Trabajo Fin de Máster

Funciones para Matemáticas Académicas de 3º de E.S.O.

Functions for Academic Mathematics of the 3rd year of E.S.O

Autor

Fco. Javier Sola Palain

Director

JOSÉ MANUEL ANOZ MENÉNDEZ

Facultad de Educación

Año 2019

Índice.

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar.

El objeto matemático a enseñar son funciones, como método de modelización y análisis de situaciones de dependencia entre dos variables.

Se desarrolla para matemáticas académicas de tercero de E.S.O. Los contenidos incluidos en el bloque 4 (funciones) del currículo, según la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, son:

C_1. Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias: análisis de la forma (cualidad)

C_2. Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: análisis gráfico

C_3. Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.

C_4. Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.

C_5. Expresiones de la ecuación de la recta.

C_6. Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.

Estos contenidos se trabajan mediante problemas de relación de conjuntos, distancia en función del tiempo, variación de una magnitud física respecto del tiempo (albedo, temperatura, velocidad, tiempo restante), relaciones entre características de un objetos (capacidad, autonomía, velocidad de crucero, año de fabricación...) y problemas puramente matemáticos (cuadrado de un número, valores que cumplen una condición...)

Las técnicas que se van a mostrar en esta unidad son:

T_1. identificar una función por la definición.

T_2. identificar el dominio y el recorrido por la definición

T_3. interpretar una gráfica

T_4. comparación de funciones en diferentes formatos

T_5. deducir funciones a partir de otras

T_6. identificar su monotonía:

T_6.1 en gráfica , T_6.2 en tablas, T_6.3 en la ecuación de la recta.

T_7. identificar máximos y mínimos

T_8. estimación de gráficas a partir de una función

T_9. identificar discontinuidad: T_9.1 según la definición, T_9.2 regla del lápiz.

T_10. identificar funciones periódicas

T_11. obtener el periodo de una función periódica

T_12. extrapolar una función a puntos fuera del intervalo de su definición

T_13. dibujar la gráfica conocido: T13_1 enunciado; T13_2 tabla; t13_3 expresión analítica

T_14. obtener información de los parámetros de una expresión analítica:

T_14.1 lineal (pendiente, ordenada en el origen);

T_14.2 cuadrática (cóncava/convexa, vértice)

Los estándares aplicables según dicho currículo son:

Est.MAAC.4.1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.

Est.MAAC.4.1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto.

Est.MAAC.4.1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.

Est.MAAC.4.1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente.

Est.MAAC.4.2.1. Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (ecuación punto pendiente, general, explícita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente.

Est.MAAC.4.2.2. Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa.

Est.MAAC.4.2.3. Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.

Est.MAAC.4.3.1. Calcula los elementos característicos de una función polinómica de grado dos y la representa gráficamente.

Est.MAAC.4.3.2. Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático.

Los libros no suelen presentar una justificación explícita a la enseñanza del objeto función. En lugar de ello, presentan el objeto de una u otra forma y dejan que los alumnos la encuentren en los ejemplos presentados, como herramienta de análisis de situaciones. Por ejemplo en el libro de Santillana de 2015 (Gaztelu, González, Grence, Machin, Perez, Prida, Sanchez, 2015), la justificación es una pequeña gráfica en las hojas iniciales, donde se repasa lo que ya debe saber el alumno de cursos anteriores, que muestra que se puede obtener información de la función.

El libro de texto de 3º de Educación Secundaria Obligatoria del Grupo Anaya (Colera, García, Gaztelu y Oliveira 1998, pág. 224), resume esta justificación:

"*Las relaciones más o menos complejas que se dan entre ellas* [las funciones] *se aprecian con toda sencillez y claridad cuando son representadas mediante sus gráficas.*"

La coletilla "*...mediante sus gráficas*" es propia de este texto, que presenta el objeto como un método gráfico de representar y obtener información de la relación entre dos variables. En otros, como el citado antes (Gaztelu et al., 2015, pág. 222) el objeto se define como relación de una magnitud o variable numérica dependiente de otra, siendo la parte gráfica una herramienta más a utilizar.

a. Campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente.

Según esto, las funciones en secundaria se introducen como método gráfico de análisis, o como relación de una magnitud o variable numérica dependiente de otra.

En ambos casos los campos de problemas son similares. Los más utilizados son de pérdidas o ganancias monetarias en función de otra variable (beneficios función de ventas, costes por tiempo, por volumen, etc.), de desplazamiento como función del tiempo (altura, distancia recorrida, posición relativa, etc.), y de variables físicas en función del tiempo (cambio de temperatura o presión, volumen de aire) o la posición (presión/ profundidad, presión/altura). También aparecen problemas geométricos, de la relación entre dos magnitudes físicas (lado/volumen), características físicas o médicas de las personas (altura, edad, peso, medidas de partes del cuerpo), y, sobre todo para ejercicios, de relaciones matemáticas puras (como expresión algebraica, enunciado, tabla o gráfica).

El tipo de introducción influye en las técnicas enseñadas. En el primer método (Colera et al., 1998), priman las técnicas de análisis gráfico. Por ejemplo, se introduce el tema mediante gráficas que relacionan el número de vasos vertidos en diversos recipientes, con la altura que alcanza el agua en el mismo, mediante un ejemplo resuelto y dos ejercicios. Los alumnos, vista una gráfica y con una introducción básica, pueden aplicar su intuición al comportamiento de una variable con el cambio de otra. Este ejemplo aparece en *El lenguaje de funciones y gráficas* (M.E.C., Ministerio de Educación y Ciencia, 1990, pág. 32 a 35 y 65 a 68) mucho más desarrollado.

El segundo método (Gaztelu et al., 2015), tras la definición se indican las formas de expresar una función que pueden encontrar los alumnos, por orden: *enunciado*, *ecuación*, *tabla de valores* y *gráfica*. Desde el principio, los alumnos relacionan funciones con varias de sus representaciones, desligandose de la relación función=gráfica implícita en los otros textos comentados.

Las técnicas que exponen son:

- reconocer función, aplicando la definición, como relación unívoca;
- dibujar la gráfica, conocidos los ejes cartesianos, sus escalas y puntos de la función, o desde el enunciado, obteniendo su expresión analítica y/o una tabla de valores, dibujar varios puntos, y la gráfica a partir de estos;
- interpretación cualitativa de las gráficas: estudiar su forma para explicar el comportamiento de la variable dependiente con el cambio de la variable independiente, de forma contextualizada; resumida en "*mirar su gráfica de izquierda a derecha, es decir, hemos de ver cómo varía la y cuando x aumenta*" (Colera et al. 1998, pág. 230);
- calcular su dominio y recorrido, gráficamente, utilizando para los ejemplos y ejercicios funciones que cumplen la definición de continuidad utilizada, referida

en el siguiente punto, o a partir de su expresión algebraica, por su definición: "*conjunto de todos los valores que toma la variable...*" independiente o dependiente, según el caso (Gaztelu et al., 2015);

- estudiar su continuidad, de forma gráfica, habitualmente se dice que es continua si "*su gráfica se puede hacer sin levantar el lápiz del papel*" (Colera et al., 1998, pág. 233);
- localización de los máximos y mínimos, estudiando la monotonía de la función;
- identificar funciones periódicas por su trazado;
- extrapolación del comportamiento de una función periódica;
- aplicación de técnicas algebraicas ya conocidas a su expresión algebraica;
- uso de funciones implementadas en calculadoras ($\frac{1}{x}$, x^2 …);
- comparación de funciones, gráficamente ó comparando alguna de sus características.

b. Consecuencias de dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno.

Aunque los ejemplos utilizados y los ejercicios son similares, hay importantes diferencias en la forma de presentar el objeto matemático entre los textos consultados. Los textos más antiguos se centran en la parte gráfica de las funciones, acorde con las primeras etapas del desarrollo del objeto, cuando el estudio de las funciones se centraba en definir curvas mediante expresiones algebraicas (Sastre, P., Rey, G., & Boubée, C., 2008). La definición en el texto más moderno (Gaztelu et al., 2015) se acerca a la aceptada actualmente, relación entre dos conjuntos, aunque restringe las funciones a aquellas expresables de forma numérica.

Los ejercicios de los textos del 98, al centrarse más en las gráficas de las funciones, trabajan la intuición del alumno, obtener información de la forma de la gráfica, mientras que el texto del 2015 da más peso a la parte algebraica.

La primera aproximación a las funciones (Colera et al., 1998) genera en el alumno la identificación de estas con el estudio visual de una gráfica, lo cual ayuda a la interpretación de las mismas, pero dificulta que asimilen el análisis más riguroso en cursos posteriores.

El texto más moderno (Gaztelu et al., 2015) da mayor énfasis al aspecto algebraico y al aprendizaje de técnicas de resolución. Este enfoque prepara al alumno para la forma de abordar el concepto de función que se enseña en cursos posteriores, pero conlleva el riesgo de caer en la mera aplicación de dichas técnicas, creando en el alumno la idea de función como otro tipo de problema algebraico y no como una herramienta de análisis.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno.

Los alumnos van a trabajar funciones mediante representaciones gráficas, conjuntos de elementos, álgebra y técnicas asociadas a estos. Se espera que conozcan y sepan trabajar con ejes cartesianos, tablas de datos y álgebra. Las técnicas que se espera que conozcan son:

P_1. escribir tablas de datos a partir de un enunciado;

P_2. dibujar puntos en un diagrama cartesiano:
- P_2.1 desde un enunciado;
- P_2.2 desde una tabla;

P_3. comparación de datos en diferentes formatos;

P_4. identificar discontinuidades: regla del lápiz;

P_5. resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado.

Los textos consultados para desarrollar esta unidad dan por hecho que los alumnos a este nivel no tienen dificultades con el uso del álgebra en la resolución de problemas. Implícita (Colera et al., 1998) o explícitamente (Gaztelu et al., 2015, pág. 220), todos suponen conocido el sistema cartesiano de coordenadas y varias de sus técnicas asociadas, como el uso de tablas de valores y hallar puntos en una gráfica.

En uno de los libros (Gaztelu et al., 2015, pág. 220), los autores indican que el alumno debe saber trabajar con intervalos en la recta real, necesario para entender alguna de las técnicas que presentan. El currículo de matemáticas aplicadas de tercero no exige este conocimiento hasta el siguiente curso. En la actividad 2 de esta unidad se presentan implícitamente los intervalos, sin definirlos y sin exigir al alumno que sepa trabajar con ellos.

Atendiendo a los currículos de cursos anteriores, los ejes cartesianos, las proporciones y el álgebra se introducen desde primero de E.S.O., por lo que el alumno que ha superado la asignatura de matemáticas hasta el presente curso tiene los conocimientos mínimos necesarios para abordar esta unidad.

La presente unidad didáctica está pensada para la segunda evaluación, tras impartir el bloque 2 (números y álgebra) del currículo del presente curso, estando los alumnos familiarizados con la resolución de ecuaciones. Por tanto, su desempeño algebraico ya estará evaluado.

Respecto a su manejo de los ejes cartesianos, la representación de puntos y curvas, supuestamente dados en cursos anteriores, se evaluarán mediante ejercicios sencillos al inicio de las primeras actividades en las que se vayan a utilizar.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático.

Las funciones son un objeto matemático con entidad propia, que adquiere sentido como herramienta de análisis de la dependencia entre dos variables, ya sea sobre ejemplos concretos o sobre modelos matemáticos sin contexto real.

En esta unidad, la primera aproximación al concepto (ver Actividad 1) pretende incidir en función como relación unívoca, tratando de crear en el alumno la concepción de función como un objeto matemático diferenciado.

A partir de esta introducción, se pasa a trabajar el objeto de una forma más tradicional, como relación entre magnitudes, mostrando al alumno su utilidad para el análisis de situaciones, y su relación con otros objetos matemáticos que ya conocen.

Históricamente las funciones surgieron como herramientas con las que describir fenómenos físicos, como los trabajos sobre el movimiento de Galileo, o buscando un método de "*liberar a la Geometría del exceso de figuras*" y "*darle sentido o significado al Álgebra por medio de la Geometría*", aun antes de ser identificadas como funciones (Sastre, Rey, Boubée, 2008, pág. 145 y 146). En este contexto lo que se buscaba es el estudio de las características de las funciones y obtener su expresión algebraica, buscando las "leyes" que describieran las diferentes geometrías y fenómenos físicos. Actualmente, se definen como relaciones o correspondencias entre elementos de dos conjuntos, sin restringir el tipo de estos, siempre que esta sea unívoca.

Por tanto, el concepto de función como relación, con el que se introduce en esta unidad, se aleja de las razones históricas que originaron el objeto. Mientras que el resto de la misma se aproxima a las razones por las que surgió, mostrando diferentes aspectos del mismo mediante relaciones físicas o matemáticas.

a. Problemas que muestran distintos aspectos de las funciones.

Problema 1: Función como relación entre variables de conjuntos.

"*¿Podéis identificar alguna función en el siguiente problema?*"

Los personajes que puedes crear en un juego son los siguientes:

Guerrero, *Tanque*, *Sanador*, *Mago*, *Ladrón*, *Bardo*

A cada clase tiene definida una sola habilidad defensiva, según la tabla de la derecha.

Clase	H. Defensiva
Guerrero	Escudo
Tanque	Escudo
Sanador	Bastón
Mago	Bastón
Ladrón	Esquivar
Bardo	Esquivar

Durante el juego, ¿puedes saber, sin lugar a dudas, que habilidad tendrá un personaje conociendo su clase?. ¿Y de qué clase es cada personaje conociendo la habilidad que está usando?

Supongamos ahora que el juego asigna a cada tipo de personaje una habilidad ofensiva: al *Guerrero* y *Tanque*, *Espada*, al *Sanador*, *Bastón*, al *Mago Proyectar*, al *Ladrón*, *Garrote* y al *Bardo*, *Daga*.

¿Puedes saber, sin lugar a dudas, que habilidad defensiva puede usar un personaje conocido la habilidad ofensiva que usa?. ¿Y su habilidad ofensiva conocida la defensiva?

Este problema sirve de introducción a la unidad. Se espera que los alumnos tengan conocimiento de funciones por cursos anteriores. Incide en la idea de función como correspondencia entre conjuntos, frente al que se usa habitualmente, representación gráfica de funciones numéricas. A partir de este, y con las funciones ejemplo que hayan dado los alumnos al introducir el tema (ver actividad 1), se dan las definiciones que tienen que conocer.

Problema 2: Función como representación de un fenómeno físico. Diferentes formas de representación.

Ana, Carlos y Noa, que no se conocen, hicieron este verano una viaje en autobús partiendo desde un mismo pueblo.

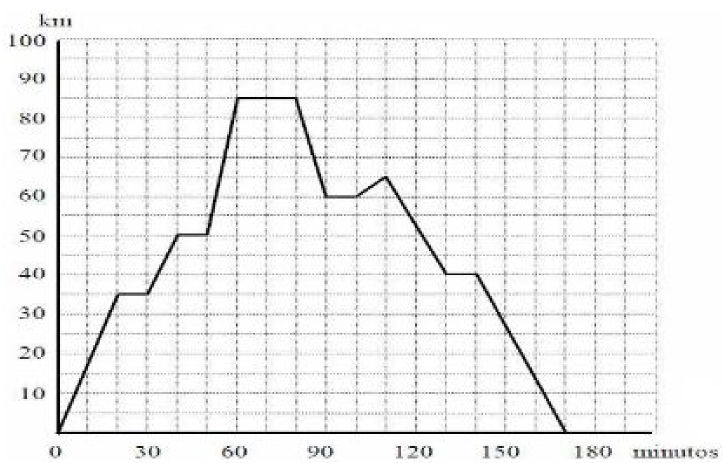
Ana describió su viaje:

- *Viajamos a velocidad constante unos treinta y cinco kilómetros durante 20 minutos hasta parar en el primer pueblo*
- *Tras unos diez minutos, volvimos a ponernos en marcha.*
- *La siguiente parada fué quince kilómetros después, y volvimos a parar 10 minutos, como en el pueblo anterior. Cuando volvimos a ponernos en marcha, saliendo por un desvío de la carretera principal, mi cronómetro marcaba 50 minutos.*
- *El autobús hizo una parada de veinte minutos en un área de descanso. Esta vez no se subió ni bajo nadie. Ya habíamos recorrido 85 kilómetros.*
- *Había pasado una hora y veinte desde que salí cuando volvimos a ponernos en marcha, regresando por el desvío hacia la carretera principal.*
- *En diez minutos, llegué a mi destino y me bajé. Si hubiera parado aquí, en lugar de ir hasta el área de descanso, se habría ahorrado al menos 50 kilómetros y yo habría llegado antes.*

Carlos anotó la distancia recorrida cada cierto tiempo, hasta que se bajó:

Distancia (Km)	0	35	35	50	50	85	85	65	40
Tiempo (minutos)	0	20	30	40	50	60	80	90	110

Y una aplicación del móvil de Noa realizó un gráfico con la distancia hasta el punto de salida en función del tiempo de viaje:



Primera parte:

a) Según los datos del enunciado

i) ¿quien llegó más lejos?; ii) ¿quien se bajó antes?;

iii) ¿quien finalizó su viaje más cerca del pueblo inicial?

b) ¿Los tres describen el mismo viaje? Resulta que todos fueron en el mismo autobús ¿hay que corregir alguna de las representaciones?, si es así, cámbiala para que coincida con el resto.

c) ¿Quién es más probable que sea el conductor?, ¿por qué?

d) Observa la gráfica de Noa, ¿en qué parte el autobús se aleja del pueblo y en qué parte se acerca?, ¿puedes explicar como debe ser la gráfica para que el valor de la variable dependiente crezca?, ¿y para qué decrezca? ¿Como es la gráfica de una función que ni crece, ni decrece? "*¿Hay alguna forma de ver, de un solo vistazo, dónde va mas rápido el autobús?*"

e) Observa la tabla de Carlos, razona dos formas de descubrir en qué instante se aleja del pueblo, en cuál se acerca y en cuál permanece a la misma distancia.

Segunda parte:

f) Realiza una gráfica de la velocidad del autobús en función del tiempo a lo largo del recorrido de Noa.

g) Ahora supón que el autobús tarda unos 5 minutos en acelerar y en frenar, de forma constante. Dibuja aproximadamente como varían la gráfica de Noa.

Este problema aparece en las actividades 2 y 3. La primera parte constituye la actividad 2, sirve para evaluar los conocimientos del alumno, trabaja tres diferentes formas de expresar una función, como obtener información de las mismas y como comparar dichas expresiones. La segunda parte sirve de introducción a la actividad 3, donde se estudia otra forma de definir la función, la expresión analítica.

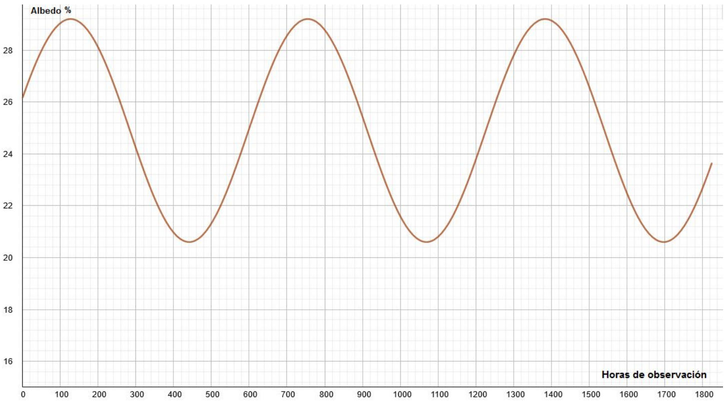
Problema 3: Continuidad de una función.

María está jugando a dirigir una granja virtual en su tablet. Construye una bomba mejorada para extraer agua, que genera 7.32 puntos de agua por segundo. A los veinte minutos de juego, su madre le recuerda que tiene estudiar y hacer los deberes. Pausa el juego durante una hora, continuando en el mismo instante en que lo dejó.

La generación de puntos de agua ¿es una función contínua?

Este es un problema mal planteado a propósito, con el que discutir con los alumnos el sentido de tratar de estudiar la continuidad donde la función no existe.

Problema 4: Funciones periódicas, periodo y extrapolación de funciones.



Un astrónomo está investigando un cuerpo celeste cercano, y observa que su albedo, la luz que refleja, no es siempre la misma. Con los datos de los últimos meses, confecciona la gráfica de la derecha. Considerando el albedo como función del tiempo:

a) ¿cuál es su recorrido?

b) ¿Existe algún máximo o algún mínimo?

c) ¿Hay alguna relación entre los máximos?

d) ¿Y entre los mínimos?

e) ¿Ocurre lo mismo con algún otro punto?

f) ¿Se te ocurre alguna razón por la cual el cuerpo celeste pueda tener este comportamiento?

g) Si no hay ninguna perturbación externa inesperada, ¿como podemos esperar que se comporte el cuerpo en el futuro?

Este problema vuelve a presentar un fenómeno físico, y se usa en la actividad 4 para introducir las funciones periódicas.

Problema 5: Funciones discretas.

Hacer la gráfica de la función que asigna un 1 a los números naturales par y un 0 a los números naturales impar. ¿Es una función contínua?

Este problema presenta un tipo diferente de funciones, las sucesiones, y pretende enseñar al alumno la importancia de conocer las condiciones en las que puede utilizar las técnicas para que estas sean válidas.

b. Implementación en el aula.

Actividad 1: Función como relación entre variables de conjuntos.

La primera actividad a realizar en la unidad es un recordatorio de lo dado en funciones hasta la fecha. La primera pregunta es para toda la clase:

"*Se que en años anteriores habéis dado funciones, ¿que es una función?*"

Lo más habitual es que los alumnos relacionen funciones con gráficas, tablas, ejes cartesianos, rectas, proporcionalidad o con ecuaciones, como suele presentarse en los libros de texto. Invita a varios a escribir en la pizarra ejemplos de funciones.

Tras ello, se reparte o proyecta el Problema 1, con la siguiente pregunta:

"*¿Podéis identificar alguna función en el siguiente problema?*"

Si los alumnos relacionan funciones con gráficas, la expresión analítica, problemas de proporcionalidad o similares, se espera que no sepan identificar la función. Pueden decir que lo es porque está en forma de tabla, sin dar otra explicación. Aquellos que identifiquen función con hacer una operación, como la tecla de una calculadora, pueden responder que es la operación que da la habilidad al poner la clase, la contraria o las dos. Si la clase es capaz de identificar la función y explicar porqué lo es, los alumnos tienen un nivel de conocimiento superior al esperado.

Tras el debate se deja cinco minutos para hacer la primera parte del ejercicio en su cuaderno. El profesor deberá pasar por las mesas a ver las posibles respuestas y estrategias utilizadas, e invitar a los alumnos a responder para toda la clase.

Se espera que estos no tengan problemas en ver que a cada clase de personaje le corresponde una sola habilidad, vista la tabla anterior, mientras que a cada habilidad le corresponde dos clases de personaje, como muestra la tabla de la derecha.

H. Defensiva	Clase
Escudo	Guerrero Tanque
Bastón	Sanador Mago
Esquivar	Ladrón Bardo

Se deja otros cinco minutos para que resuelvan la segunda parte y ver qué estrategias utilizan. Una forma de hacerlo es utilizando tablas:

H. Ofensiva	Clase	H.Defensiva
Espada	Guerrero, Tanque	Escudo
Bastón	Sanador	Bastón
Proyectar	Mago	Bastón
Garrote	Ladrón	Esquivar
Daga	Bardo	Esquivar

H. Defensiva	Clase	H. Ofensiva
Escudo	Guerrero, Tanque	Espada
Bastón	Sanador	Bastón
	Mago	Proyectar
Esquivar	Ladrón	Garrote
	Bardo	Daga

Con ellas se observa que conocida la habilidad defensiva permite saber sin duda que habilidad ofensiva va a usar, pero no al contrario.

Se continúa la actividad dando la primera definición:

"*La definición de función que hizo un matemático llamado Dirichlet se resume diciendo: Función es toda relación o correspondencia que asigna a un elemento de un conjunto un único elemento de otro conjunto.*

Llamemos al primer conjunto de partida, conjunto inicial o dominio, y al segundo conjunto final, conjunto imagen o recorrido.

Según estas definiciones, ¿alguna de las relaciones anteriores son funciones?".

Si el problema del ejemplo se ha hecho correctamente, en la respuesta se ve cual de las relaciones anteriores asigna un valor a cada elemento y cual asigna dos. Así, las correspondencias *H.Defensiva(Clase)* y *H.Defensiva(H.Ofensiva)* lo son, porque asignan a cada elemento del conjunto inicial un único elemento del otro conjunto, mientras que las otras no lo son. Quizás haya que explicar más detalladamente cual es el conjunto de partida y cuál el final.

A continuación, preguntar por los ejemplos que escribieron en la pizarra al iniciar la clase.

A partir de este problema, se introducen en pizarra otras definiciones a utilizar en la unidad.

- función, su dominio y su recorrido (definidos más arriba);
- variable independiente, la que toma valores del conjunto inicial, del dominio;
- variable dependiente, aquella que se obtiene al aplicar la función a la variable independiente, cuyos valores pertenecen al recorrido de la función;
- imagen de un elemento del conjunto inicial: el elemento del conjunto final que obtenemos al aplicar la función a dicho elemento;

- antiimagen de un elemento del conjunto final, el o los elementos del conjunto inicial a los que, aplicada la función, dan como resultado dicho elemento del conjunto final.

Se pide entonces a los alumnos que indiquen el dominio y recorrido de varias de las funciones vistas en esta actividad. *H.Defensiva(Clase)*, dominio : *Guerrero*, *Tanque*, *Sanador*, *Mago*, *Ladrón*, *Bardo*; recorrido: *Escudo*, *Bastón*, *Esquivar*. *H.Defensiva(H.Ofensiva)*, dominio: *Espada*, *Bastón*, *Proyectar*, *Garrote*, *Daga*; recorrido: *Escudo*, *Bastón*, *Esquivar*.

Este ejercicio incide en la idea de función como correspondencia entre conjuntos. Está elegido deliberadamente como ejemplo no numérico y en el que la representación gráfica no aporta información extra. Iniciar el estudio de las funciones utilizando un ejemplo fuera de los dos ámbitos comúnmente utilizados, pretende evitar en los alumnos la idea de función como otra parte del quehacer algebraico o la identificación de gráfica exclusivamente como función.

Actividad 2: Funciones numéricas.

Se presenta a los alumnos la primera parte del problema 2, recordándoles que en años anteriores han trabajado con funciones como relación entre cantidades. Aunque los dos primeros apartados pueden hacerse en casa, el cuerpo del problema lo van a realizar en clase, pudiendo trabajar en pequeños grupos si así lo desean. La posibilidad de cambiarse de sitio o solo poder trabajar con sus compañeros cercanos dependerá de como se organice la clase. El profesor no ha de indicar nada sobre la solución, salvo que los alumnos no sepan continuar. Este problema sirve para evaluar su desempeño en la interpretación de diferentes representaciones de una función, y para introducir nuevos conceptos. Es largo, pensado para que forme parte dos actividades, ocupando de dos a tres sesiones de una hora. La segunda parte está pensada para introducir la actividad 3.

Si no se han mandado como deberes entre sesiones, para empezar, se dejan cinco minutos para leer el enunciado y realizar los dos primeros apartados. Se pedirá que digan lo contestado por orden de lista, empezando por el siguiente al último que se preguntó. Tras cada respuesta, que levanten la mano los que coinciden, si está mal, se pregunta a otro alumno, de los que no ha levantado la mano, porque ha contestado otra cosa, y se da la solución:

i) ¿quien llegó más lejos? Los tres llegan a los 85 kilómetros del pueblo. Es posible que algún alumno relacione llegar más lejos con el punto final del recorrido de cada uno, en lugar de interpretar los resultados.

ii) ¿Quien se bajó antes? Ana se bajó antes. Recopilando datos, Ana se bajó tras 90 minutos (hora y veinte hasta abandonar la penúltima parada más diez minutos hasta su parada), Carlos hizo su última anotación a los 110 minutos y la gráfica de Noa acaba a los 170 minutos.

iii) ¿Quien finalizó su viaje más cerca del pueblo inicial? Noa acaba en el pueblo inicial (a distancia cero), mientras que los demás están a mayor distancia. Es posible que algún alumno interprete mal la gráfica y señale aquel que se ha bajado antes.

b) ¿Los tres describen el mismo viaje? Corregir la representación que no coincide.

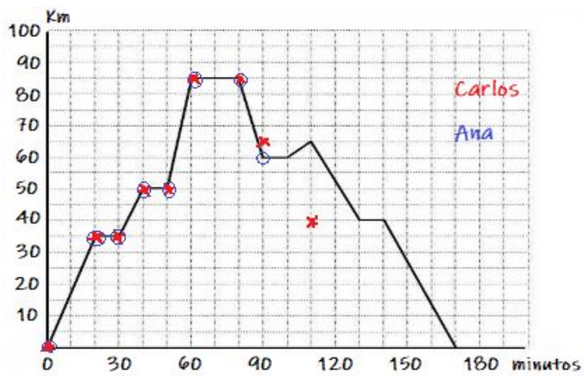
Lo que describe Ana:

- Primera parada a los 20 minutos y 35 Km: punto $(20,35)$
- Vuelven a circular tras 10 minutos: $(30,35)$.
- Paran 15 Km después, el mismo tiempo que en la parada anterior y salen a los 50 minutos de empezar: $(40,50)$ y $(50,50)$.
- Parada de veinte minutos a 85 kilómetros, se ponen en movimiento a los 80 minutos (una hora y veinte) de tiempo total de viaje: $(60,85)$ y $(80,85)$.
- Pasan 10 minutos, el desvío hacia el área de descanso y la vuelta a la carretera principal es cincuenta kilómetros más largo que ir diréctamente al pueblo, por lo que el desvío es de veinticinco kilómetros: $(90,60)$.

Utilizando el mismo formato de tabla que Carlos:

Distancia (Km)	0	35	35	50	50	85	85	60
Tiempo (minutos)	0	20	30	40	50	60	80	90

La gráfica de la derecha compara las tres descripciones.



Por lo tanto Carlos describe otro trayecto. Para que fuera el mismo debe, o bajarse a los 110 minutos, o a los 40 Km. Como a los 110 minutos del recorrido de los demás no hay parada, se completa hasta los 40 Km, quedando:

Distancia (Km)	0	35	35	50	50	85	85	60	60	65	40
Tiempo (minutos)	0	20	30	40	50	60	80	90	100	110	130

Según el currículo, los alumnos ya han trabajado antes con tablas, descripciones y gráficas, por lo que deberían saber empezar. Es interesante recopilar sus estrategias de trabajo. Se espera que dibujen puntos sobre la gráfica de Noa a partir de otros datos, o calculen los puntos para comparar con la tabla de Carlos. Los alumnos pueden tener dificultades con la descripción de Ana, varias de las frases requieren de interpretación, o de otras frases, para poder hallar un punto con el que comparar con las otras descripciones. En ese caso, el profesor los puede encaminar en la dirección correcta.

c) Quién es más probable que sea el conductor y por qué. El que realiza todo el trayecto, no abandona el vehículo y vuelve al punto de partida es Noa, por lo que puede ser el conductor. Esta pregunta, fuera del análisis de las características de la función, ayuda al alumno a entender esta como representación de una situación real, no solo como colección de datos. Se hará tras dar la solución de la anterior, preguntando al siguiente alumno de la lista y animando a los demás a ayudar.

d) Pregunta a los alumnos por el crecimiento y decrecimiento de la función, en la gráfica. Se espera que la mayor parte de los alumnos no tengan problemas en identificar que la función crece cuando su trazo se realiza hacia arriba en el sentido en que el tiempo crece, de izquierda a derecha, decrece cuando el trazo baja, y es constante cuando el trazo es paralelo al eje de abscisas. Los alumnos pueden no incluir en las respuestas alguna de las condiciones para que su técnica sea válida. Por ejemplo "*crece cuando sube hacia arriba*" se puede rebatir dibujando una línea subiendo hacia la izquierda y comparándola con la gráfica. Igualmente, se espera que definan función constante como aquella en la que el valor de la variable dependiente es el mismo para todos los valores de la variable independiente u otra descripción similar.

Tras ello, hacer la última pregunta: "*¿hay alguna forma de ver, de un solo vistazo, dónde va mas rápido el autobús?*". Se espera que relacionen velocidad mayor con mayor desplazamiento en función del tiempo, en la gráfica, mayor ángulo con el eje de abscisas.

e) Pregunta a los alumnos por el crecimiento y decrecimiento de la función, en forma de tabla. Los alumnos ya saben indicar puntos en ejes cartesianos partiendo de una, por lo que la primera técnica que pueden sugerir es dibujar la gráfica y aplicar la técnica anterior. Por ello se pide un segundo método. Se espera que trabajen con la diferencia entre valores contiguos, indicando si la variable independiente es mayor menor o igual cuando la variable dependiente crece. Igual que la anterior, hay que encaminar sus respuestas a que trabajen con las dos variables, evitando frases del tipo "*es creciente si la siguiente casilla es más grande*" . Si los datos se presentan desordenados, con esta definición se puede cometer el error de tomar, literalmente, el valor de la siguiente casilla, en lugar del correspondiente al valor inmediatamente superior de la variable independiente.

Con estas dos últimas preguntas preguntas, d) y e), introducimos de manera natural el crecimiento y decrecimiento de la función, pidiendo a los alumnos que sean ellos los que descubran sus propias técnicas para identificarlos, con la función expresada como gráfica y como tabla. También aparece de manera natural el intervalo en el dominio, como aquellos valores para los que la función cumple que es creciente o decreciente.

Para finalizar estos dos apartados, hay que guiar a los alumnos para que identifiquen que es un máximo y un mínimo, por ejemplo preguntando qué ocurre allí donde la función cambia el sentido de su crecimiento. En la gráfica hay un valor máximo de la variable dependiente, en 85 y un máximo relativo en 65 Se puede preguntar qué ocurriría si la función estuviera "boca abajo", para que identifiquen los mínimos, para terminar preguntando si la gráfica de Noa tiene mínimos.

Aquí acaba la actividad 2, se ha de recopilar las ideas de los alumnos e institucionalizar la definición de crecimiento y las técnicas a utilizar. Aquí, dado que ya están familiarizados con la notación algebraica, se puede añadir a la parte descriptiva de la técnica expresiones con notación matemática. Es una forma natural de que se habitúen a la notación que encontrarán si continúan con estudios relacionados con esta materia. Por ejemplo:

"*Una función es creciente en un intervalo si cumple siempre que, tomados dos valores cualesquiera diferentes de la variable independiente en dicho intervalo,* x_1 *y*

x_2*, si uno es mayor que otro,* $x_1 > x_2$*, sus imágenes correspondientes también lo son,* $f(x_1) > f(x_2)$.”

En esta parte del problema hay que recordar o introducir los siguientes conceptos:

- ejes cartesianos
  - eje de coordenadas (y ó $f(x)$)
  - eje de abscisas, usualmente x
  - dibujar a partir de una descripción
  - dibujar a partir de una tabla de datos
- función creciente, decreciente y constante
- intervalo (de manera informal)
- máximo y mínimo de una función.

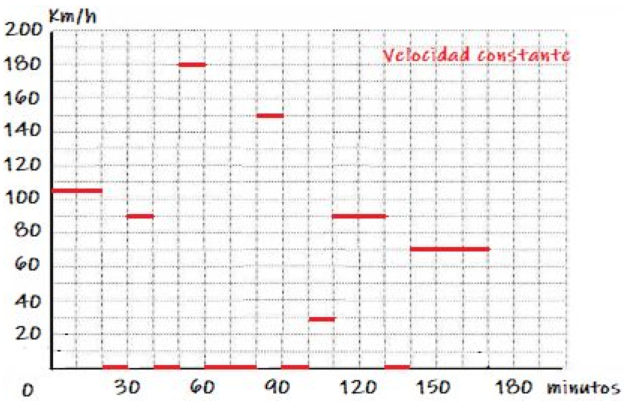
Actividad 3: La expresión analítica.

Las segunda parte del problema sirve de introducción a la actividad 3.

La respuesta al apartado f) es un reto para los alumnos. Aún no se ha dado la expresión analítica, ni la relación entre las ecuaciones del movimiento a velocidad constante que dan en física, y las funciones de primer grado. Deja cinco minutos para que lo piensen. Si ningún alumno sabe como trabajar, pregunta por la fórmula de la velocidad y si ven alguna relación con el problema. Por último, indicar que la función define una distancia y un tiempo entre cada trayecto, de la que pueden deducir una velocidad aplicando la fórmula.

f) Todas las trayectorias son rectilíneas, por lo tanto de velocidad constante en cada tramo. Pueden representarlos mediante gráfica o texto:

“*Va a 105 Km/h desde la salida hasta los 20 minutos, a 90 Km/h entre los 30 y los 40 minutos y los 110 y 130 minutos, a 180 Km/h entre los 50 y los 60 minutos, a 150 Km/h entre los 80 y 90 minutos, a 30 entre los 100 y 110 minutos, a 80 Km/h desde los 140 Km/h hasta terminar el viaje a los 170 minutos, estando parado el resto del tiempo.*”



Representarlo mediante una tabla presenta problemas. Con lo que los alumnos conocen, tienen que dar dos valores a un mismo punto para poder definir la velocidad constante en el intervalo. Si no intentan crear la tabla y nadie se da cuenta, se les pregunta qué valor tiene la función en el instante que cambia la velocidad, por ejemplo a los 60 minutos y por qué. Esto sirve de introducción informal a los intervalos, indicando que trabajarán con ellos en cursos superiores.

La siguiente pregunta es si esa velocidad es constante para todo un trayecto. Puede surgir de los alumnos o, sino, la debe plantear el profesor. Propón a los alumnos que lo piensen para más adelante y sigue con la actividad.

Para continuar, presenta la expresión analítica mediante clase expositiva, que debe incluir los puntos:

- es otra forma de definir una función.
- ejemplos, sólo de las expresiones, sin presentar gráficas, incluir los que hayan dado los alumnos ($y = x^2$, $y = x + 2$...). Aquí conviene recordar la definición.
- Descartes fue uno de los matemáticos que sentaron las bases de las funciones; a él le debemos el sistema de ejes cartesianos como lo conocemos ahora; Buscaba expresar las curvas en forma algebraica. Como material extra, se puede buscar referencias a las acusaciones de plagio que tuvo en su época y la diferencia entre basarse y copiar.
- Un debate corto a partir de la pregunta: "*¿Veis alguna ventaja a expresar una curva mediante su expresión analítica?*" cuya conclusión debería ser: "*con una expresión analítica o algebraica, podemos definir todos los puntos que queramos, toda la variable independiente imagen de cualquier variable dependiente válida. Lo que es lo mismo, puedo sacar una tabla de valores todo lo grande que quiera.*".

Tras esto, se propone el ejercicio 5 (ver capítulo F).

Con las soluciones de este aun en la pizarra, se explica que una función de primer grado tiene como representación gráfica una recta, y como representación algebraica $y = m \cdot x + b$, una de las representaciones de la ecuación de la recta, explicando que hay más tipos de expresiones que darán en cursos posteriores.

Con la corrección del ejercicio 5 delante, se recuerda los sistemas de dos ecuaciones de primer grado. Si una ecuación es una recta, la otra es la otra recta, la solución está en donde coinciden ambas, en la intersección. Se puede enlazar con con proporciones, directa e inversa, y con los motivos que tenían en época de Descartes para buscar la expresión analítica, encontrar soluciones más exactas.

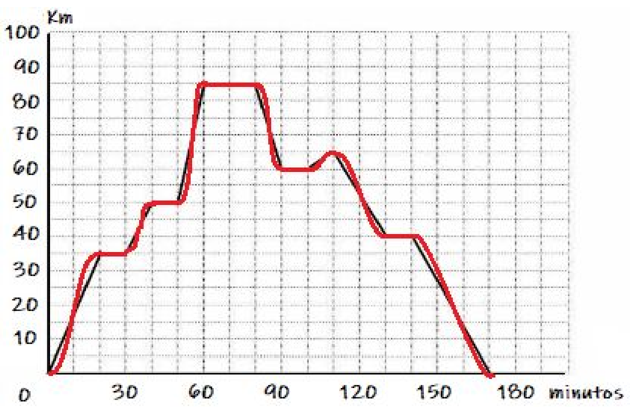
Se definen: expresión analítica, ecuación de la recta, función de primer grado, pendiente, término independiente u ordenada en el origen, y se institucionalizan técnicas de dibujo y análisis de la expresión analítica de una función de primer grado.

Se retoma la solución del apartado f) del problema 2, la gráfica del desplazamiento es una recta, por lo tanto lo rige una función de primer grado, como la fórmula de la velocidad, llegando a la solución expuesta más arriba.

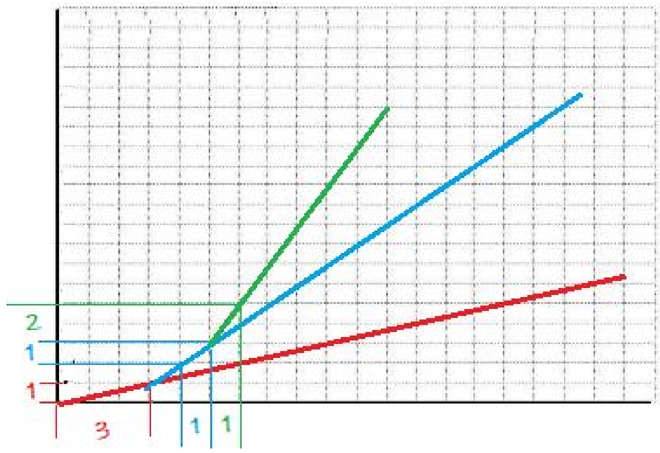
Los alumnos pueden argumentar que la gráfica de la velocidad no es realista, pero es la que se deduce de la del desplazamiento de Noa. Si no lo dicen ellos, debe ser el profesor el que lo haga. Se ha de comentar que, estando en clase de matemáticas, debemos aplicar reglas que nos lleven a un resultado matemáticamente correcto. Posteriormente se comprueba si el resultado tiene o no sentido. El problema 2 es un modelo simplificado de algo mucho más complejo, que describe correctamente unas situaciones, y mal otras, algo que encontraran a lo largo de sus estudios y su vida laboral.

Este argumento sirve de excusa para proponer el apartado g) del problema 2. Se recomienda no presentarlo al inicio de la actividad, sino hacer que "surja espontáneamente" tras discutir si la gráfica de la velocidad es realista o no.

g) En este caso no tienen valores para trabajar, han de dibujar aproximadamente lo que se pide. Como dicen que tarda cinco minutos, las zona curva de aceleración y deceleración no deberán ocupar más de medio cuadrado. Si se presentan dudas, o los alumnos dan por supuesto que la forma es la de la solución, deberán explicar su idea y dar razones, para la forma curva y para el sentido dado.



Una posible explicación gráfica es ir encadenando trayectorias a velocidad constante, como muestra la gráfica siguiente. En un instante dado, el autobús se



desplaza despacio, moviéndose a un cuadrado de desplazamiento cada tres cuadrados de tiempo. Lo que corresponde a la línea roja. Al aumentar la velocidad a uno por uno, se cambia a la línea azul, y al aumentar la 2 cuadros de desplazamiento por cada uno de tiempo, se cambia a la línea verde. La aceleración cambia la velocidad en cada instante, lo que dibuja una curva en el sentido del dibujo, cuando la aceleración aumenta la velocidad, y en el otro cuando la disminuye.

Tras el debate y el apartado "añadido" g), se recuerda la función del desplazamiento con aceleración constante $x = x_0 + v \cdot t + (1/2) \cdot a \cdot t^2$, preguntando por las variables dependiente e independiente. Se presentan las funciones de segundo grado, cuya expresión analítica contiene un polinomio de grado dos, $y = a.x^2 + b.x + c$, mostrando con gráficas proyectadas cual es cóncava (a > 0), convexa (a < 0), como influyen los parámetros (a, b, c) y como calcular el vértice, $x = -b/2a$.

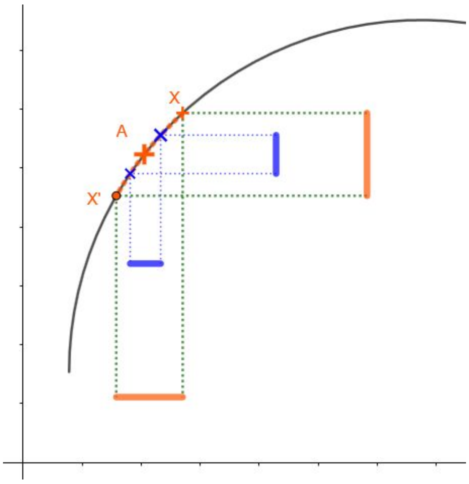
Actividad 4: Continuidad de una función.

Se inicia la actividad preguntando a los alumnos si recuerdan que es una función contínua. Según el currículo, en el curso anterior ya han visto continuidad de una función, seguramente definida como la que se dibuja de un trazo, sin levantar el lápiz. Si no lo recuerdan, pasar directamente a definir continuidad según se indica más adelante y a presentar el problema 3. Si lo recuerdan, plantear el problema directamente.

Este problema está mal definido a propósito. Pregunta por la generación de puntos de agua, que depende del tiempo en el juego, y da datos de la ocupación del tiempo real de María. Aclarar que la generación de puntos de agua, una función constante, no son los puntos de agua generados, función creciente. Los alumnos pueden decir que en el instante en el que deja el juego la generación cae a cero hasta el instante que vuelve a jugar. Algunos se darán cuenta que los puntos generados son por segundo de juego, no por segundo de la vida real. Solo se puede hablar de la generación de puntos de agua en los instantes que tiene sentido, cuando María está jugando, mientras que no existe en otros instantes.

Por tanto, la primera condición para determinar si una función es continua es que exista allí donde la vamos a estudiar.

El profesor pasa a definir:

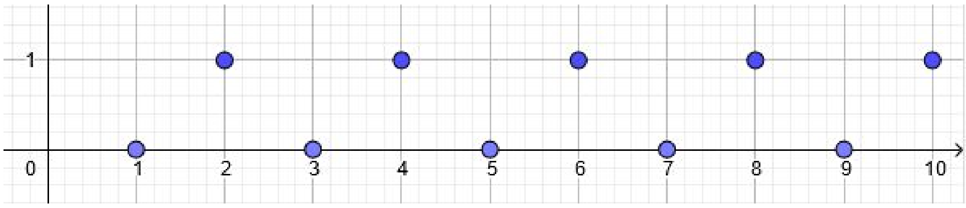


- continuidad en un punto: para todo punto x próximo al estudiado, podemos encontrar, por encima y por debajo de este, otros puntos más cercanos cuyas imágenes están más cerca de la imagen del punto estudiado de lo que está la imagen de x. Dado que no han dado intervalos, deberá mostrarse gráficamente, con un ejemplo como el de la derecha.
- discontinuidad en un punto, cuando no se cumple lo anterior en dicho punto
- función continua en un intervalo como continua en todos los puntos del mismo
- función continua, en general, aquella que no presenta discontinuidades.

Se toma algunos de los ejemplos de los problemas anteriores, por ejemplo, el viaje de Noa. En este caso, representa un desplazamiento, un fenómeno físico. Hasta que Noa aprenda a teleportarse o a viajar en el tiempo, ha de pasar necesariamente por cada instante y punto del espacio entre dos puntos de la gráfica, por lo que cada uno cumple la definición dada. En estos casos, podemos aplicar la regla informal y decir que la función es continua porque la podemos dibujar sin levantar el lápiz.

Se continúa presentando el problema 9 (ver capítulo E), para que practiquen.

Finalmente, hay que presentar las funciones discretas. Se les pide como ejercicio el problema 5. Se espera que los alumnos dibujen los puntos sueltos, siendo posible que algún alumno los una. Aunque ninguno lo haga, el profesor deberá preguntar si tiene sentido unirlos, para remarcar que, al ser el dominio los naturales, la función no tiene sentido fuera de ellos.



A continuación debe preguntar si dicha función es o no continua. Suponemos que la mayoría responderán que la función es discontinua, por haber aplicado la regla del lápiz o por no existir puntos cercanos a los estudiados. Se debe explicar que estas funciones son un caso especial, las sucesiones. Su dominio son los naturales, un conjunto discreto, de "puntos sueltos", por lo que no tiene sentido buscar puntos muy próximos y la definición dada no se puede aplicar. Tampoco se le puede aplicar la técnica de el lápiz, que requieren de un dominio continuo, de "puntos infinitamente próximos", como los números reales. Por lo que aún no disponen de herramientas adecuadas para definir su continuidad.

Para aclarar la diferencia entre una función discreta o sucesión y otra contínua, pedir que realicen el ejercicio 4 (ver capítulo F).

Al finalizar la clase, remarca que en ningún caso se ha hablado de funciones discontinuas, solo de funciones continuas, no continuas y de puntos de discontinuidad.

Esta actividad pretende conseguir en los alumnos una concepción de la continuidad de una función más próxima a la de cursos superiores, usando un lenguaje fácil de asimilar. Tratando de aproximar la definición al concepto que van a enseñarles a partir de bachillerato, relegando la técnica gráfica intuitiva que se suele dar a un determinado tipo de funciones. En lugar de dar las definiciones y técnicas como sentencias irrefutables, para cambiarlas en cursos posteriores, aplica la premisa de ser la mejor definición o técnica, hasta que seamos capaces de comprender o encontrar otra mejor.

Actividad 5: Estudiando funciones periódicas.

Se presenta a los alumnos el problema 4.

a) Recorrido: varía entre 20.5 y el 29.2 % de luz reflejada.

b) Máximos y mínimos: se espera que los alumnos respondan que hay tres máximos y tres mínimos en 20.5% y 29.2%. Aquí es donde se les pregunta si hay alguna relación entre los máximos encontrados y entre los mínimos, buscando que definan el periodo. El profesor debe preguntar por el significado de afirmaciones similares a "*están separados la misma distancia*" pidiendo que se expresen adecuadamente. Si no surge espontáneamente la afirmación de que ocurre lo mismo para todos los puntos, preguntar directamente: "*¿Ocurre para algún otro punto?*" Buscamos que los alumnos encuentren por sí mismos el periódo de la función.

c) Explicar el fenómeno: aquí cualquier respuesta mínimamente razonada es válida. Si se atascan, o no saben qué contestar, se puede hacer una descripción teatralizada. "*El astrónomo mirando un punto en el horizonte cuyo brillo sube y baja despacio, repitiendo la secuencia. Aumentamos el zoom y la imagen se hace más nítida y vemos...*" por ejemplo, dos asteroides girando en el mismo plano de la visión, un asteroide de forma plana, del que vemos el reflejo de la cara ancha y del borde, alternativamente, un planeta enano con una cara cubierta de hielo, un faro extraterrestre...

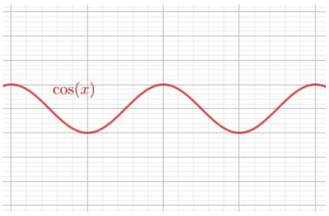
La pregunta c) no está directamente relacionada con la matemática. Busca que el alumno traduzca un registro matemático en un fenómeno físico, despertar su imaginación para que pueda ver la relación entre la función y el fenómeno descrito. Prepara el terreno para la siguiente pregunta.

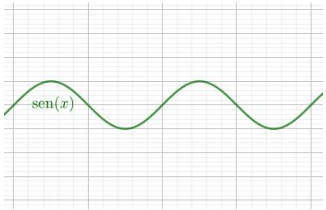
d) Comportamiento en el futuro: partiendo de lo contestado en la pregunta b), se generaliza en periodo a instantes futuros, definiendo de manera informal la función periódica. Dar un significado físico a la gráfica en el punto anterior, c), ayuda a imaginar que la situación puede permanecer igual en el futuro.

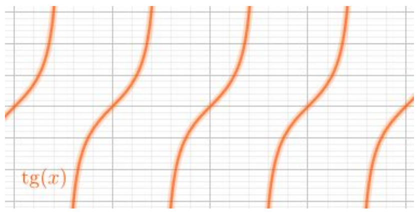
Tras este ejercicio, se define:

- función periódica, "*aquella cuyos valores se repiten cada periodo de tiempo*", "*aquella que cumple que* x, $(x+T)$, $((x+T)+T)$, $(((x+T)+T)+T)$... *tienen la misma imágen*";
- periodo de una función, incremento en la variable independiente para el que se repite la función periódica;
- extrapolar el comportamiento de una función: estimar el valor de la variable más allá de lo conocido.

Se termina mostrando ejemplos de funciones periódicas:







E. Sobre el campo de problemas.

A parte de los problemas ya planteados, vamos a presentar en el aula los siguientes:

Problema 6: Este verano iniciaste un club de Coleccionistas de cromos con un grupo de amigos. Cada uno de ellos empezó a compartirlo en diversas redes sociales (cuentas de Facebook, Whatsapp, Instagram...) suyas o de sus padres. El movimiento se ha hecho bastante importante y podéis conseguir promociones de nuevas colecciones a cambio de la publicidad. El problema es que desconocéis el número exacto de miembros, siendo muy posible que muchos de ellos estén apuntados en más de una red social. Uno de los fundadores ha estado pidiendo datos personales a los miembros, teniendo una extensa colección que incluye nombres y apellidos reales, seudónimos, red social en la que son miembros y cuentas de correo, d.n.i., teléfonos y colecciones que siguen. Necesitas elegir un dato de tal forma que, introducido en la lista anterior, identifiques sin error a cada una de las personas. ¿Cuál de los datos te parece el más adecuado? ¿Por qué? Según la definición, la aplicación informática que introduciendo el dato elegido, responde los demás datos de dicha persona ¿es una función?

Solución: El D.N.I. es el más adecuado, el resto, incluso el nombre completo, pueden pertenecer o señalar a más de una persona. Bajo esta premisa, dicha aplicación cumple la definición de función.

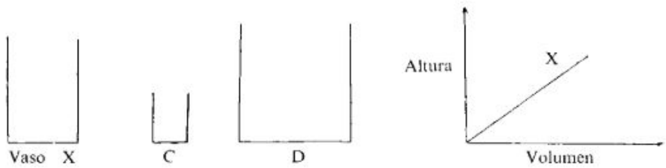
Este problema incide sobre la técnica de identificar funciones aplicando la definición. Esta vez el alumno no tiene la información ordenada y completa. Debe aplicar conocimientos generales para su solución. Se presenta como tarea para casa y se corrige en clase. El profesor pide al alumno siguiente al último preguntado que responda en voz alta, preguntando al resto de la clase si han contestado lo mismo. Hay que invitar a quien tenga otra respuesta a que la expongan y debatir cual es más adecuada.

Nota: En El Lenguaje de funciones y gráficas (M.E.C., 1990, pág. 32 a 35) aparece una actividad, "*A5 mirando gradientes*", cuyos ejercicios y problemas han sido utilizados en textos posteriores (Colera et al., 1998, pág. 226 y 227; Gaztelu et al., 2015, pág. 238). Plantea gráficas de llenado de diferentes recipientes para ilustrar la relación entre un fenómeno físico y la forma de las gráficas de una función. Los problemas 7 y 8 están basados en dicha actividad.

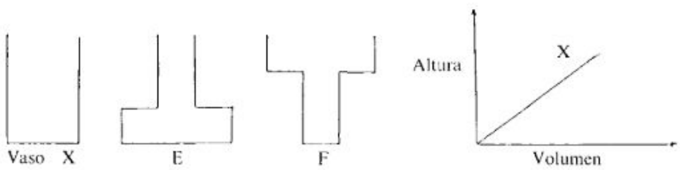
Problema 7: La siguientes gráficas muestran como varía la altura del líquido en el vaso X, a medida que el agua cae dentro de él, goteando de forma contínua. En cada una de dichas gráficas, muestra la relación de Altura-Volumen para los otros dos vasos.

a.

b.

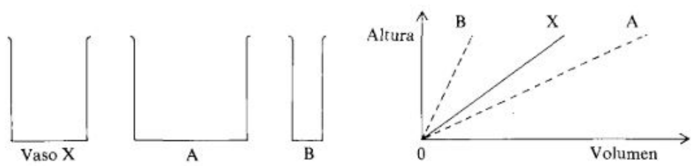


c.

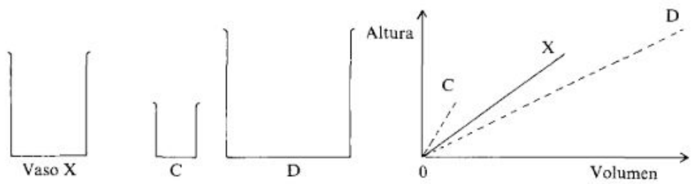


<u>Posibles soluciones</u>:

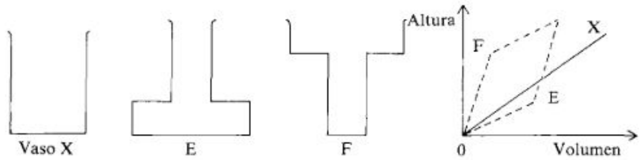
a.



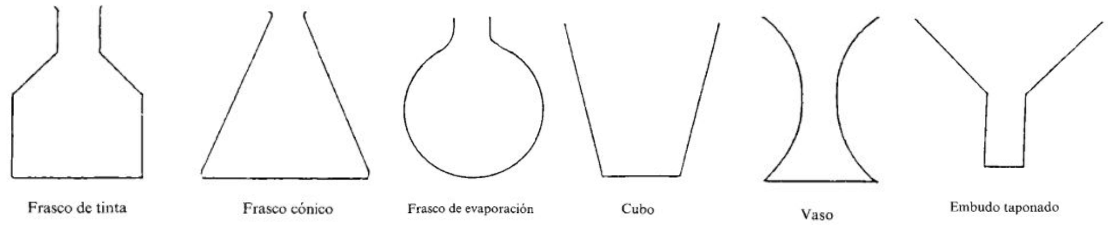
b.

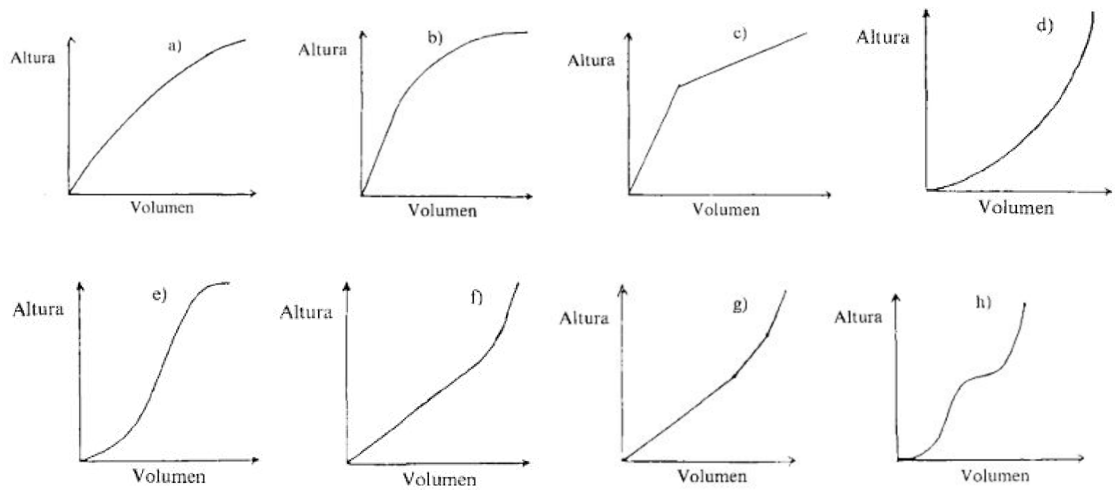


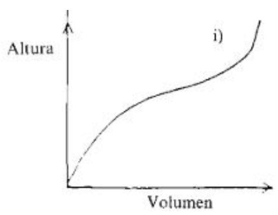
c.



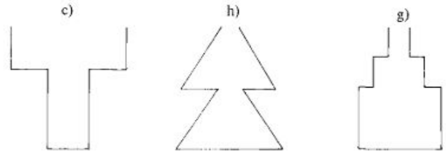
Problema 8: Relaciona la forma del vaso con su gráfica Altura-Volúmen, ¿como serían los frascos de las gráficas sobrantes?:







Solución: Frasco de tinta, f); frasco cónico, d); embudo taponado, b); cubo, a); frasco de evaporación, i); vaso, e). Las tres gráficas sobrantes corresponden a los recipientes de la derecha.

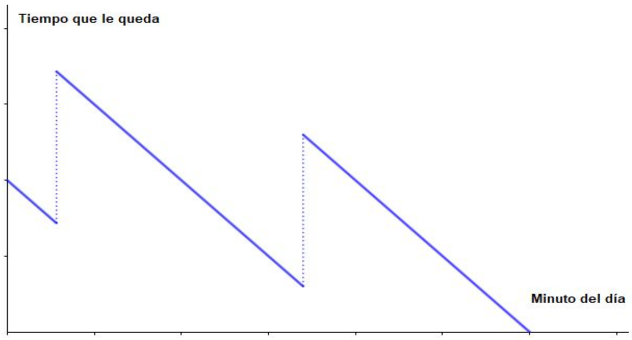


En el Problema 2 los alumnos tenían una gráfica y una tabla ya creadas, a partir de las cuales han deducido como estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, relacionando la inclinación con la velocidad. Los problemas 7 y 8 plantean al alumno un ejercicio diferente, conocido el comportamiento de un fenómeno, estimar como se comportarán otros de similar naturaleza pero diferentes circunstancias.

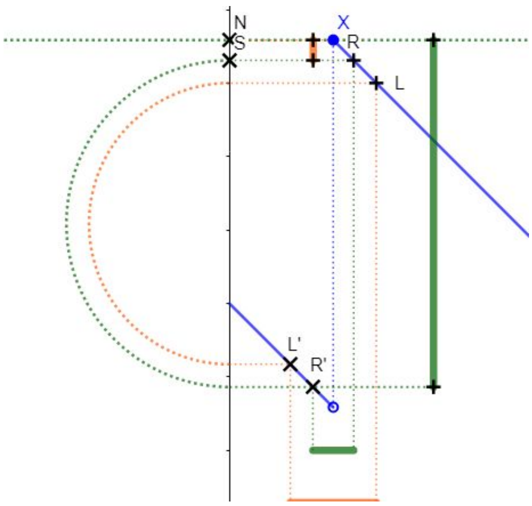
Estos pueden abordarse en clase o en casa, en pequeños grupos o en solitario. Se pedirá a los alumnos, en orden de lista, que salgan a la pizarra a dibujar las gráficas del problema 7 y el final del 8 o digan a la clase las respuestas de la primera parte de este último. En caso de fallar, se pedirá al siguiente de la lista si puede corregir el error, se pedirá un voluntario y se dará la respuesta correcta, en ese orden hasta que se obtenga la solución. Es importante incidir en que sitúen el punto final de las gráficas adecuadamente, los de menor altura se situarán más abajo y los de mayor volumen más a la derecha.

Si muchos de la clase tienen dificultades, se recomienda la sugerencia que proponen en el libro original: "*Imaginaos que aumentan el volumen en cantidades iguales ¿Qué ocurre con la altura del líquido en la botella?*"

Problema 9: La siguiente gráfica muestra el tiempo que le queda a un niño para montar en un caballito mecánico. Cada vez que sus padres meten una moneda, se añade tiempo extra. ¿Es una función contínua?



Solución: Se espera que, intuitivamente, encuentren que no lo es, localizando los puntos de discontinuidad. El profesor deberá pedir a los alumnos que razonen por qué dicen que es discontinua, sin aceptar la explicación del lápiz, y lo escriban en su cuaderno, invitando a los alumnos a aplicar la definición. Verán que, elegido un punto L cercano a un punto de discontinuidad, la imagen de puntos más cercanos a la derecha, R, está más cerca de la imagen del punto de discontinuidad, pero no ocurre lo mismo con los puntos a la izquierda, L' y R'.

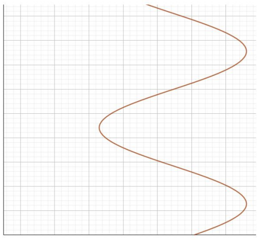


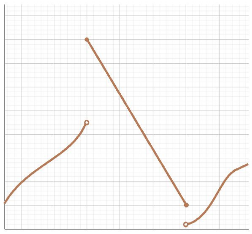
F. Sobre las técnicas.

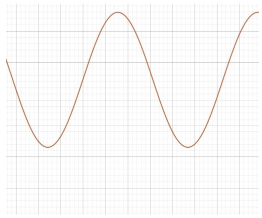
Las técnicas son desarrolladas por los propios alumnos al trabajar con los problemas presentados del capítulo D o mediante ejercicios guiados (ejercicio 5, incluido en este capítulo).

Ejercicio 1: Dí si es o no función, y por qué:

i) Una operación que le asigna a cada número su cuadrado.

ii) 

iii) 

iv) 

v) El área de un cuadrado conociendo su lado

vi) A cada votante se asigna el voto que ha emitido

vii) El precio a pagar por número de regalices comprados

viii) El área de un rectángulo conociendo uno de sus lados.

ix) Calcular el tiempo que tardas en recorrer una distancia a una velocidad

x) Una lista que asigna a cada persona un solo color favorito

xi) Un diagrama que asigna a cada invitado a una boda su asiento

xii) Determinar el peso exacto de una persona de la que solo conoces su edad

Solución: son funciones i, v, vii, ix, por ser operaciones matemáticas con un solo resultado; iii, iv, vi, x, xi, por asignar un solo elemento del conjunto final a cada elemento de la variable independiente. No son ii por asignar más de un valor a valores de la variable independiente, viii porque hay infinitos valores, uno por cada valor que pueda tener el otro lado, xii porque hay personas de la misma edad con diferente peso. Trabajo de la técnica T_1.

Ejercicio 2: Dibuja tres gráficas sin escalas, cuyos ejes de coordenadas y abscisas son *Precio* y *Año de fabricación*, *Velocidad de crucero* y *Tamaño* , *Autonomía* y *Número de Asientos*. Marca, aproximadamente, donde estarán situados en cada gráfica dos vehículos eléctricos, A y B , de los cuales sabemos:

I- el vehículo A es más viejo que B,

II- el vehículo más viejo es el más barato,

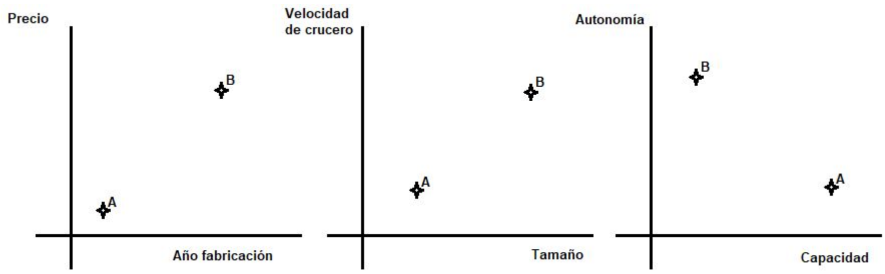
III- el más lento es el más pequeño,

IV- el más grande es el más nuevo,

V- el más barato transporta más viajeros,

VI- el más rápido tiene más autonomía.

Solución: I- sitúa A a la izquierda de B en la primera gráfica. II- sitúa A por debajo de B en la primera gráfica, quedando definida. III- sitúa los puntos en la segunda gráfica uno por encima y a la derecha del otro; IV- B está a la derecha en la segunda gráfica, quedando definida. V- sitúa A a la derecha en la tercera gráfica; VI- sitúa a B por encima de A en la tercera gráfica, quedando definida:



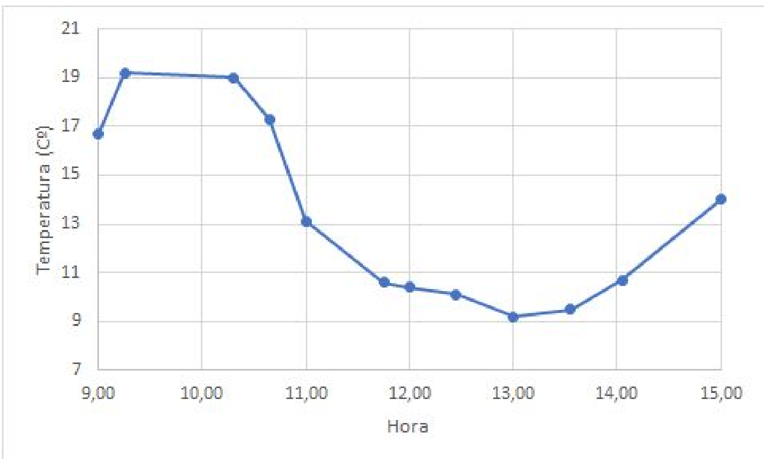
Al trabajar sin escalas, necesitan entender adecuadamente la relación entre cada variable que describe los vehículos y el sistema de ejes. Trabajo de conocimientos previos, P_2 y P_3

Ejercicio 3: Laura, Antonio y Ana han registrado la temperatura de su pueblo a diferentes horas de la mañana, rellenando los partes de la derecha. Dí a qué horas la temperatura bajaba y cuando subía.

Laura		*Antonio*		*Ana*	
Hora	Temp.	Hora	Temp.	Hora	Temp.
12:00	10.4	9:00	16.7	9:15	19.2
10:40	17.3	11:00	13.1	10:20	19
13:35	9.2	13:00	9.2	13:15	9.5
		15:00	14.0	11:45	10.6
				12:25	10.1
				14:05	10.7

¿Cuales han sido la temperaturas máxima y mínima según sus mediciones?

Solución: las temperaturas están en tres tablas y desordenadas. Primero tienen que ponerlas en orden, marcando los puntos en una gráfica, o escribiendo la tabla ordenada de todos los valores:

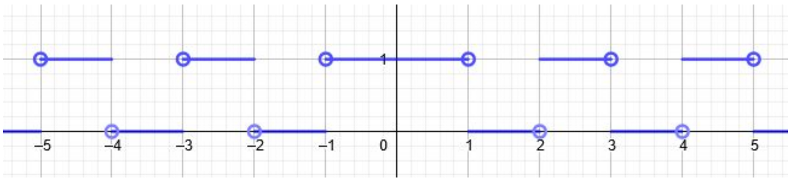


Hora	Temp.
9:00	16.7
9:15	19.2
10:20	19
10:40	17.3
11:00	13.1
11:45	10.6
12:00	10.4
12:25	10.1
13:00	9.2
13:15	9.5
13:35	9.2
14:05	10.7
15:00	14.0

Mirando la tabla, las temperaturas suben desde las 9:00 hasta las 9:15 y desde las 13:00 hasta las 15:00. Bajan desde las 9:15 hasta las 13:00. Siendo la temperatura máxima 19 Cº y la mínima 9.2 Cº. Trabajo de la técnica T_6.

Ejercicio 4: Dibujar la función que asigna un 1 a los números reales cuya parte entera es par y un 0 a los números reales cuya parte entera es impar. ¿Es una función contínua?, ¿por qué?.

Solución:



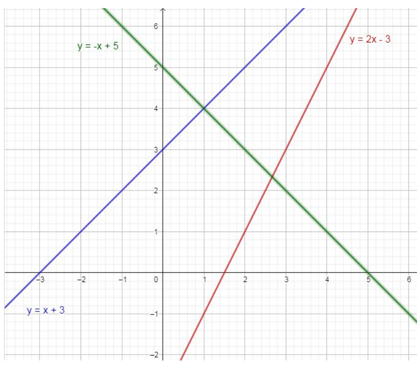
No es continua, por existir discontinuidades en cada salto, aplicando la regla del lápiz o por la definición de continuidad. Trabajo de la técnica T_9.

Ejercicio 5: Tomemos una función de primer grado, por ejemplo $y = x + 3$. Sea *x* la variable independiente e *y* la independiente. Dibuja su gráfica ¿que forma tiene?

Tomemos $y = 2x - 3$ y $y = -x + 5$. Según lo que hemos visto hasta ahora, sin dibujar la gráfica ¿crece o decrece? Dibújalas para comprobarlo.

Inventa otras funciones de primer grado y dibuja sus gráficas. ¿Ves alguna característica común a todas las que crecen?; ¿y en las que decrecen? ¿como ha de ser la expresión analítica de una función para que su gráfica ni crezca ni decrezca?

Solución: La técnica para dibujar la gráfica desde una expresión analítica (T_13) no se ha explicado como tal, pero si se ha indicado que pueden hacer una tabla de valores a partir de la expresión analítica, por lo que se espera que dibujen las rectas. Junto con las que se inventen, tienen que descubrir, por sí mismos o con ayuda, que el signo del multiplicador de *x* determina la monotonía. Y tiene que ser *0*, con su trazo paralelo al eje de abcisas, para que la función sea constante.



Luego se pregunta por la parte constante de la función, qué significa en el gráfico.

Ejercicio 6: Sean las rectas $y = x/3 + 4$ e $y = (1/3)x - 1$. ¿Qué puedes conocer de ellas sin dibujarlas?. ¿Y de las rectas $y = 5x - 1$ e $y = x/4 - 1$? Dibújalas

Solución: Todas las rectas son crecientes, por ser las pendientes positivas, las dos primeras con la misma pendiente, por tanto paralelas, y diferente corte con el eje de coordenadas, las dos últimas con diferente pendiente e igual corte con el eje de coordenadas. Trabajo de la técnica T_13 y T_14.

Este ejercicios sirve como trabajo de la técnica de análisis de la ecuación de la recta y para afianzar el significado de pendiente y término independiente u ordenada en el origen.

G. Sobre las tecnologías.

En esta unidad se trata que el alumno sea el que encuentre las técnicas a usar, partiendo de sus conocimientos previos del uso de ejes cartesianos y tablas de valores. Por ejemplo, las técnicas de estudio del crecimiento de una función (T_6) salen de manera natural al trabajar con diferentes representaciones de las funciones (P_3).

No se presenta una justificación explícita a dichas técnicas, dado que salen de conocimientos del propio alumno, dejando implícito que son esas técnicas y tecnologías aprendidas antes las que justifican las nuevas.

La única técnica no justificada por conocimientos anteriores es su identificación como función, de la que se dice directamente que la definió un matemático.

Como aparece en las actividades, el proceso de institucionalización de estas técnicas, tras ser deducidas por el alumno como solución de un problema, se expone en clase y, con ayuda del profesor y el resto de la clase, se depura la técnica encontrada.

H. La secuencia didáctica y su cronograma.

El orden de las actividades en la secuencia didáctica coincide con su numeración, de la uno a la cinaco, intercalando ejercicios para hacer entre sesiones.

La secuencia está pensada para ocupar nueve sesiones de una hora, tres semanas lectivas según el calendario habitual en matemáticas académicas de tercero. Las tareas indicadas se realizan en clase o en casa, dependiendo del uso del tiempo:

Sesión 1º: Actividad 1, completa. Tareas: problema 2 a), b); Ejercicio 1 y 2; otros.	Sesión 2º: Corrección de tareas. Actividad 2, problema 2: realizar el c) y d), plantear el e).
Sesión 3º: Actividad 2, terminar d) y e) Tareas: problema 7, 8, ejercicio 3, otros.	Sesión 4º: Corrección de tareas. Actividad 3, apartado f) del problema 2 y ejercicio 5 Tareas: apartado g), problema 2.
Sesión 5º: Finalizar actividad 3. Tareas: ejercicios 6, 9, 10.	Sesión 6º: Actividad 4. Tareas: ejercicios.
Sesión 7º: Corrección. Iniciar la actividad 5	Sesión 8º: Terminar la actividad 5 Dudas y repaso.
Sesión 9º: Prueba escrita.	Sesión 10º: Evaluación (15 minutos), Inicio de la siguiente unidad.

I. Sobre la evaluación.

La prueba consta de 5 preguntas, calificadas sobre 2 puntos cada una. Tras cada pregunta se indican las tareas evaluadas, respuestas esperadas y criterios de valoración.

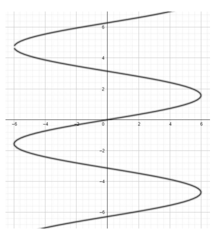
Pregunta 1) Si es función, calcula el dominio y recorrido de:

a) temperatura del agua en olla al fuego

tiempo (minutos)	0	1	2	3	…
temperatura (º C)	20	24	28	32	…

b) Coste de las almendras en función del peso comprado.

c)



d)

f	g
Norte	Rojo
Sur	Azul
Este	Azul
Sur	Amarillo
Oeste	Naranja
Norte	Amarillo

e) La relación que asigna a cada número entero su doble.

f) $y = 5$

- Identificación de funciones (T_1), calcular dominio y recorrido (T_2)
- Tareas objeto de la evaluación:

○ principales	■ identificar la función por su definición ■ identificar el Dominio y Recorrido
○ auxiliares específicas	■ (no se consideran)
○ auxiliares generales	■ (no se consideran)

Respuestas: Son funciones por asignar un solo valor a cada término independiente: a) Dom ;$\mathbb{R}^+$ Rec $20 \leq \mathbb{R}^+ \leq 100$ ó $\mathbb{R}^+$>20 Cº b) Dom, Rec $\mathbb{R}^+$; e) Dom, Rec $\mathbb{N}$; f) Dom $\mathbb{R}^+$; Rec 5; No son funciones c) y d) por asignar más de una *y* a un mismo *x*.

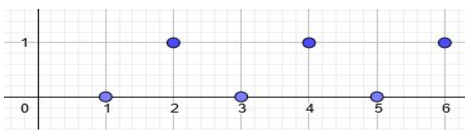
Errores esperados: confundir variable independiente y dependiente y/o Dom y Rec;

Criterios de valoración: Cada apartado puntúa 1/3; 1/6 por fallar con Dom/Rec.

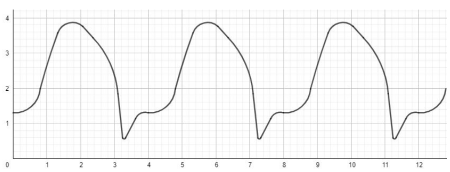
Estándares: Est.MAAC.4.1.2.

Pregunta 2) Di si las siguientes funciones son periódicas o no. Calcula su periodo.

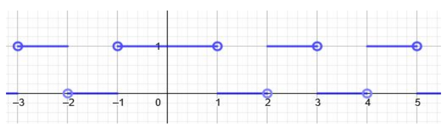
a)



b)



c)



d)

x	y
-4	-1
-2	10
0	3
2	-1
4	10
6	3
8	-1
10	10
12	3

e)

y	x
-4	-1
-2	0
0	1
-3	2
-2	3
0	4
-1	5
-2	6
1	7

- Identificación de funciones periódicas (T_10), calcular su recorrido (T_11).
- Tareas objeto de la evaluación:

○ principales	■ identificar periodicidad por su forma/tabla ■ obtener el Periodo
○ auxiliares específicas	■ (no se consideran)
○ auxiliares generales	■ (no se consideran)

Respuestas: Son periódicas: a) periodo 2 b) p. 4 d) p.6; No son periódicas c) y e).

Errores esperados: considerar c) y/o e) periódicas por tener partes repetidas;

Criterios de valoración: Puntuación por apartado: 2/5; 1/5 sin obtener el Periodo.

Estándares: Est.MAAC.4.1.2

Pregunta 3) Dibuja las siguientes gráficas:

a) Función que asigna a cada *x* la mitad de su cuadrado más dos.

b) $y = 4 - 2x$

c) Función lineal de pendiente 5 y corte con el eje de coordenadas 6

- Dibujar una función conocida su expresión algebraica (T_13.1, T_13.3).
- Tareas objeto de la evaluación:

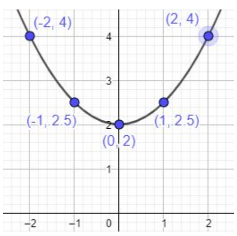
○ principales	■ dibujar la gráfica a partir de la expresión
○ auxiliares específicas	■ obtener tabla de datos a partir de la expresión ■ dibujar la gráfica conocida una tabla (T_13.2) ■ obtener información de los parámetros (T_14)
○ auxiliares generales	■ aritmética

Respuestas:

a) $y = (1/2)x^2 + 2$

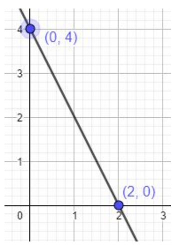
vértice $(0, 2)$

x	y
-2	4
-1	5/2
0	2
1	5/2
2	4



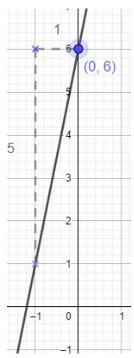
b)

x	y
0	4
2	0



c) $m = 5$; pasa por $(0, 6)$; sube 5 cuadros por cuadro; ó usar $y = 5x + 6$

x	y
-1	1
0	6



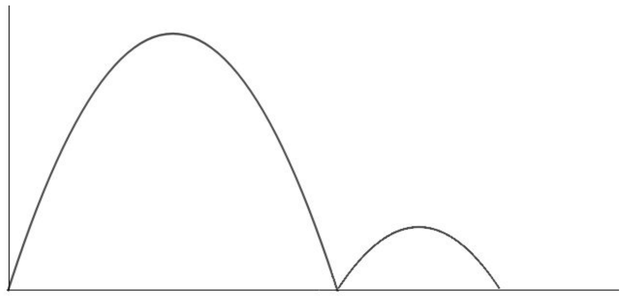
Errores esperados: aux.general: error aritmético, con cuentas indicadas; aux.específico: dibujar las coordenadas invertidas, dibujar tramos rectos en a); principal: dibujar solo puntos.

Criterios de valoración: Puntuación máxima por apartado:

2/3 sin errores, 4/9 con fallo en generales ó 2/9 con fallo en específicas.

Estándares: Est.MAAC.4.1.3, Est.MAAC.4.2.2;

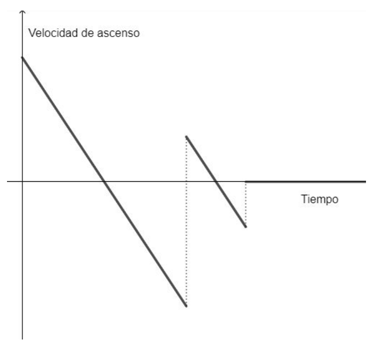
Pregunta 4) La gráfica de la derecha muestra la trayectoria de una roca lanzada desde la superficie de de la Luna. Haz una gráfica aproximada de su velocidad de ascenso. ¿Hay algún punto de discontinuidad?



- Interpretar gráficas (T_3), deducir funciones a partir de otras (T_5), estimación de gráficas (T_8), identificar discontinuidad (T_9).
- Tareas objeto de la evaluación:
  - principales
    - estimar el trazado de una gráfica
    - identificar un punto de discontinuidad
  - auxiliares específicas
    - identificar en la función objetivo: es decreciente
      tiene tres cambios de sentido (signo)
      pasa por cero dos veces (vértice parábolas)
      velocidad tras el rebote es menor que la inicial
  - auxiliares generales
    - identificar movimiento parabólico de aceleración cte (función cuadrática) y deducir que *v* es lineal

---

Respuesta: Tiene una velocidad de ascenso inicial, que se reduce por gravedad hasta cero y luego se invierte. Al llegar al suelo se vuelve a invertir instantáneamente y se repite con velocidad de ascenso inferior, hasta parar contra el suelo. Con aceleración cte, *v(t)* es lineal $v = a.t$. Hay dos puntos de discontinuidad, los choques con el suelo.

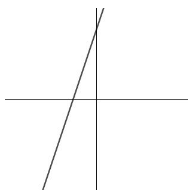
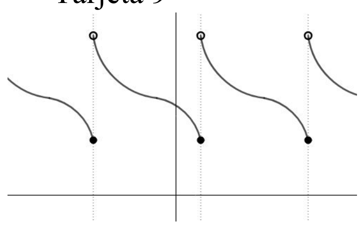


Errores esperados: principal: gráfica con partes crecientes, no dibujar el rebote; aux.específico: gráfica a un lado del eje de abscisas, no acabar en negativo; aux.general: gráfica no lineal.

Criterios de valoración: Identificación razonada y/o gráfica de la discontinuidad, 1 punto. Gráfica: puntuación máxima: 1; con error: aux.general. 2/3; específico: 1/3; principal: 0.

Estándares: Est.MAAC.4.1.2, Est.MAAC.4.1.3, Est.MAAC.4.2.3, Est.MAAC.4.3.2

Pregunta 5) Las siguientes tarjetas contienen características ó expresiones de tres funciones diferentes. Se han mezclado, ordénalas y razona tu respuesta.

<table>
<tr>
<td>Tarjeta 1
</td>
<td>Tarjeta 2
Para todos los valores de x mayores que 3, decrece.</td>
<td>Tarjeta 3
<table><tr><td>x</td><td>y</td></tr><tr><td>6</td><td>22</td></tr><tr><td>2</td><td>10</td></tr><tr><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td>-1</td><td>1</td></tr></table></td>
</tr>
<tr>
<td>Tarjeta 4
Es una función discontinua</td>
<td>Tarjeta 5
$y = 3x + 4$</td>
<td>Tarjeta 6
Es creciente para todo su dominio</td>
</tr>
<tr>
<td>Tarjeta 7
$y = -x^2 + 4x - 3$</td>
<td>Tarjeta 8
Tiene un máximo en $(2, -2)$</td>
<td>Tarjeta 9
</td>
</tr>
</table>

Trabajo de la técnica T_4, T_6, T_7, T_9.1

- Comparar funciones (T_4).
- Tareas objeto de la evaluación:

○ principales	■ comparar características y expresiones de funciones
○ auxiliares específicas	■ interpretar una gráfica (T_3) ■ identificar monotonía (T_6), vértice en función cuadrática (T_7) y discontinuidad (T_9)
○ auxiliares generales	■ (no se consideran)

Respuestas: Función 1, tarjetas 1, 3, 5 y 6; Función 2, tarjetas 2, 7 y 8; Función 3: tarjetas 4 y 9.

Errores esperados: principal: no razonar la respuesta, colocar en su grupo correspondiente con razonamiento equivocado; aux. específico: razonar bien y colocar mal; aux. general: aritmética.

Criterios de valoración: máximo 1/9 por tarjeta bien colocada y razonada; error específico 1/18 por tarjeta; error general: 2/18.

Estándares: Est.MAAC.4.1.1, Est.MAAC.4.1.2, Est.MAAC.4.1.4, Est.MAAC.4.2.1, Est.MAAC.4.2.2, Est.MAAC.4.2.3, Est.MAAC.4.3.1.

J. Bibliografía.

Colera, J., García, J.E., Gaztelu, I., Oliveira, M.J. (1998). *Matemáticas 3: educación secundaria obligatoria. Serie nuestro mundo*. Madrid: Editorial Anaya, S.A. ISBN 84-207-6854-5 (Colera et al., 1998).

Gaztelu, A.M., González, A., Grence, T., Machin, P., Pérez, C., Prida, C., Sánchez, D. (2015). *Alumno matemáticas académicas 3 ESO. Serie resuelve*. Santillana Educación, S.L. ISBN 9788468031101 Consultado en: http://aulavirtual.santillana.es/avonline/library (Gaztelu et al., 2015).

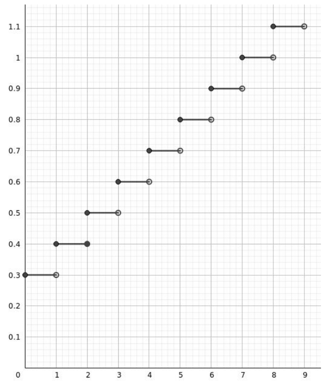
M.E.C. (Ministerio de Educación y Ciencia) (1990). *El Lenguaje de funciones y gráficas*. [Madrid]. Servicio Editorial Universidad del País Vasco, ISBN 84-7585-236-X.

Sastre, P., Rey, G., & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. Revista Iberoamericana De Educación Matemática, (16), 141-155.

Anexos:

Otros ejercicios y problemas:

Ejercicio 7: La siguiente gráfica marca el precio de una llamada en función del tiempo (€/minuto) en una cabina pública.



a) Determina su dominio y recorrido.

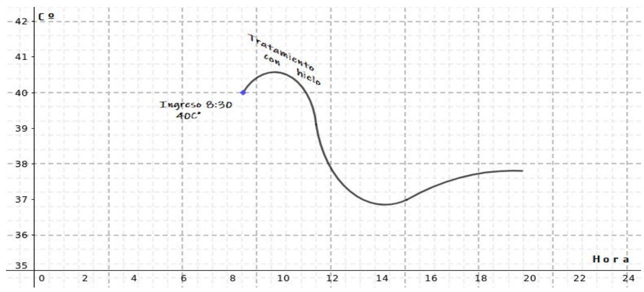
b) Describe a un amigo por teléfono la tarifa de la cabina.

c) Rellena la tabla de costes:

t (minutos)	0:00	1:30	3:59	4:00	8:11	10:01
coste (€)						

Trabajo de la técnica: T_2, T_3, T_12

Ejercicio 8: Visitas a un primo en el hospital. La médica se ha dejado la gráfica de la temperatura en función del tiempo, y vuestra abuela no la entiende. Describe como ha evolucionado el paciente.



Trabajo de la técnica: T_2, T_3, T_6.1, T_7, T_12

Ejercicio 9: Estudia la monotonía de estas funciones (crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos):

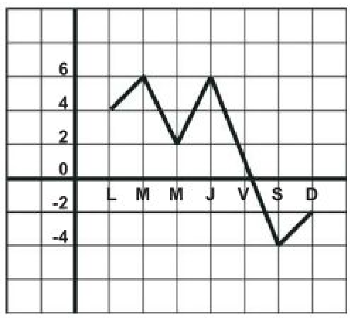
a) $y = 25x^2 - 100x + 200$

b)

y	0	35	30	50	85	65
x	0	30	50	60	80	90

c) Precio de las pipas a granel: 10 céntimos por el recipiente más 90 céntimos los 100 gramos.

d) Temperatura média (día de la semana)



Trabajo de la técnica T_6 y T_7

Ejercicio 10: Dibuja las siguientes gráficas:

a) Función que asigna a cada *x* su triple más 5.

b) Función que asigna a cada x su cuadrado.

c) $y = -x^2$

d) $y = 4 - 2x$

e) Función de contínua de periodo 4, que pasa por el origen, asciende desde este con pendiente 2 hasta mitad del periodo, y se mantiene constante hasta los tres cuartos, y desciende linealmente hasta el final del periodo.

Trabajo de la técnica T_6, T_8, T_9, T_13, T_14

Ejercicio 11: Un agricultor ha plantado dos tipos diferentes de cardos experimentales, C1 y C2, destinados a la fabricación de biodiesel. Plantó C1 tres meses antes que C2, por problemas de distribución. C1 crece 10 cm al mes, y C2 cuarenta centímetros cada tres meses. Si se recogen cuando tienen un metro y medio ¿Cuál se cosechará antes? Ignorando las limitaciones de altura, ¿cuando superará una cosecha la altura de la otra?.

Trabajo de la técnica T_4, T_14

Ejercicio 12: Un espeleólogo se separó de su grupo mientras instalaba sensores en unas cuevas volcánicas. Aproximadamente a las 18:00 del día 1, un temblor provocó un derrumbamiento y quedó atrapado. En la cueva el agua no le falta, tiene barritas para varios días y hay cangrejos suficientemente comestibles.

A las tres horas del derrumbamiento, una fumarola suelta gases tóxicos. Por suerte tiene máscara antigás y diez filtros, por lo que espera pacientemente hasta que el gas se filtra y el aire de la cueva vuelve a ser respirable. La expulsión de gases se repite aproximadamente a las 8 a.m., a las 7 p.m. del día 2 y a las 6 a.m. del día 3. Gasta un filtro cada dos expulsiones de gases, ¿hasta cuando puede sobrevivir sin que lo rescaten?

Trabajo de la técnica T_5, T_10, T_11.