecuación vectorial.

TRR.3.2. Deducción de las ecuaciones vectorial, paramétrica, continua y punto-pendiente a partir de un punto y el vector director.

TRR.3.3. Deducción de cualquier ecuación a partir de una dada.

Técnicas de Propiedades de la Recta (TPR)

En el campo de problemas PPR.1 aparecen las siguientes técnicas:

TPR.1.1. Cálculo de la posición relativa de dos rectas mediante sus vectores directores.

TPR.1.2. Cálculo de la posición relativa de dos rectas mediante la resolución de un sistema formado por sus ecuaciones.

En el campo de problemas PPR.2 aparecen las siguientes técnicas:

TPR.2.1. Cálculo del ángulo de dos rectas a partir del ángulo formado por sus vectores directores.

TPR.2.2. Cálculo del ángulo formado por dos rectas a partir de sus pendientes.

En el campo de problemas PPR.4 aparecen las siguientes técnicas:

TPR.3.1. Cálculo de la distancia entre un punto y una recta mediante la aplicación de la fórmula.

TPR.3.2. Cálculo de la distancia entre un punto y una recta mediante el módulo vector que une el punto con la intersección de la recta ortogonal a la dada que pasa por el punto.

En el campo de problemas PPR.4 aparecen las siguientes técnicas:

TPR.4.1. Cálculo de la distancia entre dos rectas a partir de la distancia entre un punto de una de ellas y a otra recta.

TPR.4.2. Cálculo de la distancia entre dos rectas mediante el módulo del vector que une el punto de una de las rectas con la intersección de la recta perpendicular a ambas que pasa por ese punto y la otra recta.

3. Adecuación de las técnicas al campo de problemas asociado a cada objeto matemático

Las técnicas que se trabajan con los ejercicios se trabajan conforme aparecen con la resolución del campo de problemas, por lo que la mayoría de estas técnicas irán apareciendo conforme los alumnos resuelvan los problemas y estas mismas técnicas contribuirán a la construcción del conocimiento sobre el propio objeto matemático.

4. Metodología a seguir para la implementación en el aula

Como ya hemos indicado anteriormente, los alumnos deberán llevar un *Cuaderno de Ejercicios* en el que deberán ir dejando constancia, de manera ordenada, de la resolución de los ejercicios que proponga el profesor. Estos ejercicios se proporcionarán en fichas que se repartirán de forma individual y los alumnos deberán resolverlos de manera individual en los tiempos de clase que se habiliten para ello y en sus casas en el caso de que crean que es necesario.

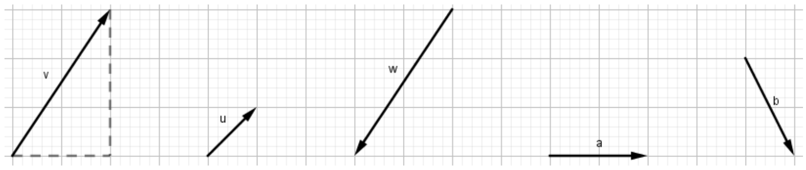
Estos cuadernos con ejercicios serán entregados al profesor cuando éste se los requiera, con el fin de ver el trabajo de cada alumno y observar posibles dificultades que puedan servir para repasar conceptos que parezcan no estar claros o pasar más deprisa otros que parezcan asimilados.

G. Sobre las tecnologías

1. Razonamiento mediante el que se van a justificar las técnicas

Algunas de las técnicas se van a dar sin una justificación previa, otras se justificarán mediante demostraciones que institucionalicen los razonamientos surgidos de la resolución de algún problema como los siguientes:

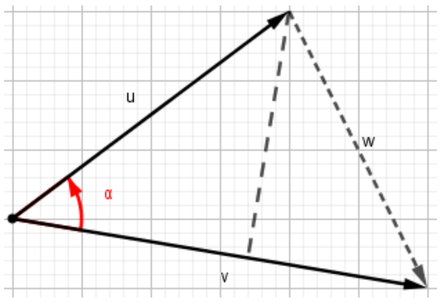
JV.1. *¿Cuál es la longitud de los siguientes vectores?*



Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos lleguen a la técnica TV.1.1.

Desarrollo de la actividad: La pista que da el primero de los vectores debería indicar a los alumnos que deben hacer uso del Teorema de Pitágoras. En el caso de que algún alumno sepa cómo calcular el módulo significará que ya tiene asimilada la técnica, aun así intentaremos que haga la deducción (o demostración) de que la técnica es como es.

JV.2. *Calcula ahora el ángulo que forman los vectores* $\vec{v} = (6, -1)$ *y* $\vec{u} = (4, 3)$.



Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos lleguen a la expresión del coseno del ángulo entre dos vectores mediante la resolución del triángulo que se forma. Este caso particular servirá para llegar a las técnicas TV.3.2, TV.3.3.

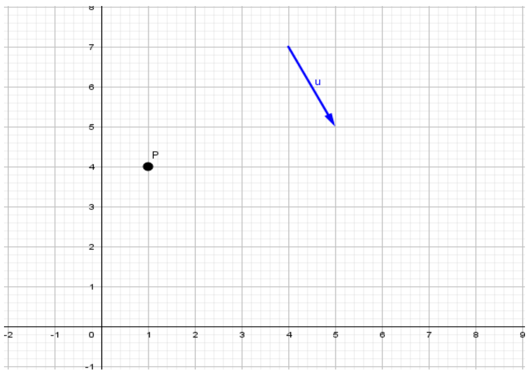
Desarrollo de la actividad: El problema está muy guiado con su planteamiento, por lo que esperamos que los alumnos planteen el problema como un problema típico de resolución de triángulos y que acaben llegando al valor del coseno del ángulo pedido.

JV.3. *Resuelve el problema anterior para el caso de dos vectores cuales quiera $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2)$. ¿Qué tendría que pasar para que esos vectores fuesen ortogonales?*

Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos lleguen a la expresión general del coseno del ángulo entre dos vectores. De esta manera, además, obtendremos la justificación de las técnicas generales TV.3.2, TV.3.3. Con la pregunta final acerca de la ortogonalidad se pretende llegar a la técnica TV.3.1.

Desarrollo de la actividad: Se animará a los alumnos a realizar los mismos cálculos que en el ejercicio anterior, pero en esta ocasión operando con parámetros para obtener una expresión general que permita resolver el problema para cualquier caso. Para buscar la ortogonalidad, primero tendrán que pensar lo que supone eso geométricamente y como afecta al coseno, después los alumnos deberán buscar consecuencias. Como en todos los ejercicios, se irán poniendo en común las ideas que vayan surgiendo del trabajo de los alumnos.

JRR.1. *Queremos representar todos los puntos de la recta que pasa por el punto de la imagen con la dirección $\vec{u}$ de forma que podamos calcular las coordenadas de cualquier punto de la misma. ¿Podrías dar una fórmula que nos solucione el problema?*



Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos lleguen a la ecuación vectorial de la recta mediante la exploración de la representación de los puntos de la recta dado un punto y su dirección, que se corresponde con la técnica TRR.2.1.

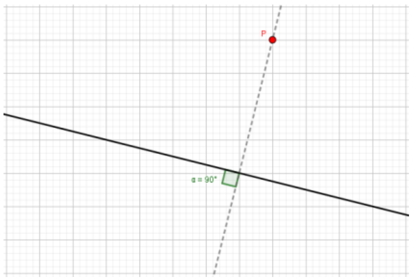
Desarrollo de la actividad: Los alumnos deberán explorar la construcción de los puntos de la recta con los datos dados. Se les orientara para empezar por dar unos cuantos puntos y escribir como llegan a ellos, para intentar así que se llegue a una expresión general que terminara por institucionalizarse por parte del profesor como la ecuación vectorial de una recta.

JRR.2. *A partir de la ecuación de la recta* $r \coloneqq (x, y) = (2,3) + k(3,1)$ *busca otras ecuaciones que representen esa misma recta.*

Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos deduzcan el resto de ecuaciones de la recta a partir de la vectorial que se corresponde con la técnica TRR.3.1 y a la vez vean las relaciones que hay entre unas y otras y entiendan bien las componentes y características de cada ecuación.

Desarrollo de la actividad: Los alumnos deberán explorar la ecuación para ir poco a poco deduciendo las distintas ecuaciones, el profesor deberá ir guiando a los alumnos que no consigan avanzar e ir poniendo en común las ideas que vayan surgiendo. Cuando surja una ecuación, el profesor deberá detenerse en ella, indicar como se llama y tomar unos minutos en explicar las características de la misma.

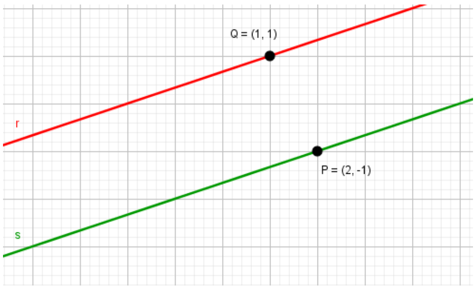
JPR.1. *Calcula la distancia del punto* P *a la recta* r.



Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos lleguen a las técnicas TPR.3.1, TPR.3.2.

Desarrollo de la actividad: Es un problema de un caso sencillo en el que los alumnos deberán ver rápidamente como buscar la distancia y verán que es el módulo de un vector perpendicular a la recta. El profesor deberá ir ayudando a los alumnos a hacer los razonamientos apoyándose en explicaciones gráficas en la pizarra para facilitar la visualización de los alumnos y para mostrar otras construcciones que lo resuelvan.

JPR.1. *Calcula la distancia que hay entre las siguientes rectas:*



Finalidad del Problema: El objetivo de este problema es que los alumnos lleguen a las técnicas TPR.4.1, TPR.4.2.

Desarrollo de la actividad: Es un problema en el que los alumnos deberán relacionar su resolución con el caso de distancia entre un punto y una recta. El profesor deberá ir guiando a los alumnos para hacer estas deducciones y una vez resuelto el problema institucionalizar su resolución.

En definitiva, las tecnologías que justificarán las técnicas serán las siguientes:

TEC.1. Definición de vector y sus propiedades.
TEC.2. Definición de vectores linealmente independientes.
TEC.3. Definición de coordenadas en una base.
TEC.4. Definición de vectores ortogonales.
TEC.5. Deducción del ángulo entre dos vectores mediante la resolución de triángulos rectángulos.
TEC.6. Definición de recta y sus propiedades.
TEC.7. Definición de recta como lugar geométrico.
TEC.8. Deducción de todas las ecuaciones de la recta a partir de la ecuación vectorial.
TEC.9. Relación entre dirección de las rectas y su posición relativa.
TEC.10. Ángulo entre rectas.

2. Responsabilidad de justificar las técnicas

La responsabilidad de institucionalizar los conocimientos y las técnicas será del profesor, pero en la mayoría de las ocasiones, para llegar a esta justificación los alumnos deberán haber realizado el ejercicio de resolver los problemas que dan lugar a las mismas. El profesor será el que se encargue de poner en común las conclusiones a las que han llegado los alumnos y de dar forma e institucionalizar con el rigor necesario los conocimientos surgidos de las mismas.

3. Diseño del proceso de institucionalización de los distintos aspectos de los objetos matemáticos

Las técnicas y las tecnologías, como venimos indicando, van a ir apareciendo durante la secuencia conforme los alumnos vayan resolviendo los problemas que dan lugar a las mismas. En la siguiente tabla mostramos la aparición de estas técnicas y tecnologías que aparecen en los problemas que hemos puesto como ejemplo anteriormente como idea de lo que se buscará en el diseño de los problemas de cada campo, en ella asociamos a cada problema que hemos diseñado en este trabajo con las técnicas que requiere y las tecnologías que refuerza o que puede aportar.

Problema	Técnicas	Tecnologías
PV.1.1	-	TEC.1
JV.1	TV.1.1	TEC.1
PV.1.2	TV.1.1	TEC.1
PV.2.1	TV.2.1	TEC.1
PV.2.2	TV.2.1	TEC.1
PV.2.3	TV.2.1	TEC.1
PV.2.4	TV.1.2, TV.1.3, TV.2.1, TV.2.2	TEC.2, TEC.3
PV.2.5	TV.2.1	-
PV.3.1	TV.1.2, TV.1.3, TV.2.1, TV.2.2	TEC.2, TEC.3
PV.4.1, JV.2, JV.3	TV.3.1, TV.3.2, TV.3.3	TEC.4, TEC.5
PV.4.2	TV.3.3	-
PRR.1.1	-	TEC.6
PRR.1.2	TRR.1.1, TRR.1.2	TEC.6
PRR.1.3	TRR.1.2	TEC.6
JRR.1	TRR.2.1	TEC.7
PRR.2.1	TRR.2.1	TEC.7
JRR.2	TRR.3.1, TRR.3.2, TRR.3.3	TEC.8

PRR.3.1	TRR.2.1, TRR.3.1, TRR.3.2, TRR.3.3	TEC.7, TEC.8
PPR.1.1	TPR.1.1	TEC.9
PPR.1.2	TPR.1.2	TEC.9
PPR.2.1	TPR.2.1, TPR.2.2	TEC.10
JPR.1	TPR.3.1, TPR.3.2	-
JPR.2, PPR.4.1	TPR.4.1, TPR.4.2	-

4. Metodología a seguir para la implementación en el aula

Cada tecnología irá apareciendo conforme se necesite justificar una nueva técnica, ya sea porque la técnica que conocen no es lo suficientemente sólida como para resolver el problema o porque necesiten una técnica más avanzada. En la mayoría de los casos, serán los alumnos los que vayan descubriendo dichas tecnologías y el profesor deberá ser el que las institucionalice y les dé el rigor necesario, en otras ocasiones, el profesor dará como tecnología una demostración matemática a partir de definiciones o propiedades conocidas que de la justificación del porqué de esa técnica, este será el caso de algunas de las fórmulas que resolverán casos generales de cálculo de determinados objetos como mediatrices o bisectrices, para los cuales obtendremos fórmulas que calcularan el objeto y a las cuales llegaremos a partir de la definición de los mismos utilizando técnicas que conocemos.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

1. Secuenciación de las actividades propuestas.

Todas las sesiones que se describen a continuación están pensadas para una clase ordinaria con una duración de 50 minutos, se indicará en cada caso el tiempo estimado para cada tarea planteada:

Sesión	Nombre de la sesión	Trabajo durante la sesión
1	*Actividades previas de vectores*	Actividades previas de vectores 1 y 2. (50’)
2	*Introducción de vectores*	Problema V1. (50’) Campo de problemas PV.1 (30’)

3	*Módulo de vectores*	Justificación de técnicas JV.1 y campo de problemas PV.1. (50’) Tarea para casa: Ejercicios de EV.1.
4	*Suma de vectores*	Problemas PV.2.1, PV.2.2., PV.2.3. y PV.2.5. (50’)
5	*Dependencia lineal y bases de vectores*	Introducción teórica. (15’-20’) Campo de problemas PV.3 (30’)
6	*Resolución de ejercicios (1)*	Ejercicios de EV.1., EV.2. y EV.3. (50’)
7	*Producto escalar y ángulo entre vectores*	Justificación de técnicas JV.2., JV.3. (50’) Tarea para casa: Problemas de PV.4., ejercicios de EV.3.
8	*Actividades previas de la recta*	Actividades previas de la recta 1, 2 y 3. Necesitaremos tabletas electrónicas con GeoGebra. (50’)
9	*Introducción a la recta y propiedades*	Problemas R1 y PRR.1.1. (15’) Recordatorio de otros cursos. (15’) Justificación JRR.1.1. y campo de problemas PRR.1. (20’)
10	*Representación de la recta*	Problema C1 (20’) Campo de problemas PRR.2. (30’) Tarea para casa: Problemas de PRR.2.
11	*Deducción de las distintas ecuaciones de la recta*	Problema JRR.2. (50’) Tarea para casa: Problemas de PRR.3.
12	*Resolución de ejercicios (2)*	Ejercicios de ERR.1., ERR.2. y ERR.3. (50’)
13	*Posición relativa de rectas*	Campo de problemas PPR.1. de posiciones relativas(30’) Campo de problemas PPR.1. de puntos de corte (20’)
14	*Ángulo entre rectas y distancia Punto-Recta*	Campo de problemas PPR.2. (20’) Justificación JPR.1. y campo de problemas PPR.3. (30’)

15	*Distancia Recta-Recta*	Justificación JPR.2. y campo de problemas PPR.4. (50’) Tarea para casa: ejercicios de EPR.3. y EPR.4.
16	*Repaso previo al examen*	Resolución de Problemas/Ejercicios/Dudas de cualquier tipo
17	*Examen escrito*	-
18	*Corrección de examen*	Resolución del examen. Gestión de resultados en el aula.

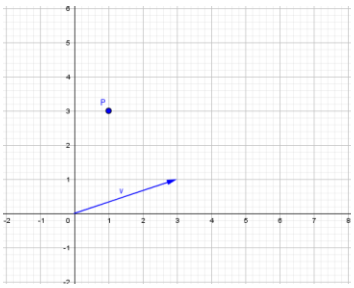
I. Sobre la evaluación

1. Diseño de la prueba escrita

La prueba escrita constará de 5 preguntas, cada pregunta tendrá un valor de 2 puntos, algunas preguntas tendrán distintos apartados que se corregirán por separado puntuando como se indica en cada caso. A la hora de corregir, se puntuará cada apartado sobre 10 y posteriormente se adaptará esa nota a la proporción que le corresponda.

Esta prueba se realizará en el horario de clase y deberá realizarse en 50’. Las preguntas de las que constará serán las siguientes:

1- Da las 6 ecuaciones de la recta r que pasa por el punto P con la dirección dada por el vector v. *(2 puntos)*



2- Dados los vectores $\vec{a} = (2, -6)$ y $\vec{b} = (3,1)$.

a) Comprueba si $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ es una base, en caso de que lo sea, comprueba si es una base ortogonal. *(1 punto)*

b) Pon el vector $\vec{v} = (1,3)$ en coordenadas de la base B. *(1 punto)*

3- Sea la recta $r \coloneqq (1,3) + k(3,1)$ y la recta $s \coloneqq y = \frac{1}{3}(x-2)$.

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s. *(0.5 puntos)*

b) Da la distancia entre ambas rectas. *(1 punto)*

c) ¿Cuál sería la distancia entre la recta r y la recta $t \coloneqq (0,1) + k(2,2)$? *(0.5 puntos)*

4- Dadas las rectas r y t del ejercicio 3:

a) Calcula el ángulo que forman las rectas r y t. *(1 punto)*

b) Calcula el punto Q de corte entre r y t y da la ecuación de una recta l que pase por este punto Q y que forme un ángulo de 90º con r. *(1 punto)*

5- Dados los puntos $A = (1,2)$, $B = (2,5)$ y $C = (6,1)$.

a) Calcula el perímetro del triángulo de vértices A, B y C. *(1 punto)*

b) Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C. *(1 punto)*

2. Aspectos a evaluar con cada pregunta

En la siguiente tabla indicamos los **Campos de problemas**, **Técnicas**, **Tecnologías** y **Estándares de aprendizaje** que se pueden trabajar con cada pregunta:

Pregunta	Campos de Problemas	Técnicas	Tecnologías	Estándares
1	PRR.1, PRR.2, PRR.3	TRR.2.1, TRR.3.1	TEC.6, TEC.7, TEC.8	Est.4.4.2
2	PV.2, PV.3	TV.1.2, TV.1.3, TV.2.1, TV.2.2	TEC.2, TEC.3, TEC.4	Est.4.3.1
3	PPR.1, PPR.3, PPR.4	TPR.1.1, TPR.1.2, TPR.4.1, TPR.4.2	TEC.7, TEC.8	Est.4.4.1, Est.4.5.1
4	PPR.1, PPR.2	TPR.2.1, TPR.2.2	TEC.9, TEC.10	Est.4.4.1, Est.4.4.2, Est.4.5.1
5	PV.1, PV.4, PPR.3	TV.1.1, TV.3.1, TV.3.3, TRR.2.1, TPR.1.2	TEC.1, TEC.4, TEC.7, TEC.9	Est.4.3.1, Est.4.4.1, Est.4.4.2, Est.4.5.1

3. Diferentes respuestas esperadas y posibles errores.

Ejercicio 1:

Hay varias formas mediante las cuales podemos los alumnos podrían llegar a la respuesta de este ejercicio, pero principalmente esperamos que se divida en dos:

1- Deducir, mediante la imagen gráfica, la ecuación vectorial de la recta y construir el resto a partir de ella.

Posibles errores:

- Confundir punto con vector en la ecuación vectorial.
- Fallos al dar el punto o el vector en coordenadas cartesianas.
- Fallos aritméticos o algebraicos en el proceso.
- Confundir nombres de las ecuaciones.

2- Deducir directamente, haciendo uso del punto y del vector, las ecuaciones vectorial, paramétrica, y continua. A partir de la continua deducir el resto. También podría haber algún alumno que calculase el vector normal a la recta y junto con el punto dado, deducir la ecuación general.

Posibles errores:

- Fallos al dar el punto o el vector en coordenadas cartesianas.
- Fallos aritméticos o algebraicos en el proceso.
- Confundir nombres de las ecuaciones.

Ejercicio 2.a):

Podemos esperar que los alumnos contesten a esta pregunta indicando que los dos vectores son linealmente independientes pero que no son ortogonales, por lo que sí que forman una base pero no es ortogonal. Para llegar a que no son ortogonales podrán comprobarlo de dos formas:

1- Haciendo su producto escalar y viendo que es distinto de 0.

Posibles errores:

- No recordar correctamente como se calcula el producto escalar y sumar las componentes en lugar de restar
- Fallos aritméticos en el proceso.

2- Dando un vector ortogonal a uno de los dos y viendo que es linealmente independiente con el otro.

<u>Posibles errores:</u>

- No recordar correctamente como se calcula un vector ortogonal.
- Fallos aritméticos o algebraicos en el proceso.

<u>Ejercicio 2.b):</u>

Solo hay una forma de solucionar este ejercicio y es planteando y resolviendo el sistema de ecuaciones que lo resuelve.

<u>Posibles errores:</u>

- Fallos al plantear el sistema.
- No dar la solución como coordenadas.
- Fallos aritméticos o algebraicos.

<u>Ejercicio 3.a):</u>

Principalmente hay dos formas de las que podrán resolver este ejercicio.

1- La forma más rápida es buscar un vector director (o el normal) de ambas rectas y ver si son o no linealmente independientes, de esta manera se llegaría a que no son independientes por lo que las rectas pueden ser paralelas o coincidentes, solo faltara ver si un punto de una de las rectas está o no en la otra, al ver que no está, se llega a que son paralelas.

<u>Posibles errores:</u>

- Fallos al buscar el vector director (o el normal).
- Fallos aritméticos en el proceso.

2- La otra forma es plantear un sistema con las ecuaciones de ambas rectas y llegar a la conclusión de que dicho sistema no tiene solución y por lo tanto son rectas paralelas.

<u>Posibles errores:</u>

- Fallos al plantear el sistema con las ecuaciones de la recta, por no calcular las ecuaciones adecuadas.
- Fallos al interpretar los resultados.
- Fallos aritméticos o algebraicos en el proceso.

Ejercicio 3.b) y 3.c):

En el caso de ambos apartados, los alumnos podrán calcular la distancia de las siguientes formas:

1- Utilizar directamente la fórmula de la distancia entre dos rectas y dar el resultado.

Posibles errores:

- No recordar la formula correctamente.
- Recordar la formula pero no entenderla y no saber utilizarla.
- Fallos aritméticos o algebraicos en el proceso.

2- En el caso de no saberse dicha fórmula, en el 3.b) podrían plantear la situación por construcción, calculando el vector ortogonal a las rectas y construir la recta que pasase por un punto de una de ellas con esa dirección ortogonal, posteriormente calcular la intersección de esta con la otra recta y por último calcular el módulo del vector que une el punto de la otra recta con este punto de intersección.

Posibles errores:

- Cometer fallos en la construcción.
- Fallos aritméticos o algebraicos en el proceso.
- No saber interpretar los resultados.

3- En el 3.a) la opción más rápida es ver que los vectores directores son distintos, por lo que las rectas se cortarán y la distancia será 0.

Posibles errores:

- Fallos al calcular los vectores.
- No saber interpretar correctamente los resultados.

Ejercicio 4.a):

La hay dos formas de responder a esta pregunta:

1- Mediante la definición del producto escalar, despejando el ángulo del coseno.

Posibles errores:

- No recordar la formula correctamente.
- Recordar la formula pero no entenderla y no saber utilizarla.

- Fallos aritméticos o algebraicos en el proceso.

2- Mediante la fórmula que relaciona la tangente del ángulo con las pendientes de las rectas:

$$tg(\widehat{r,s}) = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}$$

<u>Posibles errores:</u>

- No recordar la formula correctamente.
- Recordar la formula pero no entenderla y no saber utilizarla.
- Fallos aritméticos o algebraicos en el proceso.

3- Si algún alumno no recuerda estas fórmulas, quizás sea capaz de deducir alguna haciendo uso de sus conocimientos de trigonometría y de resolución de triángulos rectángulos.

<u>Posibles errores:</u>

- Fallos en el planteamiento de la situación.
- Fallos aritméticos o algebraicos en el proceso.
- No saber interpretar los resultados del proceso.

<u>Ejercicio 4.b):</u>

Para resolver este ejercicio esperamos las siguientes respuestas:

1- Resolver el sistema que da el punto de corte y calcular como vector director el vector ortogonal al vector director de r.

<u>Posibles errores:</u>

- Fallos en la resolución del sistema.
- No calcular el vector ortogonal correctamente.
- Fallos aritméticos o algebraicos en el proceso.

2- Utilizar la ecuación del coseno entre dos rectas para sacar el vector director de la recta pedida.

<u>Posibles errores:</u>

Es un proceso más costoso de plantear y de entender y sería difícil que algún alumno llegase a la solución por este camino

- Fallos en el planteamiento de la situación o en la comprensión del planteamiento.
- Fallos aritméticos o algebraicos en el proceso.

Ejercicio 5.a):

Hay distintas formas de construir los vectores, pero al final todos los alumnos deben dar la respuesta como la suma de los módulos de tres vectores, podrán darlo como un numero decimal redondeado o dejarlo indicado sin realizar las cuentas.

Posibles errores:

- Fallos en el cálculo de los vectores.
- Fallos al no recordar correctamente lo que es el perímetro.
- Fallos aritméticos en el proceso.

Ejercicio 5.b):

Para calcular el área los alumnos deberán buscar la altura del triángulo, para ello hay dos opciones:

1- La opción más rápida es elegir un vértice y calcular la distancia a la recta que forma el lado opuesto, lo que les dará el valor de la altura. Deberán tener en cuenta que ese lado opuesto será la base y sustituir en la fórmula.

Posibles errores:

- Fallos en el planteamiento de la situación.
- Fallos al no recordar alguna fórmula correctamente.
- No elegir el vértice o la base adecuados.
- No recordar la fórmula del área de un triángulo.
- Fallos aritméticos o algebraicos en el proceso.
- No saber interpretar los resultados del proceso.

2- Construir la altura geométricamente, primero eligiendo una base, posteriormente construyendo el vector ortogonal a esta, con este vector como director y el vértice opuesto como punto construir una recta que intersecará a la recta de la base en un punto y el modulo del vector que una este punto con el vértice opuesto nos dará la altura, solo faltará sustituir en la fórmula del área.

Posibles errores:

- Fallos en el planteamiento de la situación.
- No elegir el vértice o la base adecuados.
- No recordar la fórmula del área de un triángulo.
- Fallos aritméticos o algebraicos en el proceso.
- No saber interpretar los resultados del proceso.

4. Criterios de calificación

Para corregir esta prueba proponemos el método de tercios, en el vamos a dividir las tareas a calificar, de la misma forma que hemos indicado anteriormente, en tareas principales, tareas auxiliares específicas y tareas auxiliares generales. Cada apartado se puntuará sobre 10 y se restará puntuación por cada fallo de tal forma que por fallos en tareas auxiliares generales solo se podrá restar hasta 1/3 de la puntuación, por tareas auxiliares específicas solo se podrá restar hasta 2/3 de la puntuación conjuntamente con las tareas generales y por las tareas principales se podrá restar hasta la totalidad de la pregunta. De esta manera, si el alumno conoce métodos para resolver los ejercicios, aunque no consiga ningún resultado, tendrá una puntuación mínima de 1/3 de la pregunta. Otra de las características será que cada error aritmético/algebraico se penalizará con 1/12 de la puntuación, con un máximo de 4 penalizaciones ya que solo podrá penalizarse 1/3 de la puntuación con esta serie de errores.

J. Bibliografía

González Urbaneja, P. M. (2003). *Los orígenes de la Geometría Analítica*. Tenerife: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia.

González Urbaneja, P. M. (2007). Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *SIGMA*, 30, 205-236.

Gamboa Araya, R. y Vargas Vargas, G. (2012). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27, 74-94.

Bescós i Escruela, E. y Pena i Terrén, Z. (2011). *Matemáticas 1 Bachillerato.* Madrid: Oxford Unversity Press.

Deusa, M., Esteve, R., Montesinos, P., Ramírez, A. J. y Vives, E. (2008). *Matemáticas 1 Bachillerato.* Valencia: ECIR.

Antonio, M., González, L., Lorenzo J., Molano, A., del Río, J., Santos, D. y de Vicente, M. (2008). *Matemáticas 1 Bachillerato.* Madrid: Santillana Educación.

González García, C., Llorente Medrano, J. y Ruiz Jiménez, M. J. (2006). *Matemáticas 1, 1º Bachillerato.* Madrid: Editex.