



Universidad
Zaragoza



Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
MASTER EN FÍSICA Y TECNOLOGÍAS FÍSICAS

Astrofísica de rayos gamma de muy alta energía como ventana a física más allá de Relatividad Especial

Autora:

Lucía Pereira Sáinz

Directores:

José Manuel Carmona
José Luis Cortés Azcoiti

Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza

Resumen

En la presente memoria utilizamos distintas consideraciones cinemáticas con el objetivo de calcular la energía umbral de un fotón de alta energía ($E_\gamma \geq 100 \text{ GeV}$) necesaria para que se produzca un par electrón-positrón a partir de la interacción con un fotón de baja energía perteneciente al fondo de luz extragaláctico. En una primera parte introducimos el marco teórico de gravedad cuántica, las teorías que plantean desviaciones de Relatividad Especial y el problema de la transparencia del fondo cósmico. Posteriormente, proponemos como solución a este problema una modificación en la energía umbral de creación de pares, realizando los cálculos correspondientes a una Violación de Invariancia Lorentz y una Deformación de Relatividad Especial. Por último, analizamos los resultados obtenidos y los comparamos con aquellos que aparecen en la bibliografía.

Summary

In the present work we use different kinematic theories in order to calculate the threshold energy of pair-production. We study the interaction of a high energy photon ($E_\gamma \geq 100 \text{ GeV}$) with a low energy photon belonging to the extragalactic background light, which produces an electron-positron pair. Firstly, we introduce the theoretical context of quantum gravity, the different theories which establish deviations from Special Relativity and the problem regarding the transparency of the cosmic background. Furthermore, we calculate the pair-production threshold using Lorentz Invariance Violation and Deformation of Special Relativity, which presumes to be a possible solution for the transparency problem. Finally, we discuss our results and compare them with those obtained in the bibliography.

Listado de siglas

- AGN: Active Galactic Nuclei.
- CIB: Cosmic Infrared Background.
- CMB: Cosmic Microwave Background.
- COB: Cosmic Optical Background.
- DSR: Deformation of Special Relativity/ Doubly Special Relativity.
- EBL: Extragalactic Background Light.
- Fermi-LAT: Fermi Large Area Telescope.
- GR: General Relativity.
- GRB: Gamma Ray Burst.
- HESS: High Energy Stereoscopic System.
- LIV: Lorentz Invariance Violation.
- MAGIC: Major Atmospheric Gamma-ray Imaging Cherenkov telescope.
- SM: Standard Model.
- SR: Special Relativity.
- VERITAS: Very Energetic Radiation Imaging Telescope Array System.

Constantes físicas fundamentales

- Constante de gravitación universal: $G = 6.6743 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$.
- Velocidad de la luz (Relatividad Especial): $c = 299792458 \text{ m/s}$.
- Constante de Planck: $h = 6.6261 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.
- Constante de Planck reducida: $\hbar = 1.0546 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.
- Energía de Planck: $E_{\text{Pl}} = 1.2209 \cdot 10^{19} \text{ GeV}$.
- Longitud de Planck: $L_{\text{Pl}} = 1.6163 \cdot 10^{-35} \text{ m}$.
- Carga del electrón: $e = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Marco general de gravedad cuántica	1
1.2. Teorías más allá de Relatividad Especial	4
1.3. Problema de la transparencia del universo	5
2. Creación de pares en Relatividad Especial	8
2.1. Cálculo con invariantes relativistas	9
2.2. Cálculo sin invariantes relativistas	10
3. Violación de Invariancia Lorentz	13
4. Deformación de Relatividad Especial	17
5. Discusión de resultados	25
6. Conclusiones	29
Bibliografía	30
Anexo	I
A. Método de los multiplicadores de Lagrange	I
B. Aproximaciones utilizadas en LIV	III
C. Aproximaciones utilizadas en DSR	IV

1. Introducción

1.1. Marco general de gravedad cuántica

Durante el último siglo, la física teórica se ha embarcado en la búsqueda de una teoría capaz de unificar las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza. Un gran avance hacia este objetivo lo supone el desarrollo del Modelo Estándar de la Física de Partículas (*Standard Model*, SM), una teoría cuántica de campos relativista capaz de describir tres de dichas interacciones: electromagnética, débil y fuerte. No obstante, únicamente existe una teoría de unificación, la teoría electrodébil, la cual considera que las interacciones electromagnética y débil coinciden para partículas elementales sometidas a temperaturas (o energías) muy altas (próximas a 100 GeV).

En el Modelo Estándar de la Física de Partículas no se incluye actualmente la interacción gravitatoria, dado que no existe aún una teoría de gravedad cuántica. El contexto de gravedad cuántica es el que vamos a tratar en la presente memoria; sin embargo, antes de llegar a él, conviene realizar un breve repaso de algunas teorías de gravedad propuestas a lo largo de la historia de la ciencia moderna.

Tomamos como punto de partida la Ley de Gravitación Universal de Newton (siglo XVII), la cual describe la atracción entre cuerpos masivos del universo. En ella aparece la constante de gravitación universal $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ [1]. Más adelante, en el año 1905, Einstein publica su teoría de Relatividad Especial (*Special Relativity*, SR), construida a partir de dos postulados básicos:

- La velocidad de la luz en el vacío es constante, con valor $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ [1].
- Principio de relatividad: todos los observadores inerciales del universo son equivalentes. Para relacionar sus observaciones se utilizan las transformaciones de Lorentz, las cuales mantienen la cantidad c invariante.

Posteriormente, Einstein amplía su teoría añadiendo a la cinemática planteada en SR una descripción más amplia de la interacción de los cuerpos en el universo y surge la teoría de Relatividad General (*General Relativity*, GR) en 1915. En ella, se entiende la gravedad como una deformación del espacio-tiempo de cuatro dimensiones, cuyo comportamiento dinámico está descrito en la teoría.

Por otra parte, a principios del siglo XX, Planck propone la idea de que la energía absorbida o emitida por las partículas (en forma de fotones) no es continua, sino que está cuantizada y depende de la frecuencia ν del fotón asociado, $E = h\nu$. Además, De Broglie plantea en 1924 la hipótesis de que a cualquier partícula se le puede asociar una longitud de onda, $\lambda = h/|\vec{p}|$, siendo \vec{p} el momento de la partícula y h la constante de Planck, $h = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ [1].

Tras este planteamiento cuántico, las distintas áreas de la Física ampliaron sus leyes de forma que pudieran dar cabida a sucesos microscópicos (a nivel de partículas elementales) además de macroscópicos (recogidos en la física clásica). Sin embargo, la búsqueda de una teoría de gravedad capaz de incluir efectos cuánticos supone un problema de la Física que sigue existiendo hoy en día.

Para solucionarlo, se han formulado matemáticamente distintas teorías de gravedad cuántica (como la teoría cuántica de bucles, la teoría de cuerdas, etc.). La falta de predicciones claras por parte de estas teorías que sean observables experimentalmente impide favorecer un marco teórico sobre otro. No obstante, en los últimos años, se han conseguido realizar observaciones de posibles efectos de gravedad cuántica que podrían ayudar a impulsar este área de investigación.

Dentro del campo de la fenomenología de gravedad cuántica se consideran teorías que van más allá de Relatividad Especial (sección 1.2), de forma que puede dejar de ser válido alguno de los postulados de Einstein. El camino que se sigue en estos casos suele implicar partículas de altas energías, ya que, hasta donde sabemos, la Relatividad Especial es una buena aproximación para bajas energías.

La escala en la que se esperan ver efectos de gravedad cuántica suele ser del orden de la energía de Planck, E_{Pl} , equivalente a la longitud de Planck, L_{Pl} , para dimensiones espaciales (ver [1], [2], [3]). Se considera esta escala como punto de partida, ya que está contruida a partir de la combinación de las constantes universales pertenecientes a las teorías que se tratan de unificar.

$$E_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = 1.22 \cdot 10^{19} \text{ GeV}, \quad (1.1)$$

$$L_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1.62 \cdot 10^{-35} \text{ m}. \quad (1.2)$$

En este contexto que estamos describiendo aparece también la idea de que las partículas de altas energías podrían ver otro espacio-tiempo distinto al clásico planteado por Einstein, un “espacio-tiempo cuántico”. Este nuevo espacio-tiempo se puede entender como una espuma, únicamente apreciable a energías muy altas o longitudes muy pequeñas (del orden de la escala de Planck), donde el concepto de longitud podría ser difuso. Si este nuevo espacio-tiempo afectara a las partículas de alguna forma, es posible que al detectarlas se pudiera encontrar alguna diferencia entre estas y las partículas de baja energía.

Para estudiar experimentalmente algún efecto de gravedad cuántica, actualmente no es posible crear o detectar en la Tierra ningún fenómeno con energías del orden de la energía de Planck. Por tanto, se recurre a observaciones astrofísicas de partículas creadas en los fenómenos más energéticos del universo, las cuales hayan podido interactuar en su propagación con el “espacio-tiempo cuántico”.

Las máximas energías detectadas proceden de fotones cósmicos ($E_{\text{det}} \sim 10^3 \text{ GeV}$), neutrinos ($E_{\text{det}} \sim 10^6 \text{ GeV}$) y nucleones cósmicos ($E_{\text{det}} \sim 10^{11} \text{ GeV}$) [3]. Podemos notar que las energías de detección no son próximas a E_{PI} ; sin embargo, si las partículas se han generado con energías suficientemente altas ($E \gtrsim 100 \text{ GeV}$), han podido sufrir efectos de gravedad cuántica en su propagación, que serían detectables desde la Tierra.

Las partículas más interesantes para estudiar posibles señales de gravedad cuántica son los fotones y los neutrinos. Esto se debe a que son partículas sin masa o con masa muy pequeña (en el caso de los neutrinos), neutras y capaces de propagarse grandes distancias sin interactuar con otras partículas o desviarse de su trayectoria, lo cual también resulta útil para identificar la fuente de la que proceden.

En la presente memoria enfocamos nuestro estudio en los fotones de alta energía. Las fuentes capaces de crear este tipo de fotones son los púlsares, los núcleos activos de galaxias (*Active Galactic Nuclei*, AGN) o los estallidos de rayos gamma (*Gamma-Ray Bursts*, GRB), siendo estos últimos los más lejanos y los de menor duración.

Observaremos posibles efectos de gravedad cuántica al investigar la propagación de los fotones desde que se generan en la fuente hasta que los detectamos. Estos efectos incluyen, por ejemplo, una posible diferencia entre los tiempos de vuelo para fotones de alta energía respecto a los de baja energía. Los estudios de tiempos de vuelo consideran que el vacío podría ser un medio dispersivo, de forma que fotones de distintas energías se propagarían con distinta velocidad (contrariamente al primer postulado de SR). Esta idea se basa en que los fotones de alta energía podrían interactuar con el “espacio-tiempo cuántico” en su camino hacia la Tierra, el cual podría afectarles acelerándolos o frenándolos (ver [4]).

Otro efecto de gravedad cuántica que se puede encontrar en la propagación de fotones de alta energía es una variación en la cinemática de las reacciones que afectan a este tipo de fotones. Por ejemplo, podría cambiar la energía umbral de la creación de pares al interactuar el fotón de alta energía con otro fotón de más baja energía ($\gamma_h + \gamma_l \rightarrow e^- + e^+$). También se podría dar la desintegración de un fotón de alta energía en un par electrón-positrón ($\gamma_h \rightarrow e^- + e^+$), un proceso que está prohibido en Relatividad Especial.

En la presente memoria nos centraremos en el estudio cinemático de la producción de un par electrón-positrón, resultante de la interacción entre un fotón de alta energía y un fotón de baja energía. Para ello, consideraremos distintas modificaciones en la relación de dispersión o las leyes de composición de Relatividad Especial, las cuales introducimos en la sección 1.2. Por su parte, en la sección 1.3, concretamos el problema que motiva el estudio de la creación de pares.

1.2. Teorías más allá de Relatividad Especial

Nos encontramos en un contexto de gravedad cuántica, donde es posible que la Relatividad Especial de Einstein deje de ser una teoría válida a nivel de partículas elementales. Buscamos teorías que modifiquen la cinemática de SR, de forma que pueda variar la energía umbral de la creación de pares. Si esta energía cambia, podría dar lugar a efectos observables de gravedad cuántica. A continuación, describimos las teorías que emplearemos en los posteriores apartados de la memoria:

- Teorías de Violación de Invariancia Lorentz (*Lorentz Invariance Violation*, LIV): proponen una relación de dispersión (relación entre momento y energía de una partícula) distinta a la de Relatividad Especial. Para ello, se añaden términos a la relación de dispersión de SR que resultan despreciables a baja energía. Estos términos son inversamente proporcionales a una escala, denominada $E_{LV,n}$, donde n es el orden de la corrección respecto a SR (ver [3]).

Además, en las teorías de Violación de Invariancia Lorentz, no se tiene en cuenta el principio de relatividad. Existe un observador privilegiado que estudia el universo, considerado normalmente como aquel que ve en reposo el fondo cósmico de microondas (*Cosmic Microwave Background*, CMB). Por tanto, en estas teorías no aparecen transformaciones (como las de Lorentz) que mantengan la invariancia de un fenómeno medido por distintos observadores.

- Teorías de Deformación de Relatividad Especial (*Deformation of Special Relativity*, DSR): proponen una nueva relación de dispersión distinta a la de SR y una modificación de las leyes de conservación de energía y momento. Del mismo modo que en LIV, se añade a la relación de SR un término inversamente proporcional a una escala de modificación, denotada como M .

Las teorías que plantean una deformación respecto a SR tratan de mantener el principio de relatividad entre observadores. Sin embargo, las transformaciones entre las distintas observaciones ya no serían las transformaciones de Lorentz, sino otras nuevas que fueran compatibles con la nueva relación de dispersión y leyes de composición (ver [5]).

Este tipo de teorías también se suelen llamar teorías de Relatividad Doblemente Especial (*Doubly Special Relativity*, DSR). Este nombre se debe a que tratan de establecer unas nuevas transformaciones entre observadores que mantengan invariantes dos cantidades: c y L_{PL} . El procedimiento para conseguir esto trata de ser análogo al que siguió Einstein para obtener las transformaciones de SR, que mantenían invariante la cantidad c , a partir de las transformaciones de Galileo.

1.3. Problema de la transparencia del universo

Dentro de todas las posibles líneas de estudio expuestas, nos vamos a centrar en una concreta: el estudio cinemático de la creación de un par electrón-positrón producido cuando un fotón de alta energía interactúa con un fotón del fondo de luz extragaláctico (*Extragalactic Background Light*, EBL).

Cuando estudiamos el espectro de luz para todas las direcciones, detectamos fotones en un amplio rango de longitudes de onda. Las longitudes de onda mayores ($\lambda > 1 \text{ mm}$), o energías menores ($\varepsilon < 1.24 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$), corresponden al fondo cósmico de microondas (CMB). Este está compuesto por la radiación que escapó la era de la recombinación (en la que se formaron los primeros átomos de hidrógeno y helio), y llena todo el universo de forma isotropa.

La luz perteneciente a EBL está constituida por la radiación emitida por estrellas y galaxias tras la era de la recombinación. En especial, la luz en el rango infrarrojo se crea cuando fotones de energía por encima del rango óptico son absorbidos por el polvo del medio interestelar y reirradiados con menor energía (ver [6] y [7]).

Se suele denominar fondo de luz extragaláctico a la radiación procedente del cosmos con longitudes de onda entre $0.1 \mu\text{m}$ y 1 mm ($12.4 \text{ eV} > \varepsilon > 1.24 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$). Esta incluye la radiación en el rango óptico (*Cosmic Optical Background*, COB), con longitudes de onda entre $0.1 \mu\text{m}$ y $0.8 \mu\text{m}$, y en el infrarrojo (*Cosmic Infrared Background*, CIB), con longitudes de onda entre $8 \mu\text{m}$ y 1 mm aproximadamente.

Existen diversos estudios que se centran en medir de forma rigurosa el flujo que recibimos de EBL (ver [6] y [7]), planteando los modelos de emisión correspondientes de acuerdo con las observaciones. Mostramos una de las medidas más completas y recientes (2016) de este fondo en la figura 1, donde se recogen medidas realizadas por distintos autores. En ella, vemos que el mayor flujo que recibimos de fotones de baja energía se corresponde con longitudes de onda próximas a $1.5 \mu\text{m}$ y a $150 \mu\text{m}$.

Por otra parte, también podemos medir el flujo de fotones recibidos para todas las longitudes de onda del espectro y calcular la profundidad óptica (*optical depth*) asociada a cada energía. Esta cantidad, $\tau(E_0, z_s)$, indica la opacidad de un medio (el fondo de baja energía en este caso), y depende de la energía del fotón detectada, E_0 , así como de la distancia a la que se encuentra la fuente, z_s .

En algunos artículos (ver [6] y [8]) se comenta la observación de una aparente anomalía en la transparencia del universo para fotones de altas energías. Es decir, es posible que la profundidad óptica τ sea menor de la esperada para fotones provenientes de fuentes lejanas, detectándose un flujo mayor de fotones de alta energía que el esperado (a partir de los modelos realizados para las fuentes).

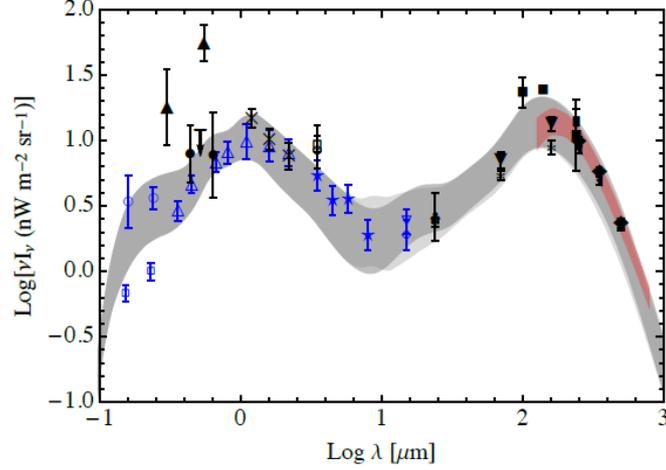


Figura 1: Modelo espectral del fondo de luz extragaláctico para un rango de longitudes de onda $0.1 \mu\text{m} < \lambda < 1 \text{mm}$ y un 68 % de confianza [7]. Los puntos en azul indican límites inferiores al flujo de fotones y los puntos en negro corresponden a medidas directas (o extrapoladas).

Mostramos un ejemplo de esta anomalía en la figura 2, donde aparece representada la diferencia entre el flujo de fotones de alta opacidad ($\tau > 1$) y el flujo esperado (calculado a partir del flujo de fotones de baja opacidad, $\tau < 1$), R , frente a la energía de la radiación, E . Vemos que esta diferencia en el flujo es mayor de la esperada para fotones de altas energías, y muchos de estos tienen opacidades menores a 1, por lo que el vacío sería bastante transparente a estos fotones.

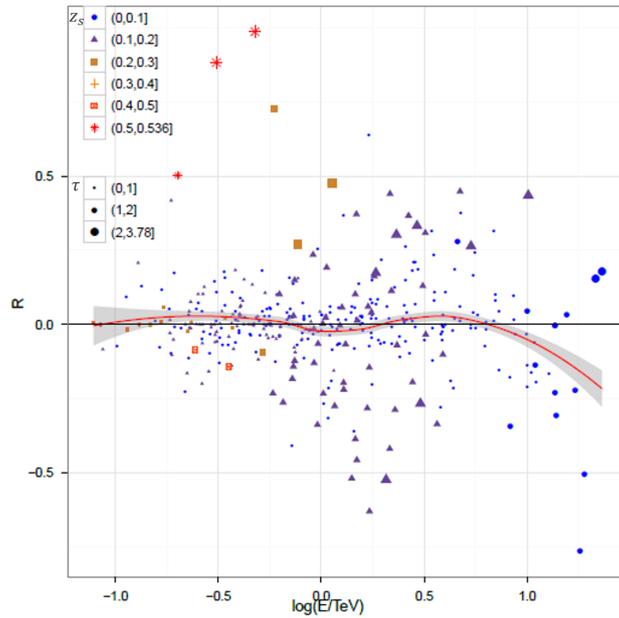


Figura 2: Diferencia entre el flujo de fotones de alta energía observado y esperado (línea roja), R , frente a la energía E . La zona gris indica un intervalo de confianza del 68 % para la diferencia esperada en [8] (zona gris). Las distintas formas asociadas a los puntos indican el redshift de la fuente, z_s , mientras que el tamaño denota la opacidad, τ .

Este problema se ha tratado de solventar planteando soluciones más allá de Relatividad Especial. Una de ellas es que se detectan más fotones de alta energía porque estos son capaces de convertirse en axiones (partícula hipotética planteada como una posible componente de la materia oscura) en algún lugar próximo a la fuente, que oscilan de nuevo a fotones antes de ser detectados. De esta forma, los axiones no interactuarían con el medio intergaláctico en su propagación. Este caso de producción de axiones se discute en artículos como [9] o [10], proponiéndose cotas para el acoplamiento de la interacción fotón-axión, $g_{\gamma a}$, o para la masa del axión, m_a . En otros artículos como [6] se descarta que la anomalía pueda deberse a la aparición de axiones.

La aparente anomalía en la transparencia del universo se puede explicar de otra forma si consideramos que la energía umbral de la creación de pares puede cambiar. Esto ocurrirá si la cinemática de la reacción $\gamma + \gamma \rightarrow e^- + e^+$ varía respecto a Relatividad Especial, lo cual ocurre en teorías que van más allá de SR (ver sección 1.2). Este es el proceso que vamos a analizar en los apartados posteriores, calculando la energía umbral de acuerdo con las distintas teorías.

En la bibliografía encontramos artículos que han estudiado este fenómeno desde el punto de vista de LIV, estableciendo cotas a la escala de modificación respecto de Relatividad Especial, $E_{LV,n}$. Considerando una modificación a primer orden de la escala ($n = 1$), se propone en [6] una cota de $E_{LV,1} \geq 7.93 \cdot 10^{18}$ GeV y en [11] una cota de $E_{LV,1} \geq 1.05 \cdot 10^{19}$ GeV, ambas calculadas con una confianza del 99 %. Estas cotas son cercanas a la energía de Planck, que era la energía esperada para la escala al plantear teorías LIV.

Por su parte, para teorías de Deformación de Relatividad Especial (DSR) aún no se ha explorado el rango de valores que limitan la escala M de modificación respecto a SR desde el punto de vista de creación de pares (aunque sí que se han puesto cotas a M en estudios de tiempos de vuelo). Por tanto, la única noción que tenemos para la escala proviene del contexto de gravedad cuántica en el que trabajamos, donde la energía para la que aparecerían estos efectos sería E_{Pl} .

En la presente memoria desarrollamos el estudio del proceso de creación de pares, averiguando la expresión correspondiente a la energía umbral del fotón de alta energía para cada una de las cinemáticas propuestas. En primer lugar, consideramos el punto de vista de la Relatividad Especial en la sección 2, para posteriormente poder comparar los resultados alcanzados con las teorías que van más allá de SR. En las secciones 3 y 4 realizamos los cálculos correspondientes a teorías de Violación de Invariancia Lorentz y Deformación de Relatividad Especial, respectivamente. En la sección 5 comparamos los resultados obtenidos entre ellos y con las observaciones experimentales vistas en distintos artículos de la bibliografía, y, por último, en la sección 6, exponemos las conclusiones.

2. Creación de pares en Relatividad Especial

En este apartado vamos a resolver cinemáticamente la creación de pares de acuerdo con la relación de dispersión y leyes de conservación de Relatividad Especial. Nos encontramos ante la interacción de un fotón de alta energía (γ) con un fotón de baja energía perteneciente al fondo extragaláctico (γ_{EBL}), que produce un electrón (e^-) y un positrón (e^+),

$$\gamma + \gamma_{\text{EBL}} \rightarrow e^- + e^+. \quad (2.1)$$

Para realizar los cálculos cinemáticos correspondientes al proceso indicado en la ecuación anterior (2.1), planteamos una notación para las energías y los momentos de cada partícula, que mantendremos a lo largo de toda la memoria (ver tabla 1).

Partícula	Energía	Momento
γ	E_γ	$\vec{\mathbf{k}}$
γ_{EBL}	ε	$\vec{\mathbf{k}}'$
e^-	E_-	$\vec{\mathbf{p}}$
e^+	E_+	$\vec{\mathbf{q}}$

Tabla 1: Energía y momento asociado a cada partícula en la creación de pares.

Por otra parte, podemos indicar la formulación general de la relación de dispersión en Relatividad Especial para una partícula de energía E , momento $\vec{\mathbf{p}}$ y masa m . En este apartado, aplicaremos dicha expresión a todas las partículas, simplificándose esta en el caso de los fotones ($m_\gamma = 0$)¹.

$$E^2 - |\vec{\mathbf{p}}|^2 = m^2. \quad (2.2)$$

También podemos plantear las leyes de conservación de energía y momento asociadas a la reacción, las cuales se verificarán para cualquier observador inercial que estudie el proceso.

$$E_{\text{tot}} = E_\gamma + \varepsilon = E_- + E_+, \quad (2.3)$$

$$\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}} = \vec{\mathbf{k}} + \vec{\mathbf{k}}' = \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{q}}. \quad (2.4)$$

Como hemos mencionado anteriormente, buscamos hallar la energía mínima del fotón de alta energía, E_γ , para que al interactuar éste con un fotón del fondo se produzca un par electrón-positrón.

¹A lo largo de toda la memoria se considera $c = 1$ (unidades naturales).

2.1. Cálculo con invariantes relativistas

La resolución del problema planteado es especialmente sencilla en SR, ya que existe una expresión que se mantiene invariante bajo distintos sistemas de referencia.

$$s = E_{\text{tot}}^2 - |\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}}|^2. \quad (2.5)$$

En primer lugar, consideramos el sistema de referencia centro de masas, es decir, aquel observador que ve cómo los dos fotones se acercan a él con el mismo momento y el electrón y el positrón se alejan de él con el mismo momento. En este sistema, el momento total de las partículas se anula, tanto en el estado inicial como en el estado final: $\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}}^* = 0$.

Como estamos buscando la energía mínima del fotón γ para que tenga lugar una creación de pares, el caso umbral será aquel en el que las partículas creadas se encuentren en reposo. Es decir, cuando los momentos $\vec{\mathbf{p}}^*$ y $\vec{\mathbf{q}}^*$ se anulen en el sistema de referencia centro de masas (es el único sistema de referencia en el que esto puede ocurrir), de forma que la interacción entre fotones únicamente proporciona la masa a las partículas creadas. Trabajando con el estado final, el invariante en este caso queda de la siguiente forma:

$$s = s_{\text{fin}} = (m_{\text{fin}}^*)^2 = 4m_e^2. \quad (2.6)$$

Por otra parte, podemos considerar otro sistema de referencia en el que se cumpla la conservación de energía y de momento (ecuaciones 2.3 y 2.4). El invariante para el estado inicial visto por el nuevo observador lo expresamos de acuerdo con su definición (ecuación 2.5):

$$s = s_{\text{ini}} = (E_{\text{ini}})^2 - |\vec{\mathbf{p}}_{\text{ini}}|^2 = (E_\gamma + \varepsilon)^2 - |\vec{\mathbf{k}} + \vec{\mathbf{k}}'|^2. \quad (2.7)$$

Igualando ambos invariantes (ecuaciones 2.6 y 2.7) y cancelando los términos correspondientes a la relación de dispersión para fotones ($|\vec{\mathbf{k}}| = E_\gamma$ y $|\vec{\mathbf{k}}'| = \varepsilon$) nos queda lo siguiente:

$$2E_\gamma\varepsilon - 2\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{k}}' = 4m_e^2. \quad (2.8)$$

En la ecuación (2.8) aparece el producto escalar de los dos momentos iniciales, el cual dependerá del ángulo θ que formen los vectores $\vec{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{k}}'$.

$$2E_\gamma\varepsilon - 2|\vec{\mathbf{k}}| \cdot |\vec{\mathbf{k}}'| \cdot \cos\theta = 4m_e^2, \quad (2.9)$$

$$E_\gamma = \frac{2m_e^2}{\varepsilon(1 - \cos\theta)}. \quad (2.10)$$

Hemos obtenido la energía del fotón incidente en función del ángulo θ . Buscamos que dicha energía sea mínima, lo que ocurrirá cuando los momentos de los dos fotones formen el máximo ángulo posible, es decir, cuando se encuentren en la misma dirección y sentidos opuestos ($\theta = 180^\circ$):

$$E_\gamma = \frac{m_e^2}{|\vec{\mathbf{k}}'|} = \frac{m_e^2}{\varepsilon}. \quad (2.11)$$

El resultado nos indica que la energía umbral buscada es directamente proporcional a la masa del electrón (m_e , igual a la masa del positrón) e inversamente proporcional a la energía del fotón del fondo con el que está interactuando el fotón de alta energía. De esta forma, cuanto mayor sea la energía ε del fotón del fondo (menor longitud de onda), menos energía necesitará el fotón γ para crear un par electrón-positrón.

2.2. Cálculo sin invariantes relativistas

Existe un método más general que nos permite calcular la energía umbral E_γ sin hacer uso del invariante relativista s . Este razonamiento lo emplearemos también posteriormente para los casos de Violación de Invariancia Lorentz (LIV, sección 3) y Deformación de Relatividad Especial (DSR, sección 4).

En nuestro estudio de la creación de pares buscamos encontrar una energía mínima, por lo que nos hayamos ante un problema de optimización. Una herramienta matemática muy útil para resolver este tipo de problemas es el método de los multiplicadores de Lagrange (ver anexo A).

De esta forma, en el caso de Relatividad Especial, tratamos de minimizar la energía del fotón γ tomando como restricciones la conservación de la energía y la conservación del momento (ecuaciones 2.3 y 2.4). Suponiendo que conocemos la energía de los fotones que podemos encontrar en el fondo de luz extragaláctico, la energía ε y el momento $\vec{\mathbf{k}}'$ no serían variables de nuestro problema.

Haciendo uso de los multiplicadores de Lagrange (en principio desconocidos) μ y $\vec{\lambda}$, la función a minimizar es la que aparece a continuación:

$$F(\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}, \vec{\lambda}, \mu) = E_\gamma(|\vec{\mathbf{k}}|) - \mu \cdot \left[E_-(|\vec{\mathbf{p}}|) + E_+(|\vec{\mathbf{q}}|) - E_\gamma(|\vec{\mathbf{k}}|) - \varepsilon \right] - \sum_i \lambda_i \cdot (p_i + q_i - k_i - k'_i). \quad (2.12)$$

Derivando la función F respecto a cada una de sus variables e igualando dichas derivadas a cero, obtendremos un sistema de ecuaciones cuya solución nos proporcionará la energía mínima buscada.

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = -\mu \cdot \frac{dE_-}{d|\vec{\mathbf{p}}|} \cdot \frac{p_i}{|\vec{\mathbf{p}}|} - \lambda_i = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = -\mu \cdot \frac{dE_+}{d|\vec{\mathbf{q}}|} \cdot \frac{q_i}{|\vec{\mathbf{q}}|} - \lambda_i = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial F}{\partial k_i} = (1 + \mu) \cdot \frac{dE_\gamma}{d|\vec{\mathbf{k}}|} \cdot \frac{k_i}{|\vec{\mathbf{k}}|} + \lambda_i = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = E_- + E_+ - E_\gamma - \varepsilon = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = p_i + q_i - k_i - k'_i = 0. \quad (2.17)$$

En general, en el problema planteado nos aparecen trece ecuaciones con trece incógnitas: las tres componentes de los momentos $\vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{p}}$ y $\vec{\mathbf{q}}$, además de los multiplicadores de Lagrange $\vec{\lambda}$ y μ . Cabe destacar que las energías de las partículas no son incógnitas, ya que las podemos relacionar con los momentos correspondientes mediante la relación de dispersión (ecuación 2.2 en el caso de SR).

A continuación, podemos reducir la complejidad del problema igualando los multiplicadores λ_i que aparecen en las ecuaciones (2.13), (2.14) y (2.15).

$$\mu \frac{dE_-}{d|\vec{\mathbf{p}}|} \cdot \frac{p_i}{|\vec{\mathbf{p}}|} = \mu \frac{dE_+}{d|\vec{\mathbf{q}}|} \cdot \frac{q_i}{|\vec{\mathbf{q}}|} = (1 + \mu) \cdot \frac{dE_\gamma}{d|\vec{\mathbf{k}}|} \cdot \frac{k_i}{|\vec{\mathbf{k}}|}. \quad (2.18)$$

Vemos así que el vector unitario en la dirección del momento del electrón es proporcional al vector unitario en la dirección del momento del positrón y al vector unitario en la dirección del momento del fotón, $p_i/|\vec{\mathbf{p}}| \propto q_i/|\vec{\mathbf{q}}| \propto k_i/|\vec{\mathbf{k}}|$. Esto significa que los momentos asociados a estas tres partículas se encuentran en la misma dirección.

Para conocer el sentido de los vectores $\vec{\mathbf{p}}$, $\vec{\mathbf{q}}$ y $\vec{\mathbf{k}}$, debemos averiguar el valor del multiplicador de Lagrange μ . Podemos despejar este parámetro de una de las igualdades que aparecen en la ecuación (2.18). Escogemos en este caso la que relaciona los momentos $\vec{\mathbf{p}}$ y $\vec{\mathbf{k}}$:

$$\mu \frac{|\vec{\mathbf{p}}|}{\sqrt{|\vec{\mathbf{p}}|^2 + m_e^2}} = 1 + \mu, \quad (2.19)$$

$$\mu = \frac{\sqrt{|\vec{\mathbf{p}}|^2 + m_e^2}}{|\vec{\mathbf{p}}| - \sqrt{|\vec{\mathbf{p}}|^2 + m_e^2}} = \frac{E_-}{|\vec{\mathbf{p}}| - E_-}. \quad (2.20)$$

Sabemos que $E_- > |\vec{\mathbf{p}}|$ siempre, por lo que el denominador que aparece en la expresión de μ va a ser negativo. Además, la energía E_- tomará un valor positivo (por definición), lo que hace que μ adquiera un valor negativo. Por otra parte, $|E_-| > ||\vec{\mathbf{p}}| - E_-|$, y esto implica que $|\mu| > 1$.

Concluimos de esta forma que los momentos $\vec{\mathbf{p}}$, $\vec{\mathbf{q}}$ y $\vec{\mathbf{k}}$ se encontrarán en el mismo sentido, ya que los factores de proporcionalidad de la ecuación (2.18) tienen el mismo signo (son negativos).

Además, al igualar el multiplicador λ_i para las ecuaciones (2.13) y (2.14), obtenemos $\frac{dE_-}{d|\vec{\mathbf{p}}|} = \frac{dE_+}{d|\vec{\mathbf{q}}|}$. A partir de esta relación deducimos que las partículas del par creado tienen el mismo módulo del momento y, por tanto, la misma energía.

$$\frac{|\vec{\mathbf{p}}|}{\sqrt{|\vec{\mathbf{p}}|^2 + m_e^2}} = \frac{|\vec{\mathbf{q}}|}{\sqrt{|\vec{\mathbf{q}}|^2 + m_e^2}}, \quad (2.21)$$

$$|\vec{\mathbf{p}}| = |\vec{\mathbf{q}}|. \quad (2.22)$$

Por último, debemos resolver las ecuaciones (2.16) y (2.17), las cuales se corresponden con la conservación de energía y momento. La ecuación (2.17) indica que si $\vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{p}}$ y $\vec{\mathbf{q}}$ se encuentran en la misma dirección, el momento $\vec{\mathbf{k}}'$ también estará en esa dirección y podremos reducir el problema a una dimensión. Además, conociendo que $|\vec{\mathbf{p}}| = |\vec{\mathbf{q}}|$ y $E_- = E_+$, podemos simplificar dichas leyes de composición:

$$E_\gamma + \varepsilon = 2E_-, \quad (2.23)$$

$$|\vec{\mathbf{k}}| \pm |\vec{\mathbf{k}}'| = 2|\vec{\mathbf{p}}|. \quad (2.24)$$

Nos falta averiguar el sentido de $\vec{\mathbf{k}}'$, el cual se puede deducir observando las anteriores ecuaciones. Buscamos que E_γ sea mínima; por lo tanto, la energía total del proceso, así como la energía del electrón (y del positrón) deben tomar el menor valor posible. Conociendo la relación de dispersión, sabemos que la energía del electrón aumenta con el módulo de su momento, y que E_- sea mínima implica que $|\vec{\mathbf{p}}|$ también debe serlo. Atendiendo a la ecuación (2.24), vemos que $|\vec{\mathbf{p}}|$ será mínimo cuando el fotón de alta energía y el fotón de baja energía se encuentren en sentidos opuestos (como ya habíamos deducido en el anterior apartado),

$$|\vec{\mathbf{k}}| - |\vec{\mathbf{k}}'| = 2|\vec{\mathbf{p}}|. \quad (2.25)$$

Finalmente, completamos los cálculos sustituyendo la relación de dispersión y la relación entre momentos (ecuación 2.25) en la conservación de la energía simplificada (ecuación 2.23):

$$E_\gamma + \varepsilon = 2\sqrt{|\vec{\mathbf{p}}|^2 + m_e^2}, \quad (2.26)$$

$$(E_\gamma + \varepsilon)^2 = (|\vec{\mathbf{k}}| - |\vec{\mathbf{k}}'|)^2 + 4m_e^2, \quad (2.27)$$

$$4E_\gamma\varepsilon = 4m_e^2. \quad (2.28)$$

Logramos así el resultado para la energía umbral del fotón de alta energía que habíamos visto en el apartado anterior (ecuación 2.11),

$$E_\gamma = \frac{m_e^2}{\varepsilon}. \quad (2.29)$$

3. Violación de Invariancia Lorentz

En esta sección trataremos la interacción (2.1) desde el punto de vista de la Violación de Invariancia Lorentz (LIV). Utilizaremos por tanto un planteamiento que va más allá de la Relatividad Especial de Einstein. Las teorías LIV proponen una nueva relación de dispersión para partículas de altas energías, a la vez que mantienen la composición de energías y momentos de SR. De esta forma, no sería válido el principio de relatividad, existiendo un observador privilegiado.

La nueva relación de dispersión se construye añadiendo una serie de Taylor a la relación conocida de SR. Para ello, se utiliza la escala $E_{LV,n}$, la cual da cuenta los efectos de gravedad cuántica para cada orden n . Para poder añadir esta serie estamos considerando que la energía E de una partícula es mucho menor que la escala, $E \ll E_{LV,n}$. Así, cuanto mayor sea E , más apreciables serán los términos añadidos:

$$E^2 \simeq |\vec{\mathbf{p}}|^2 \left[1 - \sum_n s_n \cdot \left(\frac{E}{E_{LV,n}} \right)^n \right] + m^2. \quad (3.1)$$

Para resolver nuestro problema, aproximamos la relación de dispersión hasta primer orden del desarrollo de Taylor ($n = 1$), el cual sería el más apreciable en el caso de que esta sea la modificación que tenga lugar en la Naturaleza². Mostramos a continuación las expresiones de la relación de dispersión que emplearemos para el fotón de alta energía y para una partícula con masa m_e . El fotón de baja energía seguirá la relación de SR conocida (ecuación 2.2 con $m_\gamma = 0$), ya que $\varepsilon \ll E_\gamma$.

$$E_\gamma^2 \approx |\vec{\mathbf{k}}|^2 - s_1 \cdot |\vec{\mathbf{k}}|^2 \frac{E_\gamma}{E_{LV}}, \quad (3.2)$$

$$E_\pm^2 \approx |\vec{\mathbf{p}}|^2 - s_1 \cdot |\vec{\mathbf{p}}|^2 \frac{E_\pm}{E_{LV}} + m_e^2. \quad (3.3)$$

En las ecuaciones (3.2) y (3.3) aparece un coeficiente s_1 , el cual indica si la relación de dispersión para las partículas de alta energía varía aumentando el cuadrado de la energía de las partículas ($s_1 = -1$) o disminuyéndolo ($s_1 = +1$) respecto a la relación conocida de SR. El significado de este coeficiente se entiende mejor si calculamos la velocidad derivando la energía respecto del momento (ver anexo B):

$$|\vec{\mathbf{v}}_\gamma| = \frac{dE_\gamma}{d|\vec{\mathbf{k}}|} \approx 1 - s_1 \frac{E_\gamma}{E_{LV}}, \quad (3.4)$$

$$|\vec{\mathbf{v}}_\pm| = \frac{dE_\pm}{d|\vec{\mathbf{p}}|} \approx 1 - s_1 \frac{E_\pm}{E_{LV}} - \frac{m_e^2}{2E_\pm^2}. \quad (3.5)$$

²Si $n = 1$ entonces $s_n = s_1$ y $E_{LV,n} = E_{LV,1}$, que denotaremos como E_{LV} en lo que sigue.

De esta forma, las partículas de alta energía se moverían más rápido ($s_1 = -1$) o más despacio ($s_1 = +1$) que las de baja energía. En el caso de fotones, la relación de dispersión nos estaría indicando que la velocidad de la luz no es constante en el vacío, lo cual entra en contradicción con el primer postulado de SR (c constante).

Una vez planteada la nueva relación de dispersión, vamos a resolver la creación de pares utilizando la cinemática de LIV. Para ello, emplearemos de nuevo el método de los multiplicadores de Lagrange introducido en el anterior apartado. Proponemos así la función F a minimizar, bajo las restricciones de conservación de energía y conservación de momento:

$$F(\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}, \mu, \vec{\lambda}) = E_\gamma(|\vec{\mathbf{k}}|) - \mu \cdot \left[E_-(|\vec{\mathbf{p}}|) + E_+(|\vec{\mathbf{q}}|) - E_\gamma(|\vec{\mathbf{k}}|) - \varepsilon \right] - \sum_i \lambda_i \cdot (p_i + q_i - k_i - k'_i). \quad (3.6)$$

La función propuesta aquí es exactamente igual a la del apartado 2 (ecuación 2.12), por lo que sus derivadas proporcionarán las mismas conclusiones que antes. Es decir, en el caso de LIV la energía E_γ también será mínima cuando los momentos $\vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{k}}'$, $\vec{\mathbf{p}}$ y $\vec{\mathbf{q}}$ se encuentren en la misma dirección, con $\vec{\mathbf{k}}'$ en sentido opuesto a los demás. Cabe destacar que, aunque se obtengan las mismas conclusiones que en el caso anterior, la expresión explícita del multiplicador μ será distinta, ya que las derivadas de la relación de dispersión cambian (ver anexo B):

$$\mu = \frac{1 - s_1 \frac{E_\gamma}{E_{LV}}}{s_1 \frac{E_\gamma - E_-}{E_{LV}} - \frac{m_e^2}{2E_-^2}}. \quad (3.7)$$

Por tanto, se puede estudiar el problema en una dimensión y, además, tenemos $|\vec{\mathbf{p}}| = |\vec{\mathbf{q}}|$. Nos quedan las siguientes leyes de conservación simplificadas:

$$E_\gamma + \varepsilon = 2E_-, \quad (3.8)$$

$$|\vec{\mathbf{k}}| - |\vec{\mathbf{k}}'| = 2|\vec{\mathbf{p}}|. \quad (3.9)$$

A continuación, sustituimos la relación de dispersión modificada para el electrón (ecuación 3.3) en la ecuación (3.8) de conservación de la energía. Consideramos también para el término de orden $1/E_{LV}$ que podemos aproximar la relación de dispersión $E_- \approx |\vec{\mathbf{p}}|$. Según los órdenes de magnitud con los que estamos trabajando, $m_e \ll |\vec{\mathbf{p}}| \ll E_- \ll E_{LV}$, podemos despreciar correcciones de orden $m_e^2/|\vec{\mathbf{p}}|^2$ en los términos proporcionales a $1/E_{LV}$, ya que únicamente estamos buscando la primera corrección al umbral de SR:

$$E_\gamma + \varepsilon = 2\sqrt{|\vec{\mathbf{p}}|^2 + m_e^2} - s_1 \frac{|\vec{\mathbf{p}}|^3}{E_{LV}}. \quad (3.10)$$

Podemos ahora sustituir el momento del electrón en función de los momentos de los fotones (ecuación 3.9).

$$(E_\gamma + \varepsilon)^2 = (|\vec{\mathbf{k}}| - |\vec{\mathbf{k}}'|)^2 + 4m_e^2 - s_1 \frac{(|\vec{\mathbf{k}}| - |\vec{\mathbf{k}}'|)^3}{2E_{LV}}, \quad (3.11)$$

$$E_\gamma^2 + 2E_\gamma + \varepsilon^2 = |\vec{\mathbf{k}}|^2 - 2|\vec{\mathbf{k}}| \cdot |\vec{\mathbf{k}}'| + |\vec{\mathbf{k}}'|^2 + 4m_e^2 - s_1 \frac{(|\vec{\mathbf{k}}| - |\vec{\mathbf{k}}'|)^3}{2E_{LV}}. \quad (3.12)$$

Conociendo la relación de dispersión para el fotón de alta energía (ecuación 3.2) y el fotón de baja energía ($\varepsilon = |\vec{\mathbf{k}}'|$), trabajaremos con la ecuación anterior hasta encontrar la energía umbral. Además, como estamos trabajando hasta orden $1/E_{LV}$, para términos de este orden podremos realizar la aproximación $|\vec{\mathbf{k}}| \approx E_\gamma$ en la relación de dispersión y despejar así el módulo del momento³:

$$E_\gamma^2 \approx |\vec{\mathbf{k}}|^2 - s_1 \frac{E_\gamma^3}{E_{LV}}, \quad (3.13)$$

$$|\vec{\mathbf{k}}| = \sqrt{E_\gamma^2 + s_1 \frac{E_\gamma^3}{E_{LV}}} \approx E_\gamma \left(1 + \frac{s_1}{2} \cdot \frac{E_\gamma}{E_{LV}} \right). \quad (3.14)$$

Si consideramos que el fotón de alta energía sigue una relación de dispersión con $s_1 = -1$ (fotón superlumínico, su energía es mayor al momento de SR), la ecuación (3.12) hasta orden $1/E_{LV}$ queda de la siguiente forma:

$$4E_\gamma \varepsilon = 4m_e^2 - \frac{E_\gamma^3 + E_\gamma^2 \varepsilon - 3E_\gamma \varepsilon^2 + \varepsilon^3}{2E_{LV}}. \quad (3.15)$$

Despejando E_γ del miembro de la izquierda obtenemos la expresión de la energía umbral de Relatividad Especial (ecuación 2.11), a la que añadimos una corrección a primer orden en $1/E_{LV}$:

$$E_\gamma = \frac{m_e^2}{\varepsilon} - \frac{E_\gamma^3 + E_\gamma^2 \varepsilon - 3E_\gamma \varepsilon^2 + \varepsilon^3}{8E_{LV} \cdot \varepsilon}. \quad (3.16)$$

Como únicamente nos interesa la primera corrección, podemos quedarnos con el término más alto para primer orden en $1/E_{LV}$, es decir, el que contiene el término E_γ^3 . Podemos despreciar los demás sumandos porque estamos considerando las aproximaciones $\varepsilon \ll E_\gamma \ll E_{LV}$ en la escala de energías.

$$\frac{E_\gamma^3}{8E_{LV}} + E_\gamma \varepsilon - m_e^2 = 0. \quad (3.17)$$

No obstante, no podemos despreciar el término cúbico frente al término lineal en E_γ . Considerar $E_\gamma \ll E_{LV}$ no implica que se cumpla $E_\gamma^3/8E_{LV} \ll E_\gamma \varepsilon$, por tanto, obtendremos la energía umbral en este caso al resolver la ecuación de tercer grado.

³Empleamos también la aproximación $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$, con $x = s_1 \frac{E_\gamma}{E_{LV}}$, donde $E_\gamma \ll E_{LV}$.

Por otra parte, si consideramos que el fotón de alta energía sigue una relación de dispersión con $s_1 = +1$ (fotón sublumínico, su energía es menor al momento de SR), la ecuación (3.12) para orden $1/E_{LV}$ queda:

$$4E_\gamma\varepsilon = 4m_e^2 + \frac{E_\gamma^3 + E_\gamma^2\varepsilon - 3E_\gamma\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{2E_{LV}}. \quad (3.18)$$

Realizando las mismas aproximaciones que en el caso negativo y quedándonos con la primera corrección a orden $1/E_{LV}$, la energía umbral la obtenemos a partir de la siguiente ecuación de tercer grado:

$$\frac{E_\gamma^3}{8E_{LV}} - E_\gamma\varepsilon + m_e^2 = 0. \quad (3.19)$$

Hemos hallado la energía umbral de un fotón de alta energía para una cinemática de acuerdo con una Violación de Invariancia Lorentz. Para poder comparar estos resultados con los de SR, representamos en la figura 3 el cociente entre la energía umbral para LIV y la energía umbral para SR, frente a la escala E_{LV} .

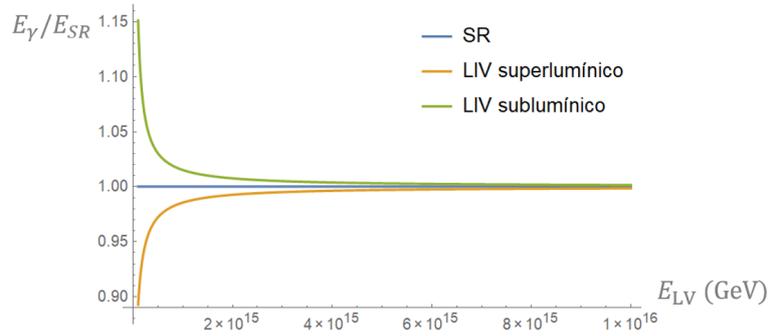


Figura 3: Cociente entre la energía umbral de LIV y SR frente a la escala E_{LV} .

Vemos en los resultados de la figura 3 que para un fotón con velocidad mayor a la de SR (fotón superlumínico), la energía umbral disminuye respecto a esta (ecuación 2.11). En este caso, los fotones de altas energías provenientes de fuentes alejadas interactuarían más con el fondo de luz extragaláctico, es decir, sería más fácil que se produjera la reacción. Esto derivaría en una disminución de la transparencia de EBL, ya que recibiríamos un menor flujo de fotones que el esperado.

Por otra parte, para un fotón con velocidad menor a la de SR (fotón sublumínico), la energía umbral aumenta respecto a la de SR. Este efecto podría resultar en un aumento de la transparencia de EBL, ya que fotones de altas energías que se consideraba que creaban pares en SR no lo hacen en LIV. En este caso, sería más difícil que se produjera la interacción de creación de un par electrón-positrón. Cabe destacar que en ambos casos si consideramos $E_{LV} \rightarrow \infty$ recuperamos la expresión de la energía umbral vista para Relatividad Especial (ecuación 2.11).

4. Deformación de Relatividad Especial

En este apartado planteamos una resolución innovadora para el problema de la creación de pares, aplicando Deformación de Relatividad Especial (DSR). Las teorías que se engloban bajo este nombre se caracterizan por plantear una relación de dispersión modificada para partículas de altas energías, además de nuevas leyes de composición de energías y momentos (ver [5]).

La nueva relación de dispersión se construye añadiendo términos a la relación de dispersión de Relatividad Especial. En este caso trabajamos hasta primer orden en la inversa de la escala de modificación, por lo que únicamente podemos incorporar dos términos compatibles con invariancia rotacional. La relación de dispersión modificada para una partícula con energía E , momento $\vec{\mathbf{p}}$ y masa m es:

$$E^2 - |\vec{\mathbf{p}}|^2 + \frac{\alpha_1}{M}E^3 + \frac{\alpha_2}{M}E|\vec{\mathbf{p}}|^2 = m^2. \quad (4.1)$$

Debemos notar que, con esta nueva formulación, nos aparece una escala M de altas energías. Supuestamente, esta escala sería próxima a E_{Pl} , ya que pretende dar cuenta de los efectos de gravedad cuántica, como ocurría en el caso de LIV (sección 3). Sin embargo, las cotas deducidas para E_{LV} no se aplican necesariamente en el caso de DSR, es decir, la escala podría tomar un valor distinto en cada caso (ver sección 5).

De esta forma, los términos que añadimos a la relación (2.2) de SR son pequeños (ya que consideramos $E \ll M$), manteniendo la expresión de SR para partículas de bajas energías. Además, en la ecuación (4.1) nos aparecen los coeficientes α_1 y α_2 , los cuales adquirirán valores distintos dependiendo de cómo difiera la nueva relación de dispersión respecto a la de SR.

Al plantear teorías que deforman la Relatividad Especial y que mantienen la equivalencia entre los observadores, encontramos también que debe existir una deformación en las leyes de composición. Es decir, la energía o el momento total de un sistema no es igual (en este caso) a la suma de energías o momentos de las partículas, pudiendo aproximar la diferencia por una cantidad proporcional a $1/M$. Así, a bajas energías se seguirían cumpliendo las leyes de composición conocidas de SR (ecuaciones 2.3 y 2.4).

Para un sistema como el que estamos estudiando, en el que interactúan dos partículas en tres dimensiones, la energía total y el momento total se pueden expresar en función de los cuádrimomentos de estas partículas: $(p_0, \vec{\mathbf{p}})$ y $(q_0, \vec{\mathbf{q}})$.

$$E_{\text{tot}} = [p \oplus q]_0 = p_0 + q_0 + \frac{\beta_1}{M}p_0q_0 + \frac{\beta_2}{M}\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{q}}, \quad (4.2)$$

$$[p_{\text{tot}}]_i = [p \oplus q]_i = p_i + q_i + \frac{\gamma_1}{M}p_0q_i + \frac{\gamma_2}{M}q_0p_i + \frac{\gamma_3}{M}\epsilon_{ijk}p_jq_k. \quad (4.3)$$

De nuevo se incorporan términos que son compatibles con invariancia rotacional para orden $1/M$, apareciendo coeficientes (en general desconocidos) acompañando a cada uno de esos términos: $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ y γ_3 .

Las teorías físicas que incluyen Deformación de Relatividad Especial tratan de no alejarse demasiado de los postulados de SR, por lo que únicamente suponen una ligera modificación respecto de esta. Así, para que siga siendo válido el principio de relatividad y las observaciones realizadas por los distintos observadores del universo sean equivalentes, las transformaciones entre ellos deben dejar invariantes las relaciones de dispersión y las leyes de conservación.

Nos encontramos en un contexto que va más allá de la Relatividad Especial, por lo que las relaciones de equivalencia mencionadas no serán las transformaciones de Lorentz sino otras (ver [5]). Con el objetivo de que la relación de dispersión modificada (ecuación 4.1) y las leyes de composición (ecuaciones 4.2 y 4.3) sean compatibles entre sí, al buscar las nuevas transformaciones aparecen relaciones entre los coeficientes:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 0, \quad (4.4)$$

$$\alpha_2 + \beta_2 = \gamma_1 + \gamma_2. \quad (4.5)$$

Una vez planteada la nueva cinemática, volveremos a resolver la interacción estudiada (ecuación 2.1) utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange. En este caso, las restricciones de conservación de energía y momento pueden variar dependiendo del orden en el que compongamos las energías o momentos correspondientes a las distintas partículas. Es decir, la expresión de la composición $[p \oplus q]_\nu$ cambia si indicamos esta como $[q \oplus p]_\nu$, aunque se trate de las mismas partículas. Para resolver el problema de creación de pares vamos a utilizar las expresiones de las leyes de composición que presentamos a continuación:

$$E_{\text{ini}} = E_\gamma + \varepsilon + \frac{\beta_1}{M} E_\gamma \varepsilon + \frac{\beta_2}{M} \sum_i k_i k'_i, \quad (4.6)$$

$$E_{\text{fin}} = E_- + E_+ + \frac{\beta_1}{M} E_- E_+ + \frac{\beta_2}{M} \sum_i p_i q_i, \quad (4.7)$$

$$(p_{\text{ini}})_i = k_i + k'_i + \frac{\gamma_1}{M} E_\gamma k'_i + \frac{\gamma_2}{M} \varepsilon k_i + \frac{\gamma_3}{M} \epsilon_{ijk} k_j k'_k, \quad (4.8)$$

$$(p_{\text{fin}})_i = p_i + q_i + \frac{\gamma_1}{M} E_- q_i + \frac{\gamma_2}{M} E_+ p_i + \frac{\gamma_3}{M} \epsilon_{ijk} p_j q_k. \quad (4.9)$$

Ahora ya conocemos todos los elementos necesarios para construir la función F a minimizar, con el objetivo de hallar la energía umbral E_γ .

$$F(\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}, \mu, \vec{\lambda}) = E_\gamma(|\vec{\mathbf{k}}|) - \mu \cdot (E_{\text{fin}} - E_{\text{ini}}) - \sum_i \lambda_i \cdot [(p_{\text{fin}})_i - (p_{\text{ini}})_i]. \quad (4.10)$$

El siguiente paso en el proceso es anular las derivadas de la función F respecto a cada una de sus variables, de forma que llegaremos a un sistema de ecuaciones que posteriormente resolveremos.

$$\frac{\partial F}{\partial p_l} = -\mu \cdot \frac{\partial E_{\text{fin}}}{\partial p_l} - \lambda_l \cdot \frac{\partial (p_{\text{fin}})_l}{\partial p_l} = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_l} = -\mu \cdot \frac{\partial E_{\text{fin}}}{\partial q_l} - \lambda_l \cdot \frac{\partial (p_{\text{fin}})_l}{\partial q_l} = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial F}{\partial k_l} = \frac{dE_\gamma}{dk_l} + \mu \cdot \frac{dE_{\text{ini}}}{dk_l} + \lambda_l \cdot \frac{d(p_{\text{ini}})_l}{dk_l} = 0, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu} = E_{\text{fin}} - E_{\text{ini}} = 0, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_l} = (p_{\text{fin}})_l - (p_{\text{ini}})_l = 0. \quad (4.15)$$

Nos encontramos así frente a un sistema de trece ecuaciones con trece incógnitas: las tres componentes de los momentos $\vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{p}}$ y $\vec{\mathbf{q}}$, así como los multiplicadores de Lagrange μ y λ . Veamos la forma explícita de las derivadas respecto al momento para las ecuaciones (4.11), (4.12) y (4.13).

$$\frac{\partial F}{\partial p_l} = -\mu \frac{\partial E_{\text{fin}}}{\partial p_l} - \lambda_l \left[1 + \frac{\gamma_2}{M} E_+ + \frac{\gamma_1}{M} q_l \frac{dE_-}{dp_l} \right] - \sum_i \lambda_i \frac{\gamma_3}{M} \epsilon_{ilk} q_k = 0, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_l} = -\mu \frac{\partial E_{\text{fin}}}{\partial q_l} - \lambda_l \left[1 + \frac{\gamma_1}{M} E_- + \frac{\gamma_2}{M} p_l \frac{dE_+}{dq_l} \right] - \sum_i \lambda_i \frac{\gamma_3}{M} \epsilon_{ijl} p_j = 0, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial F}{\partial k_l} = \frac{dE_\gamma}{dk_l} + \mu \frac{dE_{\text{ini}}}{dk_l} + \lambda_l \left[1 + \frac{\gamma_1}{M} \frac{dE_\gamma}{dk_l} k'_l + \frac{\gamma_2}{M} \varepsilon \right] + \sum_i \lambda_i \frac{\gamma_3}{M} \epsilon_{ilk} k'_k = 0. \quad (4.18)$$

Como únicamente buscamos la corrección a primer orden en $1/M$, podemos aproximar por la solución de Relatividad Especial los términos que acompañan a esta escala. En SR (sección 2) todos los momentos se encuentran en la misma dirección y las energías de electrón y positrón coinciden, $E_+ = E_-$. De esta forma, los términos que incluyen γ_3 desaparecen de las ecuaciones (4.16), (4.17) y (4.18), quedándonos expresiones más sencillas:

$$\frac{\partial F}{\partial p_l} = -\mu \frac{\partial E_{\text{fin}}}{\partial p_l} - \lambda_l \left[1 + \frac{\gamma_2}{M} E_+ + \frac{\gamma_1}{M} q_l \frac{dE_-}{dp_l} \right] = 0, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial F}{\partial q_l} = -\mu \frac{\partial E_{\text{fin}}}{\partial q_l} - \lambda_l \left[1 + \frac{\gamma_1}{M} E_- + \frac{\gamma_2}{M} p_l \frac{dE_+}{dq_l} \right] = 0, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial F}{\partial k_l} = \frac{dE_\gamma}{dk_l} + \mu \frac{dE_{\text{ini}}}{dk_l} + \lambda_l \left[1 + \frac{\gamma_1}{M} \frac{dE_\gamma}{dk_l} k'_l + \frac{\gamma_2}{M} \varepsilon \right] = 0. \quad (4.21)$$

Con el objetivo de deducir la relación entre las direcciones de los momentos $\vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{p}}$ y $\vec{\mathbf{q}}$ hasta orden $1/M$, igualamos a continuación los multiplicadores de Lagrange λ_l para las anteriores ecuaciones:

$$\begin{aligned}\lambda_l &= \left[\frac{dE_-}{d|\vec{\mathbf{p}}|} \left(1 + \frac{\beta_1}{M} E_+ \right) + \frac{\beta_2}{M} q_l \frac{|\vec{\mathbf{p}}|}{p_l} \right] \left[1 + \frac{\gamma_1}{M} E_- + \frac{\gamma_2}{M} p_l \frac{dE_+}{dq_l} \right] \cdot \frac{p_l}{|\vec{\mathbf{p}}|} = \\ &= \left[\frac{dE_+}{d|\vec{\mathbf{q}}|} \left(1 + \frac{\beta_1}{M} E_- \right) + \frac{\beta_2}{M} p_l \frac{|\vec{\mathbf{q}}|}{q_l} \right] \left[1 + \frac{\gamma_2}{M} E_+ + \frac{\gamma_1}{M} q_l \frac{dE_-}{dp_l} \right] \cdot \frac{q_l}{|\vec{\mathbf{q}}|},\end{aligned}\quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}\lambda_l &= \mu \cdot \left[\frac{dE_-}{d|\vec{\mathbf{p}}|} \left(1 + \frac{\beta_1}{M} E_+ \right) + \frac{\beta_2}{M} q_l \frac{|\vec{\mathbf{p}}|}{p_l} \right] \left[1 + \frac{\gamma_2}{M} \varepsilon + \frac{\gamma_1}{M} k'_l \frac{dE_\gamma}{d|\vec{\mathbf{k}}|} \right] \cdot \frac{p_l}{|\vec{\mathbf{p}}|} = \\ &= \left[\left(1 + \mu + \mu \frac{\beta_1}{M} \varepsilon \right) \cdot \frac{dE_\gamma}{d|\vec{\mathbf{k}}|} + \mu \frac{\beta_2}{M} k'_l \frac{|\vec{\mathbf{k}}|}{k_l} \right] \left[1 + \frac{\gamma_2}{M} E_+ + \frac{\gamma_1}{M} q_l \frac{dE_-}{dp_l} \right] \cdot \frac{k_l}{|\vec{\mathbf{k}}|}.\end{aligned}\quad (4.23)$$

De esta forma, demostramos que los vectores unitarios de los momentos $\vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{p}}$ y $\vec{\mathbf{q}}$ son proporcionales, $p_l/|\vec{\mathbf{p}}| \propto q_l/|\vec{\mathbf{q}}| \propto k_l/|\vec{\mathbf{k}}|$. Este resultado implica que los tres momentos mencionados (y el vector $\vec{\lambda}$) se encuentran en la misma dirección. En cuanto al sentido asociado a estos vectores, del mismo modo que en apartados anteriores, podremos deducirlo a partir de la expresión del multiplicador μ , el cual despejamos utilizando la ecuación (4.23):

$$\mu = -\frac{2E_-^2}{m_e^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M}\right).\quad (4.24)$$

Vemos en la ecuación (4.24) que los términos a partir de orden $1/M$ podrían cambiar el valor de μ pero no su signo, ya que trabajamos con las aproximaciones $m_e \ll E \ll M$. Así, μ en este caso será también un número negativo y los momentos del fotón de alta energía, electrón y positrón se encontrarán en el mismo sentido. Por su parte, el momento $\vec{\mathbf{k}}'$ asociado al fotón del fondo también seguirá esa dirección (su sentido lo deduciremos más adelante).

Por lo tanto, hemos reducido el problema a una dimensión: la dirección de interacción de los momentos de las partículas. El sistema de ecuaciones que nos queda contiene cinco ecuaciones y cinco incógnitas: los módulos de los vectores que aparecen y el multiplicador μ . Para aliviar la notación, a partir de este punto denotaremos estos módulos como $|\vec{\mathbf{k}}| = k_l = k$, $|\vec{\mathbf{k}}'| = k'_l = k'$, $|\vec{\mathbf{p}}| = p_l = p$, $|\vec{\mathbf{q}}| = q_l = q$, $|\vec{\lambda}| = \lambda_l = \lambda$.

Continuamos con la búsqueda de la energía umbral para la creación de pares, notando que solamente las ecuaciones (4.19), (4.20) y (4.21) contienen a los multiplicadores μ y λ_l .

Para que este sistema (con tres ecuaciones) sea compatible, el valor asociado a los multiplicadores debe ser distinto de cero, lo cual implica que dichas ecuaciones nos van a proporcionar una relación entre dos de las variables del problema. Igualando de nuevo el multiplicador λ para las ecuaciones (4.19) y (4.20), obtendremos una relación entre los momentos (o energías) del electrón y el positrón.

$$\begin{aligned}\lambda &= \left[\frac{dE_-}{dp} \left(1 + \frac{\beta_1}{M} E_+ \right) + \frac{\beta_2}{M} q \right] \cdot \left[1 + \frac{\gamma_1}{M} E_- + \frac{\gamma_2}{M} p \frac{dE_+}{dq} \right] = \\ &= \left[\frac{dE_+}{dq} \left(1 + \frac{\beta_1}{M} E_- \right) + \frac{\beta_2}{M} p \right] \cdot \left[1 + \frac{\gamma_2}{M} E_+ + \frac{\gamma_1}{M} q \frac{dE_-}{dp} \right].\end{aligned}\quad (4.25)$$

En el anexo C se han incluido las aproximaciones utilizadas para la relación de dispersión y sus derivadas (ecuaciones C.5 y C.8), considerando la energía de una partícula mucho menor que la escala de DSR, $E \ll M$. Resolviendo la igualdad anterior para orden cero, es decir, sin términos de orden $1/M$ o superiores, obtenemos el resultado visto previamente en el caso de Relatividad Especial (ecuación 2.22): electrón y positrón tienen la misma energía (y momento), $E_+ = E_-$ y $q = p$.

Por otra parte, podemos calcular la relación entre E_+ y E_- hasta orden $1/M$, teniendo en cuenta que podemos aproximar $E_+ \approx E_-$ y $q \approx p$ para los términos de orden $1/M$:

$$E_-^2 = E_+^2 \cdot \left[1 + \frac{2(\gamma_2 - \gamma_1)}{M} E_- + \frac{3(\gamma_1 - \gamma_2)}{2ME_-} m_e^2 + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{4ME_-^3} m_e^4 \right]. \quad (4.26)$$

Aplicando las aproximaciones $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ y $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ para $x \ll 1$, conseguimos despejar E_+ en función de E_- hasta el orden $1/M$ con el que estamos trabajando:

$$E_+ \approx E_- + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{M} E_-^2 + \frac{3(\gamma_2 - \gamma_1)}{4M} m_e^2 + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{8ME_-^2} m_e^4. \quad (4.27)$$

Hasta este punto hemos utilizado tres de las cinco ecuaciones obtenidas al derivar la función F . Las ecuaciones restantes (4.14 y 4.15) hacen referencia a las leyes de conservación de energía y momento. Como hemos reducido el problema a una dimensión, dichas ecuaciones pueden simplificarse de la siguiente forma:

$$E_\gamma + \varepsilon + \frac{\beta_1}{M} E_\gamma \varepsilon \pm \frac{\beta_2}{M} k \cdot k' = E_- + E_+ + \frac{\beta_1}{M} E_- E_+ + \frac{\beta_2}{M} p \cdot q, \quad (4.28)$$

$$k \pm k' \pm \frac{\gamma_1}{M} E_\gamma k' + \frac{\gamma_2}{M} \varepsilon k = p + q + \frac{\gamma_1}{M} E_- q + \frac{\gamma_2}{M} E_+ p. \quad (4.29)$$

Atendiendo a las anteriores ecuaciones se puede inferir de forma sencilla el signo de \vec{k}' . Nuestro objetivo es hallar la energía mínima asociada al fotón de alta energía, E_γ , para que en su interacción con un fotón de baja energía se cree un par electrón-positrón. De esta forma, la energía total del proceso debe ser mínima, lo que implica que E_- y E_+ también adquirirán el menor valor posible. Sabemos además que las energías del electrón y el positrón son funciones crecientes con sus respectivos momentos, por lo que si E_- y E_+ son mínimas, p y q también lo serán. Para que esto ocurra, debemos tener una resta en el miembro izquierdo de la ecuación (4.29). Así, comprobamos de nuevo que, en el caso umbral, \vec{k}' debe encontrarse en sentido opuesto a los demás momentos.

$$E_\gamma + \varepsilon + \frac{\beta_1}{M} E_\gamma \varepsilon - \frac{\beta_2}{M} k \cdot k' = E_- + E_+ + \frac{\beta_1}{M} E_- E_+ + \frac{\beta_2}{M} p \cdot q, \quad (4.30)$$

$$k - k' - \frac{\gamma_1}{M} E_\gamma k' + \frac{\gamma_2}{M} \varepsilon k = p + q + \frac{\gamma_1}{M} E_- q + \frac{\gamma_2}{M} E_+ p. \quad (4.31)$$

Antes de pasar a resolver el sistema final de dos ecuaciones, debemos escribir este en función únicamente de dos incógnitas, que serán E_- y E_γ . Para ello, sustituimos los momentos teniendo en cuenta la relación de dispersión aproximada para partículas de alta energía (ecuación C.5), empleando la relación de dispersión de SR para el fotón de baja energía ($k' = \varepsilon$).

Además, utilizamos la relación deducida entre E_- y E_+ (ecuación 4.27) para los términos de orden cero, considerando que a orden $1/M$ podemos aproximar $E_+ \approx E_-$.

$$\begin{aligned} \frac{\beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 - \gamma_2}{M} E_-^2 + 2E_- + \frac{3\gamma_2 - 3\gamma_1 - 4\beta_2}{4M} m_e^2 + \frac{\gamma_1 - \gamma_2 + 2\beta_2}{8ME_-^2} m_e^4 = \\ = E_\gamma + \varepsilon + \frac{\beta_1 - \beta_2}{M} E_\gamma \varepsilon, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\gamma_1}{M} E_-^2 + 2E_- - \frac{m_e^2}{E_-} - \frac{\gamma_2 + 3\gamma_1 + 4\alpha_2}{4M} m_e^2 + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{4ME_-^2} m_e^4 + \\ + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{16ME_-^4} m_e^6 = E_\gamma - \varepsilon + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2M} E_\gamma^2 + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{M} E_\gamma \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Notar que únicamente hemos mantenido los términos hasta orden $1/M$, despreciando órdenes superiores ($1/M^2$, $1/M^3$, etc.). Cabe destacar que al conservar únicamente el primer orden, lo que estamos haciendo es buscar la primera corrección a la energía umbral para DSR, es decir, el primer término que difiere del resultado obtenido para SR, por lo que también podemos despreciar algunos sumandos frente a otros (considerando $\varepsilon \ll m_e \ll E_\gamma, E_- \ll M$).

$$\frac{\beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 - \gamma_2}{M} E_-^2 + 2E_- + \frac{3\gamma_2 - 3\gamma_1 - 4\beta_2}{4M} m_e^2 = E_\gamma + \varepsilon + \frac{\beta_1 - \beta_2}{M} E_\gamma \varepsilon, \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\gamma_1}{M} E_-^2 + 2E_- - \frac{m_e^2}{E_-} - \frac{\gamma_2 + 3\gamma_1 + 4\alpha_2}{4M} m_e^2 = \\ & = E_\gamma - \varepsilon + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2M} E_\gamma^2 + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{M} E_\gamma \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Una vez obtenido el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas simplificado, este se puede resolver de varias formas. Aquella que utilizaremos consiste en sustituir en los términos de orden $1/M$ la expresión de E_- vista en el apartado 2 para Relatividad Especial (ecuación 2.23), ya que solamente estamos buscando la corrección a la energía umbral hasta el orden mencionado:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 - \gamma_2}{4M} (E_\gamma - \varepsilon)^2 + 2E_- + \frac{3\gamma_2 - 3\gamma_1 - 4\beta_2}{4M} m_e^2 = \\ & = E_\gamma + \varepsilon + \frac{\beta_1 - \beta_2}{M} E_\gamma \varepsilon, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\gamma_1}{4M} (E_\gamma - \varepsilon)^2 + 2E_- - \frac{m_e^2}{E_-} - \frac{\gamma_2 + 3\gamma_1 + 4\alpha_2}{4M} m_e^2 = \\ & = E_\gamma - \varepsilon + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2M} E_\gamma^2 + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{M} E_\gamma \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Despejando E_- de la ecuación (4.36) obtenemos su expresión hasta el orden $1/M$ requerido⁴. Notar que recuperamos la ecuación (2.23) cuando $M \rightarrow \infty$:

$$E_- \approx \frac{E_\gamma + \varepsilon}{2} + \frac{\beta_1 - \beta_2}{2M} E_\gamma \varepsilon + \frac{3\gamma_1 - 3\gamma_2 + 4\beta_2}{8M} m_e^2 - \frac{\beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 - \gamma_2}{8M} (E_\gamma + \varepsilon)^2. \quad (4.38)$$

Por último, si sustituimos la expresión de E_- calculada (ecuación 4.38) en la ecuación (4.37), obtendremos una ecuación para la energía umbral E_γ :

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_1 + \gamma_2 - \beta_1 - \beta_2 - \alpha_1 - \alpha_2}{8M} E_\gamma^3 + \frac{3(\alpha_1 + \alpha_2) + \beta_1 - 7\beta_2 + 3\gamma_1 - \gamma_2}{8M} E_\gamma^2 \varepsilon + \\ & + \frac{\beta_2 - \gamma_2 - \alpha_2}{2M} E_\gamma m_e^2 + E_\gamma \varepsilon - m_e^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Como buscamos la primera corrección a la energía umbral, podríamos únicamente tener en cuenta para orden $1/M$ el término dominante, el cual contiene a E_γ^3 .

⁴Volvemos a utilizar aquí la aproximación $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ para una expresión de $x \ll 1$ según la relación entre escalas empleada a lo largo de toda la sección.

No obstante, debemos incluir también en la ecuación (4.39) las relaciones conocidas entre los coeficientes (ver [5]), las cuales vienen dadas por las ecuaciones (4.4) y (4.5):

$$\frac{\cancel{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_2}}{8M} E_\gamma^3 + E_\gamma \varepsilon - m_e^2 = 0. \quad (4.40)$$

Hemos alcanzado un resultado en el que la primera corrección a la energía umbral se anula, por lo que debemos buscar la siguiente corrección, volviendo a considerar términos que anteriormente habíamos despreciado.

$$\frac{\gamma_2 + 3\gamma_1 - \beta_1 - 5\beta_2}{4M} E_\gamma^2 \varepsilon + \frac{2\beta_2 - \gamma_1 - 2\gamma_2}{2M} E_\gamma m_e^2 + E_\gamma \varepsilon - m_e^2 = 0. \quad (4.41)$$

Los términos pertenecientes a la siguiente corrección no se anulan, y podemos por tanto despejar la energía umbral del fotón de alta energía:

$$E_\gamma = \frac{m_e^2}{\varepsilon} + \frac{\beta_1 + 5\beta_2 - \gamma_2 - 3\gamma_1}{4M} E_\gamma^2 + \frac{\gamma_1 + 2\gamma_2 - 2\beta_2}{2M} \frac{m_e^2}{\varepsilon} E_\gamma. \quad (4.42)$$

Finalmente, podemos aproximar para términos de orden $1/M$ el valor de la energía umbral de Relatividad Especial (ecuación 2.11).

$$E_\gamma \approx \frac{m_e^2}{\varepsilon} \left[1 + \frac{\beta_1 + \beta_2 + 3\gamma_2 - \gamma_1}{4M} \cdot \frac{m_e^2}{\varepsilon} \right]. \quad (4.43)$$

Apreciamos que el resultado obtenido es ligeramente superior a la energía umbral de Relatividad Especial (si $\gamma_1 < \beta_1 + \beta_2 + 3\gamma_2$). La diferencia con la energía umbral de SR es muy pequeña, más aún de lo esperado, ya que no se ha calculado utilizando la primera corrección (la cual se anula) sino la segunda. Por tanto, es de esperar que la energía umbral para el caso de LIV sea mayor que la de DSR, ya que los resultados obtenidos en la sección 3 se correspondían con la primera corrección a la energía umbral (ver sección 5).

Por otra parte, volviendo a las leyes de composición planteadas por una Deformación de Relatividad Especial (ecuaciones 4.2 y 4.3), podríamos preguntarnos si el cálculo de la energía umbral cambia al variar la forma de componer los momentos y las energías. Es decir, nos preguntamos si al emplear la composición $[q \oplus p]_\nu$ en lugar de la composición $[p \oplus q]_\nu$ utilizada en este apartado (ecuaciones 4.6, 4.7, 4.8 y 4.9) cambia el resultado obtenido (ecuación 4.43).

Podemos inferir que, si componemos la energía y el momento final de forma distinta (cambiando E_- por E_+ y $\vec{\mathbf{p}}$ por $\vec{\mathbf{q}}$), la única variación que veremos será una permutación de las partículas e_- y e_+ .

En este caso, los momentos y energías asociados previamente al electrón pasarían a ser los del positrón y viceversa. Sin embargo, componiendo la energía y el momento inicial de forma distinta (cambiando E_γ por ε y \vec{k} por \vec{k}') encontraríamos intercambiados los coeficientes γ_1 y γ_2 en la ecuación del momento inicial.

$$(p_{\text{ini}})_i = k'_i + k_i + \frac{\gamma_1}{M}\varepsilon k_i + \frac{\gamma_2}{M}E_\gamma k'_i + \frac{\gamma_3}{M}\epsilon_{ijk}k'_j k_k. \quad (4.44)$$

De esta forma, cambiaría la expresión explícita de la función F (ecuación 4.10) y, por tanto, de su derivada respecto al multiplicador $\vec{\lambda}$ (ecuación 4.15). Todo el desarrollo posterior que hemos realizado utilizando el método de multiplicadores de Lagrange seguiría siendo válido, obteniendo finalmente la siguiente expresión para la energía umbral:

$$E_\gamma \approx \frac{m_e^2}{\varepsilon} \left[1 + \frac{\beta_1 + \beta_2 + 3\gamma_1 - \gamma_2}{4M} \cdot \frac{m_e^2}{\varepsilon} \right]. \quad (4.45)$$

El resultado logrado se corresponde con el de la ecuación (4.43), intercambiando los coeficientes γ_1 y γ_2 (mismo efecto que tenía lugar en la composición de momentos alternativa). En comparación con el resultado de Relatividad Especial, hemos llegado a un resultado que nos indicaría que la energía umbral del proceso estudiado es ligeramente superior a la de SR (si $\gamma_2 < \beta_1 + \beta_2 + 3\gamma_1$), e inferior si no se cumple esta condición.

5. Discusión de resultados

En este apartado pondremos en común y compararemos los resultados hallados en las secciones 2, 3 y 4 para la energía umbral del fotón de alta energía en el proceso de creación de pares indicado en la ecuación (2.1). A continuación exponemos un resumen con las expresiones de la energía umbral obtenidas en los distintos apartados:

$$\text{Relatividad Especial: } E_\gamma = \frac{m_e^2}{\varepsilon}, \quad (5.1)$$

$$\text{LIV con } s_1 = -1 : \frac{E_\gamma^3}{8E_{\text{LV}}} + E_\gamma \varepsilon - m_e^2 = 0, \quad (5.2)$$

$$\text{LIV con } s_1 = +1 : \frac{E_\gamma^3}{8E_{\text{LV}}} - E_\gamma \varepsilon + m_e^2 = 0, \quad (5.3)$$

$$\text{Deformación de SR: } E_\gamma \approx \frac{m_e^2}{\varepsilon} \left[1 + \frac{1}{M'} \cdot \frac{m_e^2}{\varepsilon} \right]. \quad (5.4)$$

Notar que en el caso de Deformación de Relatividad Especial hemos redefinido la escala de la modificación respecto a SR como M' , cuya expresión explícita sería $4M/(\beta_1 + \beta_2 + 3\gamma_2 - \gamma_1)$ si utilizamos la composición (4.8) y $4M/(\beta_1 + \beta_2 + 3\gamma_1 - \gamma_2)$ considerando la composición (4.44). En ambos casos, M' podría ser positiva o negativa dependiendo de los valores que tomen los coeficientes β_1 , β_2 , γ_1 y γ_2 .

Con el objetivo de realizar una comparación de los resultados obtenidos a partir de las diferentes teorías, podemos representar gráficamente la energía umbral E_γ frente a la energía del fondo, ε . En la introducción habíamos mencionado que las distintas referencias (ver [6] y [7]) asocian a la luz del fondo extragaláctico (EBL) longitudes de onda entre $0.1 \mu\text{m}$ y $1000 \mu\text{m}$ (ver figura 1). En términos de energías, consideraremos, por tanto, el rango de representación $1.24 \cdot 10^{-3} \text{ eV} < \varepsilon < 12.4 \text{ eV}$.

Para poder apreciar diferencias entre las distintas teorías, tomaremos modificaciones respecto a SR notables. Es decir, debemos utilizar términos añadidos en los caso de LIV y de DSR que sean comparables a la solución de SR. Eso nos proporciona distintas expresiones para las escalas E_{LV} y M' en función ε :

$$\text{LIV: } \frac{E_\gamma^3}{8E_{LV}} \sim E_\gamma \varepsilon \quad \Rightarrow \quad E_{LV} \sim \frac{E_\gamma^2}{8\varepsilon} \sim \frac{m_e^4}{8\varepsilon^3}, \quad (5.5)$$

$$\text{DSR: } \frac{m_e^2}{\varepsilon} \sim \frac{m_e^4}{\varepsilon^2 M'} \quad \Rightarrow \quad M' \sim \frac{m_e^2}{\varepsilon}. \quad (5.6)$$

Como tenemos un rango de longitudes de onda y, por tanto, un rango de energías para el fondo extragaláctico, las ecuaciones anteriores nos proporcionan un rango de escalas para DSR y LIV. Escogiendo como estimación una escala intermedia en ese rango, $E_{LV} = 10^{15} \text{ GeV}$ en el caso de LIV y $M' = 10^3 \text{ GeV}$ para DSR, podemos a continuación realizar la representación mencionada (ver figura 4).

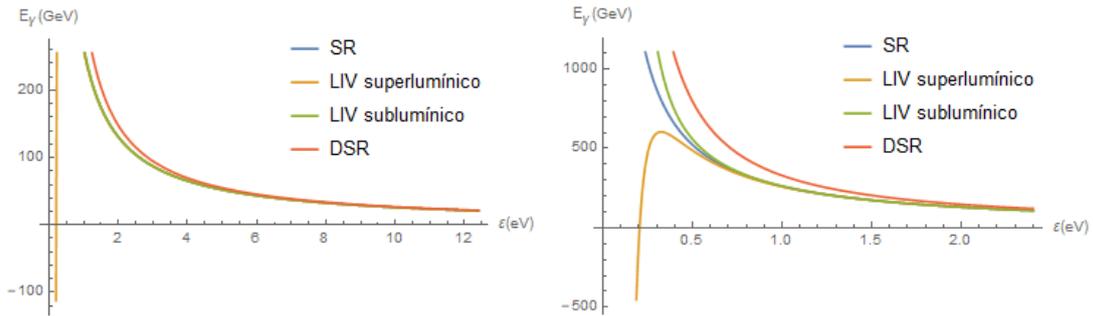


Figura 4: Energía umbral del fotón de alta energía, E_γ , en función de la energía del fotón de baja energía, ε , para los casos de SR (azul), LIV (amarillo y verde) y DSR (rojo). Utilizamos escalas de modificación de $E_{LV} = 10^{15} \text{ GeV}$ en el caso de LIV y $M' = 10^3 \text{ GeV}$ para DSR.

A simple vista, observamos que para los tres casos la energía umbral E_γ es inversamente proporcional a la energía del fondo. Además, para energías ε a partir de un cierto valor (0.7 eV en el caso de LIV y 2 eV para DSR) las modificaciones respecto a SR desaparecen y se recupera la dependencia de Relatividad Especial.

Notar que hemos diferenciado para Violación de Invariancia Lorentz el caso superlumínico ($s_1 = -1$) y el caso sublumínico ($s_1 = +1$). Podemos ver en la figura que en el caso superlumínico la energía umbral disminuye respecto a la de SR, de forma que resultaría más fácil que se produzca un par electrón-positrón. También en el caso superlumínico existe otro efecto de Violación de Invariancia Lorentz: la desintegración de un fotón, $\gamma \rightarrow e^- + e^+$, el cual no estaba permitido en SR. Comparando con las referencias (ver [11]), se suele descartar este caso, ya que las observaciones no indican un aumento de la opacidad del vacío.

Para el caso sublumínico la energía umbral aumenta respecto a la de SR, de forma que es más difícil que se dé la reacción estudiada. Esto podría explicar la aparente anomalía de la transparencia del fondo, ya que algunos fotones que en SR crearían pares no lo hacen en LIV y, por tanto, seríamos capaces de detectarlos al no interactuar en su propagación. En la bibliografía que hemos investigado se han obtenido cotas a la escala de $E_{LV} \geq 7.93 \cdot 10^{18}$ GeV (ver [6]) y $E_{LV} \geq 1.05 \cdot 10^{19}$ GeV (ver [11]), próximas a la escala de Planck. Estas escalas se han calculado con una confianza del 99%, observando fotones de alta energía provenientes de blázares (un tipo de AGN que emite radiación en nuestra dirección de observación). Así, la escala que hemos considerado en este caso, ($E_{LV} = 10^{15}$ GeV), no sería válida, ya que las observaciones demuestran que a esta escala no existen efectos de LIV.

Por su parte, en el caso de DSR, aumentaría la energía umbral del proceso, pudiendo esto explicar la aparente transparencia del fondo extragaláctico. Sin embargo, al considerar una escala de 1 TeV estaríamos contradiciendo la aproximación realizada en nuestros cálculos, $E \ll M$, por lo que las deducciones realizadas en este caso no serían válidas.

Desde otro punto de vista, podemos realizar un análisis más completo sobre las escalas de modificación representando el cociente E_γ/E_{SR} frente a dichas escalas. En este caso, consideraremos un fotón del fondo con longitud de onda $\lambda = 1.5 \mu\text{m}$ (energía $\varepsilon = 0.83$ eV), correspondiente al mayor flujo que detectamos del fondo extragaláctico (ver figura 1, [7] y [9]). Utilizando de nuevo las ecuaciones de energía umbral obtenidas, representamos en la figura 5 la energía umbral frente a la escala E_{LV} (en el caso de LIV) o la escala M' (en el caso de DSR).

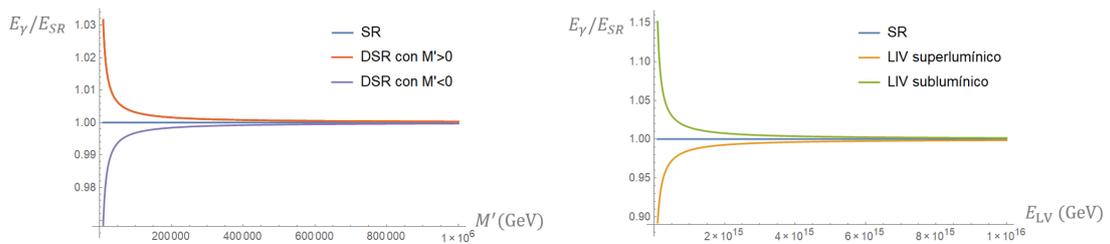


Figura 5: Cociente entre energía umbral para LIV o DSR, E_γ , y E_{SR} en función de la escala de modificación para el caso SR (azul), LIV (amarillo y verde) y DSR (rojo y morado).

En primer lugar, en la imagen situada a la izquierda de la figura 5, hemos representado la energía umbral frente a la escala M' de Deformación de SR. Hemos distinguido aquí dos casos, $M' > 0$ y $M' < 0$, dependiendo de los valores de los coeficientes. Tenemos que tener en cuenta de nuevo al sacar conclusiones que estamos aproximando $E \ll M$, y que el primer término de (4.43) es mucho mayor que el segundo. De esta forma, únicamente se cumplirían estas condiciones para un rango de escalas menores a $M' \approx 10^6$ GeV.

En el caso $M' < 0$ la energía umbral disminuye y sería más fácil que se produjera la reacción. Si $M' > 0$, la energía umbral del proceso aumentaría, lo cual podría explicar la aparente anomalía en la transparencia de EBL. Si consideramos escalas $M' \lesssim 10^6$ GeV dejarían de cumplirse nuestras aproximaciones, y para escalas $M' \gtrsim 10^6$ GeV no se apreciaría diferencia con SR, reproduciéndose los resultados de la ecuación 2.11.

Por último, en la imagen situada a la derecha en la figura 5, podemos comparar los valores de las escalas para los casos LIV y SR. Para los casos LIV superlumínico y sublumínico obtendríamos que la energía umbral disminuye o aumenta respecto a la de Relatividad Especial, al disminuir la escala de modificación. En el caso LIV, nuestras aproximaciones para este valor de ϵ nos darían una escala máxima de $E_{LV} \approx 10^{16}$ GeV para apreciar diferencias respecto a SR. Podemos deducir también, que las escalas que asociamos a una deformación de SR son mucho menores a las de LIV para ver una modificación respecto a SR.

Comparando nuestros resultados con la bibliografía, en el caso de DSR no existen aún cotas para la escala M' , por tanto nuestros resultados serían válidos si trabajamos con energías $E \ll M$, y pueden indicar la importancia de la modificación de la energía umbral de creación de pares respecto a SR. Para LIV sí que existen resultados en la bibliografía (ver [6] y [11]), obteniéndose cotas próximas a E_{Pl} . Para esta escala, la diferencia entre la energía umbral de LIV y SR es lo suficientemente apreciable para ser medida por nuestros telescopios (~ 100 keV). Sin embargo, no hemos logrado reproducir este resultado con nuestros cálculos de la sección 3.

Finalmente, podemos concluir a partir de nuestros cálculos que las modificaciones introducidas por teorías LIV son más notables que las que aparecen al deformar SR. Esto se debe a que en el caso de LIV obteníamos la energía umbral a partir de una ecuación de tercer grado (ecuación 3.15) y en el caso de DSR el término con E_γ^3 se anulaba y resolvíamos una ecuación de segundo grado (ecuación 4.41), obteniendo así la segunda corrección a la energía umbral en lugar de la primera.

Si estudiáramos otras reacciones que no fueran la creación de pares, podríamos inferir que pasaría lo mismo que en este caso, es decir, los efectos LIV serían más notables que los de DSR. Esto se debe a que al deformar la Relatividad Especial estamos manteniendo el principio de relatividad, lo que proporciona una relación entre los coeficientes que aparecen en la relación de dispersión y los que aparecen en las leyes de modificación. Estas expresiones (ecuaciones 4.4 y 4.5) provocan que las correcciones respecto a Relatividad Especial sean más suaves.

6. Conclusiones

En la presente memoria hemos calculado la energía umbral de un fotón de alta energía para que tenga lugar la producción de pares al interactuar con un fotón de EBL (ecuación 2.1). Los cálculos realizados han tenido en cuenta distintas consideraciones cinemáticas: Relatividad Especial (sección 2), Violación de Invariancia Lorentz (sección 3) y Deformación de Relatividad Especial (sección 4).

En los resultados que hemos obtenido (ecuaciones 2.11, 3.17, 3.19, 4.43 y 4.45) podemos ver cómo las teorías que van más allá de Relatividad Especial proponen expresiones para E_γ que únicamente serían notables para los fotones de muy alta energía (mayor a 100 GeV). Hemos discutido también en la sección 5 los valores que deben tener las escalas de modificación (E_{LV} y M) para que se aprecien variaciones de la energía umbral respecto a SR.

En caso de existir una anomalía en la transparencia de EBL y, por tanto, un aumento en las energías del espectro de luz que podemos medir desde la Tierra, los resultados que mejor podrían explicarla serían el caso de LIV con $s_1 = +1$ (sublumínico) y el caso de DSR con $M' > 0$.

Como posibles ampliaciones del cálculo realizado, podríamos estudiar el proceso de creación de pares teniendo en cuenta modificaciones más allá de orden $n = 1$ en las teorías más allá de SR, e interpretar los resultados realizando un estudio fenomenológico más completo que el expuesto en la sección 5. En el caso de DSR, la consideración de un cálculo a todo orden en un desarrollo en potencias de $1/M$ sería un interesante trabajo a realizar como ampliación de la presente memoria.

Conforme se vaya mejorando la resolución de los telescopios y observatorios empleados para medir fotones de muy alta energía (Fermi-LAT, HESS, MAGIC, VERITAS, etc.), dispondremos de más observaciones experimentales que permitirán verificar la validez de las teorías que exploran posibilidades más allá de Relatividad Especial. Continuando también el estudio de los mecanismos de producción y propagación de estos fotones de altas energías conseguiremos un mayor entendimiento de las fuentes que producen este tipo de partículas y los fenómenos a los que están expuestas en su viaje hacia la Tierra.

Bibliografía

- [1] National Institute of Standards y Technology (NIST). *The NIST Reference on Constants, Units and Uncertainty*. URL: <https://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>.
- [2] Giovanni Amelino-Camelia. “Quantum Spacetime Phenomenology”. En: *Living Reviews in Relativity* 16 (2013). arXiv: 0806.0339v2.
- [3] Floyd W. Stecker. “Testing Lorentz symmetry using high energy astrophysics observations”. En: *Symmetry* 9.10 (2017), págs. 1-20. ISSN: 20738994. DOI: 10.3390/sym9100201. arXiv: 1708.05672.
- [4] Lucía Pereira Sáinz, J. M. Carmona Martínez y J. J. Relancio Martínez. *Tests de simetría Lorentz utilizando observaciones astrofísicas de alta energía*. 2018. URL: <https://zaguan.unizar.es/record/76731>.
- [5] J M Carmona y F Mercati. *Relativistic kinematics beyond Special Relativity*. 2012. DOI: 10.1103/PhysRevD.86.084032. arXiv: 1206.5961v2.
- [6] J Biteau y D A Williams. *The extragalactic background light, the hubble constant, and anomalies: conclusions from 20 years of tev gamma-ray observations*. 2015. DOI: 10.1088/0004-637X/812/1/60. arXiv: 1502.04166v2.
- [7] Matthew A. Malkan Floyd W. Stecker, Sean T. Scully. “An Empirical Determination of the Intergalactic Background Light from UV to FIR Wavelengths Using FIR Deep Galaxy Surveys and the Gamma-ray Opacity of the Universe”. En: *Astrophysical Journal* 827:6 (2016). arXiv: 1605.01382v2.
- [8] D Horns y M Meyer. *Indications for a pair-production anomaly from the propagation of VHE*. 2012. DOI: 10.1088/1475-7516/2012/02/033. arXiv: 1201.4711v2.
- [9] Manuel Meyer, Dieter Horns y Martin Raue. “First lower limits on the photon-axion-like particle coupling from very high energy gamma-ray observations”. En: *Physical Review D* 87, 035027 035027 (2013), págs. 1-15. DOI: 10.1103/PhysRevD.87.035027.
- [10] Yun-Feng Liang y col. *Constraints on axion-like particle properties with TeV gamma-ray observations of Galactic sources*. 2015. DOI: 10.1088/1475-7516/2019/06/042. arXiv: 1804.07186.
- [11] Matthias Lorentz y Pierre Brun. *Limits on Lorentz invariance violation at the Planck energy scale from H.E.S.S. spectral analysis of the blazar Mrk 501*. 2016. DOI: 10.1051/epjconf/201713603018. arXiv: 1606.08600v2.
- [12] Robert C. Wrede y Murray Spiegel. *Advanced Calculus*. 2002. ISBN: 0071398341.

Anexo

A. Método de los multiplicadores de Lagrange

El método de los multiplicadores de Lagrange es una herramienta matemática muy útil que permite resolver problemas de optimización donde encontramos un gran número de variables sujetas a restricciones. En este anexo describiremos el método para una función generalizada de n variables (ver [12]).

El objetivo del método es obtener los extremos relativos (máximos o mínimos) de una función $f(x_1, \dots, x_n)$ con n variables y k restricciones $\phi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, \phi_k(x_1, \dots, x_n) = 0$. Para ello, se crea la función auxiliar $F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$:

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + \dots + \lambda_k \phi_k. \quad (\text{A.1})$$

Al plantear la función F encontramos k variables escalares $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ denominadas multiplicadores de Lagrange, las cuales son independientes de las variables x_1, \dots, x_n del problema. Notese que encontramos tantos multiplicadores de Lagrange como restricciones impuestas a la función f . Para resolver el problema, debemos posteriormente derivar la función F respecto de sus variables e igualarlas a cero:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \phi_1 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \phi_2 = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_k} = \phi_k = 0. \quad (\text{A.3})$$

Al anular las derivadas de F respecto de las variables x_1, \dots, x_n estamos buscando los valores de dichas variables que minimizan la nueva función. Esto sería equivalente a realizar la operación divergencia de F , $\nabla \cdot F = 0$, lo que implicaría la igualdad $\nabla \cdot f + \lambda_1 \nabla \cdot \phi_1 + \dots + \lambda_k \nabla \cdot \phi_k = 0$. En términos geométricos, estaríamos buscando un extremo (máximo o mínimo) de la superficie F , llamémoslo (x'_1, \dots, x'_n) . Lo encontramos sabiendo que las superficies ϕ_1, \dots, ϕ_k y f tienen un plano tangente común en ese mínimo:

$$\nabla \cdot f(x'_1, \dots, x'_n) + \lambda_1 \nabla \cdot \phi_1(x'_1, \dots, x'_n) + \dots + \lambda_k \nabla \cdot \phi_k(x'_1, \dots, x'_n) = 0 \quad (\text{A.4})$$

Cabe destacar que al igualar a cero las derivadas de la función auxiliar respecto de los multiplicadores de Lagrange recuperamos las ecuaciones que indican las restricciones impuestas al problema. De esta forma, reducimos un problema de optimización de una función $f(x_1, \dots, x_n)$ con n variables y k restricciones $\phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \phi_k(x_1, \dots, x_n)$ a un problema de optimización de una función

$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ con $n + k$ variables y sin restricciones, el cual se resuelve encontrando las soluciones de un sistema de ecuaciones.

Más adelante, para conocer si los extremos encontrados hacen referencia a máximos o mínimos deberíamos realizar las segundas derivadas de la función f (ó F), pero esto no va a ser necesario en el caso que nos ocupa, ya que si la energía umbral E_γ de un proceso consta de un extremo, buscando el significado físico podemos deducir que este va a ser un mínimo y no un máximo.

B. Aproximaciones utilizadas en LIV

En este apartado incluimos los cálculos necesarios para derivar la velocidad de una partícula a partir de su relación de dispersión en el caso de Violación de Invariancia Lorentz. Estos cálculos resultarán útiles también al aplicar el método de Lagrange en la sección 3. La relación de dispersión a primer orden para una partícula con energía E , momento $\vec{\mathbf{p}}$ y masa m en el contexto de una Violación de Invariancia Lorentz es la siguiente:

$$E^2 = |\vec{\mathbf{p}}|^2 - s_1 \cdot |\vec{\mathbf{p}}|^2 \frac{E}{E_{\text{LV}}} + m^2. \quad (\text{B.1})$$

Como estamos despreciando términos de orden $1/E_{\text{LV}}^2$, podemos aproximar el factor $|\vec{\mathbf{p}}|^2$ que acompaña al término de orden $1/E_{\text{LV}}$ por su expresión correspondiente vista para Relatividad Especial (ecuación 2.2):

$$E^2 \approx |\vec{\mathbf{p}}|^2 - s_1 \cdot (E^2 - m^2) \frac{E}{E_{\text{LV}}} + m^2. \quad (\text{B.2})$$

A partir de la anterior ecuación podemos despejar el módulo del momento, $|\vec{\mathbf{p}}|$, utilizando la aproximación $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$, donde $x = s_1 \frac{E}{E_{\text{LV}}} - s_1 \frac{m^2}{EE_{\text{LV}}} - \frac{m^2}{E^2} \ll 1$. Recordemos que podemos realizar esta aproximación porque estamos considerando una escala de energías donde $E \ll E_{\text{LV}}$:

$$|\vec{\mathbf{p}}| = E \sqrt{1 + s_1 \frac{E}{E_{\text{LV}}} - s_1 \frac{m^2}{EE_{\text{LV}}} - \frac{m^2}{E^2}}, \quad (\text{B.3})$$

$$|\vec{\mathbf{p}}| \approx E + s_1 \frac{E^2}{2E_{\text{LV}}} - s_1 \frac{m^2}{2E_{\text{LV}}} - \frac{m^2}{2E}. \quad (\text{B.4})$$

Finalmente, para calcular la velocidad de una partícula, $|\vec{\mathbf{v}}|$, en una teoría LIV, debemos derivar la energía respecto del módulo del momento. En este caso, es más sencillo derivar el módulo del momento $|\vec{\mathbf{p}}|$ respecto de la energía E y, más adelante, calcular la derivada inversa. Para ello, hemos utilizado la aproximación $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$, donde $x = s_1 \frac{E}{E_{\text{LV}}} + \frac{m^2}{2E^2} \ll 1$:

$$\frac{d|\vec{\mathbf{p}}|}{dE} = 1 + s_1 \frac{E}{E_{\text{LV}}} + \frac{m^2}{2E^2}, \quad (\text{B.5})$$

$$|\vec{\mathbf{v}}| = \frac{dE}{d|\vec{\mathbf{p}}|} = \frac{1}{\frac{d|\vec{\mathbf{p}}|}{dE}} = \frac{1}{1 + s_1 \frac{E}{E_{\text{LV}}} + \frac{m^2}{2E^2}}, \quad (\text{B.6})$$

$$|\vec{\mathbf{v}}| \approx 1 - s_1 \frac{E}{E_{\text{LV}}} - \frac{m^2}{2E^2}. \quad (\text{B.7})$$

C. Aproximaciones utilizadas en DSR

En este anexo hemos incluido las aproximaciones realizadas para la relación de dispersión y sus derivadas en el contexto de Deformación de Relatividad Especial, con el objetivo de simplificar los cálculos de la sección 4. La relación de dispersión planteada por teorías que incluyen DSR para una partícula con energía E , momento $\vec{\mathbf{p}}$ y masa m es la siguiente:

$$E^2 - |\vec{\mathbf{p}}|^2 + \frac{\alpha_1}{M}E^3 + \frac{\alpha_2}{M}E|\vec{\mathbf{p}}|^2 = m^2. \quad (\text{C.1})$$

Como trabajamos hasta orden $1/M$, podemos considerar la relación de dispersión de Relatividad Especial ($E^2 = |\vec{\mathbf{p}}|^2 + m^2$) para sustituir el momento en el término que acompaña al coeficiente α_2 .

$$E^2 - |\vec{\mathbf{p}}|^2 + \frac{\alpha_1}{M}E^3 + \frac{\alpha_2}{M}E \cdot (E^2 - m^2) \approx m^2. \quad (\text{C.2})$$

De esta forma, podemos despejar el módulo del momento de la partícula, $|\vec{\mathbf{p}}|$, en función de su masa y su energía. Cabe destacar que también hemos utilizado la aproximación $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$, donde $x = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)E}{M} + \frac{\alpha_2 m^2}{ME} - \frac{m^2}{E^2} \ll 1$, ya que estamos considerando $m \ll E \ll M$.

$$|\vec{\mathbf{p}}| \approx \sqrt{E^2 + \frac{\alpha_1}{M}E^3 + \frac{\alpha_2}{M}E^3 - \frac{\alpha_2}{M}m^2E - m^2}, \quad (\text{C.3})$$

$$|\vec{\mathbf{p}}| \approx E \left(1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2M}E - \frac{\alpha_2 m^2}{2ME} - \frac{m^2}{2E^2} \right), \quad (\text{C.4})$$

$$|\vec{\mathbf{p}}| \approx E + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2M}E^2 - \frac{\alpha_2 m^2}{2M} - \frac{m^2}{2E}. \quad (\text{C.5})$$

A partir de la relación de dispersión aproximada, podemos hallar fácilmente la derivada $\frac{d|\vec{\mathbf{p}}|}{dE}$. A partir de esta calcularemos finalmente la derivada $\frac{dE}{d|\vec{\mathbf{p}}|}$, que es la que se necesita en la sección 4 (se correspondería con $|\vec{\mathbf{v}}|$). En este caso hemos utilizado la aproximación $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ tomando $x = 1 + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)E}{M} + \frac{m^2}{2E^2} \ll 1$:

$$\frac{d|\vec{\mathbf{p}}|}{dE} = 1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{M}E + \frac{m^2}{2E^2}, \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{dE}{d|\vec{\mathbf{p}}|} = \frac{1}{\frac{d|\vec{\mathbf{p}}|}{dE}} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{M}E + \frac{m^2}{2E^2}}, \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{dE}{d|\vec{\mathbf{p}}|} \approx 1 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{M}E - \frac{m^2}{2E^2}. \quad (\text{C.8})$$

