



Universidad
Zaragoza



Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

TRABAJO DE FIN DE MASTER
MASTER DE FÍSICA Y TECNOLOGÍAS FÍSICAS

OBSERVACIONES DE NEUTRINOS
DE MUY ALTA ENERGÍA
COMO VENTANA A NUEVA FÍSICA

AUTOR:

Maykoll A. Reyes Hung

DIRECTORES:

José Manuel Carmona
José Luis Cortés

Facultad de Ciencias
Zaragoza, 30 de julio de 2019

Resumen

En este Trabajo de Fin de Master proponemos una explicación para el corte en el espectro de neutrinos cósmicos de alta energía detectado por IceCube. Para ello hemos diseñado un modelo espectral, que dentro del marco de Violación de Invariancia Lorentz, incluye los efectos de la expansión del universo, la Emisión de Pares en el Vacío (VPE) y el *Neutrino Splitting* (NSpl).

Summary

In this Masters' Thesis we propose an explanation for the cut-off in the spectrum of high-energy cosmic neutrinos detected by the IceCube laboratory. For this reason, we have developed a spectral model, in the framework of Lorentz Invariance Violation, that includes the effects of the expansion of the universe, the Void Pairs Emission (VPE) and the Neutrino Splitting (NSpl).

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis directores José M. Carmona y José L. Cortés, así como a J. Javier Relancio, por su gran implicación, ayuda y paciencia a lo largo del desarrollo de este trabajo.

Quiero agradecer también a mis padres y hermano, por darme todo el apoyo que he podido necesitar; y a mi familia y amigos por permanecer siempre conmigo.

– Muchas gracias a todos –

Índice de contenidos

1. Contexto y motivación	1
2. Planteamiento inicial	3
3. Construcción del modelo	7
3.1. Efecto de la expansión del universo	8
3.2. Efecto de la Producción de Pares	9
3.3. Efecto del <i>Neutrino Splitting</i>	11
3.4. El espectro de antineutrinos	13
3.5. Efecto conjunto y caracterización	13
4. Recuperación del resultado “neutrino a neutrino”	17
5. Corrección del modelo y generalización	23
5.1. Inclusión de las energías umbrales	23
5.2. Modelo generalizado a una distribución de fuentes	26
6. Conclusiones y discusión	27
7. Bibliografía	29
Anexos:	
A. Identificación de ξ_n y ξ'_n	31

Lista de acrónimos y abreviaturas

- SM: Modelo Estándar.
- GR: Relatividad General.
- QG: Gravedad Cuántica.
- TFM: Trabajo de Fin de Master.
- LIV: Violación de Invariancia Lorentz.
- VPE: Emisión de Pares en el Vacío.
- NSpl: *Neutrino Splitting*.
- TFG: Trabajo de Fin de Grado.
- ASpl: *Antineutrino Splitting*.
- Spl: *Splitting* (término que incluye NSpl y ASpl).
- CP: Carga-Paridad.

Lista de símbolos

- Λ : Escala de nueva física.
- n : Orden de la corrección de la escala de nueva física.
- G : Constante de gravitación universal.
- Λ_c : Constante cosmológica.
- H_0 : Valor actual del parámetro de Hubble.
- Ω_m : Parámetro densidad de materia ($\Omega_m \equiv \rho_{m0}/\rho_{cr}$).
- Ω_r : Parámetro densidad de radiación ($\Omega_r \equiv \rho_{r0}/\rho_{cr}$).
- Ω_Λ : Parámetro densidad de energía oscura ($\Omega_\Lambda \equiv \Lambda_c/3H_0^2$).
- Ω_κ : Parámetro densidad de curvatura ($\Omega_\kappa \equiv \kappa/a_0^2 H_0^2$).
- G_F : Constante de Fermi.
- ξ_n : Constante proporcional a la anchura de desintegración VPE.
- ξ'_n : Constante proporcional a la variación del momento debido a VPE.

1. Contexto y motivación

Uno de los principales objetivos de la física es explicar los fenómenos naturales. Para ello, se proponen y estudian numerosos modelos sobre el funcionamiento de nuestro universo. Actualmente, la mayoría de ellos se basan en el Modelo Estándar (SM) y la Relatividad General (GR). Sin embargo, algunos de los últimos descubrimientos y experimentos evidencian la necesidad de ir más allá, ya que nos encontramos con fenómenos a los que no podemos dar explicación dentro de los marcos actuales (la masa no nula del neutrino, la existencia de materia y energía oscura, anomalías en el espectro mensajeros ultraenergéticos, etc).

Esta búsqueda de nueva física invita a la reconciliación del SM y de la GR en un modelo de Gravedad Cuántica (QG). Sin embargo, las modificaciones que impongan sobre los modelos actuales deben ser únicamente relevantes a altas energías, de manera que a las escalas observables en la actualidad recuperemos los modelos que usamos hoy en día. La escala de energía a la que se espera que estas modificaciones sean claramente manifiestas es la energía de Planck ($E_{\text{Pl}} = 1.2 \cdot 10^{19}$ GeV), pero esta escala energética está lejos de ser alcanzada a día de hoy, tanto por los experimentos más potentes (aceleradores: $E \sim 10^4$ GeV), como por las observaciones astronómicas de más energía (rayos gamma cósmicos: $E \sim 10^3$ GeV, neutrinos cósmicos: $E \sim 10^6$ GeV y rayos de núcleos ultraenergéticos: $E \sim 10^{11}$ GeV).

No obstante, algunos modelos predicen fenómenos de nueva física observables a energías inferiores a la de Planck (*relic signatures*). Estos modelos son útiles de analizar, ya que predicen efectos observables en experimentos actuales, y podrían ofrecer explicación a algunos de los fenómenos indicados anteriormente. En este Trabajo de Fin de Master (TFM) nos centramos en una anomalía en los eventos detectados por el IceCube [1] de neutrinos de muy alta energía.

En los datos compartidos por el experimento [2-4], se puede apreciar una ausencia de neutrinos detectados de más de 2 PeV. Sin embargo, uno esperaría obtener eventos en dicho rango, tanto por extrapolación del espectro a energías menores (dependencia con $\sim E_d^{-2}$), como porque cerca de los 6.3 PeV se da la resonancia de Glashow [5], la cual aumenta la sección eficaz de los antineutrinos a través de una resonancia producida por la creación de un bosón W^- .

Para dar una explicación a esta anomalía, podemos tomar tres rumbos diferentes. En primer lugar, podemos considerar que este corte en el espectro de detección se debe a la existencia de un corte también en el espectro de emisión. Sin embargo, al examinar la emisión de las fuentes en otro tipo de mensajeros no parece que exista ningún corte global. No obstante, esta hipótesis no puede ser descartada, ya que podría existir algún efecto que concierna sólo a los neutrinos.

En segundo lugar, podemos pensar en efectos extrínsecos a la propagación, es decir, considerar la interacción de los neutrinos con otra entidad (como polvo estelar o materia oscura) que absorba a los neutrinos de alta energía, pero deje pasar a los de una menor. Este planteamiento tampoco puede ser descartado, pero implica la necesidad de identificar al ente reactivo, así como justificar que su opacidad y transparencia dependan de la energía del neutrino.

Por último, podemos pensar en la posibilidad de efectos intrínsecos a la propagación del neutrino, es decir, efectos sobre su cinemática que permitan pérdida de energía sin interacción con una entidad externa. Este último planteamiento será el desarrollado a lo largo de este TFM.

Analizando los posibles efectos intrínsecos de pérdida de energía notamos que, sin necesidad de

nueva física, existe ya un efecto clásico de pérdida de energía, la expansión del universo. Sin embargo, este efecto por sí solo, no es capaz de explicar el *cut-off* observado. De esta manera, necesitamos recurrir a efectos de nueva física para poder dar explicación a este fenómeno.

En este trabajo consideramos el acercamiento a la nueva física a través de la violación de una simetría fundamental, la Violación de la Invariancia Lorentz (LIV), que representamos mediante una modificación de la relación de dispersión usual de las partículas [6]:

$$E^2 - p^2 = m^2 \quad \rightarrow \quad E^2 - p^2 = m^2 + \frac{p^{2+n}}{\Lambda^n}, \quad (1.1)$$

donde p el momento de la partícula, Λ la escala de la nueva física y n el orden de la corrección. El término extra en la energía, al ser positivo, desestabiliza al neutrino permitiendo considerar nuevos procesos de desintegración que puedan contribuir a la pérdida de energía de los neutrinos durante su propagación.

En las referencias [7-10] Stecker *et al.* consideran dos nuevos procesos de desintegración. El primero consiste en la descomposición de un neutrino en otro de menor energía y un par electrón-positrón (Emisión de Pares en el Vacío (VPE)), y el segundo consiste en la descomposición de un neutrino en dos neutrinos y un antineutrino (*Neutrino Splitting* (NSpl)).

Para comprobar si estos dos procesos (en conjunción con el efecto clásico) pueden reproducir los resultados observacionales, Stecker *et al.* han realizado varias simulaciones de Montecarlo. Las que sólo tienen en cuenta la expansión y la VPE ya logran predecir el *cut-off* esperado (figura 1), pero las que incluyen el NSpl predicen además una acumulación antes del corte (figura 2). Este exceso no ha sido observado experimentalmente, pero es compatible con las barras de error.

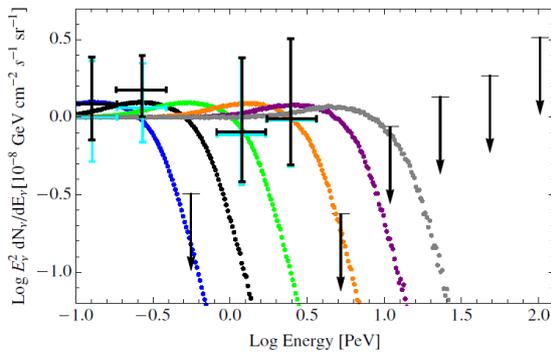


Figura 1: Eventos de IceCube (cruces) y simulaciones de Montecarlo considerando expansión y VPE (de izda. a dcha., energía umbral E^* de 1, 2, 3, 4, 10, 20 y 40 PeV) [7]

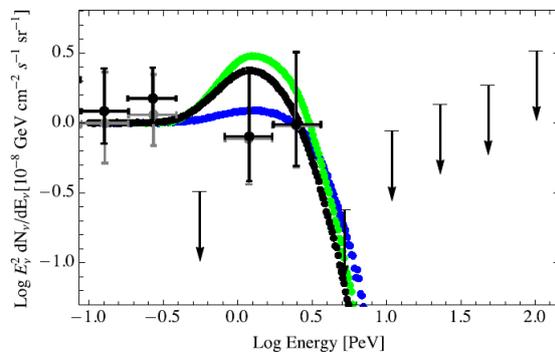


Figura 2: Eventos de IceCube (cruces) y simulaciones de Montecarlo considerando sólo VPE (azul), sólo NSpl (verde) y considerando los tres efectos (expansión, VPE y NSpl) (negro) [8]

En el Trabajo de Fin de Grado (TFG) de la referencia [11], planteamos un modelo que tiene en cuenta la expansión del universo y la VPE. En vista de que los resultados simulados coincidían en gran medida con las simulaciones de Montecarlo, ahora queremos incluir además el efecto del NSpl. Sin embargo, esto supondrá replantear el modelo desde el principio, tal y como justificaremos en el siguiente apartado. De esta manera, el principal objetivo de este TFM será conseguir un modelo que unifique efectivamente los tres mecanismos de pérdida de energía.

2. Planteamiento inicial

En este apartado plantearemos las ideas iniciales que sustentan y motivan el modelo que desarrollaremos en el apartado 3. Iremos obteniendo ciertas consideraciones que nos permitirán entender poco a poco cómo debemos construir el modelo buscado.

Consideremos una fuente situada a una distancia R_e de nosotros, que emite neutrinos de diversas energías. Para comenzar el análisis de forma sencilla, podemos centrarnos en el estudio de uno de los neutrinos emitidos. Supongamos que es emitido con energía E_e y se desplazará en una trayectoria rectilínea hasta ser captado por nuestros detectores (en $R = 0$).

Como los efectos intrínsecos a la propagación del neutrino estarán presentes, por lo menos, durante parte de su trayectoria, cuanto más larga sea la trayectoria, más acentuados podremos ver dichos efectos. Por ello nos interesa escoger fuentes emisoras lo suficientemente lejanas.

Sin embargo, al trabajar con grandes distancias, hemos de prestar especial atención a la expansión del universo. Esto queda de manifiesto al calcular la distancia recorrida por dicho neutrino. Debido a la expansión del universo, la distancia entre emisor y detector varía con el tiempo, $R_e(t)$, y por lo tanto, la distancia recorrida por el neutrino no coincide ni con la distancia entre fuente y detector en el momento de la emisión, ni con la distancia en el momento de la detección.

Esto evidencia que cuando trabajamos con distancias lo suficientemente grandes, las coordenadas espaciales usuales no son las más adecuadas para medir distancias. Por ello, práctica habitual es dejar de usar las coordenadas físicas, $R = R(t)$, a favor de las coordenadas comóviles r , que no varían con el tiempo. En dichas coordenadas, la información de la expansión del universo queda contenida en el factor de escala cosmológico $a(t)$, tal que $R(t) \equiv a(t) \cdot r$.

Conclusión 1: Las medidas de distancia y posición deben realizarse en coordenadas comóviles r en lugar de las coordenadas físicas $R(t)$.

Una vez definida la manera de medir distancias y posiciones en la trayectoria, nos interesa conocer cómo evoluciona la energía de nuestro neutrino a lo largo de la misma. Existen tres efectos intrínsecos a la propagación capaces de contribuir a la pérdida energética:

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\partial E}{\partial r}\Big|_{\text{Exp.}} + \frac{\partial E}{\partial r}\Big|_{\text{VPE}} + \frac{\partial E}{\partial r}\Big|_{\text{NSpl}}. \quad (2.1)$$

Podemos comenzar examinando únicamente el efecto clásico, es decir, el de la expansión del universo: $(\partial E/\partial r)|_{\text{Exp.}}$. Como hemos dicho antes, trabajando en coordenadas comóviles, la información de la expansión queda condensada en el factor de escala $a(t)$. No obstante, podemos definir un parámetro íntimamente relacionado, con el que es más práctico trabajar. Nos referimos al parámetro $z(t)$ o *redshift*. Este parámetro se define como la diferencia relativa entre la longitud de onda de una partícula entre su detección $t_d = 0$ y emisión t_e .

$$z(t_e) \equiv \frac{\lambda(t_d = 0) - \lambda(t_e)}{\lambda(t_e)}. \quad (2.2)$$

Podemos comprobar su relación con el factor de escala sin más que recordar que toda distancia

que se expande con el tiempo se puede expresar en función de su valor comóvil: $\lambda(t) = a(t)\lambda_r$.

$$z(t_e) = \frac{\lambda(t_d = 0) - \lambda(t_e)}{\lambda(t_e)} = \frac{a(0)}{a(t_e)} - 1 \quad \rightarrow \quad 1 + z(t_e) = \frac{a(0)}{a(t_e)}. \quad (2.3)$$

La ventaja de usar $z(t)$ respecto a $a(t)$, es que podemos asignar de manera sencilla un valor de z a cada posición r de la trayectoria. Para ello establecemos una relación “uno a uno” entre posiciones y tiempos a lo largo del camino, considerando que los neutrinos viajan prácticamente a la velocidad de la luz (es decir, conocido el tiempo t , podemos conocer en qué r se encontraba):

$$z(t) = \frac{\lambda(t_d = 0) - \lambda(t)}{\lambda(t)} = \frac{\lambda(r = 0) - \lambda(r)}{\lambda(r)} = z(r). \quad (2.4)$$

A partir de esta relación entre la longitud de onda en cualquier r y la longitud detectada ($r = 0$), podemos obtener una relación entre la energía del neutrino en cada punto de la trayectoria, $E(r)$, y la energía de detección, $E_d = E(0)$:

$$\lambda(0) = \lambda(r)(1 + z(r)) \quad \rightarrow \quad \nu(0) = \frac{\nu(r)}{(1 + z(r))} \quad \xrightarrow{\times \hbar} \quad E(0) = \frac{E(r)}{1 + z(r)}. \quad (2.5)$$

Por lo tanto, para cualquier punto r de la trayectoria, el cociente $E/(1+z)$ (que denominaremos como \tilde{E}) es independiente de r y coincide con el valor de la energía de detección $E(0)$.

$$\tilde{E} \equiv \frac{E(r)}{1 + z(r)} \quad \rightarrow \quad E(r) = \tilde{E} \cdot (1 + z(r)). \quad (2.6)$$

Como podemos establecer una correspondencia unívoca entre cada posición r de la trayectoria y el *redshift* z asociado a ese punto, podemos etiquetar cada punto de la trayectoria por su *redshift* z y omitir la dependencia con la coordenada comóvil r . Con ello en mente, obtenemos que la variación de la energía con la coordenada *redshift* se puede expresar como $E(z) = \tilde{E} \cdot (1 + z)$, que en forma diferencial se puede expresar como:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial z} \right|_{\text{Exp.}} = \tilde{E} = \frac{E}{1 + z}. \quad (2.7)$$

Conclusión 2: Al introducir la expansión del universo, la magnitud natural para describir distancias y posiciones en la trayectoria es la coordenada *redshift* z .

Vemos que las variaciones se representan mediante derivadas y relaciones diferenciales. Para poder expresar magnitudes que inicialmente están definidas en el espacio comóvil como funciones del *redshift* necesitaremos encontrar una relación diferencial entre z y las coordenadas t y r .

Para ello podemos empezar relacionando dt con dz , que surge de forma natural diferenciando la relación 2.3, la cual relacionaba el *redshift* z con el factor de escala $a(t)$:

$$\frac{d}{dt}[a(t)] = \frac{d}{dt} \left[\frac{a_0}{1 + z(t)} \right] \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} dt = -\frac{dz}{1 + z(t)}, \quad (2.8)$$

donde podemos identificar la aparición del parámetro de Hubble $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$. Si logramos expresar $H(t)$ como función de z (es decir, $H(z)$), podremos expresar dt como una función del *redshift*. Para ello partimos de la ecuación de Friedmann[12]:

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda_c}{3} - \frac{\kappa}{a^2(t)} = H_0^2 \left[\frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho + \frac{\Lambda_c}{3H_0^2} - \frac{\kappa}{a^2(t)H_0^2} \right], \quad (2.9)$$

donde G es la constante de gravitación universal, ρ la densidad de energía del universo (que separaremos en densidad de materia y densidad de radiación: $\rho = \rho_m + \rho_r$), Λ_c^1 la constante cosmológica, y κ la curvatura del universo. Además, hemos extraído como factor común, por futura conveniencia, el valor actual del parámetro de Hubble $H_0 \equiv H(0)$.

Cabe destacar que tanto la densidad de materia como la de radiación esconden una dependencia implícita con z , ya que recordemos que todas las distancias se expanden de manera proporcional al factor de escala: $R(t) \propto a(t) \propto (1+z)^{-1}$, por lo que:

$$\rho_m \propto \frac{1}{V} \propto \frac{1}{R^3} \propto \rho_{m0} (1+z)^3 \quad , \quad \rho_r \propto \frac{E}{V} \propto \frac{1/\lambda}{R^3} \propto \rho_{r0} (1+z)^4. \quad (2.10)$$

De esta manera, logramos reemplazar toda dependencia temporal con dependencias en *redshift* z , por lo que la ecuación de Friedmann se podrá expresar como:

$$H^2(z) = H_0^2 \left[\frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{m0} (1+z)^3 + \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{r0} (1+z)^4 + \frac{\Lambda_c}{3H_0^2} - \frac{\kappa}{a_0^2 H_0^2} (1+z)^2 \right]. \quad (2.11)$$

La fórmula anterior invita a definir la densidad crítica del universo $\rho_{cr} = (8\pi G/3H_0^2)^{-1}$ y, a partir de ella, los parámetros de densidad $\Omega_i \equiv \rho_i/\rho_{cr}$, donde el índice i representa cada uno de los cuatro sumandos (densidad de materia, radiación, energía oscura y curvatura, respectivamente). De esta manera, podemos expresar el parámetro de Hubble como:

$$H^2(z) = H_0^2 \left[\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_r (1+z)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa (1+z)^2 \right]. \quad (2.12)$$

Consultando los valores de dichas constantes en la referencia [13], podemos hacernos una idea de la relevancia de cada término:

$$\begin{aligned} \Omega_\Lambda &\sim 0.692 \pm 0.012, & \Omega_m &\sim 0.308 \pm 0.012, \\ \Omega_\kappa &\sim 0.005 \pm 0.017, & \Omega_r &\sim 5.38 \cdot 10^{-5} \pm 0.0015. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Atendiendo a la magnitud de cada uno, vemos que podemos despreciar las contribuciones de la curvatura Ω_κ y de la radiación Ω_r . Además, aunque sus factores multiplicativos dependen fuertemente con z , para los valores de *redshift* con los que vamos a trabajar², estos factores siguen siendo muy pequeños. De esta manera, despreciando dichas contribuciones y sustituyendo:

$$H(z) \approx H_0 \sqrt{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda} \quad \rightarrow \quad dt = -\frac{dz}{H(z)(1+z)}. \quad (2.14)$$

1 No confundir la constante cosmológica Λ_c con la escala de nueva física Λ .

2 Los valores de z para los que el término de radiación se hace comparable al término de energía oscura son del orden de $z \sim 9.7$, sin embargo, la mayor acumulación de fuentes relevantes se encuentran en $z \in [0.5, 2.0]$. [7]

Ahora, conociendo la relación entre dt y dr , podemos relacionar también dr y dz . Para ello, partimos de la ecuación de la métrica de Friedmann-Lemaître-Roberson-Walker [14], aplicada a un partícula que viaja prácticamente a la velocidad de la luz:

$$ds^2 \approx 0 \approx -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega \right]. \quad (2.15)$$

Escogiendo de forma apropiada las coordenadas podemos conseguir que $d\Omega = 0$, es decir, que la partícula viaje radialmente desde la fuente hasta el detector. Además, podemos tomar la curvatura como nula ($\kappa \sim 0$). Con estas simplificaciones conseguimos la siguiente relación:

$$0 = -dt^2 + a(t)^2 dr^2 \quad \rightarrow \quad dr = -\frac{dt}{a(t)} = -\frac{dt}{a_0/(1+z)}. \quad (2.16)$$

Sustituyendo la relación entre dt y dz (ecuación 2.14), obtenemos la relación entre dr y dz :

$$dr = -\frac{dt}{a_0/(1+z)} = \frac{1}{a_0/(1+z)} \frac{dz}{H(z)(1+z)} = \frac{dz}{a_0 H(z)}. \quad (2.17)$$

Conclusion 3: Podemos expresar todas las derivadas y diferenciales respecto de r o t como expresiones respecto de z .

Volviendo a la expresión 2.1, ahora que conocemos cómo evoluciona la energía de nuestro neutrino debido a la expansión del universo, el paso natural es continuar examinando cómo evoluciona su energía debido a los efectos nueva física: VPE y NSpl.

El VPE, es un proceso en que un neutrino da lugar a otro de menor energía y a un par electrón-positrón. Como este proceso no cambia el número de neutrinos, podemos definir un análisis “neutrino a neutrino”, en el que se considera que el proceso sólo cambia la energía de cada neutrino. De hecho, este fue el planteamiento realizado en el TFG [11] que precede este trabajo. Sin embargo, en el caso del NSpl un neutrino inicial se transforma en dos neutrinos y un antineutrino, y se pierde la correspondencia uno a uno entre neutrinos emitidos y neutrinos detectados. De esta manera, ya no podemos definir la variación de la energía de un neutrino fijo y el análisis “neutrino a neutrino” deja de funcionar. Debemos optar por una nueva estrategia.

El hecho de no poder fijar un neutrino evidencia la necesidad de trabajar con todo el flujo a la vez. En dicho flujo habrá neutrinos de diferentes energías y el efecto de los procesos intrínsecos a la propagación se traduce en un cambio en el número de neutrinos de cada energía. De esta manera, la forma de representar el flujo a lo largo de la trayectoria es a través del número de neutrinos de cada energía en cada punto, es decir, mediante su espectro.

Conclusión 4: No podemos analizar los efectos que producen los procesos intrínsecos a la propagación de forma individual sobre cada neutrino, sino que debemos analizar el efecto global sobre el flujo (caracterizado a través de su espectro en cada punto).

Con estas consideraciones, ya estamos preparados para construir un modelo que tenga en cuenta los tres efectos. Éste será el objetivo del siguiente apartado.

3. Construcción del modelo

En este apartado analizaremos cómo afectan los distintos efectos de pérdida de energía (expansión del universo, VPE y NSpl) a un flujo de neutrinos; por ello, lo primero que necesitamos es encontrar la forma de caracterizar dicho flujo. Para comenzar el análisis de forma sencilla, a lo largo de este apartado se considerará la existencia de una única fuente.

Supongamos en la Tierra un detector circular de superficie A . Como la fuente emite en todas las direcciones, sólo una superficie A' de la fuente emitirá neutrinos capaces de impactar en el detector. Esto nos permite definir un tronco cónico alargado que une la fuente y el detector, cuyo volumen contiene todas las trayectorias rectilíneas de los neutrinos detectados.

Sin embargo, si consideramos fuentes lo suficientemente lejanas, podemos asumir las superficies como puntuales respecto a la distancia que las separa. De esta manera, el tronco cónico se convierte en una línea y podemos caracterizar la trayectoria de los neutrinos de manera unidimensional, es decir, mediante la coordenada r .

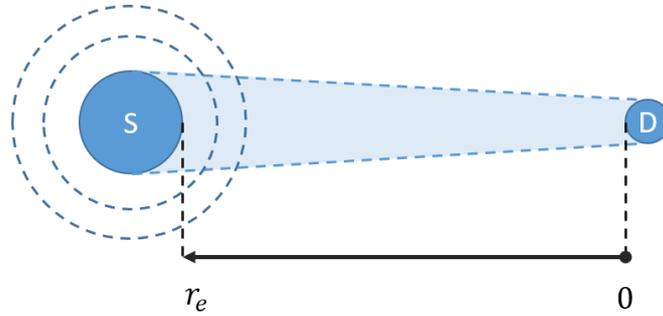


Figura 3: El tronco cónico tiende a una línea recta cuando $A, A' \ll r_e$

Si suponemos que la fuente emite N_e neutrinos por unidad de tiempo en dirección al detector, y que $dN_e(E)$ de ellos tienen energías entre E y $E + dE$, podemos escribir el número de neutrinos emitidos por unidad de tiempo como:

$$N_e = \int dN_e(E) \equiv \int \nu_e(E) dE, \quad (3.1)$$

donde se ha definido la función $\nu_e(E)$ o “espectro de emisión”. Cabe destacar que el número de neutrinos emitidos por unidad de tiempo coincide con el flujo de neutrinos emitidos, al estar trabajando en un caso unidimensional. Podemos generalizar fácilmente el concepto de flujo unidimensional a cualquier punto r de la trayectoria: definimos como flujo en el punto r al número de neutrinos por unidad de tiempo que pasan por dicho punto; es decir:

$$N(r) = \int dN(r, E) = \int \nu(r, E) dE. \quad (3.2)$$

De esta manera queda generalizada la función espectro a cualquier punto de la trayectoria: $\nu(r, E)$. Para notar los efectos sobre el flujo de neutrinos durante su propagación, debemos hallar como varía $\nu(r, E)$ a lo largo de la trayectoria bajo la influencia de cada efecto:

$$\frac{\partial \nu(r, E)}{\partial r} = \frac{\partial \nu(r, E)}{\partial r} \Big|_{\text{Exp.}} + \frac{\partial \nu(r, E)}{\partial r} \Big|_{\text{VPE}} + \frac{\partial \nu(r, E)}{\partial r} \Big|_{\text{NSpl}} . \quad (3.3)$$

En el supuesto de que no hubiese expansión del universo y no existiese ningún efecto intrínseco a la trayectoria, es claro que el espectro debería quedar invariante a lo largo de la misma. Podemos expresar este hecho en forma diferencial de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \nu(r, E)}{\partial r} \Big|_{\text{No Effects}} = 0 . \quad (3.4)$$

En este caso, relacionaríamos de forma trivial los espectros en cualquier punto de la trayectoria:

$$\nu(r_1, E) = \nu(r_2, E) \quad \forall r_1, r_2 . \quad (3.5)$$

Sin embargo, los puntos que realmente nos interesa relacionar son la emisión (r_e) y la detección ($r_d = 0$). El espectro de emisión hará el papel de condición inicial, mientras que el espectro de detección es la magnitud que nos interesa predecir:

$$\nu(0, E) = \nu(r_e, E) \quad \rightarrow \quad \nu_d(E) = \nu_e(E) . \quad (3.6)$$

De esta forma conseguimos obtener la relación entre el espectro de detección y el espectro de emisión. Es de esperar que esta relación se complique conforme vayamos añadiendo el efecto de los distintos mecanismos de pérdida de energía. A continuación comenzaremos examinando el mecanismo clásico, es decir, el de la expansión del universo.

3.1. Efecto de la expansión del universo

Al introducir la expansión del universo, es conveniente etiquetar las posiciones a través de su *redshift* z , en lugar de la coordenada comóvil r (tal y como vimos en el apartado 2):

$$\nu(r, E) \quad \rightarrow \quad \nu(z, E) . \quad (3.7)$$

Además, a diferencia del caso anterior, ya no podemos asegurar que el espectro de neutrinos sea invariante a lo largo de la trayectoria, por lo que debemos buscar una nueva forma de relacionar el espectro de emisión con el espectro de detección.

Recordemos que en el apartado 2 se encontró una cantidad invariante a lo largo de la trayectoria, el cociente \tilde{E} :

$$\tilde{E} = \frac{E(r)}{1+z(r)} \quad \rightarrow \quad E = (1+z)\tilde{E} ; \quad dE = (1+z)d\tilde{E} . \quad (3.8)$$

Esto nos permite ver que, aunque el espectro varíe a lo largo de la trayectoria, existen cantidades que se conservan, y esto nos invita a expresar el espectro en función de ellas:

$$N(z) = \int \nu(z, E) dE = \int \nu(z, (1+z)\tilde{E}) (1+z)d\tilde{E} \equiv \int \tilde{\nu}(z, \tilde{E}) d\tilde{E} , \quad (3.9)$$

donde hemos definido una nueva función espectro $\tilde{\nu}(z, \tilde{E})$ cuyas variables son z y \tilde{E} :

$$\tilde{\nu}(z, \tilde{E}) = \nu(z, (1+z)\tilde{E}) (1+z), \quad \text{tal que} \quad N(z) = \int \tilde{\nu}(z, \tilde{E}) d\tilde{E}. \quad (3.10)$$

De la relación anterior entre $N(z)$ y $\tilde{\nu}(z, \tilde{E})$, podemos extraer un significado para la nueva función espectro: $dN(z) = \tilde{\nu}(z, \tilde{E}) d\tilde{E}$ es el número de neutrinos por unidad de tiempo con variable \tilde{E} entre \tilde{E} y $\tilde{E} + d\tilde{E}$. La ventaja de esta notación respecto a la notación en función de $\nu(z, E)$, es que el número de neutrinos con variable \tilde{E} fija no varía a lo largo de la trayectoria. Por lo tanto:

$$\left. \frac{\partial \tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{\partial z} \right|_{\text{Exp.}} = 0. \quad (3.11)$$

Es decir, aunque el espectro $\nu(z, E)$ varíe a lo largo de la trayectoria, hemos encontrado un nuevo espectro, $\tilde{\nu}(z, \tilde{E})$, que es invariante a lo largo de la misma. Utilizando esta propiedad de $\tilde{\nu}(z, \tilde{E})$, y la relación entre $\tilde{\nu}(z, \tilde{E})$ y $\nu(z, E)$ (ecuación 3.10), podemos establecer una nueva relación entre el espectro de emisión y detección:

$$\nu(0, E) = \tilde{\nu}(0, E) = \tilde{\nu}(z_e, E) = \nu(z_e, (1+z_e)E) (1+z_e), \quad (3.12)$$

donde en la segunda igualdad se ha utilizado la independencia de $\tilde{\nu}(z, E)$ en la variable z . Esta invariancia a lo largo de la trayectoria no seguirá siendo cierta al añadir los efectos de nueva física: $\tilde{\nu}(0, E) \neq \tilde{\nu}(z_e, E)$. Por lo tanto, para obtener la nueva relación entre el espectro de detección y de emisión debemos obtener previamente la nueva relación entre $\tilde{\nu}(0, E)$ y $\tilde{\nu}(z_e, E)$. Esta relación vendrá dada por un ecuación similar a la 3.3, con la ventaja de que, al trabajar en términos de $\tilde{\nu}(z, \tilde{E})$, el efecto de la expansión del universo queda automáticamente incluido:

$$\frac{\partial \tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{\partial z} = \cancel{\left. \frac{\partial \tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{\partial z} \right|_{\text{Exp.}}}^0 + \left. \frac{\partial \tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{\partial z} \right|_{\text{VPE}} + \left. \frac{\partial \tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{\partial z} \right|_{\text{NSpl}}. \quad (3.13)$$

A continuación pasamos a examinar los efectos de nueva física, comenzando con el VPE.

3.2. Efecto de la Producción de Pares

Ahora vamos a analizar el efecto de VPE en el flujo de neutrinos. Para ello, comencemos considerando su efecto aislado sobre el flujo. Recordemos que en dicho proceso un neutrino de energía E_0 se transforma en un neutrino de energía E_1 produciendo un par electrón-positrón. Este proceso puede ocurrir mediante dos canales distintos: mediante una corriente neutra Z^0 (para cualquier tipo de neutrino) o mediante una corriente cargada W^+ (para el caso de neutrinos electrónicos). Estos dos procesos se muestran en las figuras 4 y 5.

Podemos definir para el VPE una anchura de desintegración diferencial que contenga la contribución de ambos canales y que sólo dependa de la energía del neutrino inicial E_0 y del neutrino final E_1 . Será proporcional al cuadrado de la suma de los elementos de matriz de cada canal:

$$\frac{\partial \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{pp}}(E_0, E_1)}{\partial E_1} \propto |\mathcal{M}_Z^{\text{pp}} + \mathcal{M}_W^{\text{pp}}|^2, \quad \text{tal que} \quad \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{pp}}(E_0) = \int dE_1 \frac{\partial \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{pp}}(E_0, E_1)}{\partial E_1}. \quad (3.14)$$

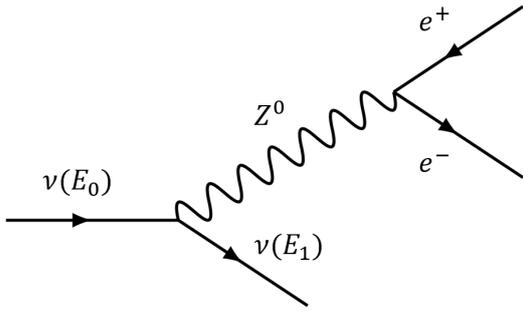


Figura 4: Creación de pares mediado por Z^0

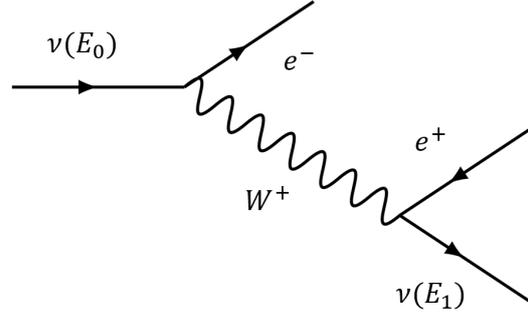


Figura 5: Creación de pares mediado por W^+

Esta anchura de desintegración diferencial describe aquellos procesos en los que mediante VPE desaparece un neutrino de energía E_0 y aparece uno de energía E_1 . Ahora, para calcular la variación del número de neutrinos de energía E , debemos tener en cuenta que dichos neutrinos pueden jugar tanto el papel de neutrino inicial ($E_0 = E$), como el de neutrino final ($E_1 = E$).

En el primer caso, los neutrinos de energía $E_0 = E$ se transforman en neutrinos de cualquier energía E_1 y desaparecen del flujo. En el segundo caso, neutrinos de una energía cualquiera E_0 se transforman en neutrinos de energía $E_1 = E$ y se añaden al flujo. Integrando sobre todas las energías arbitrarias tenemos que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \nu(t, E)}{\partial t} \right|_{\text{VPE}} = & - \int dE_1 \nu(t, E) \frac{\partial \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(E, E_1)}{\partial E_1} + \int dE_0 \nu(t, E_0) \frac{\partial \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(E_0, E)}{\partial E} = \\ & -\nu(t, E) \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(E) + \int dE_0 \nu(t, E_0) \frac{\partial \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(E_0, E)}{\partial E}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ahora debemos traducir esta variación temporal $\nu(z, E)$ a una variación de $\tilde{\nu}(z, \tilde{E})$ a lo largo de la trayectoria. Para ello nos valdremos de la relación entre dt y dz (ecuación 2.14),

$$dt = -\frac{dz}{(1+z)H(z)} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} = -(1+z)H(z) \frac{\partial}{\partial z}, \quad (3.16)$$

y de la relación entre $\nu(z, E)$ y la nueva función espectral $\tilde{\nu}(z, \tilde{E})$ (ecuación 3.10). De esta manera, la variación de $\tilde{\nu}(z, \tilde{E})$ a lo largo de la trayectoria vendrá dada por:

$$(1+z)H(z) \left. \frac{\partial \tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{\partial z} \right|_{\text{VPE}} = \tilde{\nu}(z, \tilde{E}) \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(z, \tilde{E}) - \int d\tilde{E}_0 \tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0) \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}}, \quad (3.17)$$

donde se han definido las siguientes anchuras de desintegración, como función de z y \tilde{E} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E}_1)}{\partial \tilde{E}_1} & \equiv (1+z) \left. \frac{\partial \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(E_0, E_1)}{\partial E_1} \right|_{\substack{E_0=(1+z)\tilde{E}_0 \\ E_1=(1+z)\tilde{E}_1}}, \\ \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(z, \tilde{E}_0) & \equiv \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(E_0) \Big|_{E_0=(1+z)\tilde{E}_0}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.3. Efecto del *Neutrino Splitting*

Veamos ahora el efecto del NSpl en el espectro de neutrinos. Para ello, recordemos que en este proceso un neutrino de energía E_0 da lugar a dos neutrinos y un antineutrino de energías E_1 , E_2 y E_3 respectivamente. Debido a que los papeles jugados por los neutrinos del estado final no son intercambiables (ya que uno comparte vértice con el neutrino inicial y el otro no), debemos considerar cada caso como un canal de desintegración distinto.

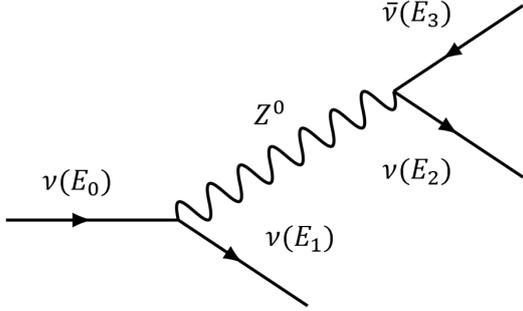


Figura 6: NSpl: $\nu(E_0)$ y $\nu(E_1)$ comparten vértice

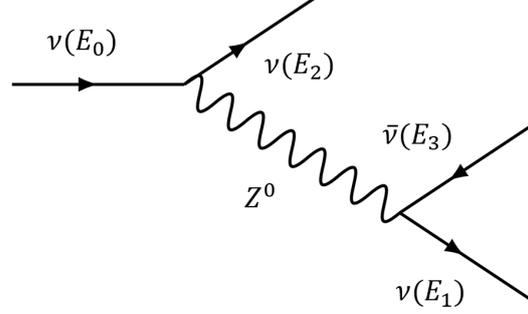


Figura 7: NSpl: $\nu(E_0)$ y $\nu(E_2)$ comparten vértice

Al igual que en el caso anterior, podemos definir una anchura de desintegración diferencial que será proporcional a la suma de los elementos de matriz de cada canal y que solo dependa de la energía del neutrino inicial E_0 y del neutrino final E_1 .

$$\frac{\partial \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(E_0, E_1)}{\partial E_1} \propto |\mathcal{M}_{Z_1}^{\text{sp}} + \mathcal{M}_{Z_2}^{\text{sp}}|^2, \quad \text{tal que} \quad \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(E_0) = \int dE_1 \frac{\partial \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(E_0, E_1)}{\partial E_1}. \quad (3.19)$$

Los neutrinos de energía E pueden tomar el lugar del neutrino inicial $E_0 = E$ o el lugar del neutrino final $E_1 = E$. En el primer caso, los neutrinos de energía $E_0 = E$ se transforman en neutrinos de cualquier energía E_1 y desaparecen del flujo. En el segundo caso, neutrinos de una energía cualquiera E_0 se transforman en neutrinos de energía $E_1 = E$ y se añaden al flujo. Integrando sobre todas las energías tenemos una expresión análoga a la del caso de VPE³:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \nu(t, E)}{\partial t} \right|_{\text{NSpl}} &= - \int dE_1 \nu(t, E) \frac{\partial \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(E, E_1)}{\partial E_1} + \int dE_0 \nu(t, E_0) \frac{\partial \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(E_0, E)}{\partial E} + \dots \\ &= -\nu(t, E) \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(E) + \int dE_0 \nu(t, E_0) \frac{\partial \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(E_0, E)}{\partial E} + \dots \end{aligned} \quad (3.20)$$

Sin embargo, a diferencia del caso anterior, ahora tenemos un mecanismo más de generación de neutrinos, ya que los antineutrinos generados por el NSpl formarán su propio espectro de antineutrinos (o se adicionarán a un espectro de antineutrinos emitido por la fuente) y alguno de ellos puede desintegrarse de vuelta a un neutrino. De esta manera debemos añadir a la ecuación que dicta la variación del espectro de neutrinos (ecuación 3.20) la contribución debida al proceso de *Antineutrino Splitting* (ASpl) (diagrama 8).

³ Los puntos suspensivos representan que, a diferencia del caso VPE, la fórmula todavía no está completa, ya que debemos añadir aún un efecto más, el del ASpl.

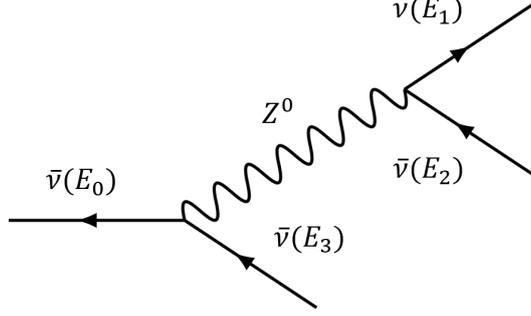


Figura 8: Antineutrino Splitting mediado por Z^0

Podemos asociar a este proceso una anchura de desintegración diferencial que depende únicamente de la energía del antineutrino inicial E_0 y del neutrino final E_1 :

$$\frac{\partial \Gamma_{\nu/\bar{\nu}}^{\text{sp}}(E_0, E_1)}{\partial E_1} \propto |\mathcal{M}^{\text{asp}}_Z|, \quad \text{tal que} \quad \Gamma_{\nu/\bar{\nu}}^{\text{sp}}(E_0) = \int dE_1 \frac{\partial \Gamma_{\nu/\bar{\nu}}^{\text{sp}}(E_0, E_1)}{\partial E_1}. \quad (3.21)$$

De esta manera, añadiendo este nuevo proceso de generación de neutrinos a la ecuación de variación de $\nu(z, E)$ (ecuación 3.20), obtenemos la ecuación completa:

$$\left. \frac{\partial \nu(t, E)}{\partial t} \right|_{\text{Spl}} = -\nu(t, E) \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(E) + \int dE_0 \nu(t, E_0) \frac{\partial \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(E_0, E)}{\partial E} + \int dE_0 \bar{\nu}(t, E_0) \frac{\partial \Gamma_{\nu/\bar{\nu}}^{\text{sp}}(E_0, E)}{\partial E}, \quad (3.22)$$

donde, como el proceso envuelve tanto NSpl como ASpl, a partir de ahora hablaremos de un proceso de *Splitting* (Spl). Ahora, de forma análoga al caso anterior, hemos de traducir esta ecuación a términos de z y $\tilde{\nu}(z, E)$. Para ello hacemos uso una vez más de la relación entre la derivada temporal y de la derivada z (ecuación 3.16), y de la relación entre $\tilde{\nu}(z, \tilde{E})$ y $\nu(z, E)$ (ecuación 3.10). De manera que la ecuación obtenida para $\tilde{\nu}(z, \tilde{E})$ debido al Spl es:

$$(1+z)H(z) \left. \frac{\partial \tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{\partial z} \right|_{\text{Spl}} = \tilde{\nu}(z, \tilde{E}) \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}) - \int d\tilde{E}_0 \tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0) \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} - \int d\tilde{E}_0 \tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0) \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\bar{\nu}}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}}, \quad (3.23)$$

donde, al igual que en el caso VPE, se han introducido unas nuevas anchuras de desintegración:

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E}_1)}{\partial \tilde{E}_1} \equiv (1+z) \left. \frac{\partial \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(E_0, E_1)}{\partial E_1} \right|_{\substack{E_0=(1+z)\tilde{E}_0 \\ E_1=(1+z)\tilde{E}_1}}, \quad (3.24)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}_0) \equiv \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(E_0) \Big|_{E_0=(1+z)\tilde{E}_0}.$$

Nótese que el término debido al ASpl depende del espectro de antineutrinos $\bar{\nu}(z, E)$, por lo que debemos tener en cuenta también la evolución del espectro de antineutrinos a lo largo de la trayectoria. Trataremos esta cuestión en el siguiente apartado.

3.4. El espectro de antineutrinos

En este apartado analizamos la evolución del espectro de antineutrinos a lo largo de la trayectoria. Este espectro seguirá una ecuación completamente equivalente a la ecuación 3.13, de manera que es esperable que toda la discusión sea análoga a la del espectro de neutrinos.

Las únicas diferencias serán en que ahora nos interesan los antineutrinos como producto final de las desintegraciones. Por lo tanto, para el proceso VPE hemos de considerar un proceso en el que un antineutrino emite otro antineutrino y un par electrón-positrón:

$$(1+z)H(z) \left. \frac{\partial \tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{\partial z} \right|_{\text{VPE}} = \tilde{\nu}(z, \tilde{E}) \tilde{\Gamma}_{\tilde{\nu}/\tilde{\nu}}^{\text{pp}}(z, \tilde{E}) - \int d\tilde{E}_0 \tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0) \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\tilde{\nu}/\tilde{\nu}}^{\text{pp}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}}. \quad (3.25)$$

Por otra parte, en el caso del Spl, consideramos que los antineutrinos del estado final pueden proceder de otro antineutrino (ASpl) o de la desintegración de un neutrino (NSpl). En este último caso, el término dependerá del espectro de neutrinos, acoplando ambos espectros.

$$(1+z)H(z) \left. \frac{\partial \tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{\partial z} \right|_{\text{Spl}} = \tilde{\nu}(z, \tilde{E}) \tilde{\Gamma}_{\tilde{\nu}/\tilde{\nu}}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}) - \int d\tilde{E}_0 \tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0) \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\tilde{\nu}/\tilde{\nu}}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} - \int d\tilde{E}_0 \tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0) \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\tilde{\nu}/\nu}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}}. \quad (3.26)$$

De esta manera, podemos ver como obtenemos unas ecuaciones completamente simétricas respecto al caso del espectro de neutrinos. Ahora nos queda comprobar como afectan todos los efectos de forma conjunta a ambos espectros.

3.5. Efecto conjunto y caracterización

Ahora que hemos visto la contribución de cada efecto por separado, vamos a ver cómo afectan de forma conjunta tanto al espectro de neutrinos como al espectro de antineutrinos. Esto se hará siguiendo la ecuación 3.13, es decir, de forma aditiva.

$$(1+z)H(z) \frac{\partial \tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{\partial z} = + \tilde{\nu}(z, \tilde{E}) \left[\tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{pp}}(z, \tilde{E}) + \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}) \right] - \int d\tilde{E}_0 \tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0) \left[\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{pp}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} + \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} \right] - \int d\tilde{E}_0 \tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0) \left[\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\tilde{\nu}/\tilde{\nu}}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} \right], \quad (3.27)$$

$$(1+z)H(z) \frac{\partial \tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{\partial z} = + \tilde{\nu}(z, \tilde{E}) \left[\tilde{\Gamma}_{\tilde{\nu}/\tilde{\nu}}^{\text{pp}}(\tilde{E}) + \tilde{\Gamma}_{\tilde{\nu}/\tilde{\nu}}^{\text{sp}}(\tilde{E}) \right] - \int d\tilde{E}_0 \tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0) \left[\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\tilde{\nu}/\tilde{\nu}}^{\text{pp}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} + \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\tilde{\nu}/\tilde{\nu}}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} \right] - \int d\tilde{E}_0 \tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0) \left[\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\tilde{\nu}/\nu}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} \right]. \quad (3.28)$$

Como algunas anchuras de desintegración aparecen sumándose, podemos aligerar la notación si las agrupamos en cuatro grandes anchuras de desintegración diferenciales que tengan en cuenta todos los procesos compatibles:

$$\begin{aligned}
\nu \rightarrow \nu &\Rightarrow \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}(\tilde{E}_0, \tilde{E}_1)}{\partial \tilde{E}_1} \equiv \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{pp}}(\tilde{E}_0, \tilde{E}_1)}{\partial \tilde{E}_1} + \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(\tilde{E}_0, \tilde{E}_1)}{\partial \tilde{E}_1}, \\
\bar{\nu} \rightarrow \nu &\Rightarrow \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\bar{\nu}}(\tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} \equiv \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\bar{\nu}}^{\text{sp}}(\tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}}, \\
\bar{\nu} \rightarrow \bar{\nu} &\Rightarrow \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\bar{\nu}/\bar{\nu}}(\tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} \equiv \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\bar{\nu}/\bar{\nu}}^{\text{pp}}(\tilde{E}_0, \tilde{E}_1)}{\partial \tilde{E}_1} + \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\bar{\nu}/\bar{\nu}}^{\text{sp}}(\tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}}, \\
\nu \rightarrow \bar{\nu} &\Rightarrow \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\bar{\nu}/\nu}(\tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} \equiv \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\bar{\nu}/\nu}^{\text{sp}}(\tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}},
\end{aligned} \tag{3.29}$$

que corresponden a los siguientes procesos de desintegración generales, respectivamente:

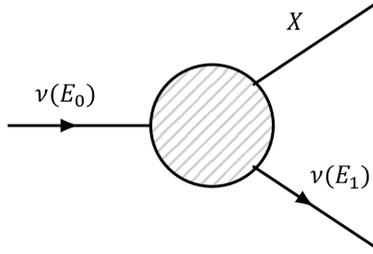


Figura 9: Desintegración $\nu \rightarrow \nu$

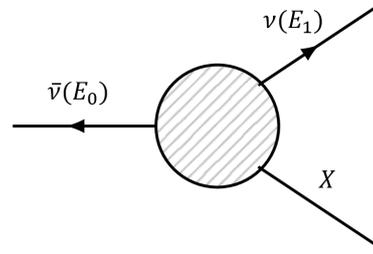


Figura 10: Desintegración $\bar{\nu} \rightarrow \nu$

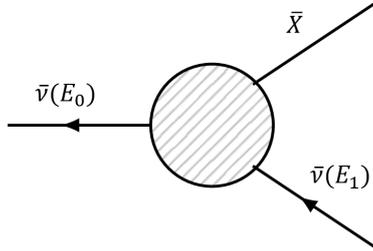


Figura 11: Desintegración $\bar{\nu} \rightarrow \bar{\nu}$

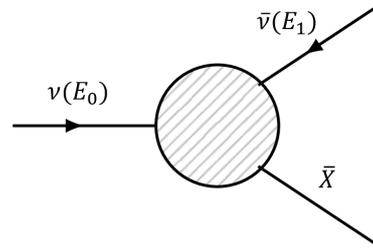


Figura 12: Desintegración $\nu \rightarrow \bar{\nu}$

De esta manera, en esta notación más compacta, finalmente podemos decir que la evolución total del espectro de neutrinos y antineutrinos predicha por nuestro modelo (incluyendo los tres efectos) viene dada por el siguiente par de ecuaciones integro-diferenciales acopladas:

$$\begin{aligned}
(1+z)H(z) \frac{\partial \tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{\partial z} &= \tilde{\nu}(z, \tilde{E}) \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}(z, \tilde{E}) \\
&\quad - \int d\tilde{E}_0 \tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0) \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} - \int d\tilde{E}_0 \tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0) \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\bar{\nu}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}},
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
(1+z)H(z) \frac{\partial \tilde{\bar{\nu}}(z, \tilde{E})}{\partial z} &= \tilde{\bar{\nu}}(z, \tilde{E}) \tilde{\Gamma}_{\bar{\nu}/\bar{\nu}}(\tilde{E}) \\
&\quad - \int d\tilde{E}_0 \tilde{\bar{\nu}}(z, \tilde{E}_0) \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\bar{\nu}/\bar{\nu}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} - \int d\tilde{E}_0 \tilde{\bar{\nu}}(z, \tilde{E}_0) \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\bar{\nu}/\nu}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}}.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Si logramos caracterizar las anchuras de desintegración diferenciales, nuestro modelo quedaría completamente definido. Como se ha dicho con anterioridad, la obtención de las anchuras de desintegración incluye el cálculo de los elementos de matriz de los diagramas de Feynman correspondientes a los procesos involucrados. Este proceso puede ser más o menos largo y tedioso, pero es conocido y resoluble.

Además, observando los diagramas de los procesos generales mostrados en las figuras 9, 10, 11 y 12, podemos notar que son procesos conjugados CP dos a dos (9 con 11 y 10 con 12). Debido a que los efectos de violación CP provienen de una fase que depende de las masas de los neutrinos [15], y nosotros estamos considerando $m_\nu \approx 0$, podemos considerar que se cumple la simetría CP y por lo tanto las anchuras de desintegración son iguales dos a dos.

Pero por otro lado, aun sin resolver explícitamente los valores de las anchuras de desintegración diferenciales, podemos utilizar argumentos dimensionales para extraer algunas conclusiones. Por ejemplo, tanto en el proceso de VPE como en el NSpl tenemos una desintegración electrodébil, por lo que el elemento de matriz será proporcional al acoplo electrodébil G_F , y a su vez la anchura diferencial a G_F^2 . Además, al tratarse de un efecto de nueva física, es esperable una dependencia inversa con la escala de nueva física Λ elevada a algún exponente m . Con ello tenemos:

$$\frac{\partial \Gamma_i(E_0, E_1)}{\partial E_1} \propto G_F^2 \cdot \frac{1}{\Lambda^m}. \quad (3.32)$$

Mediante un análisis dimensional⁴, y sabiendo que la anchura de desintegración diferencial debe ser adimensional, podemos concluir que falta un factor con unidades de potencia de energía:

$$\left[\frac{\partial \Gamma_i(E_0, E_1)}{\partial E_1} \right] \propto \frac{[G_F]^2}{[\Lambda]^m} \propto \frac{[E]^{-4}}{[E]^m}. \quad (3.33)$$

El factor debe tener unidades de energía elevada a $(4 + m)$ y siempre se podrá expresar como el producto de una potencia de la energía del neutrino inicial E_0 y de una función adimensional que solo dependa del cociente de energías entre neutrino final e inicial $f_i(E_1/E_0)$:

$$\frac{\partial \Gamma_i(E_0, E_1)}{\partial E_1} = \frac{G_F^2}{\Lambda^n} \cdot E_0^{4+m} f_i\left(\frac{E_1}{E_0}\right). \quad (3.34)$$

Ahora, para hallar la forma de las anchuras de desintegración totales simplemente debemos aplicar la relación integral que poseen con las anchuras diferenciales:

$$\Gamma_i(E_0) = \int dE_1 \frac{\partial \Gamma_i(E_0, E_1)}{\partial E_1} = \int dE_1 \frac{G_F^2}{\Lambda^m} E_0^{4+m} f_i\left(\frac{E_1}{E_0}\right). \quad (3.35)$$

Realizando un cambio de variable $x = E_1/E_0$, donde x es la fracción de energía inicial que se lleva el neutrino final, podemos expresar la anchura total como:

$$\Gamma_i(E_0) = \frac{G_F^2}{\Lambda^m} E_0^{5+m} \int dx f_i(x). \quad (3.36)$$

⁴ Recordemos a lo largo de todo el escrito se están utilizando unidades naturales: $\hbar = c = 1$

Finalmente, debemos hallar las anchuras definidas como función de z y \tilde{E} , ya que son estas variables las que aparecen en las ecuaciones 3.30 y 3.31. Teniendo en cuenta que se relacionan con las anchuras según la ecuación 3.18 y 3.24, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_i(E_0, E_1)}{\partial E_1} &= \frac{G_F^2}{\Lambda^n} \cdot E_0^{4+m} f_i\left(\frac{E_1}{E_0}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \tilde{\Gamma}_i(\tilde{E}_0, \tilde{E}_1)}{\partial \tilde{E}_1} = \frac{G_F^2}{\Lambda^n} \cdot (1+z)^{5+m} \tilde{E}_0^{4+m} f_i\left(\frac{\tilde{E}_1}{\tilde{E}_0}\right), \\ \Gamma_i(E) &= \frac{G_F^2}{\Lambda^n} \cdot E_0^{5+m} \int dx f_i(x) \quad \rightarrow \quad \bar{\Gamma}_i(z, \tilde{E}) = \frac{G_F^2}{\Lambda^n} \cdot (1+z)^{5+m} \tilde{E}_0^{5+m} \int dx f_i(x). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Cabe destacar que la forma funcional de las funciones $f_i(x)$ no cambian aunque ahora usemos \tilde{E} como variable, ya que $x = E_1/E_0 = \tilde{E}_1/\tilde{E}_0$. Por lo tanto, tras esta caracterización de las anchuras de desintegración, ahora las cantidades que debemos hallar mediante el cálculo de los diagramas de Feynman son las funciones $f_i(x)$. No obstante, sin necesidad del cálculo explícito, hemos logrado extraer información útil sobre las dependencias que la anchura tiene (en particular con la energía). Pero además, podemos dotar a las funciones $f_i(x)$ de una interpretación física. Para ello, partamos de la relación entre las anchuras de desintegración parciales y totales:

$$\Gamma_i(E_0) = \int dE_1 \frac{\partial \Gamma_i(E_0, E_1)}{\partial E_1} \quad \rightarrow \quad 1 = \int dE_1 \left[\frac{\left(\frac{\partial \Gamma_i(E_0, E_1)}{\partial E_1}\right)}{\Gamma_i(E_0)} \right]. \quad (3.38)$$

Sustituyendo la caracterización de las anchuras como funciones de $f_i(x)$ (ecuaciones 3.33 y 3.35 respectivamente), obtenemos que el integrando sólo depende dichas funciones:

$$1 = \int dE_1 \left[\frac{\left(\frac{\partial \Gamma_i(E_0, E_1)}{\partial E_1}\right)}{\Gamma_i(E_0)} \right] = \int dx \left[\frac{f_i(x)}{\int dx f_i(x)} \right] \quad \rightarrow \quad \hat{f}_i(x) \equiv \frac{f_i(x)}{\int dx f_i(x)}. \quad (3.39)$$

Definiendo como $\hat{f}_i(x)$ a la función $f_i(x)$ normalizada, tenemos una función cuya integral entre 0 y 1 nos devuelve la unidad:

$$\int_0^1 dx \hat{f}_i(x) = 1. \quad (3.40)$$

Es decir, esta función se puede interpretar como una densidad de probabilidad de x . En otras palabras, $\hat{f}_i(x)$ nos da la probabilidad de que la variable x tome un valor entre x y $x + dx$, pero como $x = E_1/E_0$, $\hat{f}_i(x)$ nos está dando la probabilidad de que la partícula del estado final se lleve una fracción x de la energía de la partícula inicial: $E_1 = xE_0$.

4. Recuperación del resultado “neutrino a neutrino”

En el capítulo anterior hemos diseñado un modelo que, para poder incluir la contribución del NSpl, caracteriza el flujo de neutrinos de forma conjunta mediante un espectro. Sin embargo, en el trabajo de TFG [11] realizamos un análisis que sólo tenía en consideración el efecto clásico de la expansión del universo y el efecto de nueva física del VPE. De esta manera, al conservarse el número de neutrinos, en dicho escrito se pudo realizar un análisis “neutrino a neutrino”.

Como su nombre indica, este método consiste en fijar un neutrino saliente de la fuente y analizar su evolución a lo largo de su trayectoria hasta su detección. Esto nos permite asociar a cada neutrino emitido con cierta energía de salida una energía de detección o llegada, relacionando así un espectro de emisión con uno de detección.

En la conclusión del TFG se expresa en forma diferencial el resultado obtenido para la evolución de la energía de cada neutrino, durante el tramo en el que ocurren la expansión del universo y la VPE simultáneamente (ecuación 6.1 de la referencia [11])⁵:

$$\frac{d\tilde{E}}{\tilde{E}^{6+3n}} = \frac{\alpha_n}{3H_0} \frac{t^{2/3+n}}{\sqrt{\Omega_m t + \Omega_\Lambda}} dt \quad \rightarrow \quad \frac{d\tilde{E}}{\tilde{E}} = \left(\frac{\tilde{E}}{E_n} \right)^{5+3n} j(t) dt . \quad (4.1)$$

Además, este resultado se puede escribir en función de una nueva escala energética E_n (ecuación 6.2 de la referencia [11]), que dicta la posición del *cut-off* y cuya definición mostramos a continuación, y de $j(t)$, una función definida para ahorrar notación:

$$E_n = \left(\frac{3H_0}{\alpha_n} \right)^{\frac{1}{5+3n}} , \quad (4.2)$$

$$j(t) = \frac{t^{2/3+n}}{\sqrt{\Omega_m t + \Omega_\Lambda}} . \quad (4.3)$$

En la definición de la nueva escala energética E_n vemos la aparición de una constante llamada α_n . Esta constante surge del cálculo de la variación temporal del momento de un neutrino debido a efectos de VPE (que a su vez surge del cálculo de la anchura de desintegración total de VPE):

$$\Gamma_{\nu/\nu}^{\text{pp}}(p) = \frac{G_F^2 p^5}{192\pi^3} \left[(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W)^2 \right] \left(\frac{p}{\Lambda} \right)^{3n} \xi_n , \quad (4.4)$$

$$\frac{dp}{dt} = - \frac{G_F^2 p^6}{192\pi^3} \left[(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W)^2 \right] \left(\frac{p}{\Lambda} \right)^{3n} \xi'_n . \quad (4.5)$$

Así α_n se define de tal forma que podamos escribir la variación del momento respecto del tiempo de una manera muy sencilla:

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha_n p^{6+3n} \quad \text{con} \quad \alpha_n \equiv \frac{G_F^2 \xi'_n}{192\pi^3 \Lambda^{3n}} \left[(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W)^2 \right] . \quad (4.6)$$

Finalmente, las constantes ξ_n y ξ'_n son dos funciones de n (el orden de la corrección de la escala de nueva física), cuya forma explícita se encuentra en la referencia [16], pero que en el anexo A justificamos que se pueden escribir en forma integral como:

⁵ No confundir t con la variable temporal. Sino que, como se justificará más adelante, $t = (1 + z)^3$.

$$\xi_n = \frac{4}{3} \int_0^1 dx (1-x)^3 (1-x^{n+1})^3, \quad (4.7)$$

$$\xi'_n = \frac{4}{3} \int_0^1 dx (1-x)^4 (1-x^{n+1})^3. \quad (4.8)$$

Debido a que no hemos realizado ninguna asunción sobre nuestro modelo espectral, es esperable que pueda aplicarse a las mismas condiciones del TFG y reproducir los mismos resultados. De hecho, al ser el modelo espectral aquí desarrollado más general y completo, las ecuaciones del modelo “neutrino a neutrino” deben estar de alguna forma contenidas en el modelo del TFM.

Puede resultar interesante el ejercicio teórico de intentar reproducir la fórmula de la evolución de la energía de un neutrino obtenida mediante el modelo “neutrino a neutrino” del TFG, a partir de la fórmula de la evolución del espectro obtenida mediante el modelo espectral en este TFM. Es probable que la conexión sea no trivial; no obstante, el proceso de llegar de un modelo a otro nos dará valiosa información acerca de la compabilidad de ambos paradigmas y de las asunciones que es necesario realizar para hacerlos compatibles.

Con ello en mente, la primera aproximación a llevar a cabo para poder aplicar el modelo espectral al caso del TFG es despreciar todos aquellos efectos producidos por el Spl. Es decir, dejamos de tener un par de ecuaciones acopladas para recuperar una única ecuación que dicta la variación del espectro de neutrinos (ecuación 3.17):

$$(1+z)H(z) \left. \frac{\partial \tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{\partial z} \right|_{\text{VPE}} = \tilde{\nu}(z, \tilde{E}) \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(z, \tilde{E}) - \int d\tilde{E}_0 \tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0) \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}}, \quad (3.17 \text{ revisada})$$

donde recordemos que la anchura de desintegración por VPE incluía la contribución de dos canales (ecuación 3.14), el mediado por el bosón Z^0 y el mediado por el bosón W^+ :

$$\Gamma_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(E_0, E_1) \propto \left| \mathcal{M}_Z^{\text{VPE}} + \mathcal{M}_W^{\text{VPE}} \right|^2, \quad \text{tal que} \quad \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(E_0) = \int dE_1 \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(E_0, E_1). \quad (3.14 \text{ revisada})$$

Sin embargo, en el modelo del TFG, se considera una aproximación adicional: independientemente del sabor de emisión, debido al efecto de las oscilaciones de neutrinos y a la gran distancia recorrida, tendremos una probabilidad de 1/3 de detectar cada sabor. Si además asignamos, en el caso de los neutrinos electrónicos, una probabilidad 1/2 a cada uno de los dos procesos mediante los cuáles se puede desintegrar (figura 13), el proceso dominante es el mediado por Z^0 , ya que el mediado por W^+ es sólo relevante 1/6 de las veces. De esta manera, podemos centrarnos únicamente en el caso mediado por la corriente neutra Z^0 , sin incurrir en demasiado error.

En adelante consideraremos que la anchura de desintegración mediante VPE corresponde únicamente al canal mediado por Z^0 . Ahora sustituimos en la fórmula de la variación del espectro la expresión de las anchuras de desintegración diferencial y parcial como función de $f_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(x)$ (ecuaciones 3.35 y 3.33):

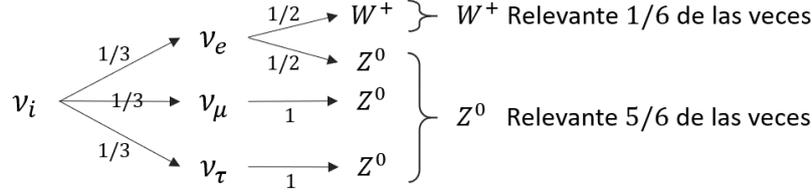


Figura 13: Posibles procesos de desintegración a través de VPE

$$\frac{\partial \tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{\partial z} = \frac{G_F^2 (1+z)^{4+m}}{\Lambda^m H(z)} \left\{ \tilde{\nu}(z, \tilde{E}) \tilde{E}^{5+m} \int dx f_{\nu/\nu}^{\text{pp}}(x) - \int d\tilde{E}_0 \tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0) \tilde{E}_0^{4+m} f_{\nu/\nu}^{\text{pp}}(\tilde{E}/\tilde{E}_0) \right\}. \quad (4.9)$$

Ahora nos preguntamos cómo podemos relacionar esta evolución espectral con la evolución de la energía de un neutrino. Para realizar esta asociación, debemos darnos cuenta de que el espectro de neutrinos, si es normalizado adecuadamente, se convierte en una medida de probabilidad. De hecho, nos da la probabilidad de que al escoger un neutrino al azar del espectro, éste tenga energía E . De esta manera, podemos definir una energía media del espectro según:

$$\langle \tilde{E} \rangle = \frac{\int d\tilde{E} \tilde{E} \tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{\int d\tilde{E} \tilde{\nu}(z, \tilde{E})} = \frac{1}{N(z)} \int d\tilde{E} \tilde{E} \tilde{\nu}(z, \tilde{E}), \quad (4.10)$$

donde identificamos que $N(z) = \int d\tilde{E} \tilde{\nu}(z, \tilde{E})$ es el número de neutrinos en el punto z . Debido a que sólo estamos considerando la expansión del universo y el VPE, sabemos que el número de neutrinos se conserva, por lo tanto $N(z) \equiv N$.

Ahora podemos averiguar cómo la energía media del espectro varía a lo largo de la trayectoria. Para ello realizamos una derivada respecto de z :

$$\frac{\partial \langle \tilde{E} \rangle}{\partial z} = \frac{1}{N} \int d\tilde{E} \tilde{E} \frac{\partial \tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{\partial z}. \quad (4.11)$$

De esta forma, la variación de la energía media queda en función de la variación del espectro a lo largo de la trayectoria. Como conocemos la forma de esta variación (fórmula 4.9), podemos sustituir y obtener:

$$\frac{\partial \langle \tilde{E} \rangle}{\partial z} = \frac{G_F^2 (1+z)^{4+m}}{\Lambda^m H(z)} \left\{ \frac{1}{N} \int d\tilde{E} \tilde{\nu}(z, \tilde{E}) \tilde{E}^{6+m} \int dx f_i(x) - \frac{1}{N} \int d\tilde{E} \tilde{E} \int d\tilde{E}_0 \tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0) \tilde{E}_0^{4+m} f_{\nu/\nu}^{\text{pp}}(\tilde{E}/\tilde{E}_0) \right\}, \quad (4.12)$$

donde, en el primer sumando, $\left(\frac{1}{N} \int d\tilde{E} \tilde{\nu}(z, \tilde{E}) \tilde{E}^{6+m} \right)$ es simplemente el valor medio de la potencia $(6+m)$ -ésima de la energía, y la segunda integral $(\int dx f_i(x))$ es una constante. De la misma forma, en el segundo sumando, si intercambiamos el orden de integración, podemos conseguir una expresión muy similar a la del primer sumando:

$$\frac{1}{N} \int d\tilde{E}\tilde{E} \int d\tilde{E}_0 \tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0) \tilde{E}_0^{4+m} f_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(\tilde{E}/\tilde{E}_0) = \frac{1}{N} \int d\tilde{E}_0 \int d\tilde{E}\tilde{E} \tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0) \tilde{E}_0^{4+m} f_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(\tilde{E}/\tilde{E}_0). \quad (4.13)$$

Con este cambio, ahora la integral sobre \tilde{E} se calcula para cada valor de \tilde{E}_0 fijo, por lo que podemos volver a hacer el cambio de variable $x = \tilde{E}/\tilde{E}_0$ (con $d\tilde{E} = \tilde{E}_0 dx$):

$$\frac{1}{N} \int d\tilde{E}_0 \int d\tilde{E}\tilde{E} \tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0) \tilde{E}_0^{4+m} f_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(\tilde{E}/\tilde{E}_0) = \frac{1}{N} \int d\tilde{E}_0 \tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0) \tilde{E}_0^{6+m} \int dx x f_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(x). \quad (4.14)$$

Una vez más, $(\frac{1}{N} \int d\tilde{E} \tilde{\nu}(z, \tilde{E}) \tilde{E}^{6+m})$ es el valor medio de la potencia $(6+m)$ -ésima de la energía, y la segunda integral $(\int dx x f_i(x))$ es una constante, cuyo integrando difiere en un factor x del integrando del primer sumando. De esta manera, sustituyendo este resultado en la evolución de la energía media (ecuación 4.12) y sacando como factor común todas las constantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \tilde{E} \rangle}{\partial z} &= \frac{G_F^2 (1+z)^{4+m}}{\Lambda^m H(z)} \langle \tilde{E}^{6+m} \rangle \left\{ \int dx f_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(x) - \int dx x f_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(x) \right\} \\ &= \frac{G_F^2 (1+z)^{4+m}}{\Lambda^m H(z)} \langle \tilde{E}^{6+m} \rangle \int dx (1-x) f_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(x). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Para poder continuar debemos identificar la función $f_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(x)$. Para ello usaremos que sabemos su relación con la anchura de desintegración, $\Gamma_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(E)$ (ecuación 3.36):

$$\Gamma_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(E) = \frac{G_F^2}{\Lambda^m} E_0^{5+m} \int dx f_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(x), \quad (3.36 \text{ revisada})$$

y que también sabemos la forma explícita de dicha anchura, ya que ya ha sido resuelta en la referencia [16] (ecuación 4.4):

$$\Gamma_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(p) = \frac{G_F^2 p^5}{192\pi^3 \Lambda^{3n}} \left[(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W)^2 \right] \left(\frac{p}{\Lambda} \right)^{3n} \xi_n, \quad (4.4 \text{ revisada})$$

donde utilizando que la masa del neutrino es despreciable ($m_\nu \approx 0$), podemos sustituir su momento por su energía y así podremos comparar ambas expresiones⁶:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(E) &= \frac{G_F^2}{\Lambda^m} E_0^{5+m} \int dx f_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(x), \\ \Gamma_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(E) &= \frac{G_F^2}{\Lambda^{3n}} E_0^{5+3n} \frac{\xi_n}{192\pi^3} \left[(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Realizando una inspección visual, podemos identificar una relación para $f_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(x)$:

$$\int dx f_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(x) = \frac{\xi_n}{192\pi^3} \left[(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W)^2 \right]. \quad (4.17)$$

⁶ Mediante una inspección visual de las potencias de la energía \tilde{E} y de la escala de nueva física Λ podemos comprobar que $m = 3n$, por lo que a partir de este punto asumiremos ese valor.

Pero recordando que ξ_n tiene una forma integral (ecuación 4.7), podemos sustituir y encontrar la forma explícita para $f_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(x)$:

$$\begin{aligned} \int dx f_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(x) &= \frac{1}{192\pi^3} \left[(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W)^2 \right] \frac{4}{3} \int dx (1-x)^3 (1-x^{n+1})^3 \\ \rightarrow f_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(x) &= \frac{4}{3} \frac{1}{192\pi^3} \left[(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W)^2 \right] (1-x)^3 (1-x^{n+1})^3. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Con esto queda definida la función $f_{\nu/\nu}^{\text{PP}}(x)$, y ahora podemos sustituir la relación obtenida en la expresión de la variación de la energía media del espectro (ecuación 4.15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \tilde{E} \rangle}{\partial z} &= \frac{G_F^2}{\Lambda^{3n}} \frac{(1+z)^{4+3n}}{H(z)} \langle \tilde{E}^{6+3n} \rangle \int dx (1-x) \frac{4}{3} \frac{1}{192\pi^3} \left[(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W)^2 \right] (1-x)^3 (1-x^{n+1})^3 \\ &= \frac{G_F^2}{\Lambda^{3n}} \frac{(1+z)^{4+3n}}{H(z)} \langle \tilde{E}^{6+3n} \rangle \frac{1}{192\pi^3} \left[(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W)^2 \right] \frac{4}{3} \int dx (1-x)^4 (1-x^{n+1})^3, \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde identificamos que $4/3$ de la última integral coincide exactamente con el valor de deducido de ξ'_n (ecuación 4.8) (véase anexo A):

$$\xi'_n = \frac{4}{3} \int_0^1 dx (1-x)^4 (1-x^{n+1})^3. \quad (4.8 \text{ revisada})$$

De esta manera, sustituyendo ξ'_n en la fórmula de la evolución de la energía media del neutrino, obtenemos:

$$\frac{\partial \langle \tilde{E} \rangle}{\partial z} = \frac{G_F^2}{\Lambda^{3n}} \frac{(1+z)^{4+3n}}{H(z)} \langle \tilde{E}^{6+3n} \rangle \frac{(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W^2)^2}{192\pi^3} \xi'_n. \quad (4.20)$$

En la fórmula anterior, tenemos magnitudes que dependen de la energía y otras que sólo dependen de z (además de constantes). Esto invita a realizar una separación de variables, en la que vamos a dejar toda la dependencia energética a la izquierda y la dependencia con z a la derecha:

$$\frac{d \langle \tilde{E} \rangle}{\langle \tilde{E}^{6+3n} \rangle} = \frac{G_F^2 \xi'_n}{192\pi^3 \Lambda^{3n}} \left[(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W^2)^2 \right] \frac{(1+z)^{4+3n}}{H(z)} dz. \quad (4.21)$$

Ahora sustuimos explícitamente el valor (aproximado) de la función $H(z)$, definida en el segundo apartado (ecuación 2.14):

$$H(z) \approx H_0 \sqrt{\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda}. \quad (2.14 \text{ revisada})$$

Lo cual invita a realizar el cambio de variable $t \equiv (1+z)^3$. De esta manera, la ecuación 4.21 queda finalmente:

$$\frac{d \langle \tilde{E} \rangle}{\langle \tilde{E}^{6+3n} \rangle} = \frac{1}{3H_0} \left(\frac{G_F^2 \xi'_n}{192\pi^3 \Lambda^{3n}} \left[(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W^2)^2 \right] \right) \frac{t^{2/3+3n/3}}{\sqrt{\Omega_m t + \Omega_\Lambda}} dt, \quad (4.22)$$

donde podemos identificar que el término entre paréntesis es la definición de α_n (ecuación 4.6):

$$\frac{d\langle\tilde{E}\rangle}{\langle\tilde{E}^{6+3n}\rangle} = \frac{\alpha_n}{3H_0} \frac{t^{2/3+n}}{\sqrt{\Omega_m t + \Omega_\Lambda}} dt . \quad (4.23)$$

Además, si la energía es una función cuya evolución es suave y sin grandes fluctuaciones, podemos considerar que la “varianza generalizada” de orden $(6 + 3n)$ es pequeña y por lo tanto podemos identificar que:

$$\text{Var}^{(6+3n)}(E) = \langle\tilde{E}^{6+3n}\rangle - \langle\tilde{E}\rangle^{6+3n} \approx 0 \quad \rightarrow \quad \langle\tilde{E}^{6+3n}\rangle \approx \langle\tilde{E}\rangle^{6+3n} . \quad (4.24)$$

Esto nos da una relación funcional para la energía media del espectro que coincide con el resultado del TFG:

$$\frac{d\langle\tilde{E}\rangle}{\langle\tilde{E}\rangle^{6+3n}} = \frac{\alpha_n}{3H_0} \frac{t^{2/3+n}}{\sqrt{\Omega_m t + \Omega_\Lambda}} dt . \quad (4.25)$$

Sin embargo, debemos notar que hemos obtenido una ley que dicta la variación de la energía media y no de la energía individual de un neutrino (que es lo que esperábamos).

Por consiguiente, la diferencia entre el resultado obtenido con el modelo espectral y el modelo “neutrino a neutrino”, es que este modelo espectral hace una predicción de la evolución del valor medio, al no existir una energía definida para cada neutrino. Este hecho es consistente con la realidad, ya que los procesos de desintegración son procesos cuánticos y por lo tanto completamente probabilísticos. Por otro lado, en el modelo “neutrino a neutrino” estábamos aproximando, de forma inocente, procesos intrínsecamente cuánticos por procesos deterministas, de manera que la energía de cada neutrino se convertía en un concepto bien definido.

5. Corrección del modelo y generalización

Una vez comprobado en que condiciones el modelo espectral es capaz de reproducir los resultados obtenidos en el TFG [11], podemos continuar trabajando sobre él. En concreto, en este apartado queremos aplicar correcciones debidas a fenómenos que no se habían tenido en cuenta. En primer lugar, la existencia de umbrales energéticos para los procesos de nueva física, y en segundo lugar, la generalización del modelo para el caso en el que exista una distribución de fuentes.

5.1. Inclusión de las energías umbrales

Como hemos visto en el apartado 3, contribuyen tres efectos a la variación del espectro de neutrinos. Estos son: el efecto clásico de la expansión del universo (cuyo efecto queda automáticamente incluido al utilizar las variables \tilde{E} y $\tilde{\nu}(z, \tilde{E})$) y los dos efectos de nueva física, el VPE y el NSpl.

A diferencia del efecto clásico (que se da siempre), los efectos de nueva física tienen una energía umbral característica, por debajo de la cual no se da dicho efecto. Sin necesidad de conocer explícitamente la expresión de la energía umbral en cada caso, sabemos que para que dichas desintegraciones se puedan llevar a cabo, la energía de la partícula inicial debe ser suficiente como para producir las masas de las partículas del estado final. Por ello, sabemos que la energía umbral de VPE dependerá de la masa del electrón m_e y el NSpl dependerá de la masa de los neutrinos m_ν .

Como estamos considerando una física de altas energías donde $m_\nu \approx 0$, la partícula del estado inicial tendrá siempre suficiente energía para crear un neutrino en el estado final. De esta manera podemos concluir, sin necesidad del cálculo explícito, que el NSpl tendrá un umbral nulo. De todas maneras, podemos comprobar la veracidad de este razonamiento extrayendo la fórmula para la energía umbral de NSpl calculada en la referencia [17]⁷ (para el caso $n = 2$). Imponiendo que la masa del neutrino es nula, obtenemos efectivamente que no hay energía umbral.

$$E_{\text{NSpl}}^* = \sqrt{3m_\nu\Lambda} \approx 0. \quad (5.1)$$

En el caso de VPE, la energía umbral sí tendrá un valor no nulo, que incluirá una dependencia con m_e y Λ . El cálculo se encuentra hecho de forma explícita en la referencia [18]:

$$E_{\text{VPE}}^* = \left(4m_e^2\Lambda^n\right)^{1/(2+n)}. \quad (5.2)$$

Como éste es el único umbral no nulo, a partir de ahora nos referiremos a él simplemente como $E^* \equiv E_{\text{VPE}}^*$. Dicho esto, como tanto el efecto de la expansión como el del NSpl ocurren siempre a lo largo de la trayectoria, realmente la única distinción que debemos hacer es acerca de cuándo los neutrinos serán capaces de producir pares y cuándo no. Esto lo podemos tener en cuenta cambiando la expresión de la anchura de desintegración diferencial debida a VPE por una que tenga en cuenta la condición impuesta por la energía umbral:

$$\frac{\partial \Gamma_{\nu/\nu}^{pp}(E_0, E_1)}{\partial E_1} = \frac{G_F^2}{\Lambda^n} \cdot E_0^{4+m} \theta(E_0 - E^*) f_{\nu/\nu}^{\text{pp}}\left(\frac{E_1}{E_0}\right), \quad (5.3)$$

⁷ En la fórmula de la referencia [17], se utiliza un valor de n (que denominaremos n') que se relaciona con el usado en este trabajo según $n' = n + 2$. Además, hemos indentificado $\Lambda = M_{\text{Pl}}$ y $\eta^{(n)} = 0$.

donde $\theta(E_0 - E^*)$ es una función escalón de Heaviside que conseguirá que la anchura de desintegración diferencial sea nula cuando la energía sea menor a la energía umbral. Ahora podemos hallar la anchura de desintegración total integrando sobre la energía del neutrino final:

$$\Gamma_{\nu/\nu}^{pp}(E_0) = \frac{G_F^2}{\Lambda^m} E_0^{5+m} \theta(E_0 - E^*) \int dx f_{\nu/\nu}^{pp}(x). \quad (5.4)$$

Ahora, a partir de estas anchuras, podemos calcular su expresión en función de z y \tilde{E} aplicando la relaciones 3.18. Pero también hemos de expresar la función escalón como una función de \tilde{E} :

$$\theta(E_0 - E^*) = \theta((1+z)\tilde{E}_0 - E^*) = \theta\left(\tilde{E}_0 - \frac{E^*}{1+z}\right) \equiv \theta\left(\tilde{E}_0 - \tilde{E}^*(z)\right), \quad (5.5)$$

donde hemos definido $\tilde{E}^*(z)$ como un umbral dependiente de z para \tilde{E}_0 . De esta manera, la función escalón ahora depende de dos variables, z y \tilde{E} . Con ello en mente, la expresión de las anchuras como función de \tilde{E} serán:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{pp}(\tilde{E}_0, \tilde{E}_1)}{\partial \tilde{E}_1} &= \frac{G_F^2}{\Lambda^n} \cdot (1+z)^{5+m} \tilde{E}_0^{4+m} \theta\left(\tilde{E}_0 - \tilde{E}^*(z)\right) f_{\nu/\nu}^{pp}\left(\frac{\tilde{E}_1}{\tilde{E}_0}\right), \\ \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{pp}(\tilde{E}_0) &= \frac{G_F^2}{\Lambda^n} \cdot (1+z)^{5+m} \tilde{E}_0^{5+m} \theta\left(\tilde{E}_0 - \tilde{E}^*(z)\right) \int dx f_{\nu/\nu}^{pp}(x). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Si tenemos en cuenta estos cambios de definición, entonces las ecuaciones antes planteadas, tanto para la evolución del espectro de neutrinos como de antineutrinos, siguen siendo válidas. Centrándonos en el espectro de neutrinos (el tratamiento de los antineutrinos es idéntico), la resolución de su ecuación integro-diferencial (fórmula 3.27) implica una separación de variables e integración en ambos lados entre fuente y detector:

$$\tilde{\nu}(0, \tilde{E}) - \tilde{\nu}(z_e, \tilde{E}) = \int_{z_e}^0 dz \left(\frac{\tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{(1+z)H(z)} \left[\tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{pp}(z, \tilde{E}) + \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{sp}(z, \tilde{E}) \right] - \int d\tilde{E}_0 \frac{\tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0)}{(1+z)H(z)} \dots \right). \quad (5.7)$$

Despejando el espectro de detección, el cuál ahora dependerá de las condiciones iniciales impuestas por la fuente (es decir, del espectro de emisión $\tilde{\nu}(z_e, \tilde{E})$), podemos definir el espectro de detección dada una fuente situada en z_e como:

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(0, \tilde{E}; z_e) &\equiv \tilde{\nu}(z_e, \tilde{E}) + \int_{z_e}^0 dz \frac{\tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{(1+z)H(z)} \left[\tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{pp}(z, \tilde{E}) + \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{sp}(z, \tilde{E}) \right] \\ &\quad - \int_{z_e}^0 dz \int d\tilde{E}_0 \frac{\tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0)}{(1+z)H(z)} \left[\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{pp}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} + \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{sp}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} \right] \\ &\quad - \int_{z_e}^0 dz \int d\tilde{E}_0 \frac{\tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0)}{(1+z)H(z)} \left[\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\bar{\nu}}^{sp}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} \right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ahora debemos tener en cuenta que la función escalón que se encuentra en el primer sumando (es decir, $\theta(\tilde{E} - \tilde{E}^*(z))$) impone una condición sobre \tilde{E} y la función escalón del segundo sumando (es decir, $\theta(\tilde{E}_0 - \tilde{E}^*(z))$) impone una condición sobre \tilde{E}_0 .

La primera función escalón nos invita a considerar dos casos distintos. El primero de ellos es el caso $\tilde{E} \geq E^*$. En dicho caso la función escalón sobre \tilde{E} será siempre la unidad, ya que sabemos que $\tilde{E} \geq E^* \geq E^*(z) \forall z$, por lo tanto el primer sumando de la ecuación 5.8 no se verá afectado.

Algo parecido ocurre con la función escalón sobre \tilde{E}_0 . En este segundo sumando, una partícula de energía \tilde{E}_0 da lugar a una partícula de energía \tilde{E} . De esta manera, como la energía de la partícula inicial siempre será mayor o igual que la de la partícula final, sabemos que $\tilde{E}_0 \geq \tilde{E} \geq E^* \geq \tilde{E}^*(z) \forall z$, por lo que el segundo sumando tampoco se verá afectado. Como el tercer sumando no contiene ninguna función escalón, finalmente el resultado para el caso $\tilde{E} > E^*$ será:

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(0, \tilde{E}; z_e) \Big|_{\tilde{E} > E^*} &\equiv \tilde{\nu}(z_e, \tilde{E}) + \int_{z_e}^0 dz \frac{\tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{(1+z)H(z)} \left[\tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{pp}}(z, \tilde{E}) + \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}) \right] \\ &\quad - \int_{z_e}^0 dz \int d\tilde{E}_0 \frac{\tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0)}{(1+z)H(z)} \left[\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{pp}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} + \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} \right] \\ &\quad - \int_{z_e}^0 dz \int d\tilde{E}_0 \frac{\tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0)}{(1+z)H(z)} \left[\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\bar{\nu}}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Para el segundo caso, $\tilde{E} < E^*$, la resolución es diferente. La primera función escalón distinguirá un rango de z 's en los que se ha producido VPE ($\tilde{E} > \tilde{E}^*(z)$) y otro que no ($\tilde{E} < \tilde{E}^*(z)$). Esto se traduce en una condición sobre z :

$$\tilde{E} > \tilde{E}^*(z) \quad \rightarrow \quad \tilde{E} > E^*/(1+z) \quad \rightarrow \quad z > (E^*/\tilde{E}) - 1. \quad (5.10)$$

Por lo tanto, la integral sobre z del primer sumando de la ecuación 5.8 se verá dividida en dos rangos, uno que incluirá VPE ($z > (E^*/\tilde{E}) - 1$) y otro que no ($z < (E^*/\tilde{E}) - 1$). En cuanto a la segunda función escalón, debemos distinguir dos rangos de \tilde{E}_0 : cuando $\tilde{E}_0 > \tilde{E}^*(z)$ habrá VPE y cuando $\tilde{E}_0 < \tilde{E}^*(z)$ no; por lo tanto debemos separar la integral sobre \tilde{E}_0 en dos partes, cuyo límite dependerá del valor de z . De esta manera, el resultado para el caso $\tilde{E} < E^*$ será:

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(0, \tilde{E}; z_e) \Big|_{\tilde{E} < E^*} &\equiv \tilde{\nu}(z_e, \tilde{E}) + \int_{z_e}^{(E^*/\tilde{E})-1} dz \frac{\tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{(1+z)H(z)} \left[\tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{pp}}(z, \tilde{E}) + \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}) \right] \\ &\quad + \int_{(E^*/\tilde{E})-1}^0 dz \frac{\tilde{\nu}(z, \tilde{E})}{(1+z)H(z)} \left[\tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}) \right] \\ &\quad - \int_{z_e}^0 dz \int_0^{E^*/(1+z)} d\tilde{E}_0 \frac{\tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0)}{(1+z)H(z)} \left[\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} \right] \\ &\quad - \int_{z_e}^0 dz \int_{E^*/(1+z)}^\infty d\tilde{E}_0 \frac{\tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0)}{(1+z)H(z)} \left[\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{pp}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} + \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\nu}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} \right] \\ &\quad - \int_{z_e}^0 dz \int d\tilde{E}_0 \frac{\tilde{\nu}(z, \tilde{E}_0)}{(1+z)H(z)} \left[\frac{\partial \tilde{\Gamma}_{\nu/\bar{\nu}}^{\text{sp}}(z, \tilde{E}_0, \tilde{E})}{\partial \tilde{E}} \right]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Por lo tanto, la aplicación de las funciones escalón ha llevado a que el espectro de detección de una fuente situada en z_e , $\tilde{\nu}(0, \tilde{E}; z_e)$, sea una función definida a trozos, según el valor de \tilde{E} para el que sea aplicado (según sea mayor o menor que la energía umbral E^*).

5.2. Modelo generalizado a una distribución de fuentes

Finalmente, una vez conocido el espectro detectado dada una fuente emisora situada en z_e , ahora nos preguntamos por cómo será el espectro detectado, dada una distribución de fuentes $\rho(z_e)$.

Debido a que las fuentes son independientes, podemos realizar un seguimiento individual de como evoluciona el espectro emitido por cada una. De esta manera, para muchas fuentes independientes, podemos simplemente aplicar el principio de superposición y superponer los resultados obtenidos para cada fuente. Este proceso llevado a cabo para una distribución de fuentes $\rho(z_e)$ implica una integración a toda la distribución:

$$\nu_d(\tilde{E}) \equiv \int dz_e \rho(z_e) \tilde{\nu}(0, \tilde{E}; z_e). \quad (5.12)$$

Sin embargo, como la solución del espectro de detección de una fuente era una función definida a trozos en la energía \tilde{E} , el espectro total de detección dada una distribución de fuentes $\rho(z_e)$ también lo será:

$$\nu_d(\tilde{E}) \equiv \begin{cases} \int dz_e \rho(z_e) \left(\tilde{\nu}(0, \tilde{E}; z_e) \Big|_{\tilde{E} > E^*} \right) & \text{Si } \tilde{E} > E^* \\ \int dz_e \rho(z_e) \left(\tilde{\nu}(0, \tilde{E}; z_e) \Big|_{\tilde{E} < E^*} \right) & \text{Si } \tilde{E} < E^* \end{cases}. \quad (5.13)$$

6. Conclusiones y discusión

En este apartado queremos realizar un breve resumen de los resultados obtenidos. Para ello comenzaremos con un breve repaso del contexto que envuelve al trabajo.

Como se comentó en la introducción, la motivación de este trabajo proviene de la ausencia de detecciones de neutrinos de más de 2 PeV en los datos compartidos por el laboratorio IceCube. Sin embargo, se esperarían detecciones de neutrinos en dicho rango, tanto por extrapolación del espectro a energías menores, como porque cerca de los $M_W^2/2m_e = 6.3$ PeV ocurre la formación resonante de un bosón W^- que aumenta la sección eficaz con los electrones blanco del detector.

Para dar explicación a este *cut-off*, se proponen tres posibles soluciones: la existencia de un corte en el espectro de emisión, la existencia de efectos extrínsecos a la propagación, o la existencia de efectos intrínsecos a la misma. Aunque ninguna de estas soluciones puede ser descartada, en este trabajo nos hemos centrado en el último caso, que necesita de la inclusión de efectos de nueva física para poder dar explicación el corte.

El acercamiento a la nueva física se realiza mediante un escenario de LIV, cuyos efectos se manifiestan en una modificación de la relación de dispersión usual de las partículas, que desestabiliza a los neutrinos y permite que se pueden desintegrar mediante dos nuevos procesos antes prohibidos: el VPE y el NSpl. Ambos efectos, en conjunto con el efecto clásico de la expansión del universo, provocan variación en el espectro de neutrinos y podrían explicar el corte observado.

Stecker *et al.* pusieron a prueba la afirmación anterior realizando simulaciones de Montecarlo considerando por separado y conjuntamente los tres efectos (figura 2). El resultado obtenido fue la correcta predicción de un corte en el espectro, que para un valor de la energía umbral de $E^* \sim 10$ PeV se ajusta a los datos experimentales (figura 1). Pero además, cuando se tiene en cuenta el NSpl se predice un exceso de neutrinos previo al corte, que aunque no ha sido observado, es compatible con las barras de error.

No obstante, este método computacional no nos da información acerca del propio funcionamiento del proceso. Esto invita a realizar un tratamiento analítico del problema. Esta fue la motivación principal para realizar el TFG [11]. En dicho trabajo se diseñó un modelo “neutrino a neutrino” en el que se considera conjuntamente el efecto de la expansión del universo y del VPE. Dicho modelo logra resolver efectivamente la evolución de la energía de los neutrinos a lo largo de su trayectoria, y de esta manera, lograba predecir un espectro de detección.

Sin embargo, para el análisis “neutrino a neutrino” hizo falta renunciar a considerar el efecto del NSpl (debido a la consideración de un número de neutrinos constante). De esta manera, aunque las predicciones del modelo se ajustan correctamente a las predicciones realizadas por el método de Montecarlo para el caso de sólo VPE y expansión, el modelo todavía es incompleto. Esto nos motiva a querer diseñar un modelo capaz de incorporar los tres efectos de pérdida de energía intrínsecos a la propagación, y de hecho, este es el propósito primordial de este TFM.

A lo largo apartado 2, mediante el análisis de ejemplos sencillos, hemos obtenido una serie de consideraciones que sustentan y nos han servido para construir el nuevo modelo. Entre ellas cabe destacar la necesidad de trabajar con todo el flujo de neutrinos de manera conjunta, de manera que el análisis “neutrinos a neutrino” queda descartado. En su lugar se propone caracterizar el flujo mediante una función espectro y obtener así un modelo espectral.

El modelo espectral desarrollado en el apartado 3, a diferencia del modelo del TFG, tiene en cuenta de forma nativa la naturaleza intrínsecamente probabilística de los procesos de desintegración, a través de las anchuras de desintegración diferenciales. Además, al ser un modelo más completo, es de esperar que de alguna manera contenga al modelo “neutrino a neutrino”.

También, durante la construcción del modelo, pudimos comprobar la imposibilidad de considerar una sola ecuación de evolución para el espectro de neutrinos, sino que debemos considerar también la evolución del espectro de antineutrinos, al estar acopladas. De esta manera, el resultado del modelo espectral se puede condensar en un par de ecuaciones integro-diferenciales acopladas (ecuaciones 3.30 y 3.31). Además, este par de ecuaciones permite la inclusión, de forma sencilla, de efectos adicionales a la propagación modificando las anchuras de desintegración.

Una vez obtenido el par de ecuaciones que dicta la propagación de los espectros entre una fuente y el detector, en el apartado 5, hemos generalizado el resultado para una distribución de fuentes $\rho(z_e)$, superponiendo el resultado obtenido para una fuente a toda la distribución.

Además, en el mismo apartado hemos corregido el modelo incluyendo la existencia de una energía umbral E^* para el proceso de VPE. Esto nos permite separar la resolución de la ecuación integro-diferencial en dos regímenes: uno aplicado a energías de detección inferior a la umbral (ecuación 5.11) y otro aplicado a energías superiores (ecuaciones 5.9).

Finalmente, queremos destacar que en apartado 4 hemos podido comprobar que el modelo del TFM contiene al modelo del TFG, obteniendo explícitamente el resultado del modelo “neutrino a neutrino” a partir del resultado espectral. Para ello hemos impuesto una serie de aproximaciones sobre el modelo espectral, hasta conseguir la misma forma funcional que en el TFG. Las aproximaciones realizadas nos dan información acerca del rango de validez de la estrategia utilizada en el TFG, y además, nos permiten entender la relación entre ambos modelos.

La principal diferencia obtenida, es que el modelo espectral, aún en el caso de sólo considerar VPE y expansión, sigue teniendo en cuenta la naturaleza probabilística de las desintegraciones, y por tanto, sólo puede hacer una predicción de la evolución de la energía media y no de la energía individual de cada neutrino (la cual está indefinida). Por lo tanto, el resultado del TFG, “neutrino a neutrino”, aproxima los procesos cuánticos como procesos deterministas.

Queda pendiente como futuro trabajo la resolución de las ecuaciones del modelo espectral. Esto se puede intentar mediante una estrategia analítica o mediante una numérica. Si queremos continuar con el método analítico, podemos intentar resolver la ecuación mediante un método iterativo en el que podemos utilizar como solución tentativa el resultado aproximado que obtenemos al aplicar el modelo “neutrino a neutrino”.

Por otro lado, realizando simulaciones numéricas, sería interesante comparar las predicciones obtenidas tanto con las resultantes del modelo del TFG (para poder comprobar cualitativamente las diferencias entre los espectros), como con las simulaciones de Stecker *et al.* (para comprobar si logramos reproducir la acumulación de neutrinos antes del corte), como con los datos experimentales de IceCube (que son en última instancia, los datos a los que queremos dar explicación mediante este novedoso acercamiento a la nueva física).

7. Bibliografía

- [1] University of Wisconsin-Madison y National Science Foundation. *IceCube Laboratory*. URL: <https://icecube.wisc.edu/>.
- [2] MG Aartsen y col. «First observation of PeV-energy neutrinos with IceCube». En: *Physical review letters* 111.2 (2013), pág. 021103.
- [3] MG Aartsen y col. «Observation of high-energy astrophysical neutrinos in three years of IceCube data». En: *Physical review letters* 113.10 (2014), pág. 101101.
- [4] IceCube Collaboration y col. «Evidence for high-energy extraterrestrial neutrinos at the IceCube detector». En: *Science* 342.6161 (2013), pág. 1242856.
- [5] Sheldon L. Glashow. «Resonant Scattering of Antineutrinos». En: *Phys. Rev.* 118 (1960), págs. 316-317. DOI: 10.1103/PhysRev.118.316.
- [6] Stefano Liberati y Luca Maccione. «Quantum Gravity phenomenology: achievements and challenges». En: (31 de mayo de 2011). DOI: 10.1088/1742-6596/314/1/012007. arXiv: 1105.6234v1 [astro-ph.HE].
- [7] Floyd W Stecker y Sean T Scully. «Propagation of superluminal PeV IceCube neutrinos: a high energy spectral cutoff or new constraints on Lorentz invariance violation». En: *Physical Review D* 90.4 (2014), pág. 043012.
- [8] Floyd W. Stecker y col. «Searching for Traces of Planck-Scale Physics with High Energy Neutrinos». En: *Phys. Rev. D* 91, 045009 (2015) (21 de nov. de 2014). DOI: 10.1103/PhysRevD.91.045009. arXiv: 1411.5889v3 [hep-ph].
- [9] Floyd W Stecker. «Search for the footprints of new physics with laboratory and cosmic neutrinos». En: *Modern Physics Letters A* 32.20 (2017), pág. 1730014.
- [10] Floyd Stecker. «Testing Lorentz symmetry using high energy astrophysics observations». En: *Symmetry* 9.10 (2017), pág. 201.
- [11] Maykoll A. Reyes Hung, J. M. Carmona Martínez y J. J. Relancio Martínez. «Indicaciones de nueva física en el espectro de neutrinos cósmicos». En: (2018). URL: <https://zaguan.unizar.es/record/77750>.
- [12] A. Friedman. «Über die Krümmung des Raumes». En: *Zeitschrift für Physik* 10.1 (dic. de 1922), págs. 377-386. ISSN: 0044-3328. DOI: 10.1007/BF01332580. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01332580>.
- [13] C. Patrignani y col. «Review of Particle Physics». En: *Chin. Phys.* C40.10 (2016). DOI: 10.1088/1674-1137/40/10/100001.
- [14] Arthur Geoffrey Walker. «On Milne's Theory of World-Structure». En: *Proceedings of the London Mathematical Society* 2.1 (1937), págs. 90-127.
- [15] J Bernabeu y MC Banuls. «CP and T violation in neutrino oscillations». En: *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements* 87.1-3 (2000), págs. 315-317.
- [16] J. M. Carmona, J. L. Cortes y D. Mazon. «Uncertainties in Constraints from Pair Production on Superluminal Neutrinos». En: *Phys. Rev. D* 85, 113001 (2012) (12 de mar. de 2012). DOI: 10.1103/PhysRevD.85.113001. arXiv: 1203.2585v2 [hep-ph].

- [17] David M Mattingly y col. «Possible cosmogenic neutrino constraints on Planck-scale Lorentz violation». En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2010.02 (2010), pág. 007.
- [18] L. E. Suelves Casaus y J. M. Carmona Martínez. «Posibles efectos de la escala de Planck en la propagación de neutrinos de muy alta energía». En: (2016). URL: <https://zaguan.unizar.es/record/58918/>.

Anexos

A. Identificación de ξ_n y ξ'_n

En este anexo mostramos cómo se ha realizado el análisis del artículo [16], para la identificación de la forma integral de las constantes ξ_n y ξ'_n .

En dicho artículo se realiza el cálculo de las anchuras de desintegración del proceso de VPE para distintos tipos de modificación en la relación de dispersión. Cada escenario es representado por un símbolo notacional: Γ , $\tilde{\Gamma}$, $\bar{\Gamma}$ y $\hat{\Gamma}$. En nuestro caso, nos interesa tratar con el segundo escenario, ya que es el que tiene en cuenta una modificación en la relación de dispersión del tipo: $E(p) = (1 + \epsilon(p))p$, la cual replica la relación de dispersión usada en este trabajo,

$$E^2 - p^2 = m^2 + \frac{p^{2+n}}{\Lambda^n}, \quad (1.1 \text{ revisada})$$

para una elección de epsilon de $\epsilon(p) = p^n/\Lambda^n$.

Como a partir de ahora nos vamos a centrar únicamente en el segundo escenario, para aligerar la notación omitiremos el símbolo notacional y se deberá entender que en todo momento las cantidades calculadas se refieren a dicho caso. De esta manera, en la fórmula número 31 del artículo se obtiene la siguiente expresión para la anchura de desintegración mediante VPE:

$$\Gamma(p) = \frac{G_F^2 p^5}{192\pi^3} \left[(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W^2)^2 \right] \frac{4}{3} \int dx \theta(\epsilon(p) - x\epsilon(xp)) [1 - x^3] [\epsilon(p) - x\epsilon(xp)]^3, \quad (A.1)$$

donde $x = E_1/E_0$ es el cociente entre la energía del neutrino del estado final e inicial, y $\theta(s)$ es la función escalón de Heaviside. Ahora, en el artículo se sustituye el valor de $\epsilon(p) = p^n/\Lambda^n$ obteniendo:

$$\Gamma(p) = \frac{G_F^2 p^5}{192\pi^3} \left[(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W^2)^2 \right] \frac{4}{3} \int dx \theta\left(\frac{p^n}{\Lambda^n}(1 - x^{n+1})\right) [1 - x^3] \left[\frac{p^n}{\Lambda^n}(1 - x^{n+1})\right]^3, \quad (A.2)$$

donde podemos realizar una primera simplificación si nos damos cuenta de que la función escalón es únicamente no nula cuando su argumento es mayor que cero, y esto ocurre cuando:

$$1 - x^{n+1} = 1 - \left(\frac{E_1}{E_0}\right)^{n+1} \geq 0. \quad (A.3)$$

Pero como la energía de la partícula final puede tomar como máximo valor la energía inicial, esta resta siempre será mayor que cero y podemos sustituir directamente $\theta(s) = 1$:

$$\Gamma(p) = \frac{G_F^2 p^5}{192\pi^3} \left[(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W^2)^2 \right] \frac{4}{3} \int dx [1 - x^3] \left[\frac{p^n}{\Lambda^n}(1 - x^{n+1})\right]^3. \quad (A.4)$$

Si ahora extraemos el cociente entre el momento y la escala de nueva física fuera de la integral, obtenemos:

$$\Gamma(p) = \frac{G_F^2 p^5}{192\pi^3} \left[(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W^2)^2 \right] \frac{p^{3n}}{\Lambda^{3n}} \frac{4}{3} \int dx (1-x)^3 (1-x^{1+n})^3, \quad (\text{A.5})$$

ecuación que es directamente comparable con la expresión 52 del artículo, donde aparece la constante ξ_n :

$$\Gamma(p) = \frac{G_F^2 p^5}{192\pi^3} \left[\frac{(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W^2)^2}{192\pi^3} \right] \frac{p^{3n}}{\Lambda^{3n}} \xi_n. \quad (\text{A.6})$$

Mediante una inspección visual, podemos identificar que el valor de ξ_n se debe calcular mediante la siguiente integral:

$$\xi_n = \frac{4}{3} \int_0^1 dx (1-x)^3 (1-x^{n+1})^3, \quad (\text{A.7})$$

que una vez resuelta se puede expresar de forma explícita como la siguiente función de n :

$$\xi_n = 1 - \frac{12}{(n+2)(n+5)} + \frac{6}{(n+3)(2n+3)} - \frac{4}{(3n+4)(3n+7)}. \quad (\text{A.8})$$

Ahora, para la identificación de ξ'_n , continuaremos siguiendo el artículo hasta la deducción de la variación de dp/dt , magnitud proporcional a ξ'_n . En la fórmula 59 del artículo se muestra que esta magnitud se puede calcular a partir de la anchura de desintegración mediante:

$$\frac{dp}{dt} = -p \int_0^1 dx (1-x) \frac{d\Gamma}{dx}. \quad (\text{A.9})$$

Como lo único que depende de x en la anchura de desintegración es la integral (lo demás son constantes), debemos realizar únicamente la derivada de la integral:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dx} &= \frac{G_F^2 p^5}{192\pi^3} \left[\frac{(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W^2)^2}{192\pi^3} \right] \frac{p^{3n}}{\Lambda^{3n}} \frac{d}{dx} \int_0^1 dx (1-x)^3 (1-x^{n+1})^3 \\ &= \frac{G_F^2 p^5}{192\pi^3} \left[\frac{(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W^2)^2}{192\pi^3} \right] \frac{p^{3n}}{\Lambda^{3n}} (1-x)^3 (1-x^{n+1})^3. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Sustituyendo este valor en la relación entre variación del momento respecto del tiempo y la anchura de desintegración (ecuación A.9), obtenemos:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{G_F^2 p^6}{192\pi^3} \left[\frac{(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W^2)^2}{192\pi^3} \right] \frac{p^{3n}}{\Lambda^{3n}} \frac{4}{3} \int_0^1 dx (1-x)^4 (1-x^{n+1})^3. \quad (\text{A.11})$$

Comparando este resultado con la fórmula 65 del artículo, donde aparece la relación de proporcionalidad entre dp/dt y ξ'_n :

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{G_F^2 p^6}{192\pi^3} \left[\frac{(1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W^2)^2}{192\pi^3} \right] \frac{p^{3n}}{\Lambda^{3n}} \xi'_n, \quad (\text{A.12})$$

podemos indentificar que ξ'_n se debe calcular mediante la siguiente integral:

$$\xi'_n = \frac{4}{3} \int_0^1 dx (1-x)^4 (1-x^{n+1})^3, \quad (\text{A.13})$$

que una vez resulta, se puede expresar de forma explícita como la siguiente función de n :

$$\begin{aligned} \xi'_n = \frac{3}{5} & - \frac{24(n+4)}{(n+2)(n+3)(n+5)(n+6)} \\ & + \frac{24(2n+5)}{(2n+3)(2n+4)(2n+6)(2n+7)} - \frac{8(3n+6)}{(3n+4)(3n+5)(3n+7)(3n+8)}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$