



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

Desarrollo de un modelo de simulación numérica de flujo
transitorio bicapa en aproximación de aguas poco
profundas

Development of a numerical simulation model for
unsteady shallow water two-layer flow

Autor

Álvaro Ramos Pérez

Directores

Pilar García Navarro

Sergio Martínez Aranda

ESCUELA DE INGENIERÍA Y ARQUITECTURA
2019

A mis padres y a mi hermana.

RESUMEN

Las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas en la vertical se resuelven numéricamente mediante volúmenes finitos en un caso de flujo formado por dos fluidos de diferente densidad y viscosidad sobre un lecho irregular fijo. Obtenido el modelo analítico como un sistema de ecuaciones hiperbólico con términos fuente, se aplica un esquema *upwind* de primer orden de Roe y un esquema FORCE para su resolución numérica programando en lenguaje C. La simulación de casos test y experimentales presentes en la literatura se utiliza para la evaluación y validación del modelo. Este trabajo se ha desarrollado con una beca JAE del CSIC de iniciación a la investigación en el marco del proyecto: Desarrollo y validación de modelos de simulación avanzados con base física para procesos geofísicos e hidráulicos. SIMGEOAGUA. Ministerio de Ciencia e Innovación. CGL2015-66114-R.

ABSTRACT

Navier-Stokes vertical averaged equations are discretized using the finite volume method for a flow composed by two fluids with different density over an irregular bed. The model is a hyperbolic equation system with source terms. A first order Roe upwind and a FORCE scheme are applied to solve it numerically using C programming language. Test and literature experimental cases are used to analyze and validate the model. This work has been funded with a CSIC JAE grant for initiation in the research career and in the framework of the project : Development and validations of physically advanced simulation models for geophysical and hydraulic processes. SIMGEOAGUA. Ministry of Science and Innovation. CGL2015-66114-R.

Índice

1. Introducción y objetivos	1
1.1. Estado del arte	4
1.2. Objetivos	5
1.3. Estructura	5
2. Modelo matemático y esquema numérico	7
2.1. Modelo matemático	7
2.1.1. Estados críticos y subcríticos. El número de Froude	9
2.1.2. Términos de acoplamiento	10
2.1.3. Términos de fricción	10
2.2. Esquema numérico	11
2.2.1. Método de los volúmenes finitos	11
2.2.2. El resolvidor FORCE	13
2.2.3. Resolvidor de Roe	14
2.2.4. Condiciones de contorno	15
2.2.5. Estabilidad temporal	16
3. Validación del esquema numérico	17
3.1. Validación del modelo monocapa	17
3.1.1. Rotura de presa ideal sobre fondo seco	17
3.1.2. Test experimental del CITEEC	17
3.2. Validación del modelo bicapa	20
3.2.1. Equilibrio hidrostático	20
3.2.2. Rotura de presa ideal bicapa	21
3.2.3. Condiciones de aplicabilidad de los esquemas numéricos de Roe y FORCE	22
3.3. Casos complejos de aplicación de los modelos numéricos	27
3.3.1. Método FORCE. Doble rotura de presa	27
3.3.2. Método de Roe. Rotura de una balsa minera	29

4. Conclusiones	31
5. Bibliografía	33
Lista de Figuras	39
Lista de Tablas	43
Anexos	44
A. Desarrollo del modelo matemático	47
A.1. Ecuaciones bicapa en aguas poco profundas	47
A.1.1. Capa superior	48
A.1.2. Capa inferior	50
A.1.3. Formulación del sistema	51
A.2. El acoplamiento en la formulación del problema bicapa	52
A.2.1. Formulación acoplada	53
A.2.2. Formulación pseudo-acoplada	54
A.2.3. Formulación desacoplada	56
B. Desarrollos del esquema numérico	57
B.1. Reconstrucción hidrostática en FORCE	57
B.1.1. Capa superior	57
B.1.2. Capa inferior	59
B.2. Problema de Riemann	60
B.3. Esquema de Roe ampliado	62
B.3.1. Cálculo de los valores y vectores propios	62
B.3.2. Problema de la entropía	64
B.3.3. Tratamientos de los términos fuente. Estados intermedios	66
C. Validación del esquema numérico	73
C.1. Expresiones analíticas de la rotura de presa ideal	73
C.2. Rotura de presa ideal monocapa sobre el fondo mojado	74
C.3. Resultados complementarios al caso test experimental del CITEEC	75
C.4. Resultados complementarios a los casos test de las condiciones de aplicación de los métodos numéricos de FORCE y Roe	76
D. Estabilidad en el método numérico	85
D.1. Estabilidad temporal. Métodos explícitos y la condición CFL	85
D.2. Condiciones iniciales y de contorno	86

D.3. Inestabilidades asociadas al fenómeno bicapa 87

Capítulo 1

Introducción y objetivos

El flujo bicapa se define como la coexistencia de dos fluidos inmiscibles, separados por una superficie denominada interfaz. En el caso que es objeto de estudio en este trabajo se analizará el flujo de superficie libre (con un contorno sin limitación física, en la capa superior) entre dos fases líquidas, con densidades diferentes y bajo la hipótesis de las *aguas poco profundas*. Esto implica que las longitudes onda de las perturbaciones gravitatorias son mucho mayores que la profundidad. Ejemplos de ello son fenómenos como las mareas, los ríos o los tsunamis. Permite enmarcar el problema dentro de una familia de flujos más amplia, cuya modelización ha sido estudiada con anterioridad.

El flujo bicapa, en el contexto de los modelos en aguas poco profundas, se puede manifestar a nivel hidrodinámico en la interacción de corrientes oceánicas o el transporte de fangos en la rotura de balsas mineras. A continuación se muestran ejemplos de ambos casos.

Ondas de interfaz en el estrecho de Gibraltar

El estrecho de Gibraltar, en España, es una de las regiones oceánicas donde se producen ondas de presión (batimétricas) internas [1], como consecuencia de la existencia de una interfaz, haloclina, debida a la fuerte diferencia de salinidades de las corrientes implicadas. El flujo procedente del Mediterráneo, con altos niveles de salinidad, se sumerge bajo las aguas procedentes del océano Atlántico [2].

La estratificación coincide con la existencia del umbral de Camarinal. Este accidente geográfico, llamado umbral batimétrico, supone la superficie con la menor profundidad (284 m [2]) entre ambos lados del estrecho. Su interacción con el flujo bicapa genera unas ondas de presión (mostradas en la Figura 1.1) que se transmiten a lo largo de la interfaz. Mientras que las oscilaciones que se pueden producir en la superficie libre se disipan fácilmente al actuar la fuerza de la gravedad sobre dos medios con relación de densidades de 1:1000, en el estrecho de Gibraltar la relación es cercana a la unidad y por tanto el efecto de esta fuerza disipativa sustancialmente menor.

Se han registrado perturbaciones de hasta 200 m de amplitud [1] , siendo éstas incluso

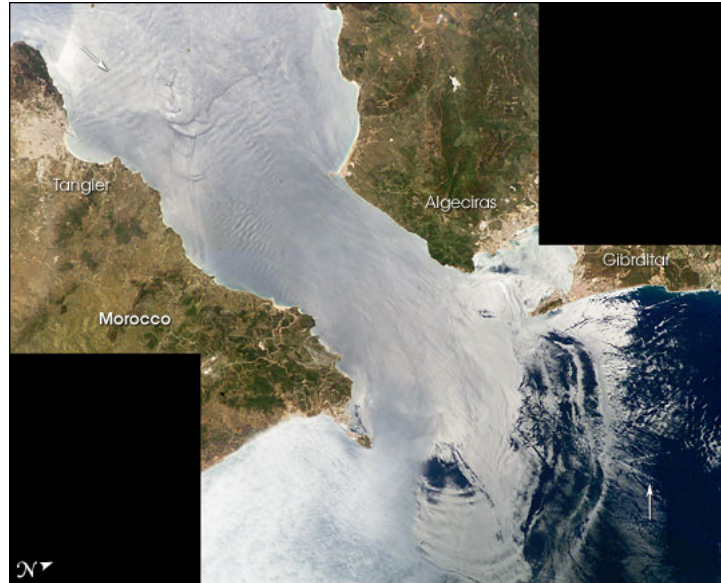


Fig. 1.1: Ondas batimétricas en el estrecho de Gibraltar, señaladas por la flecha superior, se desplazan a una profundidad de 100 m hacia el este procedentes del océano Atlántico [3].

apreciables en imagen satélite. Las ondas de presión se transmiten a una velocidad de $70\text{-}80\text{ cm s}^{-1}$ [1], del mismo orden que las velocidades relativas entre las capas. Se ha demostrado que cuando se generan las ondas, en función de la fase de las mismas, el régimen del flujo varía de crítico a subcrítico (y viceversa). La turbulencia que se produce es responsable de la mayor parte del intercambio de masa entre las capas oceánicas.

Balsa minera de Aznalcóllar

Es conocido en España el caso de Aznalcóllar (Sevilla) cuando, en abril de 1998, en la balsa minera del yacimiento, se produjo una rotura en el borde SE del perímetro (mostrada en la Figura 1.2). La causa de la misma se debió a la rotura del terreno por deslizamiento a favor del plano de estratificación.

La presa, con almacenaje de residuos desde 1979, se localiza a menos de 100 m del Río Agrio, afluente del Guadiamar que a su vez lo es del río Guadalquivir. Tras el accidente, las autoridades construyeron sucesivos diques con los que proteger el cercano Parque Nacional de Doñana.

El muro de la presa, con 27 m de altura, tenía una capacidad de almacenamiento de 33 hm^3 [5]. A la rotura inicial este muro perimetral en la sección de piritas le siguió el colapso del dique separador, y con ello el vertido desde la balsa con mayor capacidad (piroclásticos). Se vertieron 2 Mm^3 de lodos decantados (esencialmente piritas) a los que se deberían sumar 4 Mm^3 de agua ácida [6].

Se calcula que el 89% de los lodos fueron vertidos como consecuencia de arraste del agua sobrenadante, la obertura produjo una cascada de agua que arrastraba los fangos hacia el



Fig. 1.2: Vista de la rotura producida en el dique de la balsa de Aznalcóllar [4].

exterior. Esto subraya la necesidad de considerar este fenómeno como un bicapa, ya que es el arrastre entre capas el que impulsa el propio movimiento del fango.

La zona afectada llegó a 41 km aguas abajo de la balsa, con una superficie total de 26 km². El hidrograma obtenido en una estación de aforo del río Guadiamar, localizado a 11 km aguas abajo del foco, permite identificar inequívocamente las dos puntas de caudal separadas en el tiempo, 811 m³s⁻¹ y 294 m³s⁻¹ [6], correspondientes a la fase de agua y de lodo respectivamente.

Los flujos bicapa, como fenómenos hidrodinámicos y geofísicos, se estudian ampliamente por el impacto que tienen en el medio ambiente y el conjunto de actividades humanas. Para ello es preciso contar con herramientas y técnicas de simulación que analicen la naturaleza de dichos fenómenos y las leyes que gobiernan físicas que gobiernan su comportamiento.

La simulación consiste en elaborar modelos semejantes a fenómenos existentes en la realidad con los que evaluar las consecuencias de determinadas acciones o analizar su evolución. Es la herramienta por excelencia con la que cuentan los ingenieros en la actualidad para concebir y evaluar sus diseños sin la necesidad de que estos hayan sido construidos con anterioridad.

La modelización matemática de flujos bajo la hipótesis de aguas poco profundas, responde a la necesidad de elaborar técnicas para obtener simulaciones fiables, eficientes y económicas. Para resolver las ecuaciones matemáticas que modelizan los flujos es necesario recurrir a potentes herramientas de cálculo: los métodos numéricos, y un entorno capaz de ejecutar un número ingente de operaciones requerido: la computación.

Este es el marco en el cual se desarrolla el estudio del flujo bicapa: la simulación numérica computacional.

1.1. Estado del arte

El problema del flujo bicapa, bajo la óptica de la simulación computacional del modelo promediado en la vertical, ha sido y sigue siendo estudiado por numerosos autores, tanto por las potenciales aplicaciones que posee como los propios desafíos matemáticos que supone su simulación mediante métodos numéricos.

Como indican [7] [8], [9] [10] [11] el sistema que se obtiene al promediar en la vertical las ecuaciones 3D del flujo es condicionalmente hiperbólico, lo que plantea problemas de estabilidad en los esquemas numéricos. Esta pérdida de hiperbolicidad está asociada [11] a inestabilidades en la interfaz que conllevan, en flujos reales, a una mezcla entre ambas capas que los modelos no son capaces de simular. También se ha relacionado [7] con la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz asociada a flujos cortantes, que con los esquemas promediados en la vertical no es posible reproducir.

Para solucionar esta problemática [10] introduce un término asociado a la compresibilidad de los fluidos que permite liberar en forma de pequeñas variaciones de la densidad las inestabilidades que se producen en la interfaz, se añade además turbulencia ficticia en dicha superficie para favorecer la difusión. Se ha propuesto también la introducción de un esquema entrópico adecuado [7] o de una cantidad óptima de rozamiento [12], en una etapa correctora [11] que mantiene al flujo dentro de la región hiperbólica.

A esta dificultad se le debe añadir [9] la existencia de términos no conservativos asociados al intercambio de momento y energía entre capas. Dichos términos impiden ver el flujo bicapa [7] únicamente como formado dos sistemas de Saint Venant desacoplados, porque la interfaz que actúa como topografía para la capa superior es simplemente una topografía aparente [7], que en realidad, y a diferencia de los lechos fijos, varía a lo largo del tiempo. Establece [13] que para lograr resolver con esquemas hiperbólicos sistemas que contengan términos no conservativos es necesario que al menos sean capaces de simular problemas estacionarios con un error computacional de segundo orden.

La mayoría los modelos planteados son 1D o para canales con geometría variable [14]. Existen modelos 2D [15] [16] donde se han simulado fases con propiedades muy diferentes, una de ellas fango, para reproducir fenómenos como el transporte de sedimentos o corrimientos de tierra. En dichas situaciones, por las propias condiciones de la simulaciones realizadas, no han sido necesarios tratamientos específicos para controlar la estabilidad o hiperbolicidad de los esquemas.

1.2. Objetivos

El objetivo del presente trabajo es el desarrollo preliminar de una herramienta flexible que permita la simulación computacional del flujo bicapa, formado por dos fluidos de diferente naturaleza, bajo la hipótesis de aguas poco profundas. Para ello es necesario el estudio de la formulación matemática y numérica más adecuada para la modelización de este flujo.

1.3. Estructura

La Memoria de este trabajo se organiza del siguiente modo. En el Capítulo 2 se desarrolla el sistema diferencial que modeliza el flujo bicapa en 1D bajo la hipótesis de aguas poco profunda, así como la descripción de los métodos numéricos de FORCE y Roe. El Capítulo 3 incluye la validación de los esquemas con casos test y de la literatura especializada y en el Capítulo 4 se establecen las conclusiones y el trabajo futuro. Se incluyen una serie de Anexos con información sobre el desarrollo de los planteamiento matemáticos y numéricos presentes en el cuerpo de la Memoria.

Capítulo 2

Modelo matemático y esquema numérico

2.1. Modelo matemático

Partiendo de las ecuaciones de la conservación de la masa y la cantidad de movimiento en el plano vertical (2D, componentes x y z) promediadas en el tiempo:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_x \rho) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z \rho) &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial x}(u_x \rho u_x) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z \rho u_x) &= F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\
 \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_z) + \frac{\partial}{\partial x}(u_x \rho u_z) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z \rho u_z) &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

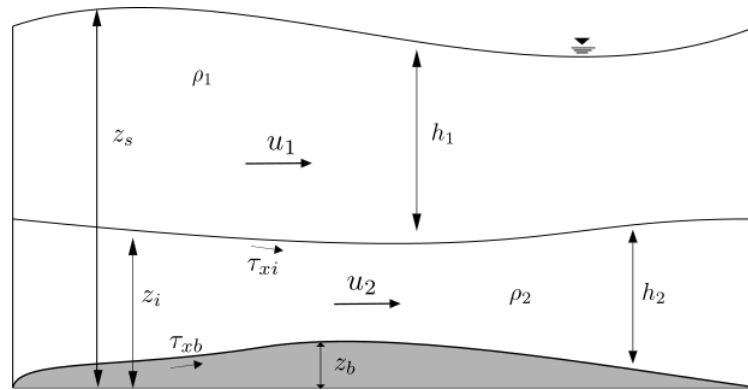


Fig. 2.1: Esquema del flujo bicapa.

donde ρ es la densidad, u_i y F_i la velocidad y las fuerza volumétrica en la componente i , p la presión, t el tiempo y τ_{ij} las componentes del tensor de los esfuerzos viscosos τ .

El procedimiento seguido para obtener las ecuaciones *shallow water* del flujo bicapa, según el esquema mostrado en la Figura 2.1 con capa 1 (superior) y capa 2 (inferior), requiere de la aplicación de las siguiente consideraciones :

- Integración de los términos de (2.1) en la vertical para ambas capas.

- Aplicación de condición de contorno cinemática, no hay transferencia de materia a través de la superficie libre z_s , la interfaz z_i y en el lecho fijo z_b la velocidad es nula.
- Distribución de presión hidrostática, debido a que en la ecuación de cantidad de movimiento en dirección z el resto de términos son despreciables frente a la fuerza gravitatoria.
- Se consideran únicamente los esfuerzos τ_{xi} y τ_{xb} en la interfaz y con el lecho fijo, despreciándose el resto de términos dispersivos y turbulentos.

El desarrollo de las ecuaciones (2.1) a *shallow water* se muestra en A.1, tomando como referencia lo expuesto en [17]. Finalmente se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 u_1^2 + g \frac{1}{2} h_1^2) &= -gh_1 \frac{\partial z_b}{\partial x} - gh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\tau_{xi}}{\rho_1} \\
 \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial x} &= 0 \\
 \frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_2 u_2^2 + g \frac{1}{2} h_2^2) &= -gh_2 \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{\rho_1}{\rho_2} gh_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} + \frac{\tau_{xi}}{\rho_1} - \frac{\tau_{xb}}{\rho_1}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde g es la gravedad y los subíndices indican la capa superior (1) o inferior (2). El calado es h_j , la velocidad promediada en la dirección x es u_j y z_b es el lecho fijo. Los esfuerzos τ_{xi} y τ_{xb} son en la interfaz y con el lecho fijo respectivamente. Finalmente, el término ρ_j es la densidad.

El sistema (2.2) se puede reformular agrupando los términos vectorialmente, adoptando una formulación desacoplada como se discute en A.2 :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S} \tag{2.3}$$

Con:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U} &= \begin{pmatrix} h_1 \\ h_1 u_1 \\ h_2 \\ h_2 u_2 \end{pmatrix} & \mathbf{F} &= \begin{pmatrix} h_1 u_1 \\ h_1 u_1^2 + g \frac{1}{2} h_1^2 \\ h_2 u_2 \\ h_2 u_2^2 + g \frac{1}{2} h_2^2 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -gh_1 \frac{\partial z_b}{\partial x} - gh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\tau_{xi}}{\rho_1} \\ 0 \\ -gh_2 \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{\rho_1}{\rho_2} gh_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\tau_{xi}}{\rho_2} - \frac{\tau_{xb}}{\rho_2} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde el vector \mathbf{U} es el llamado de variables conservadas y los vectores \mathbf{F} y \mathbf{S} son flujos y términos fuente respectivamente. La decisión de qué términos pasan a formar parte de los

vectores \mathbf{F} y \mathbf{S} responde a la necesidad de separar los términos conservativos de aquellos que no lo son.

Aplicando la regla de la cadena a (2.3) y sustituyendo por la definición del jacobiano $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$ se obtiene un sistema cuasi-lineal de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (2.5)$$

donde \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_1^2 - u_1^2 & 2u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c_2^2 - u_2^2 & 2u_2 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

siendo $c_i = \sqrt{gh_i}$, la velocidad de las ondas infinitesimales. Cuando \mathbf{J} tiene m valores y vectores propios reales se dice que el sistema es hiperbólico, en tal caso \mathbf{J} es diagonalizable. Los valores propios que se obtienen son:

$$\lambda_I = u_1 - c_1 \quad \lambda_{II} = u_1 + c_1 \quad \lambda_{III} = u_2 - c_2 \quad \lambda_{IV} = u_2 + c_2 \quad (2.7)$$

De estos valores propios, λ_I y λ_{II} están vinculados a la capa superior y λ_{III} y λ_{IV} a la inferior, se les denominan velocidades o magnitudes características y son de vital importancia ya que gobiernan la estabilidad del método numérico con la formulación de la condición CFL (ver 2.2.5).

2.1.1. Estados críticos y subcríticos. El número de Froude

Es habitual la clasificación de estos flujos en función del número adimensional de Froude (homólogo al Mach en flujo compresible), cuya definición viene dada por el cociente entre la velocidad del flujo u y una velocidad característica c :

$$Fr = \frac{u}{c} \quad (2.8)$$

En función del valor del Froude el flujo presenta un comportamiento diferente, tomando como ejemplo la capa superior:

- Flujo subcrítico con $Fr < 1$, como el mostrado en la Figura 2.2 (izquierda), los flujos están gobernados por las fuerzas gravitatorias y las ondas pueden propagarse en la dirección contraria al flujo. Relacionándolo con los valores de las velocidades característica anteriormente obtenidas se cumple que $u_i < c_i$, y por tanto $\lambda_I \lambda_{II} < 0$.
- Flujo crítico $Fr = 1$, existe un equilibrio entre las fuerzas inerciales y las gravitatorias. Se cumple que $\lambda_I \lambda_{II} = 0$.

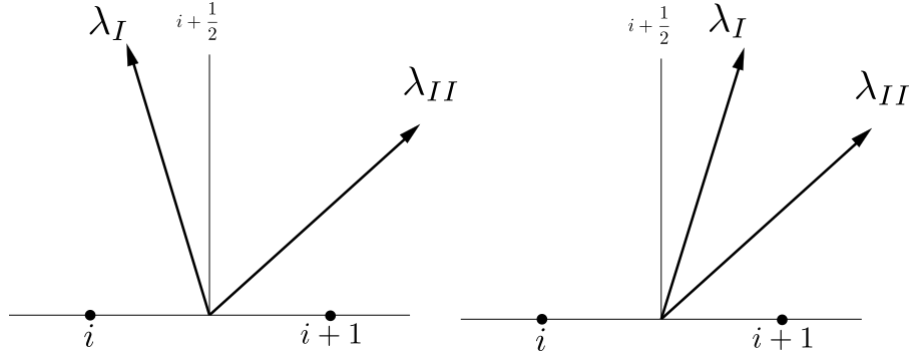


Fig. 2.2: Estado subcrítico (izquierda) en la capa superior para $u_1 > 0$ donde se cumple que $\lambda_I < 0$ y $\lambda_{II} > 0$. Estado supercrítico (derecha) en la capa superior para $u_1 > 0$ donde se cumple que $\lambda_I > 0$ y $\lambda_{II} > 0$.

- Flujo supercrítico $Fr > 1$, como el mostrado en la Figura 2.2 (derecha), donde prevalecen las fuerzas inerciales y las ondas solo se puede propagar en la dirección del flujo. Se cumple que $u_i > c_i$, y por tanto $\lambda_I \lambda_{II} > 0$.

2.1.2. Términos de acoplamiento

Los términos $gh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x}$ y $\frac{\rho_1}{\rho_2} g \frac{\partial h_1}{\partial x}$ son los denominados de acoplamiento, que no aparecen en las ecuaciones de aguas poco profundas o *shallow water* monocapa. Son, en realidad, un ejemplo de los términos que aparecen cuando en los problemas multidimensionales se lleva a cabo algún tipo de simplificación dimensional espacial [18], convirtiendo los sistemas homogéneos en inhomogéneos.

Aportan al bicapa su formulación esencial al representar la influencia de la presión (columna de agua) de la capa superior sobre la inferior o la del relieve de la interfaz sobre la capa superior, que sería equivalente al término de la pendiente de fondo.

La semejanza con el caso 1D monocapa sería en realidad aparente, tal y como indica [7]. A diferencia de la pendiente del fondo que no varía a lo largo del tiempo o el rozamiento que tiene una formulación estacionaria, los términos de acoplamiento implican a variables de ambas capas, están expresados de forma diferencial y se modifican con el paso del tiempo. Estas peculiaridades hacen que el tratamiento de los términos fuente deba ser especialmente cuidadosa con la formulación desacoplada.

2.1.3. Términos de fricción

Para modelizar el rozamiento de los fluidos en su interacción con el fondo fijo se han utilizado distintas leyes de fricción. Habitualmente el esfuerzo τ_t de fricción turbulenta en líquidos suele escalarse con el cuadrado de la velocidad del flujo [19] como:

$$\tau_t = \rho C_f u |u| \quad (2.9)$$

siendo C_f un factor de fricción turbulenta, que para la ley de Manning [20] se define como $C_f = gn^2/h^{\frac{1}{3}}$, siendo n el coeficiente de rugosidad del fondo. En el caso de fangos, que constituyen fluidos viscosos tipo Bingham [19], su comportamiento reológico se modeliza con un esfuerzo viscoso τ_b con la expresión:

$$\tau_b = \frac{u}{|u|} \min(\tau_y, \rho gh \cos \alpha_b \tan \delta_s) \quad (2.10)$$

donde τ_y es el esfuerzo característico, α_b el ángulo del lecho fijo con respecto del eje longitudinal y δ_s el ángulo de reposo. Combinando (2.10) y (2.9) se obtiene la expresión de la fricción de la capa inferior, usualmente lodos, τ_{xb} :

$$\frac{\tau_{xb}}{\rho_2} = C_{f2} u_2 |u_2| + \frac{u_2}{|u_2|} \min\left(\frac{\tau_y}{\rho_2}, gh_2 \cos \alpha_b \tan \delta_s\right) \quad (2.11)$$

con $C_{f2} = gn^2/h_2^{\frac{1}{3}}$. El rozamiento en la interfaz viene dado por la ley tipo Chézy [16] en función de la velocidad relativa y una constante de fricción C_{fi} a calibrar:

$$\frac{\tau_{xi}}{\rho_1} = C_{fi}(u_1 - u_2) |u_1 - u_2| \quad (2.12)$$

En ausencia de capa inferior, el rozamiento en la capa superior se modelizará en contacto con el lecho fijo también en base a la ley de Manning:

$$\frac{\tau_{xi}}{\rho_1} = C_{f1} u_1 |u_1| \quad (2.13)$$

donde $C_{f1} = gn^2/h_1^{\frac{1}{3}}$.

2.2. Esquema numérico

2.2.1. Método de los volúmenes finitos

Considerando el sistema diferencial a resolver:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (2.14)$$

El método de los volúmenes finitos divide el espacio en una serie de celdas Δx y registra la evolución a lo largo del tiempo de una aproximación de las variables conservadas \mathbf{U} , calculada como la integral de dichas variables en la celda. En cada paso de tiempo Δt se actualizan los valores de las celdas, con las aproximaciones a los flujos \mathbf{F} a través de las paredes y los

términos fuente \mathbf{S} . Reformulando primero el sistema (2.14) a su versión integral:

$$\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{U}(x, t_{n+1}) dx - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{U}(x, t_n) dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{S} dx dt \quad (2.15)$$

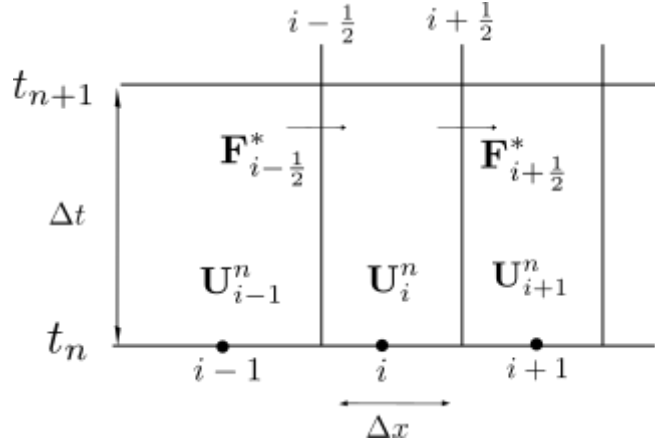


Fig. 2.3: Representación del método de los volúmenes finitos en una malla con celdas de tamaño Δx , la transferencia de información entre celdas se debe a los flujos numéricos $\mathbf{F}^*_{i-\frac{1}{2}}$ y $\mathbf{F}^*_{i+\frac{1}{2}}$.

Se define el valor aproximado \mathbf{U}_i^n , que es la integral del \mathbf{U} para el tiempo t_n entre los límites $x_{i-\frac{1}{2}}$ y $x_{i+\frac{1}{2}}$ de la celda:

$$\mathbf{U}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{U}(x, t_n) dx \quad (2.16)$$

El flujo numérico $\mathbf{F}^*_{i+\frac{1}{2}}$ es el término clave en esta formulación ya que actúa, ver Figura 2.3, como un vector de transporte de información hacia las celdas y a través de la pared y permite la actualización de las variables en las celdas. Se define bajo la aproximación:

$$\mathbf{F}^*_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt \quad (2.17)$$

Y finalmente los términos fuente \mathbf{S}_i^* :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{S} dx dt \approx \Delta t \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{S} dx = \Delta t \mathbf{S}_i^* \quad (2.18)$$

Sustituyendo (2.16), (2.17) y (2.18) en (2.15), se obtiene la expresión:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}^*_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}^*_{i-\frac{1}{2}}) + \Delta t \mathbf{S}_i^* \quad (2.19)$$

La ecuación (2.19) recibe el nombre de *formulación en flujos* y se obtiene de aplicar una formulación general a las leyes de conservación.

Finalmente es necesario un resolvidor o *solver* que permita establecer el valor de las variables numéricas implicadas en cada iteración del cálculo \mathbf{S}_i^* , junto a $\mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^*$ y $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^*$, en cada una de las paredes $i + \frac{1}{2}$ y $i - \frac{1}{2}$ que delimitan las celdas i . En el presente Trabajo se emplearán dos *solvers* diferentes: FORCE construido sobre una formulación centrada con un carácter más robusto pero también más difusivo que el anterior y Roe construido sobre un esquema *upwind* y por tanto especialmente indicado para la resolución de ecuaciones advectivas.

2.2.2. El resolvidor FORCE

Con el fin de evitar que las singularidades inestabilicen el método, se recurre un resolvidor de carácter notablemente difusivo como es FORCE (*First Order Centered*), desarrollado en [21] [22] y generalizado en [23] y [24]. Este método centrado en la celda es, por su sencillez en la formulación, utilizado en problemas matemáticamente delicados [24] como es el caso del flujo bicapa en aguas poco profundas.

Es habitual plantear el flujo numérico de FORCE en un solo paso como combinación de los flujos de Lax-Friedrichs y Lax-Wendroff. Los flujos numéricos \mathbf{F}^* se definen como:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{LF} + \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{LW}}{2} \quad (2.20)$$

donde $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{LF}$ es el flujo de Lax-Friedrichs y $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{LW}$ el flujo de Lax-Wendroff en la pared $i + \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{LF} &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{U}^{n,-}) + \mathbf{F}(\mathbf{U}^{n,+})) - \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\Delta t} (\mathbf{U}^{n,+} - \mathbf{U}^{n,-}) \\ \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{LW} &= \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^{LW}) \\ \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^{LW} &= \frac{1}{2}(\mathbf{U}^{n,-} + \mathbf{U}^{n,+}) - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}(\mathbf{U}^{n,+}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}^{n,-})) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Se incluyen en el sistema los términos fuente discretizados \mathbf{S}_i^* :

$$\mathbf{S}_i^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh_{i,1}^* \left(\frac{\Delta z_{1,i}}{\Delta x} \right) - \frac{\tau_{xi}}{\rho_1} \\ 0 \\ -gh_{2,i}^* \left(\frac{\Delta z_{2,i}}{\Delta x} \right) + \frac{\tau_{xi}}{\rho_2} - \frac{\tau_{xb}}{\rho_2} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Los términos de rozamiento se definen según lo indicado en (2.11) y (2.12) con los parámetros de cálculo correspondientes centrados en la celda i . El método FORCE se propuso inicialmente para sistemas homogéneos (sin términos fuente) por lo que la inclusión de \mathbf{S} requiere de un tratamiento cuidadoso. La versión de FORCE aquí propuesta requiere

aplicar el concepto de la reconstrucción hidrostática [25] para lograr que el esquema sea equilibrado o *well-balanced*. La idea básica, desarrollada en B.1, es reproducir el término fuente promediado en la celda como la versión discreta del gradiente del flujo de momento hidrostático para lograr que:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^* - \Delta x \mathbf{S}_i^* = 0 \quad (2.23)$$

Reconstruyendo los valores a ambos lados de la pared \mathbf{U}_i y \mathbf{U}_{i+1} a \mathbf{U}^- y \mathbf{U}^+ que son los empleados en el cálculo de los flujos en (2.21). Esta técnica permite definir los grados de libertad existentes en $h_{i,1}^*$ y $\Delta z_{1,i}$ con B.6, $h_{2,i}^*$ y $\Delta z_{2,i}$ con B.12.

El esquema numérico, expresado en la forma de la fórmula de actualización, queda finalmente:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^* - \Delta x \mathbf{S}_i^*) \quad (2.24)$$

2.2.3. Resolvedor de Roe

Desde su aparición en 1981 [26], el *solver* de Roe ha sido uno de los más utilizados en hidrodinámica para la resolución de problemas, su propiedad principal es que es capaz de conservar y resolver de forma exacta las discontinuidades planteadas en el problema de Riemann, desarrollo expuesto en B.2, y reproducir correctamente las ondas de choque. Es un método *upwind* o descentrado, esto afecta a la definición discreta de las derivadas espaciales, que depende del signo de la velocidad de las onda. Al conservar el sentido de la información transmitida, el método logra la estabilidad en los casos en que se garantiza la hiperbolicidad de las ecuaciones gobernantes.

En términos de difusividad, es un método poco difusivo en la resolución de ecuaciones no lineales, lo que planteará ventajas en cuanto a la precisión y dificultades cuando aparezcan singularidades a lo largo del cálculo.

La idea fundamental de este método resulta de aplicar el problema de Riemann al caso homogéneo, es decir sin términos fuente \mathbf{S} . El objetivo es encontrar la expresión de \mathbf{F}^* con la que poder resolver el sistema:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^*) \quad (2.25)$$

donde \mathbf{F}^* , en la pared $i + \frac{1}{2}$ y $i - \frac{1}{2}$, se define como:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* &= \mathbf{F}_i + \sum_{k^-} (\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k)_{i+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^* &= \mathbf{F}_i - \sum_{k^+} (\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k)_{i-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

en función de los valores $\tilde{\lambda}_k$, considerando su signo k^\pm , y vectores propios $\tilde{\mathbf{e}}_k$ de la matriz jacobiana aproximada $\tilde{\mathbf{J}}$, definida para la pared que resulta de transformar el sistema original en derivadas parciales (2.3) al sistema hiperbólico mostrado en (2.5). Los coeficientes $\tilde{\alpha}_k$ se obtienen de expresar la variación de las variables conservadas en la pared expresada en la base de los vectores propios, es decir $\Delta \mathbf{U} = \sum \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k$. Los detalles sobre el cálculo de los valores y vectores propios se pueden encontrar en B.3.1, donde se garantiza además el carácter equilibrado (*well balanced*) del sistema.

Sustituyendo la expresión de los flujos numéricos en (2.25), se obtiene la *expresión de la actualización en la celda*, que será aquella a implementar en el código computacional para modificar el valor de las variables en las celdas con cada paso de tiempo:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\sum_{k^-} (\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k)_{i+\frac{1}{2}} + \sum_{k^+} (\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k \tilde{\mathbf{e}}_k)_{i-\frac{1}{2}} \right] \quad (2.27)$$

Se incorporan los términos fuente \mathbf{S} , a través de técnicas como el *upwinding* o descentramiento, recurriendo a su proyección en la base de los vectores propios. De este modo la señal de la onda que se propaga (la información) queda afectada por la influencia de los propios términos fuente [27]:

$$\Delta x \mathbf{S}_i^* = \sum_k \tilde{\beta}_k \tilde{\mathbf{e}}_k \quad (2.28)$$

Incorporando (2.28) a (2.27) se obtiene la formulación definitiva de la expresión de actualización de la celda:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\sum_{k^-} ((\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k - \tilde{\beta}_k) \tilde{\mathbf{e}}_k)_{i+\frac{1}{2}} + \sum_{k^+} ((\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k - \tilde{\beta}_k) \tilde{\mathbf{e}}_k)_{i-\frac{1}{2}} \right] \quad (2.29)$$

En los Anexos se completa el esquema numérico incluyendo las correcciones necesarias para evitar los problemas de entropía B.3.2, impedir la aparición de calados o alturas negativas B.3.3, de momentos de rozamiento físicamente imposibles B.3.3 y el manejo adecuado de las situaciones seco-mojado B.3.3. En este aspecto una de las principales ventajas del bicapa es la posibilidad de aprovechar de forma directa los nuevos planteamientos y correcciones que se suelen implementar o se han implementado recientemente en los modelos monocapa de flujos en aguas pocos profundas como [27] [28] [29] [25].

2.2.4. Condiciones de contorno

En cualquier problema basado en sistemas de ecuaciones diferenciales es fundamental el apartado referente a las condiciones de contorno. En las simulaciones realizadas con el modelo aquí desarrollado se ha implementado la condición de contorno cerrada (en el cual

los flujos numéricos \mathbf{F}^* a través de las paredes de los límites del dominio se hacen nulos). Los detalles de la formulación de la condición de contorno cerrada se encuentran en D.2.

2.2.5. Estabilidad temporal

En la simulación con métodos numéricos explícitos, en este caso con los esquemas de FORCE y Roe, es necesario definir un intervalo de tiempo máximo de iteración Δt con el que garantizar la convergencia y estabilidad del esquema:

$$\Delta t = CFL \frac{\Delta x}{\lambda_k^{max}} \quad (2.30)$$

donde el valor λ_k^{max} es el máximo de los valores propios para las celdas del dominio de cálculo y el número CFL debe estar comprendido entre 0 y 1 (ver la justificación en D.1).

Es necesario comentar que para la versión homogénea del sistema, la condición CFL es 1. En un caso, como es el que aquí se desarrolla, con términos fuente \mathbf{S} , serán éstos fundamentalmente los que determinen la nueva condición CFL, habitualmente notablemente más restrictiva que la del sistema homogéneo original. La dificultad reside en que no se ha desarrollado un método de análisis capaz de establecer esta condición con términos fuente de manera explícita.

Capítulo 3

Validación del esquema numérico

Para validar los dos esquemas construidos, FORCE y Roe, es preciso comparar primero los resultados numéricos que se obtienen de éstos al plantear problemas con solución ya existente. En el presente capítulo se combinan casos test con solución analítica con otros experimentales y de comprobación del comportamiento del modelo ante casos específicos. Finalmente se simulan dos casos de aplicación de los esquemas numéricos.

3.1. Validación del modelo monocapa

3.1.1. Rotura de presa ideal sobre fondo seco

El caso de una rotura de presa ideal es, bajo el punto de vista estrictamente matemático, un problema de Riemann, y como tal, resoluble [30] empleando la teoría de las ondas características, véase C.1 donde se obtienen las expresiones analíticas. Las condiciones iniciales $t = 0$ del problema son:

$$h_2(x, 0) = \begin{cases} h^1 & \text{si } x \leq x_1 \\ h^0 & \text{si } x > x_1 \end{cases} \text{ con } u_2(x, 0) = 0 \quad (3.1)$$

donde para este caso particular $h^1 = 2.0$ m y $h^0 = 0.0$ m. Lógicamente para que las condiciones sean monocapa se cancela la capa superior haciendo $h_1(x, 0) = 0$ m. La posición de la discontinuidad es $x_1 = 0$ m en un dominio de simulación $[-3, 3]$ plano (sin relieve) con condición de estabilidad temporal CFL 0.7.

Con los resultados obtenidos, Figura 3.1, se evidencian buenos niveles de correlación entre las soluciones analíticas y las numéricas. Por completitud, en C.2, se ha simulado el caso homólogo sobre fondo mojado.

3.1.2. Test experimental del CITEEC

En el flujo bicapa existe un movimiento continuo en el tiempo de la interfaz, que actúa para la capa superior de forma equivalente a un fondo móvil. Como paso previo a la

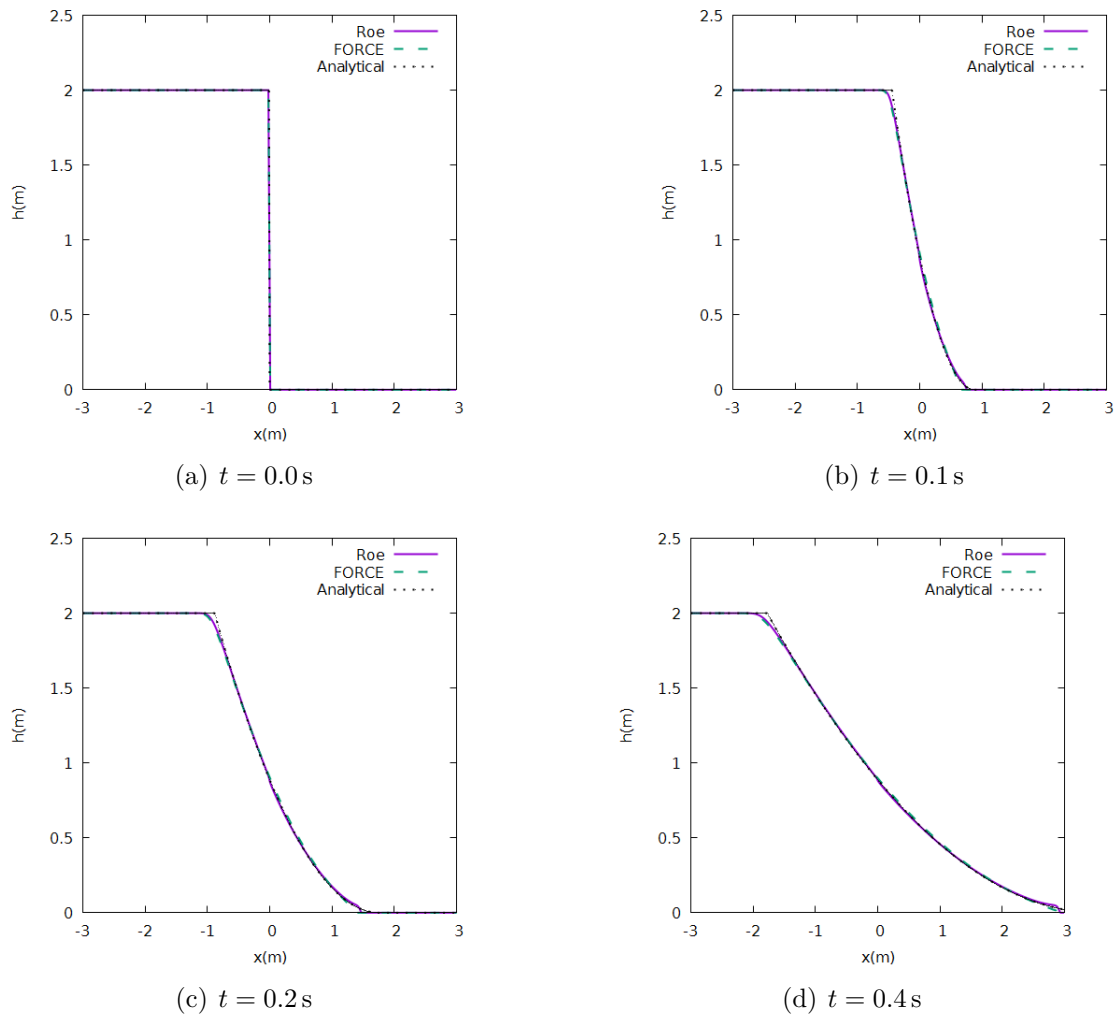


Fig. 3.1: Test 1. Rotura ideal de presa monocapa en seco.

simulación de un bicapa es necesario comprobar en un caso más sencillo cómo se comporta el modelo monocapa ante la existencia de un lecho variable en el tiempo. A tal efecto se ha reproduce el experimento desarrollado en el CITEEC [31].

El experimento se desarrolla en un canal rectangular de 15 m de longitud por 60 cm de ancho, de los que se emplean 3.69 m. En el caso aquí considerado, se coloca en un extremo un rampa de 45° accionada por unos pistones hidráulicos con un desplazamiento máximo de $\Delta L = 0.59\text{ m}$ a una velocidad de $v = 0.29\text{ m/s}$. Se considera que la aceleración del bloque es tan rápida que resulta despreciable, tampoco es relevante el rozamiento [31].

El nivel inicial del agua es de $h_0 = 0.15\text{ m}$ y se colocan una serie de sondas de profundidad a una distancia de la posición final de la rampa de 0.0 m (S1), 0.50 m (S2), 1.00 m (S3), 2.00 m (S4) y 3.00 m (S5). Tal y como se muestra en la Figura 3.2 con el esquema del experimento, en el extremo opuesto del canal existe un muro de 0.36 m que no será superado en este caso.

Los resultados obtenidos recogen la tendencia aunque muestran discrepancias entre los datos experimentales y los numéricos. Esto puede ser debido fundamentalmente a los

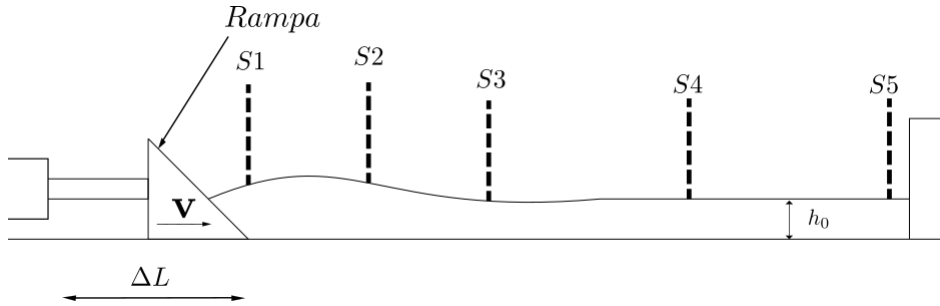
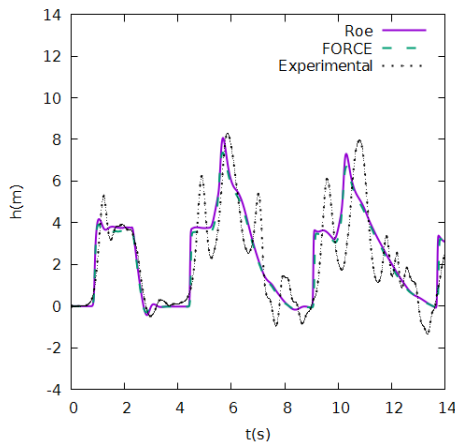
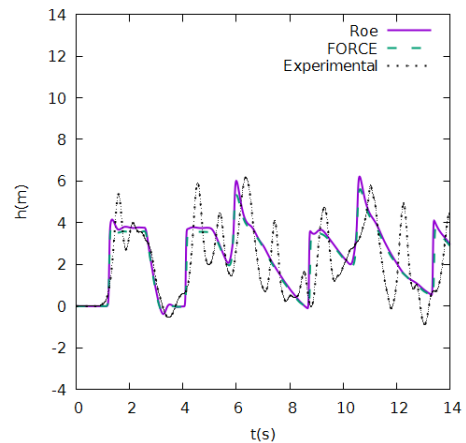


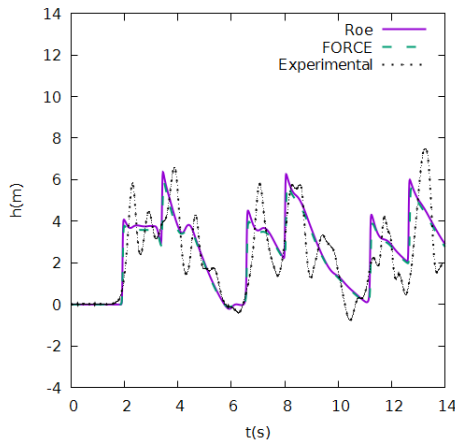
Fig. 3.2: Esquema del experimento llevado a cabo en el CITEEC.



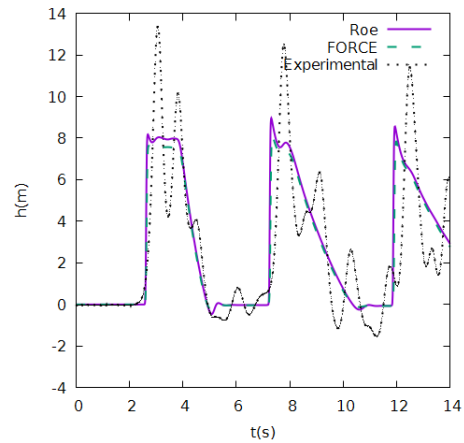
(a) S2



(b) S3



(c) S4



(d) S5

Fig. 3.3: Test 2. Parámetros del experimento del avance de un pistón sobre un canal rectangular.

fenómenos y aceleraciones de origen vertical que el modelo, como promediado en la vertical, no es capaz de reproducir correctamente. Pese a ello la correlación entre modelos es muy buena, FORCE y Roe son por su naturaleza métodos muy distintos en su formulación, pero los resultados que se obtienen son muy parecidos. En C.3 se pueden consultar los resultados de la simulación para todo el dominio, registrándose también los valores de las sondas en los puntos medidos.

3.2. Validación del modelo bicapa

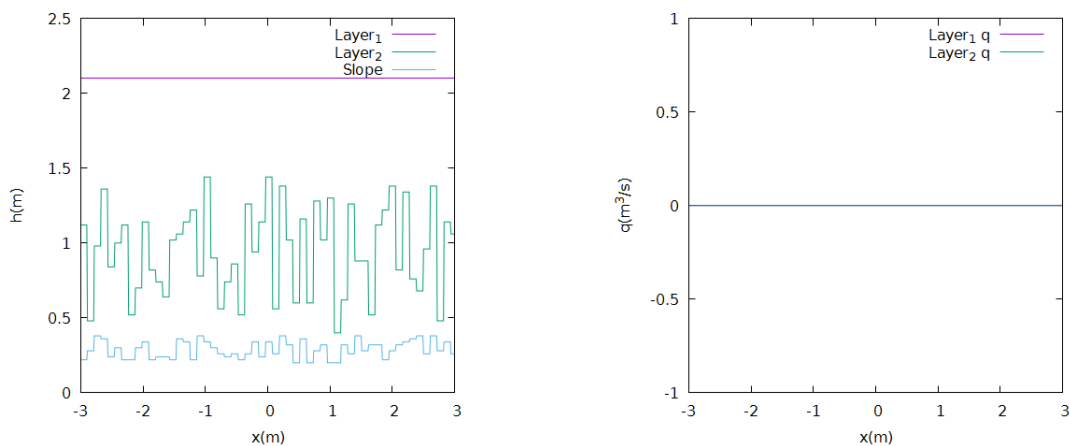
En el presente apartado se plantean una serie de casos test bicapa con los que estudiar los rangos de aplicabilidad de los dos esquemas numéricos propuestos: Roe y FORCE. El objetivo es estudiar las limitaciones que presentan en cuanto a su uso, uno y otro modelo, en función de las condiciones a simular.

3.2.1. Equilibrio hidrostático

Como análisis previo a la simulación de casos test transitorios y estacionarios se reproduce una situación de equilibrio hidrostático con relación de densidades entre capas $r = \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1$ y superficie libre constante η . Es decir con el bicapa se emula un monocapa en reposo, donde la definición de la interfaz es indiferente para conservar dicho estado. En un caso con $r \neq 1$, el estado de equilibrio solo se alcanza con la interfaz uniforme, siendo un caso particular del anterior. Las condiciones iniciales son:

$$h_1(x, 0) + h_2(x, 0) + z_b = \eta \text{ con } u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = 0 \quad (3.2)$$

Si el método numérico es equilibrado o *well-balanced* y se ha formulado correctamente la reconstrucción hidrostática para FORCE (B.1) y la discretización *upwind* de los términos fuente \mathbf{S} para el método de Roe (B.3.1), se deberá mantener a lo largo de todo el tiempo de la simulación.

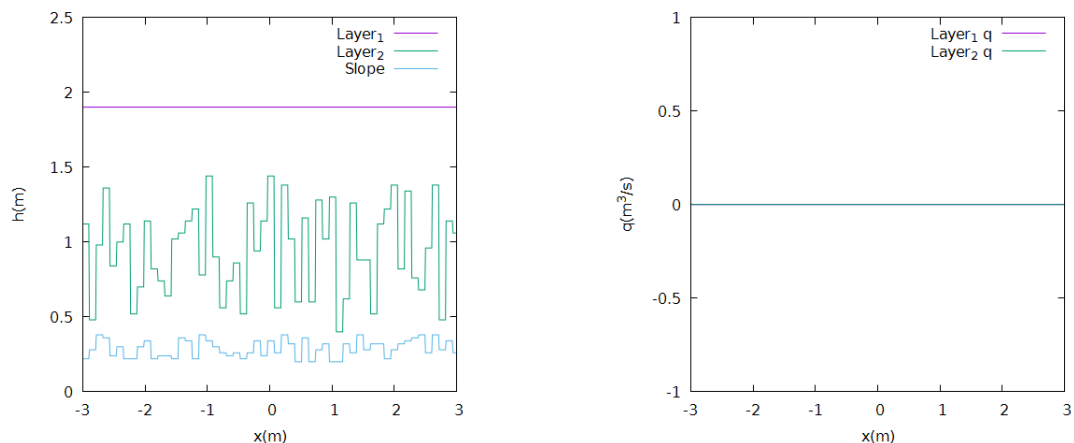


(a) Lecho fijo, la interfaz y la superficie libre

(b) Caudales en el dominio de simulación

Fig. 3.4: Test 3. Estado de reposo hidrostático con el método de FORCE para un tiempo $t = 10$ s con una condición de superficie libre $\eta = 2.1$ m y valores aleatorios de capa inferior h_2 y el lecho fijo z_b .

Se comprueba en las Figuras 3.4 y 3.5 que para ambos esquemas numéricos los caudales son nulos y que se conserva el equilibrio hidrostático.



(a) Lecho fijo, la interfaz y la superficie libre

(b) Caudales en el dominio de simulación

Fig. 3.5: Test 3. Estado de reposo hidrostático con el método de Roe para un tiempo $t = 10$ s con una condición de superficie libre $\eta = 1.9$ m y valores aleatorios de capa inferior h_2 y el lecho fijo z_b .

3.2.2. Rotura de presa ideal bicapa

Se reproduce a continuación una rotura ideal sobre fondo seco plano y sin fricción, pero en este caso considerando una situación bicapa, es decir fraccionando los calados anteriores a partes iguales:

$$h_1(x, 0) = h_2(x, 0) = \begin{cases} h^1 & \text{si } x \leq x_1 \\ h^0 & \text{si } x > x_1 \end{cases} \text{ con } u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = 0 \quad (3.3)$$

donde para este caso $h^1 = 1.0$ m y $h^0 = 0.0$ m. La posición de la discontinuidad es $x_1 = 0$ m en un dominio de simulación $[-3, 3]$.

Con el fin de comparar también con la solución analítica del problema, desarrollada en C.1, la relación de densidades se hace $r = \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1$, convirtiendo el bicapa en un *monocapa ficticio*.

Es necesario simular con intervalos de tiempo reducidos CFL 0.005. Son valores temporales muy reducidos para un uso práctico, pero no se debe olvidar que en este momento el objetivo de los test es explorar las limitaciones de los métodos.

Se evidencia con los resultados obtenidos que tanto FORCE como Roe presentan problemáticas (distintas) al reproducir la rotura de presa bicapa. Se manifiesta numéricamente de dos formas diferentes, en un caso con una fuerte difusión (FORCE en la Figura 3.6) y en el otro con la dispersión, rizados o *wiggles* (Roe en la Figura 3.7). Se han dado numerosas explicaciones a la aparición de estas inestabilidades en la interfaz, aunque mayoritariamente se suelen vincular con fenómenos ondulatorios en la interfaz que los modelos promediados en la vertical no son capaces de reproducir adecuadamente. Particularmente en FORCE la energía de estas ondas se disipa dando lugar a una fuerte

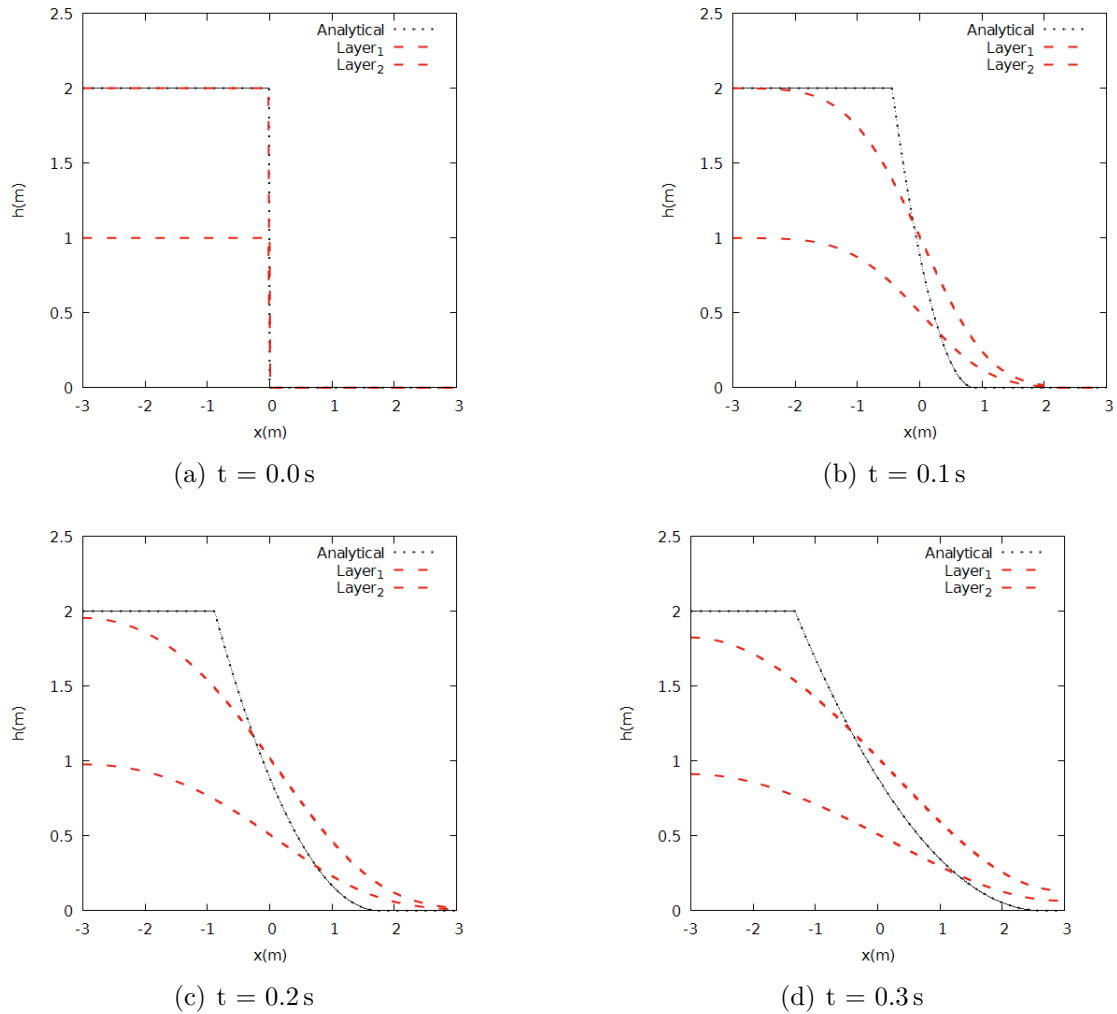


Fig. 3.6: Test 4. Rotura de presa pseudo-monocapa con el método FORCE.

difusividad en los cálculos. Matemáticamente lo que ocurre es que el sistema pierde sus propiedades de hiperbolicidad dando lugar a la aparición de valores propios complejos en la formulación completamente acoplada del sistema. Este fenómeno se produce con mayor intensidad cuanto más parecidas son las densidades entre las capas (el cociente entre densidades r es cercano a 1) y mayor es la velocidad relativa $|u_1 - u_2|$ entre ellas. Para una explicación detallada de este fenómeno se recomienda consultar D.3.

3.2.3. Condiciones de aplicabilidad de los esquemas numéricos de Roe y FORCE

A la vista de los resultados en el apartado anterior 3.2.2, parece que FORCE es el método más adecuado para simular casos bicapa, ya que a pesar de presentar difusividad no se inestabiliza (principal problema del bicapa), lo que sí ocurre con Roe. Sin embargo es necesario preguntarse si este comportamiento es extensible a todas las situaciones bicapa o si por el contrario van a existir una serie de casos en las que resulta más adecuado utilizar

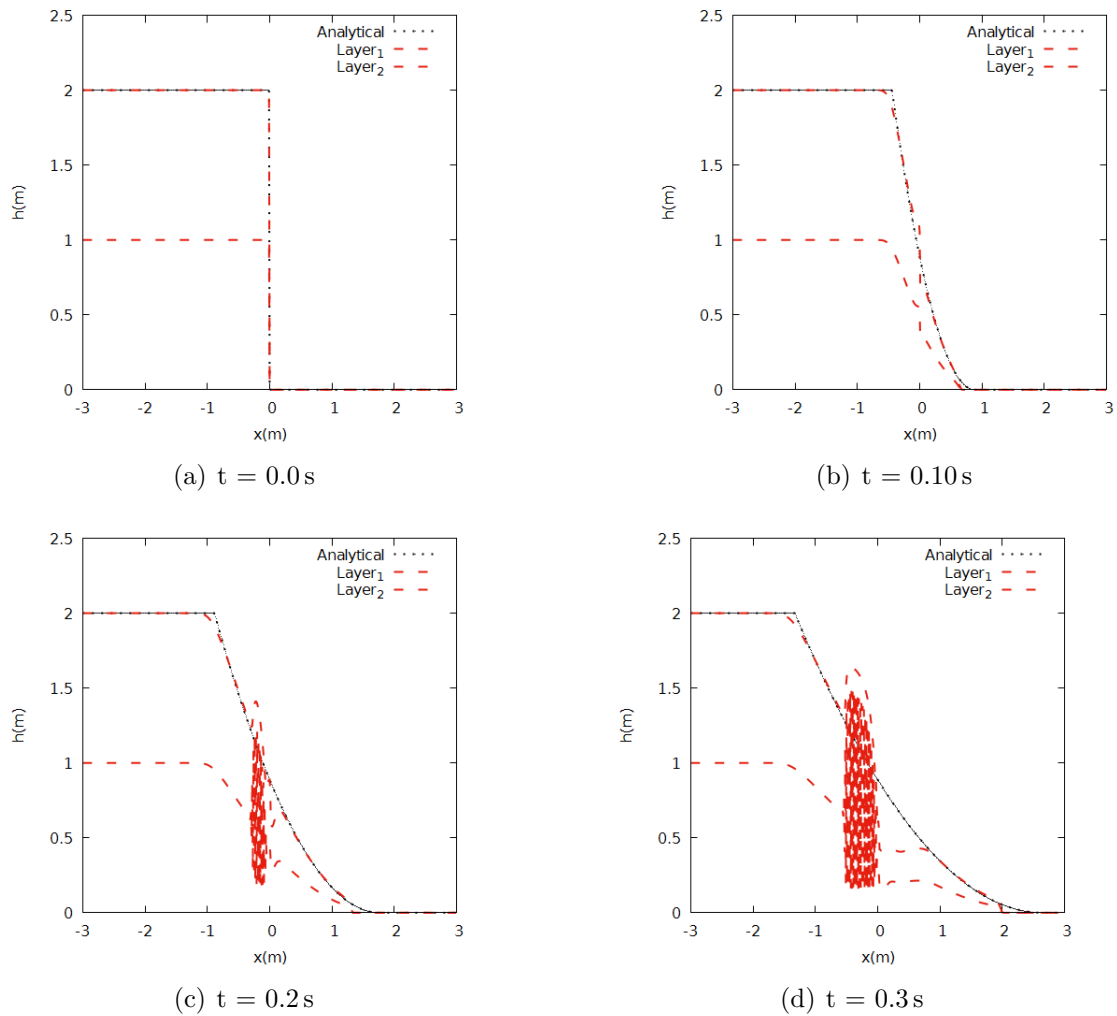


Fig. 3.7: Test 4. Rotura de presa ideal pseudo-monocapa con el método Roe.

uno u otro modelo numérico. Con el fin de responder a esta pregunta se simulan en este apartado una serie de test de rotura de presa bicapa que ponen en juego los términos de acoplamiento, presentes en el vector fuente \mathbf{S} del bicapa.

Influencia de la relación de espesores y densidades entre capas

Se simula a continuación un caso test de rotura bicapa ideal similar al mostrado en 3.2.2, donde a diferencia de éste se modifica la relación inicial de espesores y densidades. Se recuerda que los términos de acoplamiento, excluyendo los de rozamiento, son $gh_1 \frac{\partial h_2}{\partial x}$ y $\frac{\rho_1}{\rho_2} g \frac{\partial h_1}{\partial x}$, de modo que al reducir el valor de los cocientes $\frac{h_1}{h_2}$ y $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ se reduce la influencia de dichos términos. Esto implica que los fenómenos inestables (comentados en D.3), de los que especialmente sufre el método de Roe, deberían atenuarse.

Para todos los casos simulados en este apartado la posición de la discontinuidad y el dominio de simulación son los mismos que los establecidos en los casos de 3.2.2, es decir:

$$\begin{aligned} h_1(x, 0) &= \begin{cases} h_1^- & \text{si } x \leq x_1 \\ h_1^+ & \text{si } x > x_1 \end{cases} \text{ con } u_1(x, 0) = 0 \\ h_2(x, 0) &= \begin{cases} h_2^- & \text{si } x \leq x_1 \\ h_2^+ & \text{si } x > x_1 \end{cases} \text{ con } u_2(x, 0) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Modificándose los valores iniciales de los calados de las capas h_1^- , h_1^+ , h_2^- y h_2^+ así como las densidades ρ_1 y ρ_2 , no se incorpora fricción. Los parámetros utilizados se muestran en la tabla 3.1.

En virtud de la simplicidad y la claridad se omiten las representaciones iniciales de las discontinuidades, representándose únicamente aquellos instantes relevantes bajo el punto de vista del análisis que se pretende llevar a cabo. Para consultar los resultados completos que se obtienen para cada una de las simulaciones ver C.4.

Test	ρ_1 (kg/m ³)	ρ_2 (kg/m ³)	h_1^- (m)	h_1^+ (m)	h_2^- (m)	h_2^+ (m)
5	1000	1000	1.0	1.0	1.0	0.5
6	1000	1100	1.0	1.0	1.0	0.5
7	1000	2000	1.0	1.0	1.0	0.5
8	1000	1100	0.1	0.55	1.0	0.5

Tabla 3.1: Parámetros de las rotura de presa bicapa.

En el test 5, Figura 3.9, el método de Roe, como resulta previsible para un caso con relación de densidades unitarias, presenta un comportamiento inestable. Con FORCE la simulación no llega a inestabilizarse pero sí muestra una oscilación numérica en la interfaz y una fuerte difusión.

En el caso del test 6, Figura 3.10, dado que $r \neq 1$, Roe se inestabiliza solo localmente (aparece una pared vertical en $x = 0$ asociada a un error numérico), mientras que FORCE ya no presenta ninguna alteración numérica a excepción de su carácter difusivo.

Al reducirse la relación de densidades, test 7 y Figura 3.11, o de espesores, test 8 y Figura 3.12, con respecto al test 6, el rizado en Roe desaparece completamente como consecuencia de reducirse la influencia de los términos fuente. Los resultados obtenidos con este último método permiten visualizar de forma clara las distintas ondas, de choque y rarefacción, que se producen tanto en la superficie como en la interfaz. En el caso de FORCE observar estos fenómenos es más complicado, especialmente en la superficie libre donde la difusión es notable.

En resumen, Figura 3.8, se puede concluir que para una relación de densidades unitaria $r = 1$ ninguno de los dos métodos ofrece garantías de estabilidad numérica, presentando un

comportamiento oscilatorio (FORCE) o inestable (Roe). En el resto de casos FORCE es estable pero muy difusivo y Roe es condicionalmente estable, mejorando su comportamiento al reducirse relación de densidades y espesores entre capas.

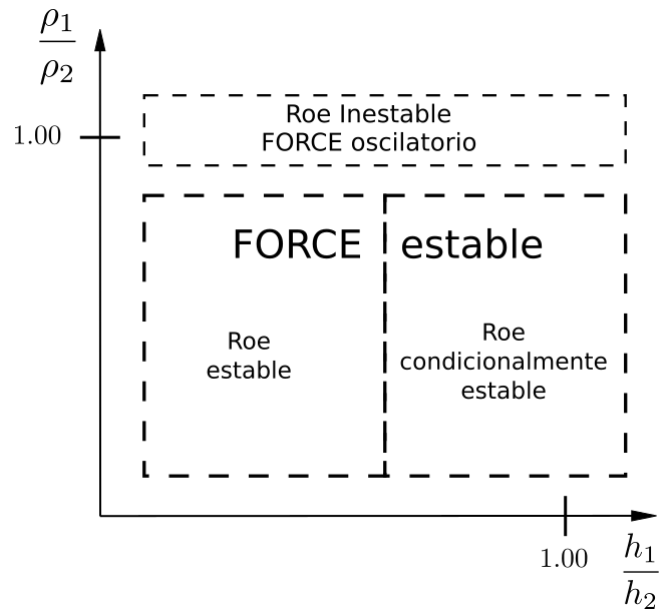


Fig. 3.8: Esquema con las condiciones de aplicación de los métodos FORCE y Roe en función de la relación de espesores $\frac{h_1}{h_2}$ y densidades $\frac{\rho_1}{\rho_2}$.

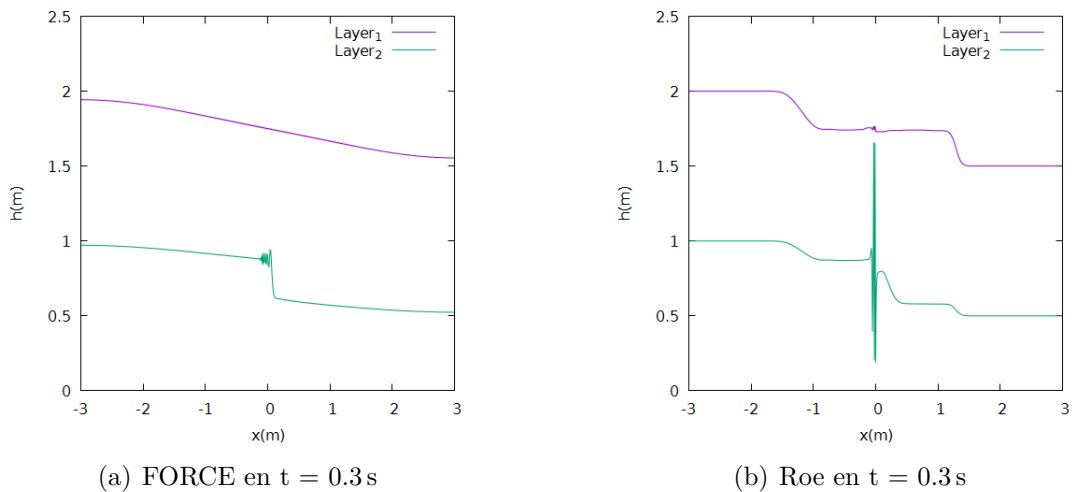
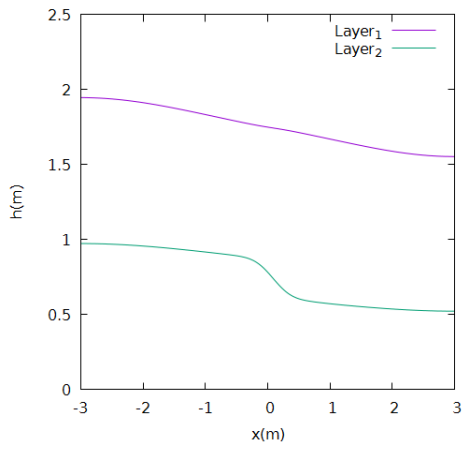
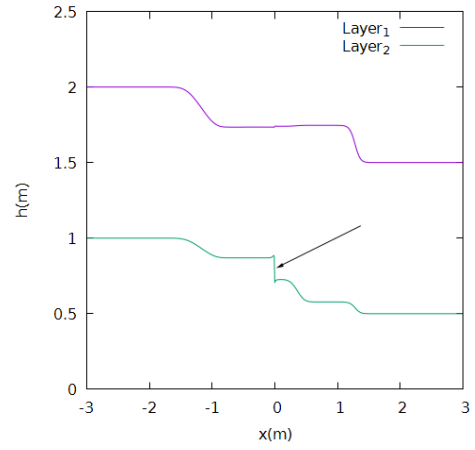


Fig. 3.9: Test 5. Rotura de presa bicapa.

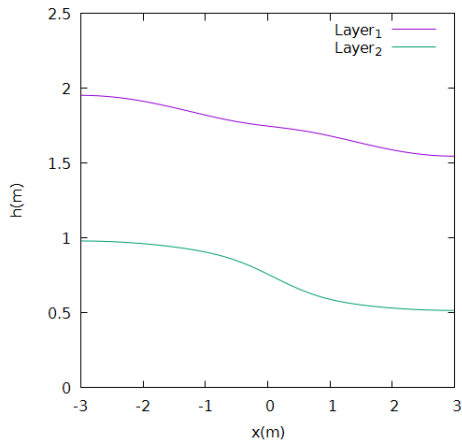


(a) FORCE en $t = 0.3$ s

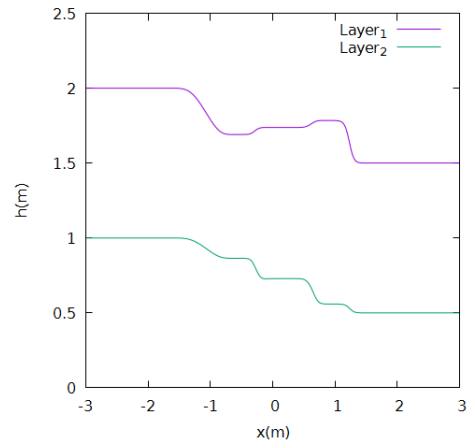


(b) Roe en $t = 0.3$ s, la flecha señala la inestabilidad

Fig. 3.10: Test 6. Rotura de presa bicapa.

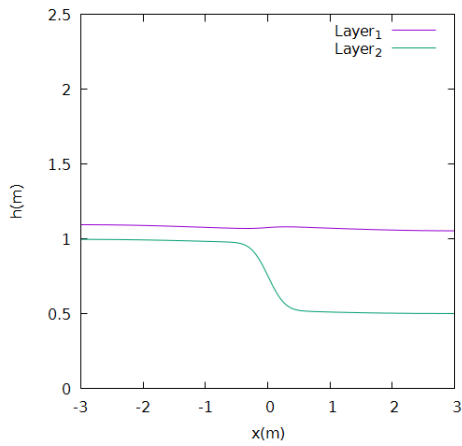


(a) FORCE en $t = 0.3$ s

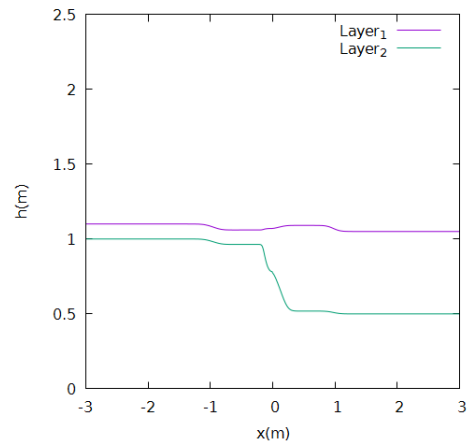


(b) Roe en $t = 0.3$ s

Fig. 3.11: Test 7. Rotura de presa bicapa.



(a) FORCE en $t = 0.3$ s



(b) Roe en $t = 0.3$ s

Fig. 3.12: Test 8. Rotura de presa bicapa.

3.3. Casos complejos de aplicación de los modelos numéricos

En el presente apartado se simulan dos casos complejos que emulan a los fenómenos bicapa comentados en la Introducción. Con FORCE se reproduce una rotura de presa enfrentada de dos masas de líquido con densidades y espesores semejantes, emulando una interacción entre corrientes oceánicas, y el método de Roe se emplea en una simulación de una rotura de balsa minera.

3.3.1. Método FORCE. Doble rotura de presa

En este test idealizado se muestra la capacidad del método para estratificar las capas, es decir que la capa de mayor densidad quede ubicada en la zona inferior y la de menor en contacto con la superficie libre.

Para ello se simula una rotura de presa enfrentada entre ambas capas sobre un dominio cerrado $[-3, 3]$, donde los valores de densidades y constantes de rozamiento empleados se muestran en la tabla 3.2. Al incorporar rozamiento al sistema, la energía se disipa de modo que se puede alcanzar finalmente un estado de equilibrio hidroestático con $u = 0$.

Símbolo	Nombre	Valor
ρ_1	Densidad capa superior	1000 kg/m ³
ρ_2	Densidad capa inferior	1200 kg/m ³
n	Coefficiente de Manning	0.06 s/m ^{1/3}
C_{fi}	Coefficiente de rozamiento en la interfaz	0.50
τ_y	Esfuerzo característico de la capa inferior	0.0 Pa
δ_s	Ángulo de reposo de la capa inferior	0.0°
c	Condición CFL	0.05

Tabla 3.2: Parámetros de la doble rotura de presa.

El perfil del lecho fijo empleado es:

$$z_b(x) = \begin{cases} 0.125 \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right)^2 & \text{si } |x| \leq 2 \\ 0.0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (3.5)$$

Se sitúan las capas a cada lado del origen $x = 0$:

$$h_2(x, 0) = \begin{cases} \eta - z_b(x) & \text{si } x < 0 \\ 0.0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ con } u_2(x, 0) = 0 \quad (3.6)$$

$$h_1(x, 0) = \begin{cases} 0.0 & \text{si } x < 0 \\ \eta - z_b(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ con } u_1(x, 0) = 0 \quad (3.7)$$

La superficie libre se ubica en $\eta = 1.5$ m y la condición de estabilidad temporal es CFL 0.05 .

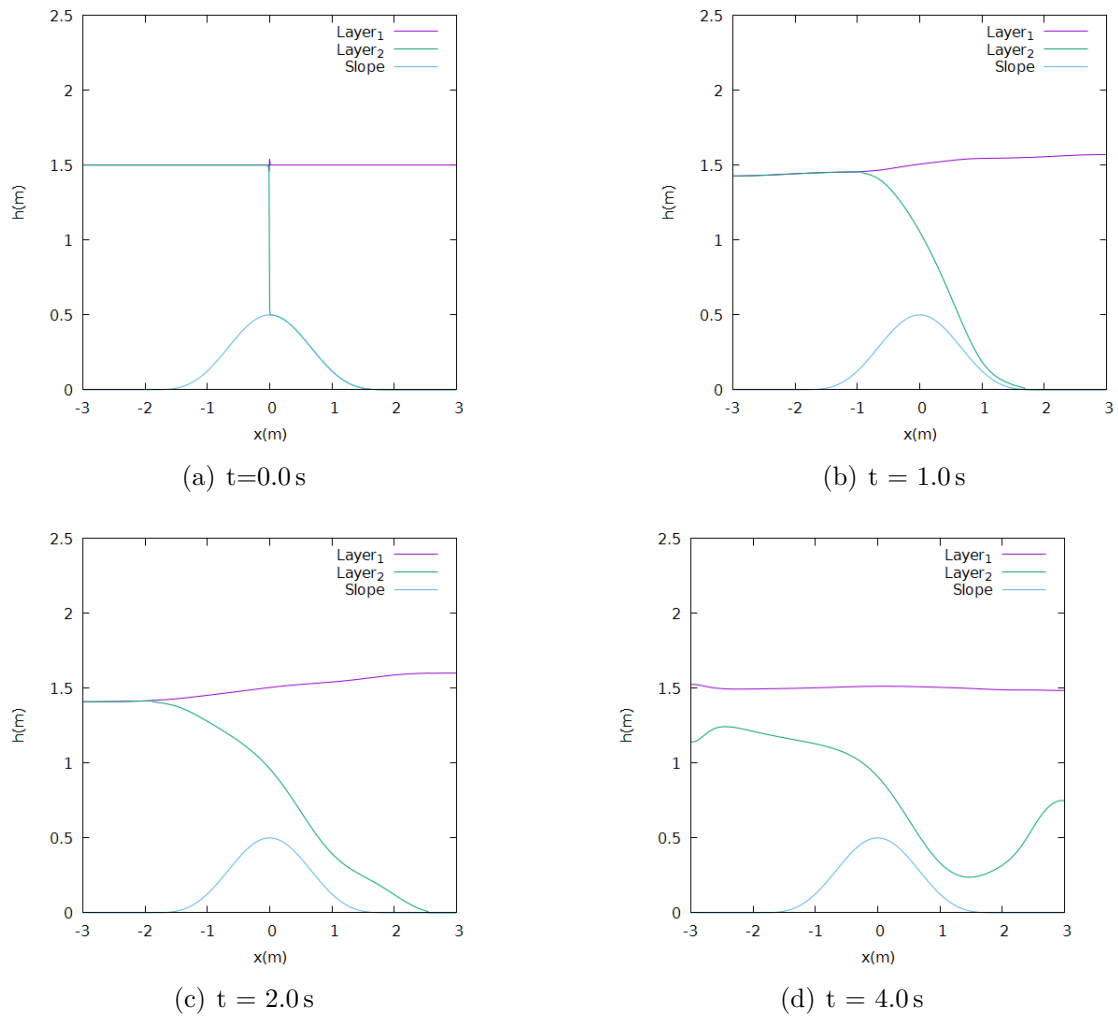


Fig. 3.13: Doble rotura de presa, instantes iniciales.

Los resultados para los primeros instantes de tiempo, en los cuales se produce el paso de la capa de mayor densidad (*layer 2*) por debajo de la de menor densidad (*layer 1*) se muestran en la Figura 3.13. Alcanzándose para el equilibrio hidroestático el estado mostrado en la Figura 3.14.

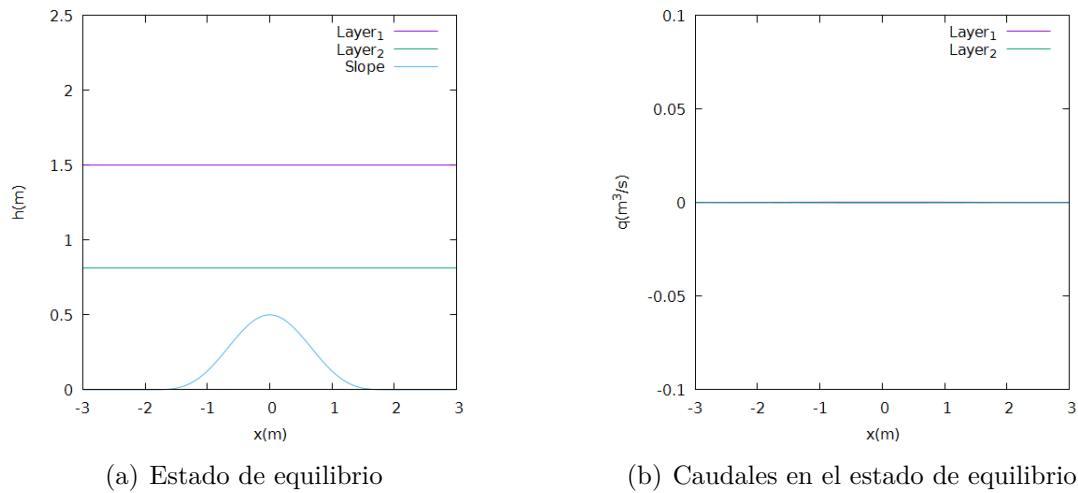


Fig. 3.14: Doble rotura de presa, estado de equilibrio para $t=150.0$ s.

3.3.2. Método de Roe. Rotura de una balsa minera

Como segundo caso de aplicación práctica se ha diseñado una simulación de una rotura de presa bicapa (Figura 3.15) emulando a una balsa de residuos mineros, con la que evaluar:

- Las simulaciones con espesores reducidos de la capa superior h_1 .
- Las fuerzas de rozamiento tanto en la interfaz como en cada una de capas.
- Estratificación de las capas con el paso del tiempo.

Símbolo	Nombre	Valor
ρ_1	Densidad capa superior	1000 kg/m^3
ρ_2	Densidad capa inferior	2000 kg/m^3
h_1	Altura inicial capa superior	0.05 m
h_2	Altura inicial capa inferior	0.95 m
n	Coefficiente de Manning	0.10 $\text{s}/\text{m}^{1/3}$
C_{fi}	Coefficiente de rozamiento en la interfaz	0.50
τ_y	Esfuerzo característico de la capa inferior	2300 Pa
$\delta_{s,low}$	Ángulo de reposo bajo de la capa inferior	20°
$\delta_{s,high}$	Ángulo de reposo alto de la capa inferior	30°

Tabla 3.3: Test 10. Parámetros de un test tipo rotura de una balsa minera.

Para esta simulación los valores de rozamiento, densidad y espesores iniciales empleados han sido los mostrados en la tabla 3.3. Se modifica el valor del ángulo de reposo (*high* y *low*) para estudiar su influencia sobre los resultados.

En la Figura 3.16 se aprecia la diferente evolución de la capa de fango en función del ángulo de reposo. El estado de equilibrio se alcanza para $t = 50.0$ s, cuando la masa de agua queda bloqueada entre el lodo y la rampa del dique, esto se muestra en la Figura 3.17.

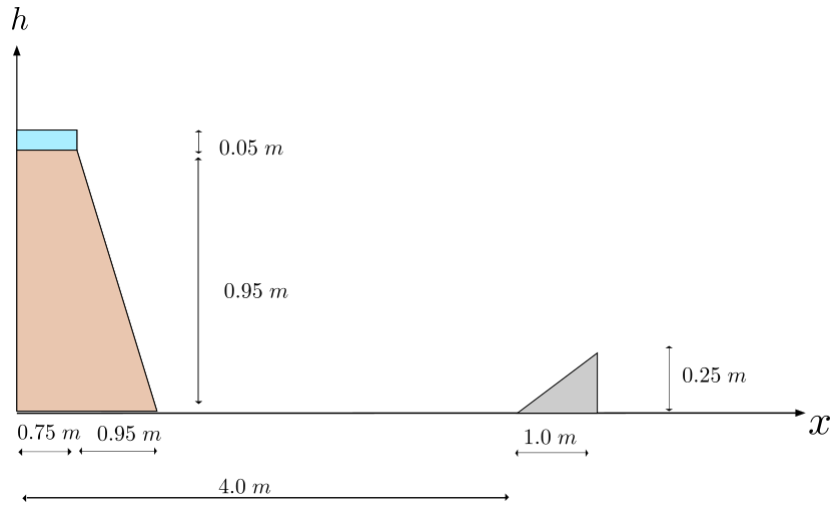


Fig. 3.15: Test 10. Condiciones iniciales en la simulación de la rotura de una balsa minera .

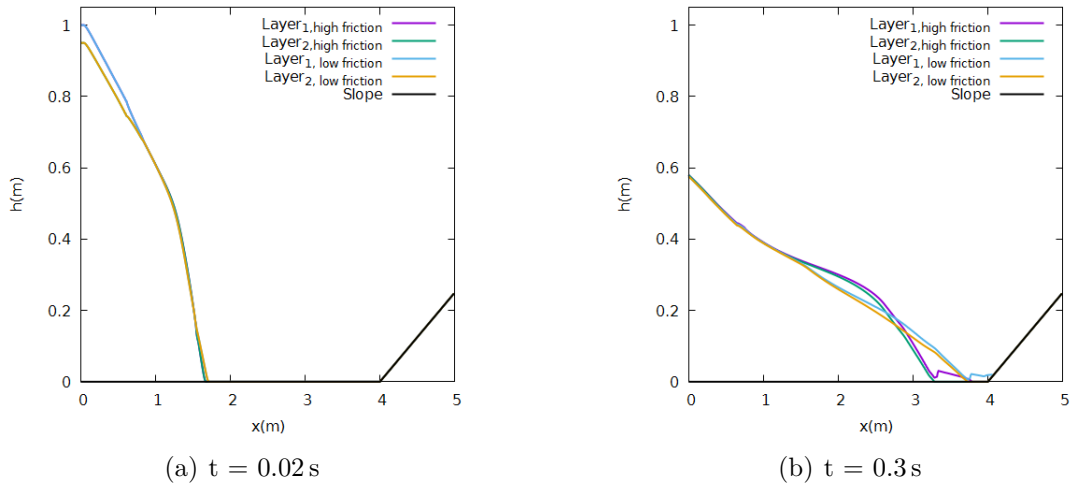


Fig. 3.16: Test 10. Rotura de una balsa minera, influencia del término del ángulo de reposo.

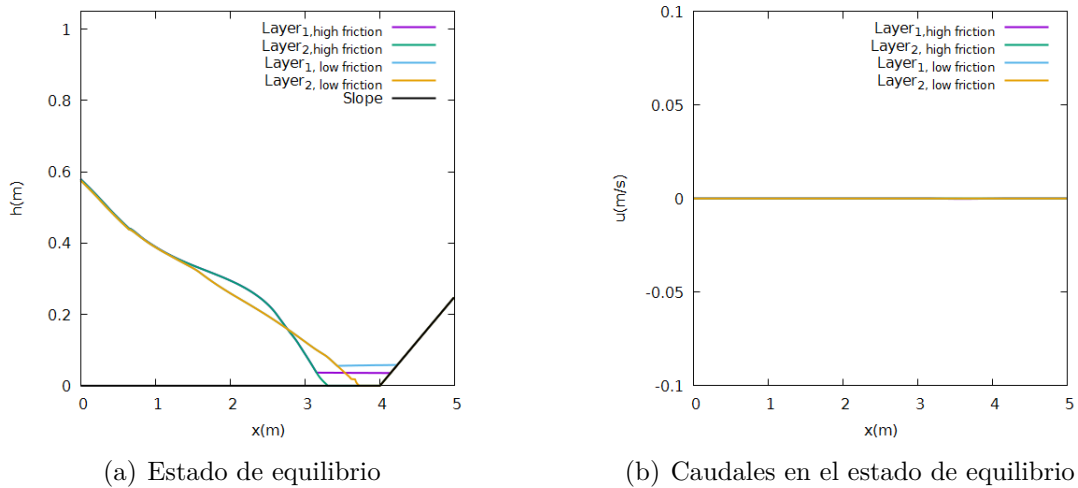


Fig. 3.17: Test 10. Rotura de una balsa minera, estado de equilibrio para $t = 50.0 \text{ s}$.

Capítulo 4

Conclusiones

El problema del flujo bicapa en aguas representa un reto ya que permite simular fenómenos de interés que habitualmente involucran una escala espacial grande. Desde desde los primeros estudios específicos en 1954 [32] hasta hoy se han propuesto numerosas soluciones utilizando técnicas numéricas muy diversas. Conjuguar un fenómeno complejo como es la interacción entre capas con un modelo simplificado como son las ecuaciones de aguas poco profundas, implica un desafío.

El método de FORCE, un esquema de carácter robusto, ha sido utilizado para mitigar los problemas de inestabilidad y pérdida de la hiperbolicidad asociados a resolver el problema de Riemann con densidades semejantes entre capas (situaciones vinculadas a la interacción entre corrientes oceánicas). La reducción de las inestabilidades conlleva una fuerte difusividad del esquema, pero este es un problema que es abordable y además largamente estudiado, lo que aporta garantías de resolución completa.

Se ha mostrado la posibilidad de reproducir fenómenos bicapa con el método de Roe donde la influencia de los términos de acoplamiento es más reducida. La ventaja de utilizar este esquema, largamente estudiado como *solver* de Riemann, es que es posible adaptar al bicapa muchas de las correcciones y mejoras incorporadas recientemente a los flujos monocapa y que permiten extender su aplicabilidad.

En resumen, en este trabajo se ha conseguido abrir una nueva vía para la resolución general del problema bicapa en el medio plazo con el uso de esquemas robustos como FORCE y corrigiendo su difusión, sin renunciar por ello a emplear los esquemas actuales de resolución en hidráulica para simular y reproducir un cierto conjunto de casos con interés práctico.

Este trabajo es necesario enmarcarlo dentro del proyecto más general que aspira a la resolución completa del flujo multifásico. Dados estos pasos preliminares sería necesario continuar mejorando el esquema bicapa desacoplado en FORCE a un esquema numérico de mayor orden, extendiendo el método de Roe al dominio bidimensional y desarrollar, una vez superadas todas las comprobaciones analíticas, un mayor número de experimentos en laboratorio que permitieran contrastar los resultados numéricos obtenidos con la realidad.

Capítulo 5

Bibliografía

- [1] Eugene G. Morozov, Karsten Trulsen, Manuel G. Velarde, and Vasily I. Vlasenko. Internal tides in the strait of Gibraltar. *Journal of Physical Oceanography*, 32(11):3193, 2002.
- [2] HL Bryden and TH Kinder. Steady 2-layer exchange through the strait of Gibraltar. *Deep-sea research part a oceanographic research*, 38:S445 – S463, 1991.
- [3] Johnson Space Center. NASA, Earth Observations Laboratory. Solitons, strait of Gibraltar. url<https://earthobservatory.nasa.gov/images/4585/solitons-strait-of-gibraltar>, 2004.
- [4] J.M. Amezaga and P.L. Younger. Mine water management in european environmental policy: An assessment of recent legislative developments. In *7th International Conference on Acid Rock Drainage 2006, ICARD - Also Serves as the 23rd Annual Meetings of the American Society of Mining and Reclamation*, volume 1, pages 1–12, (1)Hydrogeochemical Engineering Research and Outreach (HERO), Institute for Research on the Environment and Sustainability, University of Newcastle, 2006.
- [5] J. Grima y E. Custodio J. Gómez de la Heras, P. Gumiel. Contribuciones al estudio de la rotura de la balsa de lodos de Aznalcóllar. *Boletín geológico y minero*, (1):283, 2001.
- [6] F.J. Ayala-Carcedo. The Aznalcollar (Spain) tailings pond failure of 1998 and the ecological disaster of Guadiamar river: Causes, effects and lessons. *Boletín Geológico y Minero*, 115(4):711–738, 2004.
- [7] F. Bouchut and T.M. de Luna. An entropy satisfying scheme for two-layer shallow water equations with uncoupled treatment. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, (4):683, 2008.
- [8] R. Abgrall and S. Karni. Two-layer shallow water system: A relaxation approach. *SIAM journal of scientific computing*, (3):1603, 2010.

- [9] Alexander Kurganov and G Petrova. Central-upwind schemes for two-layer shallow water equations. *SIAM J. Scientific Computing*, 31:1742–1773, 01 2009.
- [10] Alexandre Chiapolino and Richard Saurel. Models and methods for two-layer shallow water flows. *Journal of Computational Physics*, 05 2018.
- [11] M.J. Castro-Díaz, C. Parés-Madroñal, E.D. Fernández-Nieto, and J.M. González-Vida. Numerical treatment of the loss of hyperbolicity of the two-layer shallow-water system. *Journal of Scientific Computing*, 48(1-3):16–40, 2011.
- [12] J. Kim and R. LeVeque. Two-layer shallow water system and its applications. *Proceedings of symposia in applied mathematics*, (2):737, 2009.
- [13] M. J. Castro Díaz, T. Chacón Rebollo, E. D. Fernández-Nieto, and Carlos Parés. On well-balanced finite volume methods for nonconservative nonhomogeneous hyperbolic systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 29(3):1093, 2007.
- [14] Manuel J. Castro, José A. García-Rodríguez, José M. González-Vida, Jorge Macías, Carlos Parés, and M.Elena Vázquez-Cendón. Numerical simulation of two-layer shallow water flows through channels with irregular geometry. *Journal of Computational Physics*, 195(1):202 – 235, 2004.
- [15] Su-Chin Chen and Szu-Hsien Peng. Two-dimensional numerical model of two-layer shallow water equations for confluence simulation. *Advances in Water Resources*, 29(11):1608 – 1617, 2006.
- [16] C. Swartenbroekx, Y. Zech, and S. Soares-Frazão. Two-dimensional two-layer shallow water model for dam break flows with significant bed load transport. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2013.
- [17] C B. Vreugdenhil. *Numerical Methods for Shallow Water Flow*. Springer, 1994.
- [18] Toro E. F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: a Practical Introduction*. Springer Berlin / Heidelberg, 1997.
- [19] Naef D., Rickenmann D., Rutschmann P., and McArdell B. W. Comparison of flow resistance relations for debris flows using a one-dimensional finite element simulation model. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*
- [20] R. Manning. On the flow of water in open channels and pipes. *Institute of Civil Engineers of Ireland*, 1890.

- [21] E.F Toro. On glimm-related schemes for conservation laws. *Department of Mathematics and Physics, Manchester Metropolitan University, UK*, (Technical Report MMU-9602), 1996.
- [22] EF Toro, E.F. Toro, SJ Billett, and S.J. Billett. Centred tvd schemes for hyperbolic conservation laws. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 20(1), 2000.
- [23] Eleuterio F. Toro, Arturo Hidalgo, and Michael Dumbser. Force schemes on unstructured meshes i: Conservative hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 228(9):3368 – 3389, 2009.
- [24] Michael Dumbser, Arturo Hidalgo, Manuel Castro, Carlos Parés, and Eleuterio F. Toro. Force schemes on unstructured meshes ii: Non-conservative hyperbolic systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(9):625 – 647, 2010.
- [25] Emmanuel Audusse, François Bouchut, Marie-Odile Bristeau, Rupert Klein, and Benoit Perthame. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *Siam Journal on Scientific Computing*, 25, 01 2004.
- [26] Philip Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics.*, 43:357–372, 01 1981.
- [27] P. Garcia-Navarro and M. E. Vazquez-Cendon. On numerical treatment of the source terms in the shallow water equations. *Computers and fluids*, (8):951, 2000.
- [28] J. Murillo and P. García-Navarro. Weak solutions for partial differential equations with source terms: Application to the shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, 229(11):4327 – 4368, 2010.
- [29] J. Murillo and A. Navas-Montilla. A comprehensive explanation and exercise of the source terms in hyperbolic systems using Roe type solutions. Application to the 1d-2d shallow water equations. *Advances in water resources*, 2018.
- [30] J.N. Carruthers. Water waves. *Deep Sea Research (1953)*, 5(2):241, 1958.
- [31] Luis Cea. An unstructured finite volume model for unsteady turbulent shallow water flow with wet-dry fronts: numerical solver and experimental validation. 2005. Tesis doctoral. Universidade da Coruña.
- [32] J.B. Schijf and J.C. Schönfeld. Theoretical considerations on the motion of salt and fresh water. *Proceedings Minnesota International Hydraulic Convention*, 01 1954.

- [33] Kyle T. Mandli. A numerical method for the two layer shallow water equations with dry states. *Ocean Modelling*, 72:80 – 91, 2013.
- [34] D.M. Farmer and L. Armi. Maximal two-layer exchange over a sill and through the combination of a sill and contraction with barotropic flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 164(10):53–76, 1986.
- [35] Jeffrey S. Levinton and Jeffrey Sheldon. *The Hudson River Estuary*. Cambridge University Press, 40 West 20th Street, New York, NY 10011-4211, 2006.
- [36] J.A. Cunge, F.M. Holly, and A. Verwey. *Practical aspects of computational river hydraulics*. Pitman Publishing Ltd, 1980.
- [37] N.Eriksson and P.Adamek. The tailings pond failure at the Aznacóllar mine, Spain. *Sixth International Symposium in Environmental Issues and Waste Management in Energy and Mineral Production*, 2000.
- [38] J. Galache C. Mediavilla(1) A. Silgado y E. M. Vázquez J. M.^a Arenas, G. Carrero. Actuaciones realizadas tras el accidente de aznalcóllar. *Boletín geológico y minero*, (1):35, 2001.
- [39] Mario Morales Hernández. *Efficient explicit finite volume schemes for the shallow water equations with solute transport*. Universidad de Zaragoza, Prensas de la Universidad, 2014. Tesis doctoral.
- [40] Celine Savary and Yves Zech. Boundary conditions in a two-layer geomorphological model. Application to a hydraulic jump over a mobile bed. *Journal of Hydraulic Research*, 2007.
- [41] Randall J. LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [42] R. Käppeli and S. Mishra. Well-balanced schemes for the euler equations with gravitation. *Journal of computational physics*, page 199, 2014.
- [43] François Bouchut and Tomás Morales de Luna. A subsonic-well-balanced reconstruction scheme for shallow water flows. *SIAM J. Numerical Analysis*, 48:1733–1758, 01 2010.
- [44] Greenberg J. M. and Leroux A. Y. A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 33(1):1, 1996.

- [45] A. Mahdavi and N. Talebbeydokhti. Modeling of non-breaking and breaking solitary wave run-up using FORCE-MUSCL scheme. *Journal of hydraulic research*, (4):476, 2009.
- [46] J. Murillo and P. García-Navarro. Wave Riemann description of friction terms in unsteady shallow flows: Application to water and mud/debris floods. *Journal of Computational Physics*, 231(4):1963 – 2001, 2012.
- [47] Alberto Serrano Pacheco. Simulación numérica bidimensional de procesos hidrológicos e hidráulicos sobre lecho irregular deformable, 2009. Tesis doctoral.
- [48] Guillermo Pérez Dolset. *Simulación numérica de ondas de superficie generadas por deslizamientos de tierra sobre masas de agua poco profundas : modelos unidimensionales*. Proyecto fin de carrera (Universidad de Zaragoza. Centro Politécnico Superior): 4352. 2003., 2003.
- [49] S.M. Amiri, N. Talebbeydokhti, and A. Baghlani. A two-dimensional well-balanced numerical model for shallow water equations. *Scientia Iranica*, 20(1):97 – 107, 2013.

Lista de Figuras

1.1.	Ondas batimétricas en el estrecho de Gibraltar, señaladas por la flecha superior, se desplazan a una profundidad de 100 m hacia el este procedentes del océano Atlántico [3].	2
1.2.	Vista de la rotura producida en el dique de la balsa de Aznalcóllar [4]. . . .	3
2.1.	Esquema del flujo bicapa.	7
2.2.	Estado subcrítico (izquierda) en la capa superior para $u_1 > 0$ donde se cumple que $\lambda_I < 0$ y $\lambda_{II} > 0$. Estado supercrítico (derecha) en la capa superior para $u_1 > 0$ donde se cumple que $\lambda_I > 0$ y $\lambda_{II} > 0$	10
2.3.	Representación del método de los volúmenes finitos en una malla con celdas de tamaño Δx , la transferencia de información entre celdas se debe a los flujos numéricos $\mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^*$ y $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^*$	12
3.1.	Test 1. Rotura ideal de presa monocapa en seco.	18
3.2.	Esquema del experimento llevado a cabo en el CITEEC.	19
3.3.	Test 2. Parámetros del experimento del avance de un pistón sobre un canal rectangular.	19
3.4.	Test 3. Estado de reposo hidrostático con el método de FORCE para un tiempo $t = 10$ s con una condición de superficie libre $\eta = 2.1$ m y valores aleatorios de capa inferior h_2 y el lecho fijo z_b	20
3.5.	Test 3. Estado de reposo hidroestático con el método de Roe para un tiempo $t = 10$ s con una condición de superficie libre $\eta = 1.9$ m y valores aleatorios de capa inferior h_2 y el lecho fijo z_b	21
3.6.	Test 4. Rotura de presa pseudo-monocapa con el método FORCE.	22
3.7.	Test 4. Rotura de presa ideal pseudo-monocapa con el método Roe.	23
3.8.	Esquema con las condiciones de aplicación de los métodos FORCE y Roe en función de la relación de espesores $\frac{h_1}{h_2}$ y densidades $\frac{\rho_1}{\rho_2}$	25
3.9.	Test 5. Rotura de presa bicapa.	25
3.10.	Test 6. Rotura de presa bicapa.	26
3.11.	Test 7. Rotura de presa bicapa.	26

3.12. Test 8. Rotura de presa bicapa.	26
3.13. Doble rotura de presa, instantes iniciales.	28
3.14. Doble rotura de presa, estado de equilibrio para $t=150.0$ s.	29
3.15. Test 10. Condiciones iniciales en la simulación de la rotura de una balsa minera	30
3.16. Test 10. Rotura de una balsa minera, influencia del término del ángulo de reposo.	30
3.17. Test 10. Rotura de una balsa minera, estado de equilibrio para $t = 50.0$ s . .	30
A.1. Esquema del flujo bicapa.	47
B.1. Esquema del estado hidroestático en el caso $r = 1$	59
B.2. Solución del problema de Riemann para la ecuación lineal advectiva con $x_0 =$ 0 y discontinuidad formada por los estados w_L y w_R	61
B.3. Definición del estado intermedio para un caso particular \mathbf{U}^* en un caso particular con únicamente dos ondas λ_1 y λ_2	62
B.4. Problema de la entropía asociado a una onda de rarefacción izquierda, se produce un cambio de régimen de subcrítico en la celda de la izquierda $\lambda_{L,i} < 0$ a supercrítico en la de la derecha $\lambda_{L,i} > 0$	65
B.5. La integración del término fuente supone la aparición de una nueva discontinuidad en $x = 0$ como consecuencia de la aparición de una onda asociada con velocidad de propagación $\lambda_i = 0$	67
B.6. En el caso supercrítico es preciso definir un nuevo estado $\bar{\mathbf{U}}_{i+1}^*$ función de los estado intermedios \mathbf{U}_i^* y \mathbf{U}_{i+1}^{**}	69
B.7. Esquema de un caso seco-mojado con $h_{i+1} = 0$ y en régimen supercrítico. . .	71
C.1. Esquema del inicio de la rotura de presa ideal y la evolución de las regiones con el paso del tiempo.	73
C.2. Rotura ideal de presa monocapa en mojado.	75
C.3. Resultados del perfil de la onda de presión del caso test experimental.	76
C.4. Test 5. Rotura de presa bicapa con el método FORCE.	77
C.5. Test 5. Rotura de presa bicapa con el método de Roe.	78
C.6. Test 6. Rotura de presa bicapa con el método FORCE.	79
C.7. Test 6. Rotura de presa bicapa con el método de Roe.	80
C.8. Test 7. Rotura de presa bicapa con el método FORCE.	81
C.9. Test 7. Rotura de presa bicapa con el método de Roe.	82
C.10. Test 8. Rotura de presa bicapa con el método FORCE.	83
C.11. Test 8. Rotura de presa bicapa con el método de Roe.	84

D.1. La información de \mathbf{U} que se transmite con velocidad λ_k no debe viajar más lejos que a la celdas adyacentes.	85
D.2. Flujos en los extremos del dominio.	87
D.3. Conservación de la hiperbolicidad y curvas de amplificación β^* de una perturbación con longitud de onda infinita λ_∞ , como función de la relación de densidades r y la velocidad relativa entre capas $ u_2 - u_1 $ en un caso con $h_2 = h_1 = 1.0$ m.	88

Lista de Tablas

3.1. Parámetros de las rotura de presa bicapa.	24
3.2. Parámetros de la doble rotura de presa.	27
3.3. Test 10. Parámetros de un test tipo rotura de una balsa minera.	29

