Universidad Zaragoza
1542

Trabajo Fin de Máster

Funciones: una propuesta didáctica en 3º ESO Matemáticas orientadas a Enseñanzas Académicas

Functions: A didactic proposal in 3rd ESO Mathematics oriented to Academic Teachings

Autor/es

Enrique Ramas Ferrández

Director/es

Rafael Escolano Vizcarra

Facultad de Educación

Año 2019

Índice

A. SOBRE LA DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR

El tema elegido para este Trabajo Fin de Máster se centra en el tema de funciones de 3º de Educación Secundaria Obligatoria en la versión de Matemáticas Académicas, ya que considero de gran importancia académica y social el conocimiento de las mismas.

Por un lado, todos estamos familiarizados de alguna manera con la representación de gráficas, vistas habitualmente en los medios de comunicación, y haciéndose cada vez más hueco en las nuevas tecnologías como Internet. Por otro lado, el continuo crecimiento de los alumnos que estudian ciencias o estudios relacionados con la tecnología, nos hace ver la necesidad de que los alumnos aprendan y manejen con soltura rangos de datos cualitativos o cuantitativos, puesto que estos conocimientos se van a ver implementados en cursos superiores.

El concepto de función es importante porque permite modelizar fenómenos de cambio que acontecen en nuestro ámbito cotidiano y para ello se sirve de diferentes lenguajes o sistemas de representación: verbal (textos), numérico (tablas), gráfico (gráficas cartesianas) y algebraico (fórmulas). El propósito de todos estos lenguajes es informar del comportamiento del fenómeno o situación que modeliza la función. Ahora bien hay que tener en cuenta que cada uno de estos sistemas de representación es más adecuado para poner de manifiesto determinadas características de la función.

Los campos de problemas y técnicas se van a basar en los distintos procesos de interacción-traducción entre formas de representar una función, siguiendo la esquematización de Janvier (1987).

A lo largo de la realización de los problemas propuestos surgirá la necesidad de presentar técnicas ya conocidas o técnicas a aprender. Estas técnicas serán justificadas por la definición que tenga cada concepto matemático, aunque en muchas ocasiones no se profundizará tanto ya en el nivel académico de los alumnos en 3º ESO por ser básico no es necesario entrar a desarrollar, en profundidad, las tecnologías asociadas a las técnicas y campos de problemas presentados en este trabajo.

B. SOBRE EL ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO

B.1 Justificación escolar del objeto matemático

Los alumnos necesitan conocer las funciones, ya que les servirá para analizar, interpretar y tener una visión crítica de la cantidad de datos y gráficos que podemos ver actualmente en los medios de comunicación.

Las funciones ocupan un papel fundamental gracias a su uso común en distintos medios. Los alumnos están entrando en la era de la tecnología y la información, y nuestro deber es enseñarles a ser personas críticas y, para ello, es necesario enseñar el concepto de función y su comportamiento matemático.

Presentadas en un bloque independiente del Currículo escolar, las funciones representan un paso fundamental hacia el estudio del bachillerato donde ocupan un lugar amplio e importante tanto en Matemáticas Académicas como aplicadas a las Ciencias Sociales.

Entendemos que el currículo aragonés de las "Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas" enfatiza el valor formativo de las matemáticas, y en particular del bloque de funciones, cuando informa de las tres finalidades de la enseñanza de las matemáticas en el 2º ciclo de la ESO:

"*El carácter instrumental de la materia la hace indispensable para interpretar la realidad y expresar los fenómenos sociales, científicos y técnicos de un mundo cada vez más complejo. Contribuyen de forma especial a la comprensión de los fenómenos que nos rodean, ya que desarrollan la capacidad de simplificar, abstraer y argumentar. El alumnado que curse esta materia profundizará en el desarrollo de las habilidades de pensamiento matemático. Concretamente, en la capacidad de analizar e investigar, interpretar y comunicar matemáticamente dichos fenómenos y problemas en distintos contextos, así como de proporcionar soluciones prácticas a los mismos. También debe valorar las posibilidades de aplicación práctica del conocimiento matemático tanto para el enriquecimiento personal como para la valoración de su papel en el progreso de la humanidad.*" (BOA, 02-06-16, p. 13048).

B.2 Campos de problemas, técnicas y tecnologías habituales

Con el fin de presentar el campo de problemas que se enseña habitualmente en 3º ESO, en primer lugar voy a escribir los contenidos mínimos dictados por la Orden ECD/489/2016 correspondiente al bloque IV: Funciones: (BOA, 02-06-16, p. 13061-13062).

- Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.
- Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.
- Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
- Expresiones de la ecuación de la recta.
- Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.

En segundo lugar, se presenta el análisis de los temas 11 y 12 que el libro de Santillana (2015) de 3º ESO dedica al bloque de funciones.

El libro de texto de la editorial Santillana contextualiza el tema 11, que denomina "funciones", aludiendo en la página de introducción la historia de la aviación, para la cual muestra una representación gráfica Altura-Distancia de uno de los primeros vuelos.

En el apartado 1 del tema introduce el concepto de función como la relación entre dos magnitudes o variables numéricas x e y, de modo que a cada valor de x, le tiene que corresponder un único valor para y, siendo x la variable independiente e y la dependiente. Después ilustra el concepto con dos ejemplos, uno que cumple la definición de función y otro no la cumple.

En el apartado 2 que titula "Formas de expresar una función" presenta la representación verbal (definida mediante un enunciado), algebraica (definida mediante una ecuación), tabular y gráfica de una función. En este sentido el texto recoge las cuatro representaciones de las funciones; sin embargo, el estudio de las traslaciones entre estas representaciones se reduce exclusivamente al paso de la representación verbal a la representación gráfica al plantear el siguiente problema: "un coche circula por una carretera a 90 km/h. Representa gráficamente la función que relaciona el tiempo que lleva circulando el coche con la distancia que recorre".

Llegados a este punto, cabe mencionar la ausencia de un estudio en profundidad de las traslaciones entre las diferentes representaciones de funciones a los que hizo referencia Janvier (1978) en sus trabajos sobre la enseñanza de las funciones.

En el tercer y último apartado que titula "Características de una función" el texto presenta los siguientes contenidos:

3.1 Dominio y recorrido.

3.2 Continuidad

3.3 Puntos de corte con los ejes

3.4 Crecimiento y decrecimiento

3.5 Máximos y mínimos

3.6 Periodicidad

3.7 Simetría

En el desarrollo de los apartados que acabamos de señalar los autores optan por presentar técnicas para guiar a los alumnos en el análisis de estas características particulares de las funciones y se echa en falta un tratamiento más conceptual de la idea de relación funcional.

Termina el tema proponiendo la interpretación de un gráfico de una función que muestra la evolución de la temperatura de un paciente durante 24 horas, tomada cada 2 horas. Con esta actividad los autores tratan de repasar los conceptos que ha presentado anteriormente en el apartado 3.

En las penúltima página el tema 11 (nº 238) bajo el título "Competencia matemática" el texto plantea problemas de mayor nivel de dificultad, que consideramos más interesantes porque tratan aspectos conceptuales de la función como la modelización de situaciones de la vida cotidiana o el estudio de la variación de la altura que alcanzan recipientes de diferentes formas en función del volumen de agua con el que se vaya llenando. Ahora bien, resulta muy escasa la propuesta de problemas de este tipo.

En el tema 12 el libro de texto repasa las funciones lineales, que habían presentado en segundo curso, e introduce las funciones cuadráticas.

En el repaso de las funciones lineales los autores focalizan la atención en el paso de la representación simbólica a la gráfica (p. 245) y al revés, de la gráfica a la simbólica (p. 246).

En los apartados 2 y 3 introducen la ecuación punto-pendiente de recta y la ecuación general de recta. De nuevo los autores ejemplifican las técnicas de traslación entre representaciones simbólicas y gráficas de funciones lineales.

En el apartado 4 presenta la función cuadrática, indicando que su representación gráfica es una parábola. Seguidamente expone, sin justificar, las siguientes características de las representaciones gráficas de las funciones del tipo $y=ax^2+bx+c$:

Vértice: Punto en el que la función pasa de ser creciente a decreciente o viceversa. Es un máximo o un mínimo de la función.

Eje de simetría: Recta que pasa por el vértice, y es paralela al eje Y, la cual divide la curva en dos partes simétricas.

Son continuas en todos los números reales.

Si $a>0$, las ramas de la parábola van hacia arriba, si $a<0$ van hacia abajo.

Cuando mayor sea $|a|$, más cerradas serán sus ramas.

En el siguiente sub-apartado presenta, sin justificar, las coordenadas del vértice de la parábola que representa gráficamente a las funciones cuadráticas: $(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a})$, lo que le permite plantear ejercicios descontextualizados de traslaciones entre representaciones simbólicas y gráficas.

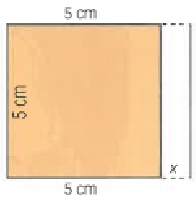
En el último apartado titulado "5. Aplicaciones" presenta dos problemas contextualizados para ejemplificar el uso de una función lineal y de una función cuadrática respectivamente. Ahora bien, mientras en el primer caso los alumnos tienen que hallar la función lineal, en el segundo caso el propio enunciado muestra la representación simbólica de la función cuadrática de modo que, de nuevo, la tarea consiste en aplicar la técnica de traslación entre la ecuación y la gráfica de la función cuadrática.

A pesar de que al final del tema 12 los autores proponen abundantes actividades bajo el epígrafe "Actividades finales" cabe señalar que entre las que se refieren las funciones cuadráticas tan sólo encontramos un problema de modelización en la p. 259 del libro de texto, y que dice así:

A partir de un cuadrado de lado 5 cm se construye un rectángulo según indica la figura. Escribe y representa la función que proporciona, en función de x:

a) El perímetro del rectángulo.

b) El área del rectángulo.



Observamos que si bien los autores del texto plantean problemas en cuya resolución son precisas las funciones lineales, no hacen lo mismo en el caso de las funciones cuadráticas. La propuesta de enseñanza queda reducida a la aplicación de técnicas para pasar de la representación simbólica a la representación gráficas de funciones cuadráticas, lo que supone a nuestro juicio una limitación muy importante en el aprendizaje de la este tipo de funciones.

En resumen, hemos visto como el libro trabaja las funciones de una forma excesivamente mecánica, mostrando unos conceptos a aprender y unas técnicas a desarrollar que deberán ser repetidas por los alumnos. Pese a que el libro detalla las cuatro formas distintas de representar una función, trabaja poco las traslaciones entre las diferentes representaciones y opta por priorizar el paso de la representación algebraica a la gráfica. Las situaciones de modelización que presenta están situadas al final del tema y hacen referencia exclusivamente a las funciones lineales.

Aunque nuestro análisis se ha centrado en la propuesta de una editorial concreta es muy posible que la enseñanza de las funciones recaiga, en exceso, en el paso de la representación algebraica a la representación gráfica y en tratar los aspectos conceptuales de la función prioritariamente desde la representación algebraica. Para evitar que los estudiantes se limiten a aplicar técnicas sin entender en buena medida el por qué las realizan pensamos que resultaría más adecuado organizar la enseñanza facilitando las traslaciones entre las diferentes representaciones de una función.

B.3 Consecuencias del aprendizaje de funciones en el alumnado

Además de las dificultades ocasionadas por las prácticas de enseñanza cabe mencionar las dificultades asociadas a la naturaleza del objeto matemático y al momento en el que se aborda su enseñanza. Deulofeu, J. (2001) alerta de la dificultad que supone abordar la enseñanza de las funciones en el segundo ciclo de la ESO “al tratar de compatibilizar la adquisición de unos procedimientos básicos relativos, principalmente, al lenguaje numérico y gráfico (fundamentalmente interpretar y construir, así como traducir de un lenguaje a otro), indispensables para cualquier alumno, donde las funciones se encuentran todavía en un estado primitivo y son tratadas principalmente como procesos, con una introducción al concepto de función de carácter mucho más conceptual y centrado en las matemáticas y, al mismo tiempo, capacitar al alumnado para utilizar las funciones elementales en la resolución de situaciones y problemas contextualizados, introduciendo, además, el lenguaje algebraico” (p. 370).

Dado que en este nivel educativo es aconsejable no introducir la función de modo formal en las clases de matemáticas se suelen introducir el concepto a partir de ejemplos concretos para modelizar situaciones de cambio muy básicas a partir de su representación algebraica y gráfica de la función que la modeliza. Sin embargo, estos ejemplos llevan a los alumnos a construir concepciones muy limitadas del concepto de función que obstaculizan una buena comprensión del mismo. Así, se detectan concepciones inadecuadas como que las gráficas de las funciones deben ser “suaves” y formadas por líneas rectas o curvas conocidas, que el dominio de las funciones, salvo las racionales, debe ser el conjunto de los números reales, que una función debe estar definida por una sola fórmula, o que el campo de situaciones en la que se puede establecer una relación entre dos variable se limita a unos pocos casos concretos.

Otro problema que experimentan los alumnos es el de decidir si un gráfico ha de representarse de forma continua o no. Acostumbrados a ver gráficas continuas como ejemplo (en gran parte a causa de trabajar con la expresión algebraica de las mismas) los alumnos tienden a representar los puntos que se obtienen de una tabla de valores para después unirlos. Por tanto, trataremos ejemplos de ambos tipos de funciones con la finalidad de que los alumnos trabajen con soltura tanto las representaciones continuas como discretas.

Por estos motivos, Deulofeu (2001) propone abordar la enseñanza de la función, no de modo aislado, sino relacionando las diferentes representaciones de la función, que son:

-Descripción verbal, utiliza el lenguaje común para hacer una descripción generalmente cualitativa de la función.

-Tabla de valores, presenta una visión cuantitativa en la que se identifican los pares ordenados de forma parcial debido a la imposibilidad de mostrar la totalidad de datos.

-Gráfica, proporciona una visión global y completa de la función tanto a nivel cualitativo como cuantitativo, nos permite apreciar características como el crecimiento, continuidad, máximos, mínimos, cambios bruscos de la función, etc.

-Ecuación o fórmula algebraica, proporciona una visión cuantitativa y cualitativa, general de la función, también permite observar las características del crecimiento, continuidad, máximos, mínimos y posibles cambios de una función mediante el uso de métodos algebraicos.

A partir de una amplia revisión bibliográfica de estudios sobre la enseñanza de la función Burgos y Flores (2017, p. 72) reflexionan sobre cómo debería ser la enseñanza las funciones, después de haber estudiado las creencias de profesores de matemáticas en ejercicio, y que resumen del siguiente modo:

“los estudiantes mecanizan los procedimientos y no comprenden los conceptos, de forma que no pueden representar o reconocer (interpretar) las características de la función en la gráfica”

Además, estos investigadores responden a la cuestión de cómo pueden trabajar en clase las funciones para que la visualización permita la interpretación inicial de los conceptos y su definición formal se alcance como parte de un aprendizaje significativo de los mismos a través de los distintos sistemas de representación del siguiente modo:

- evitar tratar las representaciones gráficas y algebraicas como sistemas simbólicos distintos y apoyarse en ambas desde el inicio para construir el concepto de función.

- usar la representación gráfica como medio para generar la visualización inicial de los conceptos, de modo que los estudiantes vayan incorporando los nuevos conceptos asociados a las funciones a través de la conjunción de los distintos sistemas de representación.

- plantear tareas donde se enuncien propiedades de una función exclusivamente a través de su representación gráfica

- dar mayor peso en la práctica a la interpretación cualitativa de gráficos que modelizan situaciones reales, buscando en los estudiantes el interés por la representación gráfica, e incentivando en ellos el uso de estrategias intuitivas descriptivas.

- incorporar en la práctica docente software, como puede ser GeoGebra, que facilite la construcción y estudio de las representaciones gráficas, evitando las limitaciones que conlleva una enseñanza basada únicamente en la representación con lápiz y papel. (Burgos y Flores, 2017, p. 72)

Por lo tanto, a partir de los trabajos de Janvier (1978); Sierra, González y López, (1998); Shell Centre for Mathematical Education (1990), Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990), Deulofeu, J (2001) vamos a abordar la enseñanza de la funciones en tercer curso de ESO a partir del planteamiento de situaciones problemáticas en cuya resolución los alumnos tengan que establecer relaciones entre los diferentes sistemas de representación de la función que modeliza la situación. Además, nos proponemos priorizar el trabajo de visualización y construcción de la representación gráfica para describir las características globales de una función (dominio, crecimiento, decrecimiento, continuidad, etc) en línea con lo que sugieren Burgos, M. y Flores, P. (2017) y otros autores. En este sentido, Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990) proponen tomar las gráficas cartesianas como eje conductor de la propuesta de enseñanza que Azcárate, C. (2001) articula en una publicación posterior de la editorial Praxis a la que haremos referencia posteriormente. Nos parece muy oportuna esta propuesta de modo que en los campos de problemas vamos a trabajar particularmente la interpretación de gráficas. En cuanto a los tipos de funciones a estudiar, nos proponemos repasar las funciones de primer grado e introducir en este curso las funciones cuadráticas.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

Los alumnos necesitarán tener conocimientos que se supone que han aprendido en cursos precedentes para abordar con garantías de éxito el tema de funciones.

Suponemos que los alumnos conocen aspectos fundamentales para abordar la enseñanza de las funciones con cierta garantía como es el conocimiento de la recta real y la colocación de números enteros, racionales y naturales sobre la misma con soltura. También habrán aprendido a trabajar con sistemas de ecuaciones durante los cursos anteriores y en el actual, lo cual ayudará para trabajar la representación de rectas y los puntos de corte entre funciones muy elementales..

Dado que los alumnos han recibido enseñanza del bloque de funciones en cursos precedentes. Podemos pensar que conocen el papel que juega la representación gráfica de una función. Intuimos, por tanto, que los alumnos deberían tener cierta facilidad para comprender la razón de ser del objeto matemático como consecuencia de la interpretación de representaciones gráficas de funciones que aparecen en los medios de comunicación social. Así, los contenidos que aparecen en el currículo oficial de Aragón en referencia al bloque de funciones en el curso de 2º de Educación Secundaria son:

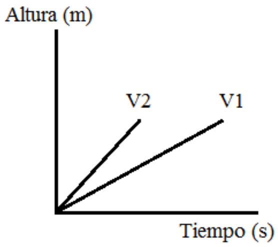
- Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.
- El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas.
- Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.
- Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas

Para conocer el nivel real de los alumnos en lo referente a las funciones, se realizará una prueba inicial escrita sencilla que no contará para la calificación de la asignatura, sino que servirá para detectar eventuales dificultades y adaptar, en su caso, la propuesta de enseñanza.

La prueba constará de tres problemas que mostramos a continuación:

Problema 1: *Se desea conocer la altura a la que se encuentra una esquiadora que sube una ladera montada en un telesilla que lleva velocidad constante. ¿Sabrías representar esta situación altura-tiempo? ¿Influye la velocidad del telesilla en la representación? Haz una representación e indica que sucedería si el telesilla tuviera mayor velocidad.*

Dado que la funciones modelizan situaciones de cambio y que los alumnos han estudiado en segundo curso las funciones lineales y que deberían saber representar este tipo de funciones sobre una gráfica cartesiana parece razonable indagar si saben representar esta situación mediante dos funciones lineales dibujándolas del siguiente modo:



La primera gráfica representa a la esquiadora subiendo con una velocidad V1, mientras que la segunda gráfica muestra a la esquiadora subiendo a mayor velocidad V2 y se observa que la pendiente de la función es mayor en este caso. Este problema aborda un aspecto importante en este trabajo como es la representación gráfica de una función definida mediante un enunciado verbal.

Problema 2: *"El pluviómetro"* (Azcárate, 2001, p. 242/64.38.35-36):

Durante 3 horas de un día, se han recogido los siguientes datos en el pluviómetro del instituto:

Tiempo (min.)	*15*	*30*	*45*	*60*	*90*	*120*	*150*	*180*
Agua (litros)	*10*	*25*	*40*	*50*	*70*	*90*	*120*	*130*

Construye la gráfica que describe el agua recogida durante estas 3 horas.

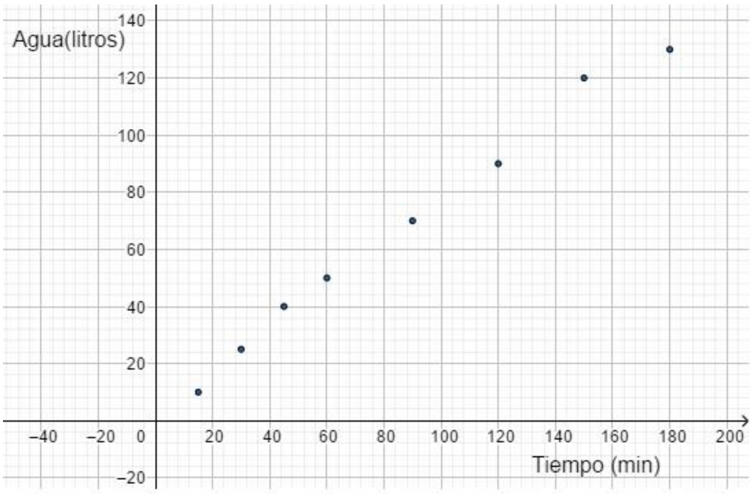
a) ¿Puedes unir los puntos que has marcado? Explica tu respuesta.

b) ¿Puedes decir qué cantidad de agua ha caído aproximadamente después de 2 horas y 15 minutos?

c) ¿Qué tiempo ha pasado cuando se llevan recogidos 100 litros?

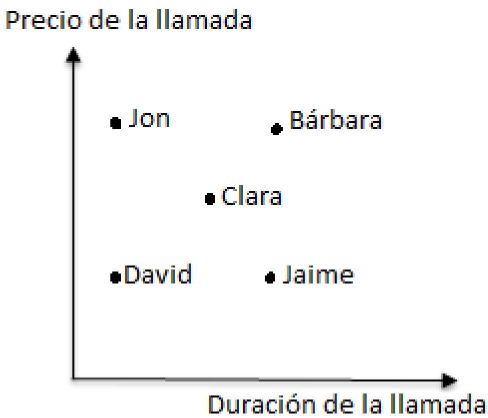
En 2º ESO los alumnos ya han estudiado las funciones lineales, por tanto podríamos decir que se trata de una actividad de repaso mediante la cual conoceremos si el alumno está familiarizado con el dibujo de dichas funciones sobre ejes cartesianos, así como su interpretación gráfica.

En este caso el problema indaga si los alumnos saber realizar la representación gráfica de una función definida mediante una tabla. Ahora bien, el problema no está exento de dificultades ya que los alumnos deberán escribir los datos de la variable independiente (tiempo) en una escala de 15 minutos a pesar de que en la tabla aparezcan separados, en algunos casos, cada 30 minutos.



Después tienen que percatarse de que pueden unir los puntos de la gráfica dado que ambas magnitudes relacionadas son continuas. Y finalmente tienen que interpretar los datos de la gráfica haciendo una lectura aproximada de la cantidad de agua ha caído aproximadamente después de 2 horas y 15 minutos (105 litros) y del tiempo ha pasado cuando se llevan recogidos 100 litros (2 horas y 10 minutos). En este problema indagaremos sobre la comprensión del sistema de representación gráfica de coordenadas cartesianas.

Problema 3: *"LLAMADAS TELEFÓNICAS"* (Shell Centre for Mathematical Education, 1990, p. 19)*: Un fin de semana cinco personas hicieron llamadas telefónicas a varias partes del país. Anotaron el precio de sus llamadas y el tiempo que estuvieron en el teléfono en el siguiente gráfico:*



- *¿Quién puso una llamada a larga distancia? Explica con cuidado tu razonamiento.*
- *¿Quién realizó una llamada local? Explícalo.*
- *¿Quiénes hicieron llamadas a la misma distancia aproximadamente? Explícalo de nuevo.*
- *Copia el gráfico y marca otros puntos que representen a personas que hicieron llamadas locales de diversa duración.*

Para este problema, se busca conocer si los alumnos son capaces de relacionar las dos variables de la función. Se trata de un buen problema porque indaga en la comprensión del concepto relacionando la duración y el precio de una llamada, es decir, con el propio concepto de función como relación entre dos magnitudes. Por ejemplo, a la primera cuestión se espera que los alumnos respondan que Jon está llamando a larga distancia porque habla poco tiempo y le cuesta mucho dinero.

En cambio, Jaime está haciendo una llamada local porque habla mucho tiempo y le cuesta poco dinero. A la pregunta de qué personas han hecho llamadas a la misma distancia deberían nombrar a David, Clara y Bárbara si se asume que el coste es proporcional al tiempo de la llamada.

Y a la última cuestión que pide marcar otros puntos que representen a personas que hicieron llamadas locales de diversa duración habría que situar los puntos en la línea recta que pasa por el punto de Jaime y el origen.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

La razón de ser de este objeto matemático a enseñar, como ya hemos mencionado, se basa en la necesidad de modelizar situaciones de cambio como pueden ser estudios de mercado, previsión de sucesos más o menos cercanos, análisis de la evolución de datos, etc.

Todas estas situaciones a modelizar no son iguales, y por ello tenemos que aprender diferentes formas de representar la función que modeliza la situación (forma algebraica, gráfica, tabla de valores o descripción verbal) dado que cada sistema de representación ofrece información diferente de la función.

Cada una de estas formas de representar una función será útil en diferentes situaciones, siendo la forma más precisa la algebraica, y la menos precisa la verbal. Para explicar según qué situaciones, solemos expresar los datos en forma de gráfica, para que la persona que lo ve sea capaz de conocer la evolución de dicha situación de una forma rápida e intuitiva. Por otro lado, la necesidad de buscar continuamente la precisión nos obliga a trabajar en muchas situaciones con la expresión algebraica de la función y así poder estudiarla a fondo. Las tablas de valores suelen utilizarse para recogida de cantidades elevadas de datos, y la descripción verbal es necesaria porque facilita la comunicación entre personas aún a costa de perder precisión.

Azcaráte y Deulofeu (1990) describen las diferentes representaciones de una función estableciendo diferentes niveles de abstracción entre ellas. En el nivel de menor nivel de abstracción sitúan la explicación verbal, que utiliza el lenguaje común para dar una visión descriptiva, generalmente cualitativa, de la relación funcional. Después sitúan la tabla de valores, que da una visión numérica que se ajusta a la interpretación de una función como correspondencia entre pares de valores, aunque resulta insuficiente y parcial en la mayoría de los casos en los que no permite conocer las características globales de la función. Finalmente, describen los dos lenguajes de mayor abstracción y los más difíciles de interpretar, la gráfica y la fórmula, que ofrecen una visión general y completa de la función, tanto cualitativa como cuantitativa. Las representaciones gráfica y algebraica proporcionan mayor y mejor información que los lenguajes anteriores y permiten la caracterización de distintos modelos. Comparando estos dos lenguajes, podemos decir que la representación gráfica permite visualizar las características globales de la función que también se pueden establecer a partir de la fórmula o representación algebraica, pero con una interpretación mucho menos intuitiva. Por otro lado, la fórmula permite determinar con precisión valores de las dos variables, en cambio, mediante la representación gráfica el proceso es mucho más directo pero los valores obtenidos sólo son aproximados.

Desde la perspectiva de la enseñanza, el estudio de diferentes formas de representar una misma función supone mejorar la comprensión de la función como concepto matemático de modelización de la realidad.

D.1 Razón de ser histórica

Coincidimos con Sierra, González y López (1998) en la importancia de estudiar la evolución histórica de los conceptos matemáticos para alcanzar objetivos educativos:

"*La historia de la Matemática puede utilizarse en la enseñanza para ilustrar la presentación de un concepto motivando el aprendizaje de los alumnos, pero hay otra manera de utilizar esta historia. Esta otra manera trata de encontrar en la historia los sucesivos estados de la evolución de un concepto, los problemas que surgieron, los errores que cometieron los matemáticos, los «obstáculos» que hubo que superar. Este conocimiento puede ser útil para tratar de diseñar secuencias didácticas, empeño que persiguen en la actualidad algunos grupos de investigadores, pero también para comprender los procesos de pensamiento de los estudiantes en la adquisición de un concepto determinado*" (p.92)**.**

A lo largo de la historia, encontramos innumerables situaciones en las que se han utilizado las funciones, evidentemente con algunas diferencias con respecto a la actualidad. Azcárate y Deulofeu (1990) informan que no hay acuerdo entre los investigadores sobre el momento histórico del origen del concepto de función. No obstante, aventuran que ese momento lo situarían a mediados del siglo XVII a partir de los trabajos de Descartes Fermat, Newton y Leibnitz.

Nos encontramos con que se pueden diferenciar cuatro grandes etapas en lo referente a las funciones:

- Edad Antigua, donde se produjeron las primeras representaciones gráficas y representaciones tabulares ligadas a problemas astronómicas a partir de interpolaciones generalmente lineales.

En esta etapa el estudio de los fenómenos de cambio era muy reducido, y las aproximaciones cuantitativas y cualitativas de dichos fenómenos se hallan todavía totalmente disociadas y por lo tanto no es posible hablar de una formulación explícita de nociones como variable independiente y dependiente o función.

- Edad Media, donde se estableció una primera idea de función y se introdujeron las coordenadas con la finalidad de representar la velocidad de un móvil a lo largo del tiempo. También se estudian otros fenómenos como la densidad, o la intensidad del calor o de la luz. En el transcurso de estos estudios empiezan a aparecer conceptos como cantidad variable que están ligados a la idea de función.

- Edad Moderna, donde gracias a Descartes se empezó a hablar de dependencia entre dos cantidades variables "x" e "y" existiendo una ecuación que las relaciona, a través de la cual podemos hallar valores de una variable en función de los valores que tome la otra. Esto provocó un énfasis en la representación de funciones mediante su expresión algebraica.

Por su parte, gracias a Newton y Leibniz se pudieron representar analíticamente numerosas funciones gracias a la representación de funciones en series infinitas de potencias.

Por último, cabe mencionar que será Euler quien nombrará las funciones como *objetos*, para que comiencen a estudiarse por sí mismas, y no como un instrumento de medida.

- Edad Contemporánea, donde apareció el concepto de variable dependiente e independiente gracias a Cauchy, el cual convirtió las funciones en el concepto clave del Análisis Matemático.

Dirichlet define, en 1937, el concepto de función tal y como la conocemos hoy en día, haciendo referencia a que a cada valor de la variable x le corresponde un único valor de y. Esta definición fue ajustada posteriormente utilizando elementos de la teoría de conjuntos.

Como vemos, a lo largo de la historia, el concepto de función ha ido evolucionando hasta el que tenemos hoy en día. Los matemáticos, a lo largo de la historia, han ido superando obstáculos que encontraban en el proceso de modelización de problemas contextualizados en el ámbito de la vida real o bien en el ámbito interno de las matemáticas

D.2 Ejemplo que muestra la razón de ser de las funciones

En nuestra propuesta de enseñanza vamos a introducir el concepto de función enfrentando a los alumnos a situaciones problemáticas en las que las técnicas y tecnología aparezcan como herramientas para su resolución.

Entendemos que no hay una situación problemática paradigmática que genere el concepto de función. Cualquiera de los problemas que hemos descrito en el apartado C para indagar sobre los conocimientos previos del alumno serviría para el propósito.

No obstante, vamos a proponer un problema contextualizado en el que el alumno utilizará sus conocimientos sobre funciones en un caso de toma de decisiones. Este problema forma parte de la razón de ser de una función lineal, y dice así:

Pablo y Verónica han viajado a Mallorca en vacaciones y buscan un coche de alquiler para su estancia en la isla. Después de comparar diferentes empresas de alquiler de coches, encuentran dos que le interesan, las empresas ABC y FGH. ABC tiene una tarifa de 200 euros fijos más 1 euro por cada kilómetro recorrido, mientras que la FGH tiene una tarifa de 100 euros fijos por alquilar el coche más 1,5 euros por cada kilómetro recorrido. ¿Qué empresa de alquiler de coches le conviene alquilar a la pareja?

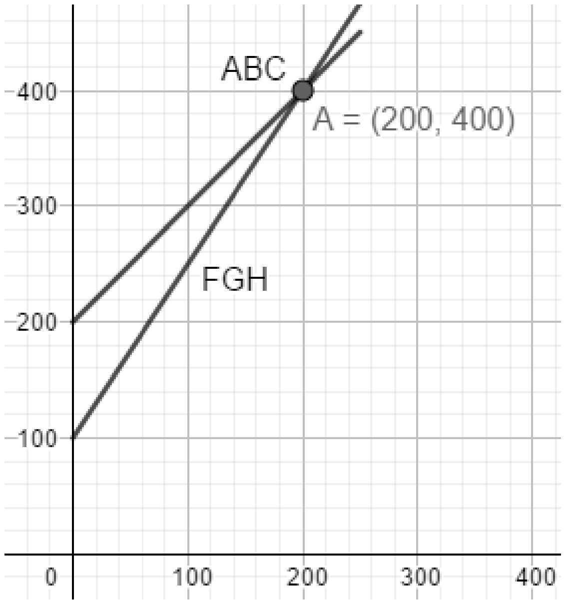
Este problema representa la razón de ser de una función en cuanto a que la pareja deberá tomar una decisión, para la cual el conocimiento sobre funciones nos facilita dicha toma de decisión.

Para resolver este problema debemos expresar la función en su representación gráfica e interpretarla, ya que el enunciado nos muestra la gráfica en forma verbal. Para ello, primero podemos ayudarnos de la forma tabular de representación de funciones y partir de esta para la representación gráfica de la función. Así:

ABC	Km	0	50	100	150	200	250
	Euros	200	250	300	350	400	450

FGH	Km	0	50	100	150	200	250
	Euros	100	175	250	325	400	475

Una vez elaborada nuestra tabla de valores, representamos gráficamente las funciones lineales:



Como se puede apreciar tanto en la tabla de valores como en la gráfica, si recorremos menos de 200 km con el coche les conviene la tarifa propuesta por la empresa FGH, mientras que si han pensado recorrer más de 200 km les convendrá la empresa ABC.

Desde una perspectiva de enseñanza este problema se podría proponer en las primeras sesiones de clase porque obliga a los alumnos a modelizar mediante funciones lineales una situación que se enuncia de modo verbal y en cuya resolución hemos utilizado la representación tabular y gráfica de las dos funciones lineales. También pueden aparecer las representaciones algebraicas aunque este caso no las hemos tratado porque el punto de corte se obtiene fácilmente al construir las representaciones tabulares.

E. SOBRE EL CAMPO DE PROBLEMAS

La traducción entre diferentes formas de representación es un aspecto esencial en la enseñanza y en el aprendizaje de las funciones, ya que permite que el alumno capture el comportamiento de una función desde diversos ángulos enriqueciendo su comprensión (Sierra, González y López, 1998, p.89). En estas condiciones parece necesario dotar a los alumnos de la máxima riqueza de representaciones de este concepto a la vez que se realiza la traducción de unas representaciones a otras. Janvier (citado por Sierra, González y López, 1998, p.97) esquematiza, en el siguiente cuadro, los distintos procesos de interacción-traducción entre sistemas de representación:

	Descripción verbal	Tablas	Gráficas	Expresiones algebraicas
Descripción verbal		Medida	Croquis	Modelo
Tablas	Lectura de relaciones numéricas		Dibujo	Ajuste numérico
Gráficas	Lectura de relaciones gráficas	Tabulación		Ajuste gráfico
Expresiones algebraicas	Lectura de relaciones simbólicas	Tabulación	Croquis	

Vamos a organizar el campo de problemas a partir del cuadro mostrado. Se buscará que el alumno sea capaz de realizar estas transformaciones de las distintas formas de representar los conjuntos de datos.

Una forma muy habitual de enseñar las funciones es presentar cada técnica o concepto a estudiar para reproducirlo de la misma forma por parte de los alumnos. Sin embargo, durante este trabajo vamos a presentar las diferentes técnicas mediante problemas que consistirán en la traducción de las distintas formas de representación, transformándolas en otras. Al realizar estos problemas, irán apareciendo nuevos conceptos a estudiar.

A continuación, se muestra el campo de problemas sobre el que vamos a trabajar:

<u>Problemas 1</u>: Transformación de la <u>gráfica</u> a expresión verbal, fórmula algebraica y tabular que comprende los subcampos:

1.1. *Transformación de la <u>gráfica</u> a expresión verbal*

1.2. *Transformación de la <u>gráfica</u> a tabla*

1.3. *Transformación de la <u>gráfica</u> a expresión algebraica*

<u>Problemas 2</u>: Transformación de la <u>expresión verbal</u> a tabla, fórmula algebraica y gráfica que comprende los subcampos:

2.1. *Transformación de la <u>expresión verbal</u> a tabla*

2.2. *Transformación de la <u>expresión verbal</u> a gráfica*

2.3. *Transformación de la <u>expresión verbal</u> a expresión algebraica*

<u>Problemas 3</u>: Transformación de la <u>tabla</u> a Expresión verbal, fórmula algebraica y gráfica que comprende los subcampos:

3.1. *Transformacióndе la <u>tabla</u> a expresión verbal*

3.2. *Transformación de la <u>tabla</u> a gráfica*

3.3. Transformación de la tabla a expresión algebraica

Problemas 4: Transformación de la fórmula algebraica a expresión verbal, tabla y gráfica que comprende los subcampos:

4.1. Transformación de la fórmula algebraica a expresión verbal

4.2. Transformación de la fórmula algebraica a tabla

4.3. Transformación de la fórmula algebraica a gráfica

Tomando como referencia los trabajos de Azcárate y Deulofeu (1990) y de Burgos y Flores (2017), entre otros investigadores, hemos tomado la decisión de iniciar los campos de problemas partiendo de la representación gráfica de funciones para utilizar la visualización de las gráficas para incidir en el aspecto conceptual que supone la relación entre dos variables y también para describir visualmente las características globales de una función.

En los problemas de los diferentes campos propuestos, y en aquellos que sea pertinente, vamos a trabajar los aspectos globales de las funciones: dominio y recorrido, continuidad, crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y absolutos, y cortes con los ejes cartesianos, sin formalizar estos conceptos. Además, vamos a introducir la función cuadrática y repasar las funciones lineales que fueron objeto de enseñanza en segundo curso de la ESO.

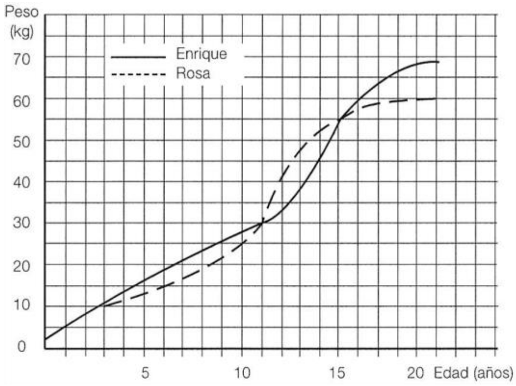
E.1. Campo de Problemas 1

Transformación de Gráfica a: Expresión verbal, tabla y fórmula algebraica

En primer lugar queremos presentar un problema que indaga en cuestiones que se han abordado en segundo curso de ESO como son la comprensión de gráficas sobre coordenadas cartesianas, puntos de corte de dos funciones e intervalos de crecimiento.

En este primer campo de problemas no vamos a presentar la gráfica de la función cuadrática porque consideramos más apropiado introducir este tipo de función en el siguiente campo de problemas que es el de *"transformación de la expresión verbal a tabla, fórmula algebraica y gráfica"*. Pensamos que la introducción de la función cuadrática debe aparecer en el contexto de una situación problemática descrita de modo verbal, es decir, como modelización de una situación contextualizada.

Problema 1: *"Variación de peso hasta los 20 años"* adaptación de Azcárate y Deulofeu (1990, p. 70). *La siguiente gráfica muestra la evolución del peso medio de un chico, Enrique, y una chica, Rosa, entre los 0 y los 20 años:*



a) *¿Cuál era el peso de Enrique a los 9 años? ¿Y el de Rosa a los diecisiete?*

b) *¿A qué edad Enrique pesaba 50 kg? ¿Y Rosa 20 kg?*

c) *¿Cuándo pesaba Enrique más de 40 kg? ¿Y Rosa menos de 30 kg?*

d) *Describe y explica que pasó con los pesos de Enrique y de Rosa en sus 3 primeros años.*

e) *¿Cuándo pesó Rosa más que Enrique? ¿Y Enrique más que Rosa?*

f) *¿Cuándo pesaron los dos igual?*

g) *¿Cuál fue el aumento de peso de Rosa entre los 10 y los 15 años?*

h) *¿Podrías indicar el dominio y recorrido de ambas funciones?*

i) *Estudia el crecimiento o decrecimiento de ambas funciones.*

Este problema pretende trabajar el cambio de representación de gráfica a expresión verbal, haciendo una descripción general de la gráfica, ayudados por la guía de preguntas de la *a* a la *h* que indica el problema. Además de la comprensión de las gráficas sobre ejes cartesianos se van a trabajar conceptos como dominio, recorrido, intervalos de crecimiento y tasa de variación de una función.

Para responder a las cuestiones planteadas por el problema, diríamos que a los 9 años Enrique pesa 25 kg y Rosa pesa 58 kg a los 17 años. Entre los años 14 y 15 Enrique pesaba 50 kg mientras que superará los 40 kg a partir de los 13 años de edad. Rosa por su parte, entre los 8 y 9 años su peso será de 20 kg y no será hasta después de los 11 años que su peso no superará los 30 kg. La pregunta *d* del problema, podría llevar a confusión a los alumnos, pues las líneas están superpuestas por tener el mismo peso ambas personas, por tanto, ambos tienen el mismo gradiente o variación de peso durante los tres primeros años. No hace falta hallar el gradiente o T.V.M. entre 0 y 3 años que será de 2kg/año aproximadamente.

A los 11 y 15 años, ambos tenían el mismo peso, pero Rosa pesó más que Enrique entre los 11 y los 15 años. Enrique pesó más que Rosa de los 3 a los 11 años y de los 15 a los 20 años.

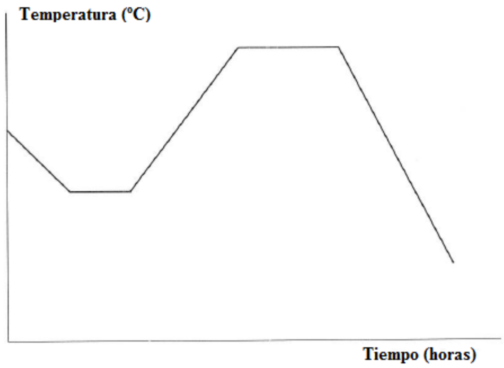
Entre los 10 y 15 años podríamos decir que Rosa sufrió el mayor aumento de peso, el cual fue de 20 kg.

En relación al dominio y al recorrido de ambas funciones, la función correspondiente al aumento de peso de Rosa tiene un dominio que va desde 0 hasta

21 años, y un recorrido que va de 4 a 60 kg, mientras que la función correspondiente al aumento de peso de Enrique tiene un dominio que va desde 0 hasta 21 años, y un recorrido que va de 4 a 68.

Por último, los alumnos deberán explicar la monotonía de la función, indicando que la función es siempre creciente y esperando respuestas relacionadas con la no pérdida de peso en los 21 primeros años de vida o la alusión a la diferencia entre el aumento de peso de un hombre y una mujer.

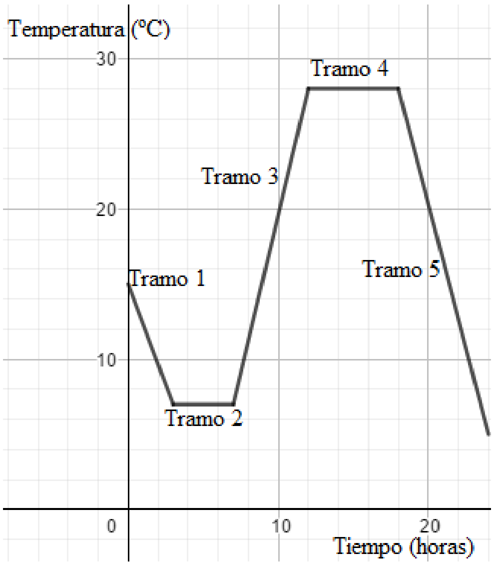
Problema 2: *"¿Cómo varían las temperaturas?"* adaptación de Azcárate (2001, p. 242/64.15). *La gráfica siguiente muestra cómo varía la temperatura a lo largo de un día, partiendo de medianoche:*



- *Indica sobre la gráfica los tramos en los que aumenta la temperatura.*
- *Marca en la gráfica en qué momentos del día ha bajado la temperatura.*
- *¿Hay algún momento del día en que la temperatura no varía?*
- *Indica los valores de la variable independiente donde la función es creciente, decreciente y constante.*
- *Escribe una frase que describa la variación de temperatura a lo largo del día. ¿Te parece un comportamiento habitual de las temperaturas?*
- *¿Qué puedes decir de las temperaturas inicial y final de ese día que describe la gráfica?*
- *En los dos momentos en que la temperatura baja, ¿te parece que lo hace de la misma manera? Explica lo que pasa.*

Este problema pretende trabajar el cambio de representación de gráfica a expresión verbal, cuya principal diferencia con respecto al problema anterior (evolución de los pesos de dos jóvenes) radica en que ahora los alumnos no disponen de la información de los valores de la variable dependiente e independiente en los ejes de coordenadas de la gráfica que se les muestra.

En este caso, una forma de expresar verbalmente la función, podría ser: "Al comienzo del día, conforme nos adentramos en la madrugada bajan las temperaturas hasta que se mantiene estable en su punto mínimo durante unas pocas horas. A medida que comienza a salir el sol, suben las temperaturas hasta alcanzar su punto máximo entorno al mediodía. Finalmente, al ir anocheciendo progresivamente, bajan las temperaturas." Como vemos, en esta situación contextualizada que hemos descrito gráficamente las horas más frías suelen ser las de la noche, mientras que las horas con mayor temperatura se acumulan entorno al mediodía. De esta forma, el alumno deberá mostrar gráficamente el contexto dado a la función:



Además, durante este problema se trabaja la monotonía, así como el significado de la pendiente de la recta. De esta forma, el alumno deberá indicar que la función decrece en el primer y último tramo, en los intervalos (*0*,*3*) y (*18*,*24*) respectivamente, mientras que crece a lo largo del tercer tramo, en el intervalo (*7*,*12*). Por otro lado, la gráfica permanecerá constante en los tramos dos y cuatro, que se corresponden con los intervalos (*3*,*7*) y (*12*,*18*) respectivamente.

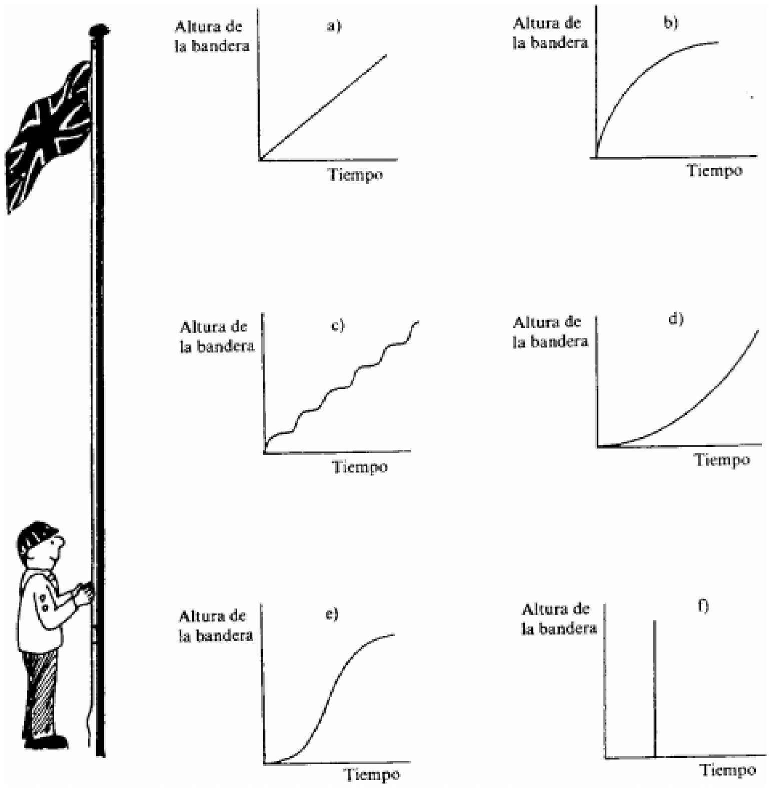
Finalmente, vemos como la temperatura con la que vaya a comenzar el día siguiente, será inferior que la temperatura con la que se ha empezado el día mostrado en la gráfica. Esto se produce en gran parte porque la noche siguiente disminuye la temperatura a mayor velocidad de lo que lo hizo la anterior, momento en el que el alumno deberá mostrar sus conocimientos acerca del significado de pendiente de una función lineal. La pendiente de la recta que desciende con mayor velocidad será negativa y mayor en valor absoluto que la pendiente de la recta que desciende a menor velocidad, que corresponde a la banda horaria de 0 a 3 horas.

Problema 3: *"Izando la bandera"* Shell Centre for Mathematical Education, 1990, p.74). *Cada mañana, en el campamento de verano, el boy scout más joven tiene que izar la bandera a lo alto del mástil.*

I. Explica con palabras que significaría cada una de las siguientes gráficas.

II. ¿Qué gráfica muestra la situación de forma más realista?

III. ¿Qué gráfica es la menos realista?



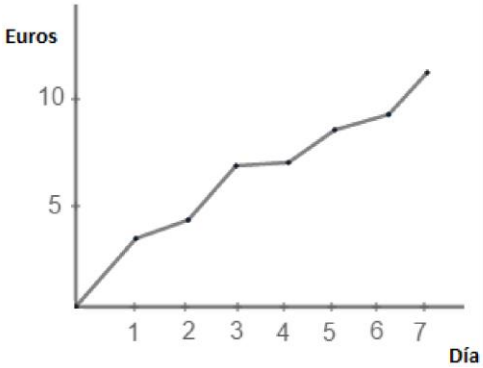
Este problema pretende trabajar el cambio de representación de gráfica a expresión verbal. Se espera que las respuestas serán variadas por parte del alumnado pero siempre situándose en un entorno similar al que sigue.

La gráfica a) muestra una crecida constante de manera que la bandera ha sido izada con la misma velocidad todo el tiempo. La gráfica b) nos indica como la bandera ha sido izada a gran velocidad al principio pero que ha perdido cada vez más velocidad conforme se iba acercando al final, probablemente provocado por un estado de cansancio. La gráfica c) parece que ha sido izada de forma intermitente, tirando de ella y parando repetidamente, por lo que presumiblemente el scout está tirando de la bandera con las dos manos al mismo tiempo, una encima de la otra. De forma opuesta a la gráfica b), en la gráfica d) se muestra a un scout que ha subido la bandera cada vez más a mayor velocidad de principio a fin. La gráfica e) muestra un scout subiendo la bandera de manera que acelera al inicio de la subida pero frena al final de la misma. Por último, en la gráfica f) los alumnos deberán indicar que dicha gráfica no representa a una función, puesto que a un valor de la variable independiente le corresponden más de un valor de la variable dependiente. Además, vemos que carece de sentido porque sin haber lapso temporal la posición de la bandera cambia.

Después del estudio de las gráficas, podríamos decir que la gráfica a) es la forma intuitiva en la que se debe izar una bandera, mientras que la f) como ya se ha mencionado, es una forma imposible de izarla.

Se trata de un buen problema para trabajar mediante la visualización de gráficas la relación funcional entre las variables tiempo y altura.

Problema 4: *El consumo de luz de una determinada casa a lo largo de una semana se muestra en el siguiente gráfico:*



a) Muestra una tabla que refleje lo que lleva gastado cada día de la semana

b) ¿Tendría sentido que esta función decreciera en algún momento?

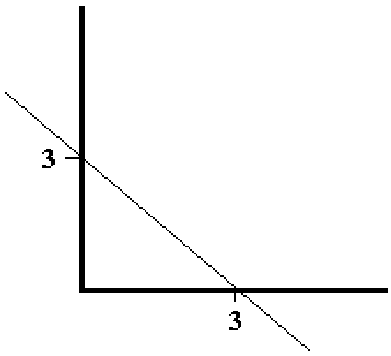
c) ¿Por qué la función es continua?

Este problema pretende trabajar el cambio de representación de gráfica a forma tabular. Como no están marcados los puntos de la función de forma clara sobre los ejes de coordenadas, la solución propuesta por cada alumno puede variar, sin diferenciarse demasiado de la siguiente tabla:

Día	1	2	3	4	5	6	7
Euros	3,1	4,1	7	7,1	8,3	9	10,5

El problema, indaga directamente por la monotonía, en este caso por su decrecimiento, el cual no tiene sentido puesto que conforme avance la semana, gastará más y nunca menos. Otro concepto que aparece en el problema, es la continuidad, sobre la que podemos indicar que la función es continua gracias a que el tiempo es una magnitud que se puede tomar de forma continua y unir mediante una línea los puntos trazados en la gráfica.

Problema 5: *Encuentra la función lineal cuya representación gráfica es:*



Este problema pretende trabajar el cambio de representación de gráfica a expresión algebraica mediante la aparición de una función lineal. Así, nos encontramos ante una función polinómica de grado uno, por tanto para deducir su ecuación, debemos deducir 2 puntos de la gráfica, a partir de los cuales se hallarán la pendiente m y la ordenada en el origen n. Estos puntos sólo pueden ser los puntos (0,3) y (3,0) pues son los únicos marcados en la gráfica. Deducir estos 2 puntos puede parecer fácil, sin embargo, los alumnos generalmente tienden a pensar en este tipo de funciones que el punto por el que pasa dicha función es el (3,3), lo cual es incierto.

De esta forma, la ecuación de primer grado resultante será la $y = -x + 3$.

Otra forma para resolver este problema, sería ver que la función corta al eje y en y=3, por tanto la ordenada en el origen n será igual a 3. De esta forma, hallaremos la pendiente m sustituyendo el punto (3,0) en las coordenadas x e y de la ecuación $y = mx + 3$.

Esperamos que los alumnos no tengan excesivas dificultades para encontrar la expresión algebraica de esta función dado que en el curso pasado han estudiado las funciones polinómicas de primer grado.

Con este problema trabajaremos conceptos como continuidad, decrecimiento y cortes de los ejes.

E.2. Campos de Problemas 2

Transformación de expresión verbal a: Tabla, fórmula algebraica y gráfica

Problema 6: *Se sabe que un montañero se ha propuesto subir al pico más alto de una determinada montaña. Si comienza su travesía desde un pueblo situado a 800 metros de altitud, y sube a un ritmo de 400 metros cada hora:*

a) Elabora una tabla de valores en la que se muestre la altitud a la que se encuentra el montañero en función del tiempo que está andando

b) Si la altura de la montaña es de 4.000 metros, ¿cuánto tardará en subirla?

c) La relación tiempo-altura, ¿es una relación de proporcionalidad directa? ¿Por qué?

d) Si has respondido afirmativamente a la pregunta anterior, encuentra la función algebraica que relaciona el tiempo y la altura. Dibuja la representación gráfica de esta función.

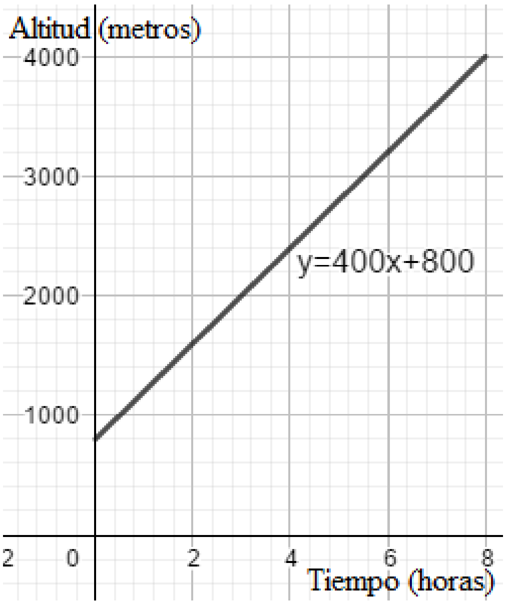
e) Indica el dominio y recorrido de esta función así como sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Con este problema se pretende practicar el cambio de forma verbal a tabla, así como una interpretación posterior de la misma. Un ejemplo de tabla de valores que deberá escribir el alumno, es la siguiente:

tiempo	0	1	3	5	7	8
altitud	800	1.200	2.000	2.800	3.600	4.000

Así, el montañero debe llegar a una altitud de 4.000 metros, por lo que continuando la tabla de valores, vemos que si pasan 8 horas habrá llegado a la cima. Esto es así porque nos encontramos ante una relación de proporcionalidad directa, ya que a medida que aumente el tiempo, aumenta la altitud alcanzada.

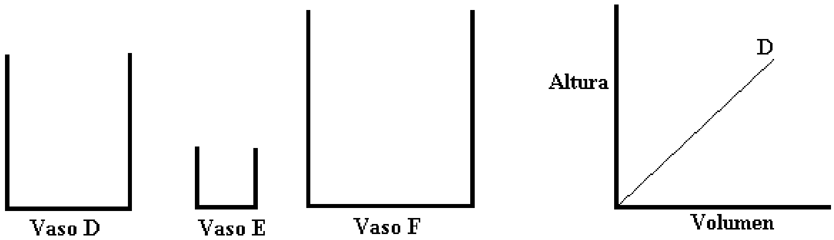
Una vez resueltos los apartados anteriores, el paso a expresión algebraica debería entrañarles poca dificultad, sin embargo esto no siempre será así pues el alumno podría escribir la función lineal como y=800x+400 en lugar de y=400x+800 tal y como es realmente. Para dibujar la representación gráfica bastará con partir de la representación tabular, marcando los puntos sobre los dos ejes cartesianos, donde *x* corresponderá con el tiempo (horas) y el eje *y* con la altitud (metros) tal que así:



Con la representación gráfica dibujada, podemos estudiar los conceptos que nos solicita el apartado e). Por un lado, el dominio abarca todos los valores posibles de la variable *x*, de modo que el dominio de la función será desde 0 hasta el momento en el que haya alcanzado la cima de la montaña tras 8 horas. En el caso del recorrido, es fácil ver que la altitud va desde los 800 metros hasta los 4.000 metros. Por otro lado, al estar ante una relación de proporcionalidad directa de una función lineal, la función crecerá a lo largo de todo su dominio, y no decrecerá en ningún momento.

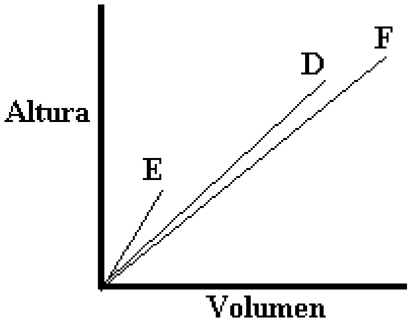
Problema 7: *"Llenando botellas"* adaptación de Azcárate (2001, p. 242/64.24-25)*:*

a) Si disponemos de los vasos D, E y F, y sabemos que la altura del nivel de llenado del vaso D con respecto al volumen del líquido que contiene D viene dada por la gráfica siguiente:



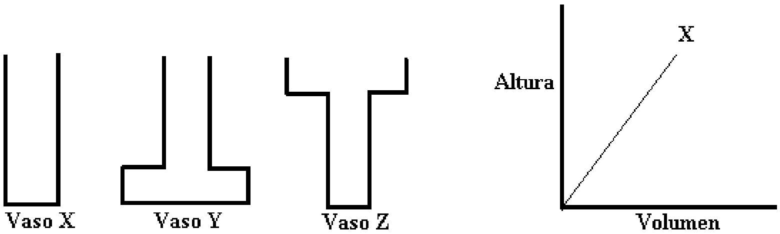
Dibuja sobre la gráfica anterior las gráficas de las funciones que indican los niveles de altura de los vasos E y F con respecto al volumen del líquido que contiene E y F, respectivamente.

Con este problema se pretende practicar el cambio de forma verbal a gráfica, así un ejemplo de gráficas que dibujarán los alumnos para modelizar el llenado de recipientes, será:



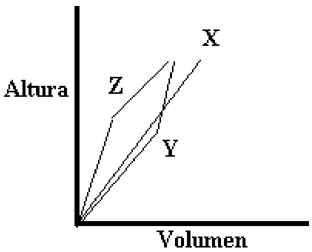
Es importante que el alumno sea consciente de que la función E tendrá menos altura que la D, y la F tendrá más altura que las otras dos. Suponiendo que el caudal de llenado es constante, los alumnos deberán hacer notar que la pendiente de la recta es la que determina el ritmo de crecimiento de la función, indicando que a mayor pendiente, mayor velocidad de llenado.

b) Si disponemos de los vasos X, Y y Z, y sabemos que la altura del nivel de llenado del vaso X con respecto al volumen del líquido que contiene X viene dada por la gráfica siguiente:



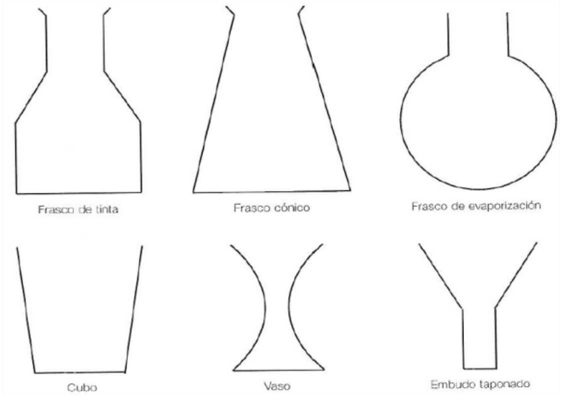
Dibuja sobre la gráfica anterior las gráficas de las funciones que indican los niveles de altura de los vasos Y y Z con respecto al volumen del líquido que contiene Y y Z, respectivamente.

De la misma forma que en el apartado anterior:

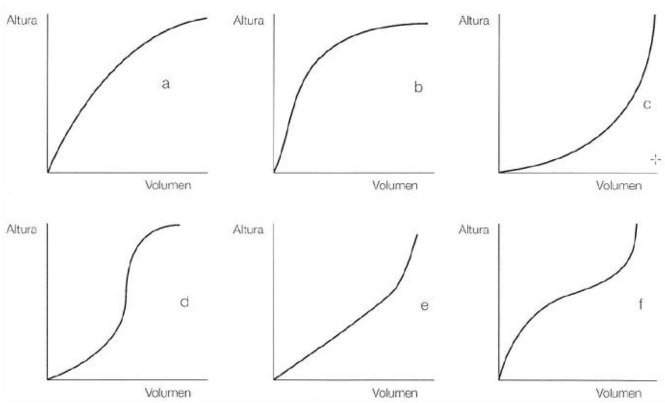


En este caso, tanto las funciones Y y Z deberán alcanzar la misma altura que X. Notar que las gráficas de las funciones correspondientes a los recipientes Y y Z forman un paralelogramo dado que ambos tienen la misma forma aunque uno esté invertido con respecto al otro.

c) Ahora te damos el dibujo de 6 frascos y 6 posibles gráficas que describen la variación de altura del nivel del agua con respecto al volumen de líquido que hay en cada recipiente. Los frascos:



Las gráficas:



Elige la gráfica correcta para cada frasco y justifica claramente tu elección, razonándolo.

En este caso, al contrario que en los dos anteriores, el alumno deberá relacionar el frasco con la representación gráfica de la función. Así:

Gráfica a: Cubo (la altura tiende a subir con menor rapidez conforme se va llenando el cubo)

Gráfica b: Embudo taponado (la altura crece rápidamente al inicio, pero cada vez sube más despacio)

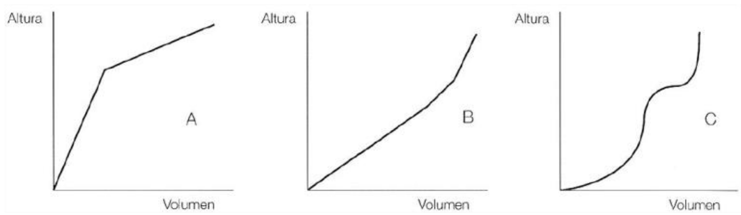
Gráfica c: Frasco cónico (la altura tiende a subir con mayor rapidez conforme se va llenando el Frasco cónico)

Gráfica d: Vaso (la altura sube lenta al principio, la mayor crecida de altura se da en el punto medio del vaso, y en la parte final crece la altura cada vez más despacio)

Gráfica e: Frasco de tinta (se aprecia un crecimiento lineal de la altura al principio, para terminar con un crecimiento con mayor velocidad)

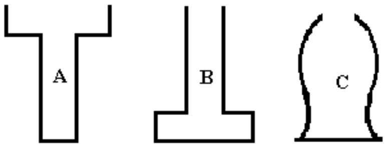
Gráfica f: Frasco de evaporación (de forma opuesta a la gráfica d, en este caso se empieza con un crecimiento rápido al inicio y final de llenado, con un crecimiento lento de la altura en la zona media del frasco)

d) Ahora haremos lo contrario: te damos tres gráficas y tienes que inventarte la forma de los frascos correspondientes. Las gráficas son:



Dibuja como deberían ser los frascos que se corresponden con las 3 gráficas de la figura

Un ejemplo de frasco que modelizan estas funciones, es:



Con este problema conoceremos si el alumno maneja con facilidad los ejes de coordenadas, comprendiendo el funcionamiento de la función a lo largo de dichos ejes. Así, el alumno deberá relacionar las dos magnitudes dadas en los ejes de coordenadas estableciendo una correcta relación entre ambas.

Las mayores dificultades que se encontrará el alumno en este problema serán la de diferenciar entre los apartados a) y b) el hecho de que las tres funciones dibujadas acaben a la misma altura o no, y en la interpretación de las pendientes de las funciones lineales. Por su parte, los apartados c) y d) tienen mayor grado de dificultad, en el apartado c) los alumnos deben conjeturar la gráfica de la relación funcional entre altura y volumen de agua recogido; y en el apartado d) la tarea es inversa porque los alumnos deben adivinar la forma del recipiente conociendo la gráfica de la relación funcional. Notar que el apartado d) es un problema que corresponde al campo de problemas número 1, sin embargo se propone aquí, dentro de este problema, para utilizar el mismo contexto y porque incide en el aspecto conceptual de la relación funcional.

Problema 8: *Nos ha llamado una cooperativa de taxis para ofrecernos una tarifa que establece que por bajada de bandera cobran 1,85 euros y por cada km recorrido 0,82 euros. Escribe una relación que te permita conocer el importe de tu llamada a partir del nº de minutos que te mantengas hablando. Después, representa la función en forma tabular y gráfica. ¿Es continua esta función? Estudia su monotonía.*

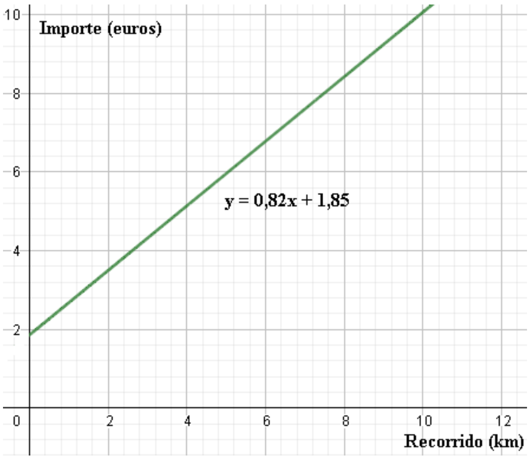
Con este problema se pretende practicar el cambio de forma verbal a algebraica, a tabular y a gráfica. Se espera que el alumno sea capaz de resolverlo con éxito puesto que la situación modeliza una función de grado uno.

Durante la práctica del paso a representación algebraica, de la misma forma que en el problema 7, los alumnos pueden confundirse intercambiando el valor de la m con el de la n. De no ser así, los alumnos deberán llegar a deducir la expresión algebraica $y = 0{,}82x + 1{,}85$.

Ahora, para representar en forma tabular, los alumnos podrán ayudarse del propio enunciado verbal que ofrece el enunciado o ayudarse de la expresión algebraica que acabamos de calcular. Así, la tabla será de la siguiente forma:

Recorrido (km)	0	1	3	5	7	9	11
Importe (euros)	1,85	2,67	4,31	5,95	7,59	9,23	10,87

Esta tabla, tiene la siguiente representación gráfica:



Nos encontramos ante una función que es continua y creciente a lo largo de todo su dominio, esto tiene sentido puesto que a más km recorridos, mayor importe de la llamada.

Como indicación final, el alumno podría indicar que cuando el trayecto es muy largo, la bajada de bandera casi no afecta al importe final del viaje por lo que los recorridos largos son las más ventajosas si queremos utilizar este servicio.

Problema 9: *Necesitamos establecer la relación entre el número de visitantes a una feria en función del momento del día. Si sabemos que el número de visitantes durante el día suele ser el doble del cuadrado de las horas que lleva abierta la feria, ¿podrías establecer la relación entre las variables número de visitantes y horas de apertura en el día de la feria? ¿Si la feria abre de 10:00 a 18:00, cuantos visitantes estimamos que habrán visitado la feria? ¿Durante que tramo horario se observa mayor entrada en la feria?*

Con este problema también se pretende trabajar el paso de representación verbal a representación algebraica. Con este problema vamos a introducir la función cuadrática por primera vez en el aula de tercer curso de ESO, por lo tanto tendremos que dedicarle tiempo y darles apoyo a los alumnos durante la fase de resolución conjunta en el aula. Además, se les muestra el enunciado de tal forma que podrían dudar en la variable tiempo ya que se muestra en formato hh:mm y para sustituir en la expresión algebraica hay que seleccionar el nº de horas que han pasado desde las 10:00. Del enunciado, el alumno debe deducir que $y = 2x^2$, de modo que si ha estado abierta la feria 8 horas, estimamos que habrá sufrido una asistencia de $y = 2 * 8^2 = 128$ asistentes.

Al estar ante una función cuadrática (creciente en nuestro intervalo de horas) conforme avanzamos en el tramo horario, los asistentes llegan en mayor proporción. Así, durante la última hora se dará el mayor número de asistentes.

Problema 10: *"La conejera"* Adaptación del Shell Centre for Mathematical Education (1990, p. 101). *Deseas construir un recinto rectangular que tenga de* *perímetro 22 metros. Quieres que tenga forma rectangular pero todavía no has decidido las dimensiones de los lados del rectángulo. Se pide:*

a) Elabora una tabla de valores que muestre el área del rectángulo en función de la longitud de uno de los lados del rectángulo.

b) ¿Observas alguna regla en esa tabla? Escribe en qué consiste y trata de explicar por qué ocurre eso.

c) Dibuja su representación gráfica.

d) ¿Cuál será el área máxima que puede tener el rectángulo?

e) Estudia su dominio y su recorrido, así como sus tramos de crecimiento y decrecimiento.

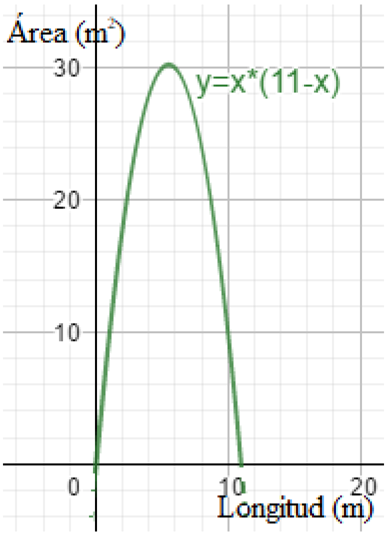
Con este problema se pretende practicar el cambio de forma verbal a tabla, transformándola en expresión algebraica para concluir dibujando su gráfica. A lo largo de este problema aparecerán conceptos como dominio y recorrido, monotonía y extremos relativos.

Este problema puede ser uno de los más complejos, esto es debido a que en el apartado b no es fácil darse cuenta de cuál es la regla que relaciona ambas variables. Así, los alumnos deberán mostrar una tabla como la que sigue:

Longitud (m)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Área (m^2)	10	18	24	28	30	30	28	24	18	10

Tomando la longitud como *x* el otro lado distinto del rectángulo será 11 – x metros. Y, por lo tanto, el área del rectángulo es y = x (11-x), lo que corresponde con su forma de representación algebraica.

Sea ahora su representación gráfica:



El máximo de área corresponderá entonces con el máximo de esta función, es decir, con su vértice, el cual se sitúa en x=5,5 metros con un área de 30,25 m^2.

Para responder a las preguntas de dominio y recorrido, el alumno deberá indicar que la función tiene un dominio que va desde 0 a 11 metros de longitud, con un recorrido de 0 a 30,25 metros cuadrados de área. La función crecerá desde 0 hasta 5,5 metros y decrecerá en el resto de su dominio, entre los 5,5 y los 11 metros de longitud.

Según el currículo aragonés de tercer curso en el bloque 2 de "Números y álgebra" que se imparte antes del bloque 4 de "Funciones" los alumnos han recibido enseñanza del contenido "ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolución (método algebraico y gráfico)". En estas condiciones podemos suponer que los alumnos saben hallar las raíces de una ecuación de segundo grado. Desde este punto de vista este problema es muy adecuado para introducir la función cuadrática y para reforzar la resolución de ecuaciones de segundo grado al estudiar el dominio de la función que modeliza la situación.

E.3. Campo de Problemas 3

Transformación de Tabla a: Expresión verbal, fórmula algebraica y gráfica

Problema 11: *"Caída de una piedra"* Adaptación del Shell Centre for Mathematical Education (1990, p. 132). *Sea la tabla de valores que relaciona el tiempo de caída de una piedra con la altura desde donde se ha dejado caer la piedra:*

Tiempo (segundos)	0	1	2	3	4	5
Distancia caída (metros)	0	5	20	45	80	125

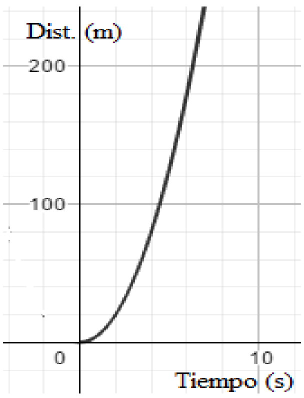
a) Dibuja una gráfica aproximada para ilustrar estos datos.

b) ¿Observas alguna regla en esta tabla? ¿Sabrías encontrar la expresión algebraica de la función?

c) Se lanza una piedra desde un avión. ¿Cuántos metros caerá en 10 segundos?

d) Estudia su dominio y su recorrido, así como sus tramos de crecimiento y decrecimiento.

Con este problema se pretende practicar el cambio de forma tabular a enunciado verbal y gráfico, y el paso de ésta a la representación algebraica entre el tiempo y el espacio recorrido por la piedra. Es muy similar al problema 10 sin embargo, la relación existente y necesaria entre ambas variables para poder escribir la expresión algebraica es más sencilla.



De donde $d=5t^2$, donde d metros es la distancia caída en t segundos, por tanto, después de 10 segundos la piedra habrá caído desde una altura de 500 metros.

La respuesta a la pregunta del dominio y recorrido, el alumno debe indicar que el dominio va desde 0 hasta infinito o hasta el tiempo que tarda la piedra en caer al suelo desde el momento de su lanzamiento, que podríamos suponer como 5 segundos al ser la última muestra de la tabla de valores. El recorrido, de la misma forma que ocurre con el dominio irá desde 0 hasta infinito o hasta la altura de la que cae la piedra con respecto al suelo.

Nos encontramos ante un problema que muestra únicamente la rama creciente de la parábola, por lo que la función no decrecerá en ningún momento.

Problema 12: *"El precio de una ventana"* adaptación de Azcárate (2001, p. 242/68.32).

El coste de una ventana cuadrada depende de su tamaño. El precio del cristal es de 50 euros por dm² y el del marco es de 100 euros por dm.

a) ¿Cuánto costarán unas ventanas con los siguientes lados: 7 dm, 1 m, 1'5m?

b) Construye una tabla, con los datos anteriores y otros que elijas, y que nos dé el coste según la longitud del lado de la ventana.

c) Sitúa los valores de la tabla sobre unos ejes de coordenadas cartesianas.

d) Llamando x a la longitud del lado e y al coste de la misma, escribe una fórmula que dé el coste, conocida la longitud del lado.

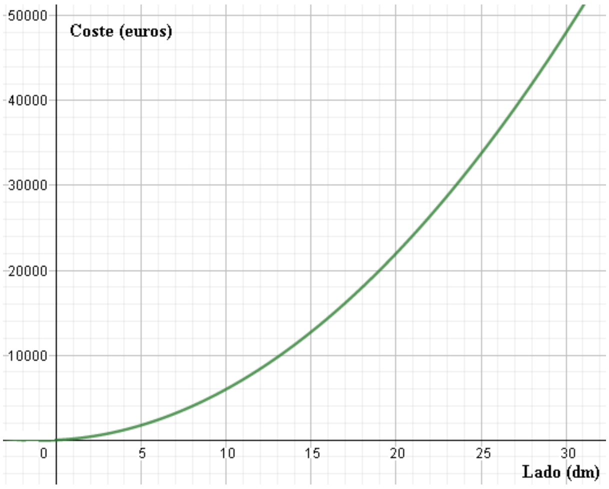
En este problema se pretende trabajar en la transformación de enunciado verbal a tabla, para después pasar a su representación gráfica y terminar con su expresión algebraica.

El resultado de los dos primeros apartados se recogen en la siguiente tabla:

Lado (dm)	7	10	15	20	25	30
Coste (euros)	5.250	9.000	17.250	28.000	41.250	57.000

Para llegar a este resultado, el alumno tiene que elevar al cuadrado el lado para calcular su área y multiplicarla posteriormente por 50 (euros/dm²), para después sumarle el valor del lado multiplicado por 4 (lados del cuadrado) y por 100 (euros/dm). De este razonamiento se obtiene la respuesta al apartado d), $y=50x^2+100x$.

El alumno deberá prestar atención al enunciado, pues dos valores del mismo se presentan en metros, de forma que tendrá que realizar el cambio de unidades previo al relleno de la tabla.



E.4. Campo de Problemas 4

Transformación de Fórmula algebraica a: Expresión verbal, tabla y gráfica

Problema 13: *Dadas las siguientes funciones expresadas en forma de fórmula algebraica, relaciona cada una con su posible descripción verbal, estudia su monotonía y define las variables x e y para cada enunciado, y enuncia otro tú mismo:*

I. $y = 3x - 100$ *II.* $y = -100x$ *III.* $y = x^2 - 100$ *IV.* $y = 100/x$

a) Con la dieta que estoy siguiendo cada día pierdo 100 gramos. En la solución debería definir que la variable independiente es el número de días y que la variable dependiente es el número de gramos que adelgaza con la dieta.
b) Hago pulseras de cuero que vendo a 3 euros cada una. Como el material para hacerlas me cuesta 100 euros quiero saber cuánto ganaré según el número de pulseras que vaya vendiendo. En la solución debería definir que la variable independiente es el número de pulseras y que la variable dependiente es la ganancia en euros. (y = 3x-100)
c) Una compañía que invierte en bolsa me ha dicho que si comienzo a invertir con ellos, obtendré unos beneficios iguales al importe en euros invertido multiplicado por sí mismo, salvo 100 euros que es lo que cuestan los gastos de comisión. En la solución debería definir que la variable independiente es el número de euros que inviertes y que la variable dependiente es la ganancia o pérdida en euros. ($y = x^2 - 100$)
d) Una empresa de albañilería se compromete a terminar una obra en 100 días enviando a un albañil pero como ahora dispone de más albañiles dice que puede acabar la obra antes. En la solución debería definir que la variable independiente es el número de albañiles y que la variable dependiente son los días que durará la obra. (y = 100/x)

Aunque este tipo de funciones son objeto de estudio en el tema es interesante plantear una función que no sea polinómica para que los alumnos se percaten que existen otras funciones como esta que relaciona dos variables inversamente proporcionales.

Con este problema se trabajará la transformación de expresión algebraica a enunciado verbal, y la monotonía. Para ello, se dota al alumno con una muestra de respuestas que le ayudará con la búsqueda de un nuevo enunciado que modelice cada expresión verbal.

Se entiende que la dificultad del problema radica en la elaboración de un enunciado que modelice la expresión verbal, así como el estudio de su monotonía. En este caso, vemos que la expresión algebraica I es creciente y está ligada con el enunciado b), la expresión II es decreciente y se relaciona con el enunciado a). En la expresión III, el alumno podría diferenciar el crecimiento a partir del vértice de la gráfica, sin embargo, una respuesta también válida sería la de indicar que la función es creciente en todo el dominio proporcionado por el enunciado verbal de la función, el enunciado c). Por último, en cuanto a la expresión IV, el alumno dirá que es decreciente y la relacionará con el enunciado d).

Problema 14: *"Latidos del corazón"* de Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) (2013, p. 257).

Durante años la relación entre la máxima frecuencia cardiaca recomendada para una persona y su edad se describía mediante la fórmula siguiente:

Máxima frecuencia cardiaca recomendada = 220 – edad

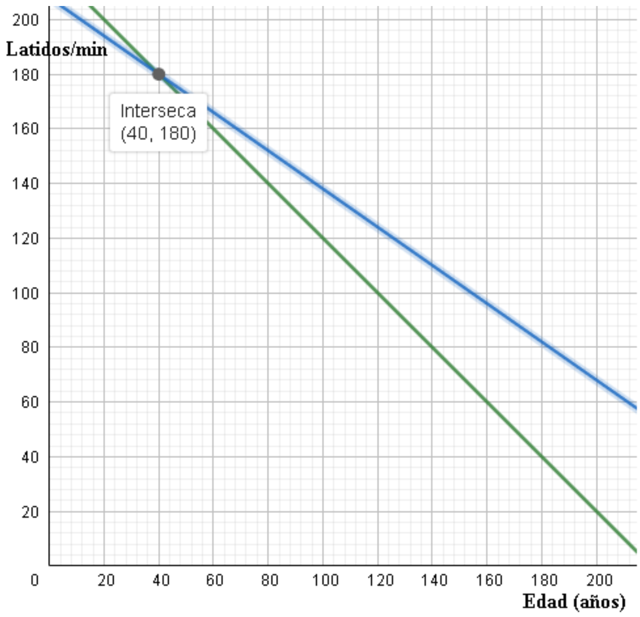
Investigaciones recientes han demostrado que esta fórmula debería modificarse ligeramente. La nueva fórmula es la siguiente:

Máxima frecuencia cardiaca recomendada = 208 – (0,7 x edad)

Un artículo de periódico afirma: "El resultado de usar la nueva fórmula en lugar de la antigua es que el máximo número recomendado de latidos cardíacos por minuto disminuye ligeramente para los jóvenes y aumenta ligeramente para los mayores". ¿A partir de qué edad aumenta la máxima frecuencia cardiaca recomendada como resultado de introducir la nueva fórmula? Muestra tus cálculos y realiza la representación gráfica de la función.

En este problema, se pretende estudiar el paso de representación algebraica de una función a la representación gráfica mediante la comparación del crecimiento de una función.

Pese a que se puede obtener la solución mediante la resolución de un sistema de ecuaciones, se transformarán ambas expresiones algebraicas en expresiones gráficas en las que el alumno podrá observar el crecimiento de ambas funciones y su punto de corte, cuando la edad es de 40 años. En el siguiente gráfico se muestra como la línea azul, correspondiente a las investigaciones recientes, indica que el máximo recomendado de latidos cardíacos aumenta para los mayores de 40 años con respecto a la fórmula anterior:



Problema 15: *Lanzamos una piedra desde una ventana, sea $h(t) = -t^2+2t+3$ la fórmula algebraica que relaciona la altura (metros) a la que se encuentra con el tiempo (segundos). Se pide que muestres la altura a la que se encontrará a cada segundo la piedra desde que se lanza hasta que llega al suelo. Para ello ayúdate de una tabla de valores y responde a las siguientes preguntas:*

a) Realiza la representación tabular de esta función.

b) Realiza la representación gráfica de esta función

c) Indica el dominio y recorrido de la función

d) Estudia la continuidad y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

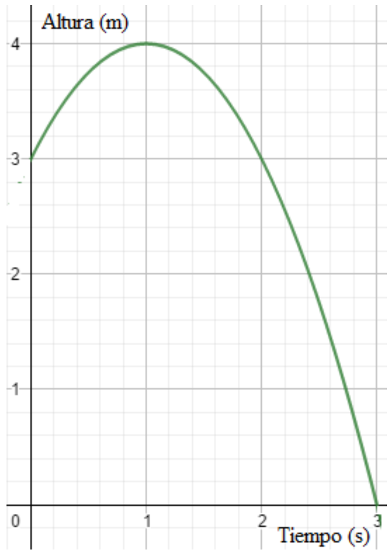
e) Encuentra el máximo o mínimo de la función y los puntos de cortes con los ejes de coordenadas

Con este problema trabajamos la transición entre forma verbal de una función a su representación tabular y gráfica. Además, se trabajarán técnicas como la monotonía, dominio y recorrido, continuidad, máximos y mínimos y puntos de corte con los ejes de coordenadas.

La tabla de valores asociada a esta función está acotada por los valores 0 y 3 de la variable tiempo, puesto que suponemos que se entiende que la función deja de modelizar cuando la piedra toca el suelo. Así, su tabla de valores será:

Tiempo (segundos)	0	1	2	3
Altura (metros)	3	4	3	0

Con su representación gráfica asociada:



Si suponemos que los alumnos saben encontrar las raíces de la ecuación de segundo grado que se obtiene al cortar la función con el eje de abscisas obtendrán los valores x = -1 y x = 3, el máximo de la función estará en el punto medio de los dos valores hallados, es decir, en x= 1. Estamos ante una función continua con dominio en el intervalo [1,3] y recorrido en el intervalo [0,4]. La piedra asciende durante el primer segundo, punto en el que alcanza su máximo, a los 4 metros de altura, mientras que a partir del segundo uno la función decrece hasta que la piedra llega al suelo, en el segundo tres. De esta forma, la función corta a los ejes de coordenadas en los momentos de lanzamiento (altura de 3 metros) y de golpeo contra el suelo (tiempo de 3 segundos).

Problema 16: *Estudio de rectas con Geogebra*

a) Utiliza Geogebra para dibujar la función f(x) = 4x-1

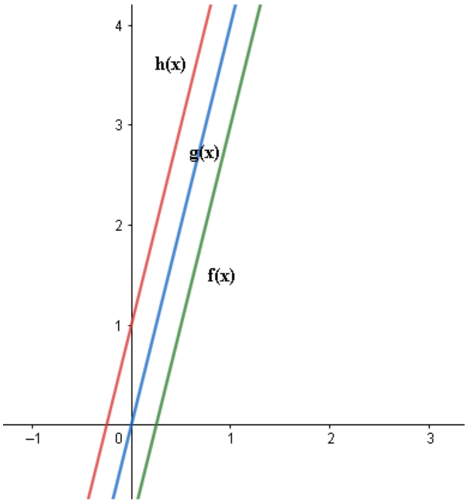
b) Con Geogebra dibuja las funciones g(x) = 4x y h(x) = 4x + 1. ¿qué tienen en común estas gráficas con la de la función f(x)?

c) Con Geogebra dibuja las funciones del tipo l(x) = -4x+n con n un número cualquiera, ¿qué relación tienen estas gráficas con la función f(x)?

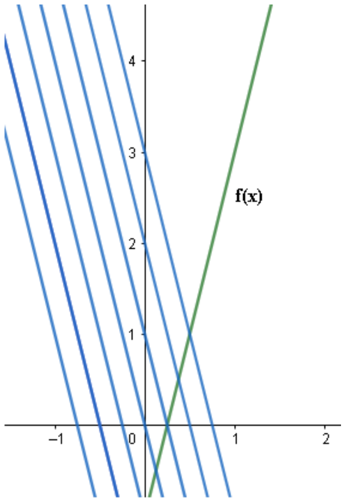
d) Con Geogebra dibuja las funciones del tipo k(x) = -1/4x+n con n un número cualquiera, ¿qué relación tienen estas gráficas con la función f(x)?

Este problema está preparado para la utilización del software libre Geogebra, una aplicación que permite dibujar funciones de forma precisa e intuitiva. De esta forma, los alumnos trabajarán la transformación entre expresión algebraica y representación gráfica de una forma dinámica que les ayude a comprender mejor las relaciones entre diferentes rectas como son el paralelismo, la monotonía o el corte con los ejes de coordenadas.

En primer lugar, los alumnos dibujarán las funciones de los apartados a) y b), tras lo que deberían poder ver con facilidad como las tres funciones lineales tienen la misma pendiente, es decir, que las rectas son paralelas. El apartado c) entraña un poco más de dificultad en cuanto a que el alumno debe llegar a la conclusión de que todas estas funciones l(x) y la función f(x) son simétricas respecto a la recta paralela al eje de ordenadas y que pasa por el punto de corte de f(x) y l(x). Los gráficos serán similares a los mostrados a continuación:

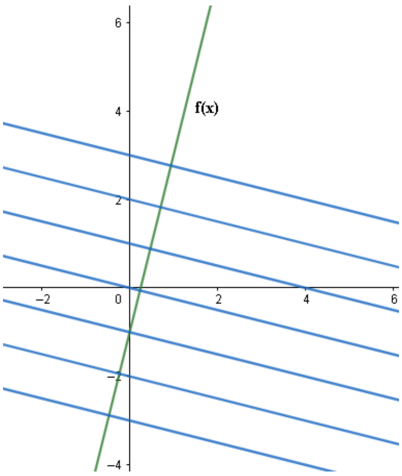


Apartados a) y b)



Apartado c)

En último lugar, introducimos el apartado d) para que el alumno relacione dos rectas perpendiculares, conclusión que extraemos tras la representación de las diferentes funciones k(x) y la función f(x):



Problema 17: *Estudio de funciones cuadráticas con Geogebra*

a) *Utiliza Geogebra para dibujar la función* $f(x) = x^2 - 4$

b) *Con Geogebra dibuja las funciones del tipo* $g(x) = x^2 + n$*, con n un número cualquiera, ¿qué tienen en común estas las gráficas con la de la función f(x)?*

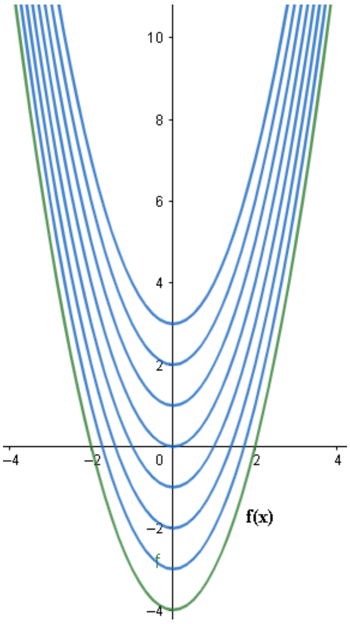
c) *Con Geogebra dibuja las funciones del tipo* $h(x) = ax^2 + n$*, con n un número cualquiera, y a un número mayor que cero, ¿qué tienen en común estas las gráficas? ¿Qué ocurre si a aumenta o disminuye?*

d) *Con Geogebra dibuja las funciones del tipo* $h(x) = ax^2 + n$*, con n un número cualquiera, y a un número menor que cero, ¿qué tienen en común estas las gráficas? ¿Qué ocurre si a aumenta o disminuye?*

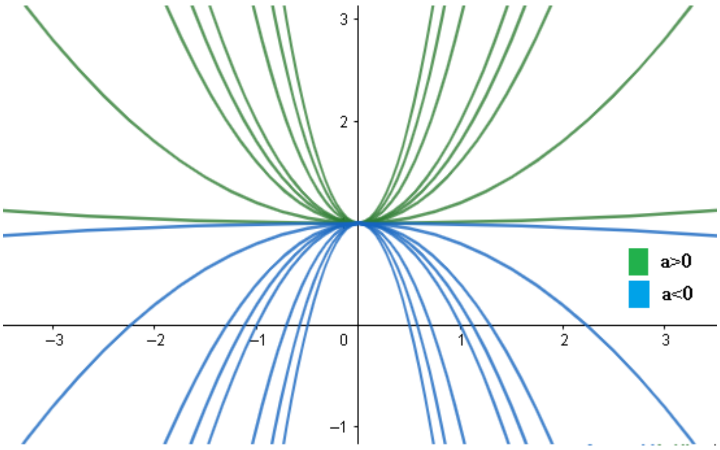
e) *Has observado que todas las parábolas dibujadas hasta ahora tienen su vértice sobre el eje de ordenadas. Si deseas que su vértice esté sobre la* *recta x = b, ¿qué expresión algebraica debe tener esa función de segundo grado? Para responder a esta cuestión conjetura la expresión y después prueba con Geogebra.*

De la misma forma que sucede en el problema anterior, este problema está preparado para la utilización del software libre Geogebra, y tiene los mismos objetivos que el problema anterior.

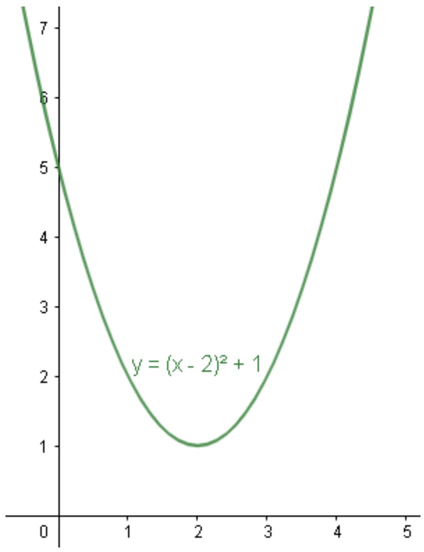
En primer lugar, los alumnos dibujarán las funciones de los apartados a) y b), tras lo que deducirán que todas las funciones cuadráticas dibujadas son convexas, simétricas con respecto al eje de ordenadas y que tienen la misma apertura, donde lo único que cambia son los vértices de las parábolas que se sitúan sobre el eje de ordenadas:



Para el apartado c), las funciones cuadráticas h(x) son parábolas convexas y simétricas con respecto al eje de ordenadas. Si el valor de *a* aumenta la parábola es más cerrada y si *a* disminuye es más abierta. Por otro lado, en el caso del apartado d), las funciones cuadráticas h(x) son parábolas cóncavas y simétricas con respecto al eje de ordenadas. En este caso, si el valor absoluto de *a* aumenta la parábola es más cerrada y si el valor absoluto de *a* disminuye es más abierta. Los gráficos mostrados durante los apartados c) y d) se pueden ver en la siguiente representación gráfica:



En último lugar, el apartado e) podríamos considerarlo el de mayor dificultad. Tras observar como todas las funciones dibujadas presentaban una simetría sobre el eje de ordenadas, el alumno podría llegar a deducir la solución de este apartado indicando que las gráficas de todas estas funciones deben ser del tipo $k(x) = (x-b)^2 + n$. Por ejemplo, la función $k(x) = (x-2)^2 + 1$ tiene su vértice sobre la recta x=2, concretamente en el punto (2,1):



F. Sobre las técnicas

A continuación se muestra un esquema que muestra las técnicas que van a ir apareciendo a lo largo del tema mediante problemas:

1. Técnicas asociadas a las traslaciones entre representaciones
2. Técnicas para la descripción global de una función
    - Dominio y Recorrido
    - Monotonía
    - Extremos relativos y absolutos
    - Continuidad
    - Corte con los ejes de coordenadas
3. Técnicas asociadas a la función polinómica de grado uno
    - Cálculo de m y n, en la expresión **y = mx + n**
    - Rectas paralelas y perpendiculares
    - Punto de corte entre 2 rectas
4. Técnicas asociadas a la función polinómica de grado dos
    - Representación de funciones cuadráticas
    - Vértice de una parábola
    - Corte con los ejes de coordenadas, raíces de la función

Técnicas asociadas a las translaciones entre representaciones

- **Enunciado verbal a expresión algebraica, tabla y representación gráfica**

En este caso, el procedimiento a seguir en primer lugar será el de deducir las dos variables que actuarán como *x* e *y*. En segundo lugar, el alumno podrá deducir la expresión algebraica asociada al problema de forma directa (como es el caso del problema del precio del viaje en taxi) o tener que pasar primero por la forma tabular, escogiendo parejas de valores *x* e *y* deducidas directamente de la información proporcionada por el enunciado. Una vez hallada la tabla de valores, se procederá a realizar su representación gráfica marcando la pareja de valores sobre unos ejes de coordenadas y uniendo estos puntos mediante una línea, de la que se deducirá la ecuación de la recta si no se ha podido deducir directamente del enunciado verbal. La forma de hallar la expresión de una función lineal tratará de deducir dos puntos cualesquiera de la gráfica para después calcular la expresión y=mx+n de la forma en la que se indica en el apartado de "Técnicas asociadas a la función polinómica de grado uno".

- **Expresión algebraica a enunciado verbal, tabla y representación gráfica**

Aunque un alumno puede ofrecer un enunciado verbal asociado a una expresión algebraica, se intentará llegar a este resultado a través de la transformación a tabla de valores y posterior representación gráfica, de la cual se deducirá de forma cómoda un enunciado verbal asociado que cumpla, en la medida de lo posible, las condiciones indicadas en el problema.

Para rellenar la tabla de valores, basta con designar unos valores fijos a la variable *x* para sustituirlos en la expresión algebraica y poder calcular así, el valor de la coordenada *y*. Para la obtención de la representación gráfica, seguiríamos los pasos indicados en el apartado anterior.

- **Tabla de valores a enunciado verbal, expresión algebraica y representación gráfica**

Ya hemos hablado del paso de tabla de valores a representación gráfica y de esta a su enunciado verbal, sin embargo, el alumno también podría llegar a obtener una representación en forma de enunciado verbal partiendo de la pareja de valores extraída de la propia tabla, siempre y cuando la información obtenida de las parejas de valores se lo suficientemente amplia como para comprender la relación global entre las dos variables implicadas en la relación funcional.

En este campo de problemas el paso de representación tabular a la algebraica se reducirá a las funciones de grado uno, para las que el alumno puede seleccionar dos parejas de valores de la tabla para después calcular la expresión $y=mx+n$ de la forma en la que se indica en el apartado de "Técnicas asociadas a la función polinómica de grado uno".

- **Representación gráfica a enunciado verbal, expresión algebraica y tabla de valores**

Ya se ha mencionado el paso de la representación gráfica a enunciado verbal mediante la interpretación de gráficas va a obligar al alumno a reflexionar sobre las variables implicadas en la situación y la relación funcional que existe en ellas, dando lugar a la posibilidad de que los alumnos expongan sus diferentes puntos de vista al confrontar sus diferentes interpretaciones de la gráfica. En el caso de querer transformar la expresión en una tabla de valores, el alumno deberá seleccionar puntos de la gráfica (tanto la coordenada x del punto como la coordenada y) para situarlos en una tabla de valores.

Técnicas para la descripción global de una función

- **Dominio y Recorrido**

En el caso de que dispongamos de la representación algebraica, la técnica consiste en encontrar los diferentes valores de la variable independiente que aseguren que tienen una sola imagen para determinar el dominio. Y también encontrar los valores de la variable dependiente que estén relacionados con valores de la variable independiente para calcular el recorrido de la función.

Si la función viene dada por su representación gráfica la técnica a usar será la de “aplastar” toda la función contra el eje, es decir hacer la proyección de la gráfica de la función sobre el eje de abscisas. Así, la parte del eje x en la que quede aplastada la función, será el **dominio** de la misma.

De la misma forma que para el dominio, en el caso del **recorrido** aplastaremos la función, en este caso, sobre el eje y. De esta forma, la parte del eje y en la que quede aplastada la función, será el **recorrido o imagen** de la misma.

Esta técnica se trabajará en los problemas 1, 6, 10, 11 y 15.

- **Monotonía**

En el caso de que dispongamos la representación gráfica de una función los intervalos de crecimiento (decrecimiento o de valor constante) se obtienen proyectando sobre el eje de abscisas la gráfica, identificando aquellos intervalos de la variable independiente en los cuales la función es monótona (creciente, decreciente o constante) y expresarlos en forma de intervalos de números reales.

En los intervalos de crecimiento o de decrecimiento tiene sentido calcular la “tasa de variación media” como el cociente entre la diferencia de los valores de la variable dependiente y la diferencia de los valores de la variable independiente. En el caso de las funciones de primer grado esta tasa de variación se denomina pendiente de la recta.

Esta técnica se trabajará en los problemas 1, 2, 4, 6, 10, 11, 13, 14, 15, 16 y 17.

- **Extremos relativos y absolutos**

<u>Máximo relativo y absoluto</u>

Diremos que un punto es un máximo relativo si la función cambia de creciente a decreciente en un intervalo alrededor de un punto. Además, en el caso de que dispongamos la representación gráfica de una función, diremos que ese máximo es absoluto si cumple que es el punto más alto en todo el dominio de la función.

Esta técnica se trabajará en los problemas 9, 10, 15 y 17.

<u>Mínimo relativo y absoluto</u>

Diremos que un punto es un mínimo relativo si en ese punto, la función cambia de decreciente a creciente. Además, en el caso de que dispongamos la representación gráfica de una función, diremos que ese mínimo es absoluto si cumple que es el punto más bajo de la función.

Esta técnica se trabajará en los problemas 9, 10, 15 y 17.

- **Continuidad**

Dado que en este curso vamos a abordar este concepto de modo intuitivo vamos a servirnos de la representación gráfica de la función: que una función es continua en su dominio si, para todos los valores sobre los que hemos definido el dominio, podemos trazar la función sin levantar el bolígrafo del papel.

Esta técnica se trabajará en los problemas 4 y 15.

- **Corte con los ejes de coordenadas**

Nombraremos los cortes con los ejes con sus dos coordenadas, en forma de puntos de la forma (0,*y*) o bien (*x*,0). En el caso de disponer de la representación tabular de una función el corte con el eje x se dará cuando la coordenada y sea 0, mientras que el corte con el eje y se da cuando la coordenada x sea 0.

Si se dispone de la representación gráfica de la función los puntos de corte se visualizan de modo inmediato porque son aquellos de la forma (x,0) y (0,y) según corten al eje de abscisas o al de ordenadas, respectivamente.

Y si se dispone de la representación algebraica hay que resolver la ecuación:

$y = f(x), y = 0$ para calcular los cortes con el eje de abscisas

Y resolver la ecuación:

$y = f(x), x = 0$ para calcular los cortes con el eje de ordenadas

Esta técnica se trabajará en los problemas 5, 11, 15 y 16.

Técnicas asociadas a la función polinómica de grado uno

- **Cálculo de m y n, en la expresión y = mx + n**

Pendiente (m)

En primer lugar, la pendiente es el grado de inclinación de la recta, de modo que si m es negativa, la recta será decreciente, mientras que si es positiva será creciente.

Para calcularla, dados los puntos A=(x_1,y_1) y B=(x_2,y_2), utilizaremos la siguiente que es la tasa de variación entre puntos alineados de la recta.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En el caso de que el enunciado no nos proporcione los dos puntos, tendremos que extraerlos del tipo de representación de función dada por el enunciado.

Esta técnica se trabajará en los problemas 5, 6, 8, 13, 14, 15 y 16.

Ordenada en el origen (n)

La *n* es el punto de corte en el eje *y* de la función. Si no lo conocemos, una vez hallada la pendiente tendremos que sustituir uno de los dos puntos de los que hemos partido para calcular la *m* y sustituirlo por *x* e *y* según corresponda cada coordenada. Sustituyendo y despejando, obtendremos el valor de *n*.

Otra técnica, la cual se presentará para hallar *m* y *n* a partir de una representación gráfica de la función, es la de sustituir los dos puntos dados o extraídos del enunciado por sus coordenadas *x* e *y* en la ecuación $y = mx + n$, y resolver el sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas resultante.

Esta técnica se trabajará en los problemas 5, 6, 8, 13, 14, 15 y 16.

- **Rectas paralelas y perpendiculares**

Mediante el estudio de la pendiente de una función lineal se va a justificar la técnica de obtención de rectas paralelas y perpendiculares a una dada. Así, si una recta es paralela a otra, significa que el grado de inclinación de la recta es el mismo en ambas, por tanto, la pendiente de una será igual a la de la otra.

En el caso de que tengamos que hallar una recta perpendicular a otra, hallaremos su pendiente m en función de la pendiente de la otra recta. Esto es que la pendiente de la recta perpendicular a otra dada, es inversa y cambiada de signo.

En este punto se presentarán también las rectas paralelas a los ejes. Las rectas verticales las denominaremos como *x* igual a un número, mientras que las rectas horizontales, que tienen pendiente igual a 0, las denominaremos como *y* igual a un número. En el caso de las horizontales, se cumple que *y* es igual a *n* (ordenada en el origen).

Esta técnica se trabajará en el problema 16.

- **Punto de corte entre dos rectas**

Para hallar el punto de corte entre dos rectas, resolvemos el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que se nos plantea con las dos ecuaciones de la recta dadas.

Esta técnica se trabajará en los problemas 14 y 16.

Técnicas asociadas a la función polinómica de grado dos

- **Representación de funciones cuadráticas**

Sea $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$, establecemos que la parábola es convexa (tiene forma de U) cuando *a* es positiva, y diremos que es cóncava (tiene forma de U invertida) si *a* es negativa.

Para poder representar esta función, será necesario que calculemos en primer lugar el vértice de la parábola, y por otro los cortes con los ejes de coordenadas.

Cortes con los ejes

Ya mencionados en apartados anteriores, para el corte con el eje *y* sustituiremos la variable *x* por 0 y calcularemos el valor de la *y*. En el caso del corte con el eje *x*, sustituiremos la variable *y* por 0 y resolveremos la ecuación de segundo grado para hallar las raíces de la función que sabemos que puede tener dos raíces, una única raíz o ninguna. Los alumnos han recibido enseñanza de la resolución de ecuaciones de segundo grado en un tema estudiado anteriormente en este mismo curso.

Una vez hallados estos puntos, se dibujarán sobre un eje de coordenadas y se trazará la línea curva que define la parábola.

Vértice de la parábola

La coordenada x del vértice es igual a $\frac{-b}{2a}$. Ahora, para hallar la coordenada y, sustituimos el valor que acabamos de hallar en la coordenada x de la función.

Estas técnicas asociadas a la función polinómica de grado 2 se trabajarán en los problemas 9, 10, 11, 12, 13, 15 y 17.

G. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)

A continuación se muestra un esquema que muestra las justificaciones que vamos a escribir sobre las técnicas mencionadas en el apartado anterior de este trabajo:

1. Justificaciones sobre la descripción global de una función, tecnologías
    - Dominio y Recorrido
    - Monotonía
    - Extremos relativos y absolutos
    - Continuidad
    - Corte con los ejes de coordenadas
2. Justificaciones sobre ecuaciones de la recta, tecnologías
    - Cálculo de m y n, en la expresión **y = mx + n**
    - Rectas perpendiculares y paralelas
    - Punto de corte entre 2 rectas
3. Justificaciones sobre ecuaciones cuadráticas, tecnologías
    - Representación de funciones cuadráticas
    - Vértice de una parábola

Justificaciones sobre la descripción global de una función, tecnologías

- **Dominio y Recorrido**

Atendiendo a la definición de **dominio,** decimos que el dominio de una función es el conjunto de diferentes valores que toma la variable *x* (variable independiente), y que se denota como Dom(*f*):

$$Dom(f) = \{x \in R / \exists\, y \in R \text{ con } y = f(x)\}$$

Por su parte, decimos que el **recorrido o imagen** de una función son todos los distintos valores que se obtienen como salida tras aplicar f(x) sobre todos elementos de su dominio:

$$Im(f) = \{y \in R / \exists\, x \in R \text{ con } f(x) = y\}$$

- **Monotonía**

Según la definición de crecimiento, sea y=f(x) una función, diremos que es creciente en (a,b) si para cada x_1, x_2 tales que $a<x_1<x_2<b$ se cumple que $f(x_1)<f(x_2)$.

Se utiliza el mismo razonamiento en el caso del decrecimiento y el de función constante. Como vemos, la técnica mostrada en el apartado anterior es una traducción de la definición formal.

Esta tecnología sólo será aplicada sobre una función representada en modo de gráfica, haciéndose visual la clasificación entre creciente y decreciente. Y también en el caso de la representación algebraica de las funciones polinómicas de grados 1 y 2.

- **Extremos relativos y absolutos**

Se define máximo relativo al punto cuyo entorno cercano se sitúa por debajo de él, es decir, sea (x_1, f(x_1)) máximo relativo de la función, entonces en un entorno cercano de x_1 los valores que toma f(x) son menores.

El mismo razonamiento obtenemos para el caso de los mínimos relativos.

Como se puede apreciar, en el caso del máximo relativo, de nuevo la técnica aprendida es una traducción de la tecnología utilizada para justificarla ya que para que los puntos del entorno estén por debajo, necesariamente tiene que crecer la función hasta el punto máximo y volver a decrecer.

Del mismo modo que se mencionaba en las técnicas referentes a los máximos o mínimos absolutos, la justificación es la misma, se define como máximo absoluto al punto más alto de la función, y mínimo absoluto al punto más bajo.

En este curso, esta tecnología se enseñará a partir de una función representada en forma de gráfica.

- **Continuidad**

Se dice que una función f(x) es continua en un punto *a*, si y sólo si, se verifican las condiciones siguientes:

- La función existe en a.
- Existe el límite de f(x) cuando x tiende a a.
- El límite en dicho punto y el valor de la función en ese punto son iguales:

$$f(x) \ = f(a)$$

En este curso no vamos a utilizar esta definición de continuidad puntual y nos vamos a conformar con una definición asociada a la representación gráfica de la función:

Una función se dice continúa en un intervalo (a, b) si podemos dibujar la gráfica sin levantar el lápiz del papel.

- **Corte con los ejes de coordenadas**

Se sabe que un punto que corta al eje y tiene la coordenada x=0, por tanto los puntos de corte con este eje, serán de la forma (0,y).

Por otro lado, siguiendo el mismo razonamiento llegamos a que los puntos de corte con el eje x son de la forma (x,0). En ambos casos hemos utilizado la representación gráfica de la función para justificar la técnica de corte con los ejes.

Justificaciones sobre ecuaciones de la recta, tecnologías

- **Justificación y cálculo de m y n, en la expresión y = mx + n**

Pendiente m

La pendiente *m* se define como la Tasa de Variación Media, que es el cociente entre la diferencia de los valores de la variable dependiente y la diferencia de los valores de la variable independiente, y que hemos definido en el apartado de las técnicas.

Ordenada en el origen n

La *n* se estudia directamente desde la definición (ordenada en el origen), esto es el punto de corte con el eje *y*.

- **Rectas paralelas y perpendiculares**

Hemos dicho que las pendientes de dos rectas paralelas son iguales, por la definición de pendiente vemos que esto se cumple.

En el caso de la relación entre las pendientes de 2 rectas perpendiculares no es tan simple. Recordamos que la pendiente m_1 de una recta perpendicular a otra con pendiente m_2 cumple que $m_1 = \frac{-1}{m_2}$. Cambiamos de signo la pendiente porque si una recta es perpendicular a otra, implica que si una crece, la otra decrece (o viceversa). En cuanto al inverso, con un dibujo sobre papel cuadriculado es fácil ver que una recta perpendicular, dados dos puntos A y B, cambia lo que recorre en la *y* con lo que recorre en la *x*. De esta forma, se invierte la pendiente para obtener la pendiente de la recta perpendicular.

Justificaciones sobre ecuaciones cuadráticas, tecnologías

- **Representaciones de ecuaciones cuadráticas**

Por definición, de la forma $y = ax^2 + bx + c$

Vértice de una parábola

Hemos dicho que la coordenada x del vértice viene determinada por $\frac{-b}{2a}$. La explicación supera los conocimientos a adquirir por los alumnos este curso, por lo que no se nombrarán en clase. ¿De dónde viene esta expresión?

Como sabemos, la recta vertical $x=x_0$ que pasa por el vértice de la parábola, divide a esta en dos partes iguales en las que podemos decir que la rama de la parábola es simétrica a la otra con respecto a esta recta mencionada. Esto quiere decir que el punto de corte de esta recta con el eje de abscisas (corte en el punto x_0) es el punto medio de las dos raíces de la función. Así, sabiendo que las raíces del polinomio que forma la parábola están determinadas por $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, calculando la media aritmética de estos dos valores hallaremos el valor de la coordenada *x* del vértice de la parábola, $V_x = \frac{-b}{2a}$.

La coordenada y del vértice de la parábola se obtiene sustituyendo el valor obtenido de x en el vértice en la función dada. En cuanto al corte con los ejes de coordenadas, se sigue el mismo razonamiento que el corte con los ejes visto en el punto 1 de este apartado.

Raíces de la función

Tal y como hemos nombrado en el apartado de técnicas, las raíces de la función se corresponden con los puntos donde la función corta al eje x. Este razonamiento sale de la propia definición de raíces de una función. Una función tiene tantas raíces o ceros como cortes con el eje x tenga, es decir, tendrá 0 raíces si la ecuación $ax^2+bx+c=0$ no tiene solución, tendrá 1 si tiene únicamente 1 solución (sólo se da este caso si el vértice es el punto de corte con el eje x), o tendrá 2 raíces si la función polinómica de grado 2 tiene 2 soluciones.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

Tras presentar los campos de problemas con sus técnicas asociadas y sus propias justificaciones, la relación entre los campos de problemas y su técnica asociada puede apreciarse en la siguiente tabla:

Campo de Prob.	Pro-blema	Dom. y Rec.	Mono-tonía	Cont.	Máx. y Mín.	Corte Ejes	Rectas	Parábolas
1	1	X	X					
	2		X					
	3							
	4		X	X				
2	5					X	X	
	6	X	X					
	7							
	8						X	
	9				X			X
	10	X	X		X			X
3	11	X	X			X		X
	12							X
4	13		X				X	X
	14		X				X	
	15	X	X	X	X	X		X
	16		X	X		X	X	
	17		X	X	X	X		X

A continuación se muestra una tabla con el nº de sesiones que se van a llevar a cabo, así como de los campos de problemas a tratar durante cada una de ellas.

SESIÓN	ACTIVIDADES
1	- Evaluación Inicial
2	-Problemas 1 y 2
3	- Problemas 3 y 4
4	- Problemas 5, 6 y 7
5	- Problemas 8 y 9
6	- Problemas 10, 11
7	- Problemas 12 y 13
8	- Problemas 14 y 15
9	- Problemas 16 y 17 (Geogebra)
10	Prueba escrita final

La metodología a seguir durante estas sesiones de una hora de duración, tratará de otorgar al alumno cierta autonomía para enfrentarse a los problemas. Se les presentarán problemas y se les dejará tiempo para reflexionar, interpretar y resolver.

No se dedicarán sesiones para explicar cada campo de problemas, si no que aparecerán directamente a lo largo de las sesiones de trabajo. Los alumnos trabajarán organizados en grupos de tres o cuatro alumnos ya que al resolver distintos campos de problemas en una misma sesión, el trabajo en equipo puede ayudarles a debatir, compartir conocimientos y ser críticos para con los demás y para consigo mismos.

Durante estas sesiones de trabajo en grupo, la clase se compondrá de las siguientes actividades:

- Breve debate en clase sobre los conocimientos adquiridos durante la sesión anterior.
- Trabajo en grupo sobre problemas planteados por el profesor.
- Debate en clase de las respuestas dadas por los grupos de alumnos.
- Explicación del profesor sobre las técnicas que surjan de los problemas tratados.

Por su parte, durante las sesiones de Geogebra, se seguirá la misma metodología que en las sesiones grupales, disponiendo cada alumno de un ordenador mediante el cual trabajarán ayudándose de los guiones con los enunciados de los problemas que se les entregarán en formato de papel. Precedidos por una pequeña instrucción del funcionamiento de la aplicación, se les dejará tiempo para que trabajen en grupos de dos o tres personas para una primera puesta en común de resultados previa al debate de resultados que se realizará a nivel de toda la clase.

I. SOBRE LA EVALUACIÓN

En la siguiente prueba escrita, se presentan cinco problemas que van en línea con los campos de problemas tratados durante las sesiones de trabajo. Se busca principalmente conocer si el alumno está familiarizado con las traslaciones entre los distintas formas de representación de funciones, así como los conocimientos aprendidos a raíz de estos. Para la corrección de la prueba se utilizará el modelo de tercios siguiendo los trabajos de Gairín, Muñoz y Oller (2012). Los errores provenientes de tareas principales podrán ser penalizados con hasta un 100% del valor de la pregunta. Los provenientes de tareas auxiliares específicas podrán restar hasta un 50% de la pregunta, y las auxiliares generales con hasta un 20% de la nota.

El valor de cada pregunta es de 2 puntos, sin tener valor cada apartado por separado sino que se tendrá en cuenta la guía de corrección mencionada en cada problema.

En el momento de entregar a los alumnos las calificaciones, se empleará una sesión para la corrección del examen, de forma que podamos debatir acerca de los resultados correctos o incorrectos dados en el examen y aprender de los eventuales errores que cometan los alumnos.

1. *Dada la siguiente tabla que relaciona el espacio en relación con el tiempo:*

Tiempo (h)	0	1	2	3	4	5	6	7
Espacio (km)	0	2	4	6	6	6	3	0

a) Representa los siguientes puntos sobre un eje de coordenadas y traza la línea que los une.

b) Enuncia una situación que refleje los datos que aparecen en la tabla.

c) Las rectas que aparecen en la representación gráfica del apartado a, ¿tendrán pendiente positiva o negativa? Justifica tu respuesta.

Aspectos del conocimiento a evaluar:

- **Campo de problemas:** Paso de representación tabular a representación gráfica y a forma verbal.

- **Técnicas y tecnologías:** Representación de puntos sobre ejes de coordenadas, funcionalidad de la pendiente de la recta y comprensión de la relación entre dos variables.

- **Estándares de aprendizaje:**
  - Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto.

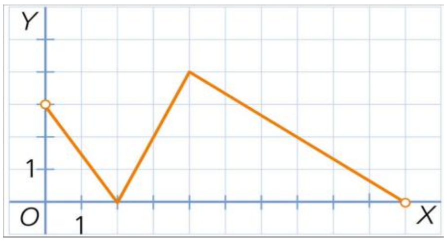
- **Criterios de calificación**
  - **Tarea principal:** Paso de forma tabular a representación gráfica y a forma verbal.
  - **Tarea auxiliar específica:** Conoce el significado de la pendiente "m".
  - **Tarea auxiliar general:** Coloca puntos en ejes de coordenadas y se desenvuelve correctamente en el cálculo aritmético.

Posibles respuestas del alumnado:

En este problema, el alumno deberá convertir la función dada en el enunciado en formato tabular a formato gráfico. En el apartado b) se pide que se dé en forma verbal, de modo que el alumno podrá razonar de forma que pase de forma tabular a forma verbal, o por otro lado pasar de la forma gráfica determinada en el apartado a) a forma verbal. En cualquier caso, el alumno deberá diferenciar tres tramos de recorrido e indicará que un determinado móvil sale de un origen y avanza con velocidad constante durante tres horas, momento en el que se detiene durante dos horas, para terminar regresando al punto de origen en otras dos horas, con una velocidad mayor que en el primero de los tres tramos

En cuanto al apartado c) el alumno deberá indicar que cada recta creciente posee pendiente positiva, mientras que cada recta descendente posee pendiente negativa.

2. *Sea la función:*



Determina:

a) Enuncia una situación que pueda representar esta representación gráfica. Para ello, define las variables x e y

b) Dominio y Recorrido

c) Monotonía y extremos relativos y absolutos

d) Continuidad y cortes con los ejes de coordenadas

Aspectos del conocimiento a evaluar:

- **Campo de problemas:** Paso de representación gráfica a forma verbal.

- **Técnicas y tecnologías:** Estudio general de una función: dominio, recorrido, monotonía, extremos relativos y absolutos, continuidad y cortes con los ejes de coordenadas.

- **Estándares de aprendizaje:**

  ○ Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto.

  ○ Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.

- **Criterios de calificación**

  ○ **Tarea principal:** Paso de representación gráfica a forma verbal.

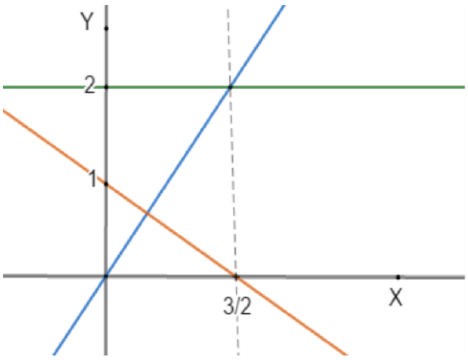
  ○ **Tarea auxiliar específica:** Es capaz de estudiar una función, nombrando sus principales características (dominio, monotonía, etc).

Posibles respuestas del alumnado:

El primer apartado muestra la parte más interesante del problema, la modelización de una situación contextualizada, realizando el paso de representación gráfica a expresión verbal. Dejando sitio a la imaginación, el alumno deberá formular verbalmente una situación posible, la cual se dará siempre y cuando definan correctamente las variables x e y. Un ejemplo de situación real aplicada sobre la gráfica del ejercicio sería la siguiente: “Sean *X*=nº de horas transcurridas e *Y*=Espacio (km); Juan, que está en contra del uso de vehículos a motor, sale de casa de su abuela para volver a casa, situada a 3 km de la misma. Después de 2 horas consigue llegar a su casa, y es entonces cuando su novia le pide que vaya al supermercado (situado en dirección casa de la abuela) pero que esta vez lo haga sin escribir mensajes en el móvil durante el camino. Así, en el mismo tiempo utilizado para volver de casa de su abuela, llega Juan al supermercado situado a 4 km. Una vez allí, no entra al supermercado ya que encuentra a un perro de gran tamaño en la puerta con la pata magullada y decide llevárselo a casa para cuidarlo, tardando esta vez 6 horas en regresar."

En lo referente a los demás apartados, el alumno deberá describir la función indicando que se trata de una función continua que posee un dominio que va de 0 a 10 y un recorrido que va de 0 a 4. Acerca de la monotonía y los extremos de la función, se dirá que la función crece en el intervalo (2,4) y decrece en el resto, es decir en los intervalos (0,2) y (4,10), presentando un máximo absoluto en el punto (4,4) y un mínimo absoluto en (2,0). Por último, se indicará que la función corta al eje *y* en y=3 y que corta al eje *x* en x=2 y x=10.

3. Calcula la ecuación de la recta de cada una de las siguientes funciones, y escribe una ecuación paralela y otra perpendicular a cada una de ellas que pasen por el origen de coordenadas.



Aspectos del conocimiento a evaluar:

- **Campo de problemas:** Paso de representación gráfica a expresión algebraica.

- **Técnicas y tecnologías:** Cálculo de la "m" y la "n", rectas paralelas (misma pendiente) y rectas perpendiculares (pendiente opuesta e inversa a la otra).

- **Estándares de aprendizaje:**

  - Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente.

  - Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente.

- **Criterios de calificación**

  - **Tarea principal:** Paso de forma gráfica a expresión algebraica.

  - **Tarea auxiliar específica:** Calcula la pendiente m y la ordenada en el origen n de cada recta. Además, conoce la propiedad de pendientes en rectas paralelas y perpendiculares.

  - **Tarea auxiliar general:** Realiza cálculos aritméticos con soltura.

Posibles respuestas del alumnado:

En este ejercicio, el alumno deberá convertir la función dada en el enunciado en formato gráfico a expresión algebraica. Para cada recta deberá calcular la m y la n. Para la m utilizará la fórmula de la TVM vista, mientras que para la n, puede hallarla mirando el corte en el eje y (ordenadas) o sustituyendo en la ecuación de la recta y=mx+n una vez hallada la m. Otra forma que podrían usar los alumnos, sería la de efectuar un sistema de ecuaciones (incógnitas m y n) al sustituir 2 puntos sacados de una recta en la ecuación de la recta que acabamos de mencionar.

Para la recta horizontal (la verde) se prevé que los alumnos conozcan que son de la forma $y=y_1$, sin embargo, podrían hallar la m y la n del mismo modo que hemos nombrado en el párrafo anterior, siendo la m=0 (o razonando que al ser una recta horizontal la pendiente por definición es 0).

Para las rectas paralelas y perpendiculares, una vez halladas las nuevas pendientes, valdrá tanto que dejen la *n* como *n* o que la sustituyan por un valor cualquiera (en el caso de la paralela deberá ser n_1 distinto de n_2).

En este caso, las soluciones serían:

- Recta verde: y=2, con paralela y=0, y con perpendicular x =0
- Recta azul: $y=\frac{4}{3}x$ con paralela $y=\frac{4}{3}x$ (la nueva recta es la misma que la anterior, por lo que serán la misma recta y no serán paralelas) y perpendicular $y=-\frac{3}{4}x$
- Recta naranja: $y=-\frac{2}{3}x+1$ con paralela $y=-\frac{2}{3}x$ y perpendicular $y=\frac{3}{2}x$

4. Un montañero profesional se dispone a subir una montaña de 2.000 metros de altitud. Para retar a un amigo que vive en un pueblo situado en esa misma montaña a 500 metros de altitud, le propone que comience a subir la montaña desde el pueblo, a ver si es capaz de alcanzarle antes de llegar a la cima. Sabemos que el amigo es capaz de ascender 250 metros cada hora, mientras que del montañero profesional sabemos que a las 2 horas de comenzar la subida ya lleva 800 metros subidos. Suponiendo que ambos ascienden a velocidad constante:

a) Escribe las expresiones algebraicas que relacionan la altitud en la que se sitúan sobre la montaña en relación de las horas que llevan de trayecto.

b) Elabora una tabla que recoja la altura a la que se encuentra cada amigo en cada hora de trayecto.

c) En función de lo anterior, ¿se encontraran antes de que ambos suban la montaña? Si es así, ¿A qué altura se encontrarán?

d) Representa sobre un eje de coordenadas las funciones halladas.

Aspectos del conocimiento a evaluar:

- **Campo de problemas:** Paso de forma verbal a expresión algebraica, tabular y representación gráfica.

- **Técnicas y tecnologías:** Punto de corte entre dos rectas.

- **Estándares de aprendizaje:**
  - Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa.
  - Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto.

- **Criterios de calificación**
  - **Tarea principal:** Paso de forma verbal a expresión algebraica, tabular y representación gráfica
  - **Tarea auxiliar específica:** Es capaz de hallar el punto de corte entre dos rectas e interpretarlo.
  - **Tarea auxiliar general:** Realiza cálculos aritméticos con soltura.

<u>Posibles respuestas del alumnado:</u>

En este problema, el alumno deberá pasar de forma verbal a expresión algebraica, tabular y representación gráfica.

Además, deberá interpretar el enunciado y, tras hallar las expresiones algebraicas, calcular el punto de corte entre ambas rectas que representan la distancia recorrida en función del tiempo transcurrido.

Otra forma de saber si se encuentran o no antes de que el primero llegue a la cima, es sustituir en su ecuación analítica de la recta la *y* por 2.000 y, una vez hallada la coordenada *x* del tiempo, sustituir en la otra ecuación para comprobar si tras ese tiempo habrá llegado a la meta o no (habrá llegado si obtiene una y>2.000, y si fuese y=2.000 significaría que llegan al mismo tiempo).

En este caso, las soluciones serían:

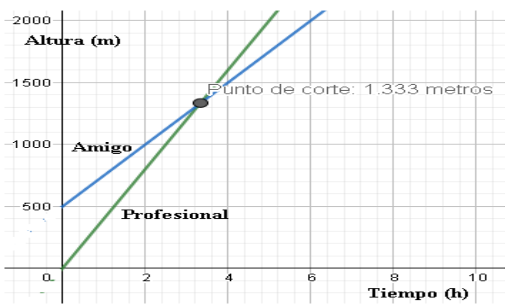
a) Profesional: Como sube en orden de 400 metros/hora, la expresión algebraica que modeliza su situación es y=400x

-Amigo: En su caso, empieza a 500 metros de altitud y asciende a razón de 250 metros/hora, por tanto nos queda y=250x+500

b) La tabla queda de la siguiente forma:

Tiempo (h)	1	2	3	4	5	6
Profesional	400	800	1.200	1.600	2.000	2.400
Amigo	750	1.000	1.250	1.500	1.750	2.000

c) Sí que se encontraran. Resolviendo el sistema de ecuaciones que forman las 2 rectas, obtenemos que se cortan a una altura de 1.333 metros aproximadamente.

d) 

5. *Una empresa de fabricación de colchones sabe que los beneficios medidos en miles de euros conseguidos en la empresa en función de los miles de colchones fabricados, se representan mediante la función $y=-x^2+5x-4$.*

   a) ¿Qué beneficio obtiene si no fabrica ningún colchón? ¿A partir de qué número de colchones pasamos de un beneficio positivo a otro negativo o viceversa?

   b) ¿Cuántos colchones debemos fabricar para obtener un beneficio máximo?

   c) Representa la función de forma aproximada

<u>Aspectos del conocimiento a evaluar:</u>

- **Campo de problemas:** Paso de expresión algebraica a representación gráfica.

- **Técnicas y tecnologías:** Vértice de una parábola, máximo de la función, corte con los ejes de coordenadas (x=0 y/o y=0).

- **Estándares de aprendizaje:**
  - Calcula los elementos característicos de una función polinómica de grado dos y la representa gráficamente.
  - Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.

- **Criterios de calificación**
  - **Tarea principal:** Paso de expresión algebraica a representación gráfica.
  - **Tarea auxiliar específica:** Es capaz de hallar las diferentes características de una función cuadrática (vértice y cortes con los ejes).
  - **Tarea auxiliar general:** Realiza cálculos aritméticos con soltura.

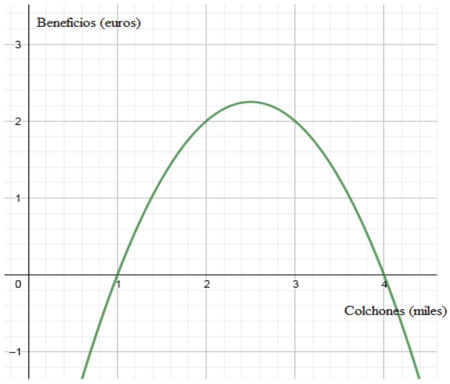
<u>Posibles respuestas del alumnado:</u>

En este problema, hay poco margen de respuesta, deberán hallar el vértice y los cortes con los ejes para responder a los diferentes apartados. Además, deberán conocer las comunes trayectorias de las parábolas para dibujarlas sobre el papel.

En este caso, las soluciones serían:

a) Como no fabricamos ningún colchón, sustituimos x=0 y obtenemos que tiene una pérdida de 4.000 euros. Las pérdidas o beneficios vendrán marcados por el corte con el eje *X* de forma que tendrá beneficios positivos si fabrica entre 1.000 y 4.000 colchones, y negativo en el resto de casos.

b) El beneficio máximo corresponderá con el vértice de la parábola: se deberán fabricar $\frac{-b}{2a}=\frac{-5}{-2}=2{,}5$ miles de colchones, es decir, 2.500 colchones.

c) 

J. SOBRE LA BIBLIOGRAFÍA

Azcárate, C. (2001). Funciones: fórmulas y modelos. En *Azcárate, C. y Deulofeu, J. (Coords.) Matemáticas. Contenidos, Actividades y Recursos. Guía Praxis para el profesorado de ESO*. Barcelona: Praxis, S.A.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid: Síntesis

Burgos, M. y Flores, P. (2017). Reflexión sobre la práctica del profesor de matemáticas en la enseñanza de las funciones. *Épsilon*, 2017(97), 65-74

De La Prida, C., Gaztelu, A.M., González, A., Machín, P., Pérez, C., Sánchez, D. (2015). *Matemáticas Enseñanzas académicas 3º ESO. Saber Hacer*. Madrid: Santillana

Deulofeu, J. (2001). Las funciones en la educación secundaria: ¿para qué?, ¿cómo? Aportaciones de la investigación. *Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM).* Zaragoza, pp. 367-377

Estímulos PISA de Matemáticas liberados. (2013). *Funciones y gráficas*. Recuperado de: http://educalab.es/inee/evaluaciones-internacionales/preguntas-liberadas-pisa-piaac/preguntas-pisa-matematicas/funciones-graficas

Gairín, J.M., Muñoz, J.M., Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 261 - 274). Jaén: SEIEM

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Londres: LEA.

ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. Recuperado de: http://www.boa.aragon.es/cgi-bin/EBOA/BRSCGI?CMD=VEROBJ&MLKOB=910768820909

Shell Centre for Mathematical Education (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas*. Ministerio de Educación y ciencia. Servicio Editorial Universidad del País Vasco.

Sierra M., González T., Lopez C. (1998). Funciones: traducción entre representaciones. *Aula*, 10(0), pp. 89-104. Ediciones Universidad de Salamanca