Trabajo Fin de Máster

PROGRAMACIÓN LINEAL

2º de Bachillerato - Ciencias Sociales

LINEAR PROGRAMMING

Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas

Especialidad de Matemáticas

Autor

Marta Rubio Latasa

Director

Elena Mengual Breton

Año 2018

Índice

INTRODUCCIÓN

El siguiente TFM aborda el objeto matemático de la Programación Lineal en 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales, en la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, siendo ese momento la primera vez que los alumnos trabajan con este objeto matemático.

La programación lineal, como se explica en el presente trabajo, es un modelo matemático muy útil para resolver problemas económicos, sociales y tecnológicos. A pesar de que la forma habitual para resolver este tipo de problemas es mediante el método del Simplex, en este curso no se va a utilizar, pues corresponde a cursos más avanzados, únicamente se resolverán problemas con dos variables con métodos más sencillos.

No obstante, es fundamental la enseñanza de este objeto matemático en la modalidad de bachillerato de ciencias sociales pues, la programación lineal, tiene presencia en las carreras universitarias de la rama de Economía y Empresa, y por lo tanto, muchos alumnos profundizarán en este objeto en sus años universitarios.

Al ser 2º de bachillerato un curso tan ajustado en cuanto a contenidos por las exigencias de las pruebas de acceso a la universidad, no se enseñan ninguna otra aplicación de la programación lineal que no entre para ese examen. Estas otras aplicaciones podrían ser: selección de medios publicitarios o estudios de mercado (en marketing), o también asignación de trabajos o planificación de horarios (en distribución de tareas).

Este documento consta de una introducción al objeto matemático, es decir, a la programación lineal, después se analiza cómo se introduce habitualmente esta en la enseñanza, tras ello se comentan los conocimientos previos que necesitan los alumnos, luego se habla de la razón de ser del objeto, los siguientes capítulos tratan los campos de problemas, técnicas y tecnologías que tiene asociadas la programación lineal, después se estructura la temporalización a seguir y por último se explica la evaluación.

A. EL OBJETO MATEMÁTICO

El objeto matemático a enseñar en el presente Trabajo de Fin de Máster va a ser la Programación Lineal en el curso de 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales. Por programación lineal se entiende:

"La programación lineal es uno de los instrumentos matemáticos utilizados en investigación operativa para el planteamiento y la resolución de problemas, mediante la utilización de modelos matemáticos." (García, s.f.).

"El término programación hace referencia al procedimiento para resolver un problema y obtener un resultado óptimo en este, mientras que el adjetivo lineal implica que todas las funciones o restricciones que intervienen en el modelo matemático son lineales." (García, s.f.).

Así, la programación lineal es un conjunto de técnicas matemáticas que pretende la optimización de una función lineal de varias variables, llamada función objetivo, cuyas variables deben cumplir diversas restricciones lineales, expresadas por medio de ecuaciones o inecuaciones lineales. El objetivo principal es minimizar o maximizar la función objetivo, siempre y cuando esta función cumpla las restricciones a las que está sujeta.

Los problemas de programación lineal más habituales se expresan de una de las siguientes maneras:

$$\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad\qquad \min \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \leq b_n \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \ldots, \quad x_n \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \geq b_n \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \ldots, \quad x_n \geq 0 \end{cases}$$

Siendo:

- Las variables de decisión: x_1, x_2,…, x_n.
- La función objetivo: z.
- Restricciones: inecuaciones lineales expresadas en función de las variables.

Curso y asignatura

Según la ORDEN ECD/494/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón (BOA 03/06/2016), este objeto matemático se trabaja únicamente en el 2º curso de Bachillerato en la modalidad de Ciencias Sociales, es decir, en la asignatura Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, que tiene una carga lectiva de 4 horas a la semana.

La programación lineal pertenece al Bloque 2: Números y Álgebra, en cuanto a los contenidos mínimos establecidos relacionados con este objeto matemático están:

- *Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Sistemas de inecuaciones. Resolución gráfica y algebraica.*
- *Programación lineal bidimensional. Región factible. Determinación e interpretación de las soluciones óptimas.*
- *Aplicación de la programación lineal a la resolución de problemas sociales, económicos y demográficos.*

El criterio de evaluación y sus estándares de aprendizaje asociados para este objeto matemático son:

- *Crit.MCS.2.2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, sistemas de ecuaciones, inecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas.*
    - *Est.MCS.2.2.1. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, el sistema de ecuaciones lineales planteado (como máximo de tres ecuaciones y tres incógnitas), lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas en contextos reales.*
    - *Est.MCS.2.2.2. Aplica las técnicas gráficas de programación lineal bidimensional para resolver problemas de optimización de funciones lineales que están sujetas a restricciones e interpreta los resultados obtenidos en el contexto del problema.*

Campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas que se pretenden enseñar

Las matemáticas proporcionan a la economía métodos y modelos de optimización que forman parte de la programación lineal, con el propósito de ayudar a las empresas a la utilización óptima de los recursos, que siempre son limitados, teniendo como objetivos minimizar costes y maximizar beneficios.

Entre las múltiples aplicaciones de la programación lineal, se van a trabajar los problemas sobre los contextos de: el problema de producción (que consiste en combinar recursos que maximicen beneficios o minimicen costes), el problema de la dieta (que trata determinar la mejor combinación de alimentos que se deben incluir en una dieta con el mínimo coste) y el problema del transporte o de distribución de mercancías (que se encarga de minimizar los costes de distribución y los tiempos empleados). Por lo tanto serán esos casos los que se enseñarán a modelizar.

También se trabajará algún problema de carácter más cotidiano como el problema de la mochila (que consiste en elegir una combinación de objetos de forma que su peso, precio… se acerque lo máximo posible a una cantidad fija sin excederla, además cada objeto tiene un valor el cual hay que maximizar), aunque este tipo de problemas no se resolverán de una forma formal, ya que se considerará el caso particular de que los objetos tienen el mismo valor, por lo que solo habrá que maximizar el número de objetos sin que su precio, peso... sobrepase la cantidad dada.

El primer paso será trabajar en la modelización de estos problemas contextualizados, que serán tanto de maximizar como de minimizar y tendrán como máximo dos variables de decisión, es decir serán problemas bidimensionales.

Además, se darán unas pequeñas ideas sobre programación lineal entera, aunque prácticamente toda la unidad será de programación lineal continua o estarán los problemas preparados para que se puedan resolver con esas técnicas.

Todos estos problemas se pueden clasificar, atendiendo a la región factible y a la solución óptima de esta, en los siguientes campos de problemas:

- CP1: La región factible está acotada, dentro de este caso se distinguen los casos de solución única y solución múltiple.

- CP2: La región factible no está acotada, y dentro de este caso hay tres casos diferentes, cuando hay solución única, cuando hay solución múltiple o cuando no hay solución.

Otras cuestiones más concretas en cuanto al campo de problemas se detallarán en el Capítulo E.

Las técnicas para resolver estos tipos de problemas se van a centrar en dos tipos de métodos diferentes: método gráfico (T1) y método analítico (T2). Los dos métodos sirven para todos los campos de problemas, pero para el caso de región factible no acotada (CP2) es preferible emplear el método gráfico como se verá más adelante. Ambos métodos se trabajarán tanto con el programa informático GeoGebra como con lápiz y papel. Se intentará que los alumnos entiendan el algoritmo y no tengan que memorizarlo para realizar el examen. Para ello se fomentará el aprendizaje significativo y se irán realizando diferentes ejercicios que puedan ir realizando intuitivamente. El apartado de técnicas se encuentra con más detalle en el Capítulo F.

En cuanto a las tecnologías asociadas a las técnicas serán las curvas de nivel de la función objetivo en el caso del método gráfico (T1) y el Teorema Fundamental de la Programación Lineal en el caso del método analítico (T2). En el Capítulo G se encuentran las tecnologías más detalladas.

B. EL ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO

Para explicar cómo se estudian habitualmente en las aulas la Programación Lineal se han analizado dos libros de texto: *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato* (2009) de la editorial Santillana y *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II 2º Bachillerato (LOMCE)* (2016) de la editorial Editex.

Justificación habitual en la introducción escolar del objeto matemático

Dado que la programación lineal es un objeto matemático que permite resolver múltiples problemas en los campos económico, social y tecnológico, habitualmente se justifica su introducción en el ámbito escolar con problemas reales de las ciencias sociales, como son los problemas de producción en los que se debe maximizar beneficios o minimizar costes, problemas de dietas en los que se debe minimizar costes y problemas de transportes en los que se debe minimizar los costes de distribución.

En la mayoría de casos se enseña a modelizar estos problemas a la vez que, a resolverlos, por lo que la justificación se va dando según van apareciendo los diferentes tipos de enunciados, con la necesidad de resolver esos problemas de los campos económico y social. Sin embargo, también hay libros de texto en los que se comienza explicando la resolución de problemas descontextualizados y al final se enseña a modelizar los problemas de producción, dietas y transporte, por lo que la justificación en este caso se da al final.

Campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan

Los campos de problemas que se enseñan habitualmente en relación a la programación lineal son problemas con la región factible acotada y problemas con la región factible no acotada, con solución única, múltiple y sin solución. En cuanto a la naturaleza de los enunciados los problemas son los tipos de problemas con los que se justifican su introducción en la enseñanza de las ciencias sociales, es decir, problemas de producción, de dietas y de transporte, todos ellos de programación lineal continua.

Las técnicas que se suelen enseñar son el método analítico y el método gráfico, para ambos métodos los pasos que hay que seguir son muy algorítmicos.

En cuanto a las tecnologías, las técnicas se justifican por medio de ejemplos prácticos en los que se emplean las técnicas siguiendo el algoritmo explicado.

No obstante, no se suele hacer referencia a que en la mayoría de casos se están resolviendo problemas de programación lineal entera, es decir, en los que los resultados únicamente tienen sentido si son números enteros. Como los problemas están preparados para que la solución salga con las técnicas de programación lineal continua no se hace referencia a este hecho.

Efectos que produce esta enseñanza en el alumno

El curso 2º de bachillerato es un curso claramente marcado por el examen de acceso a la universidad. Los alumnos, en muchas ocasiones, desean saber cómo se resuelven los problemas para poder aprobar ese examen, por lo que prefieren un algoritmo claro que puedan memorizar y que les funcione siempre. Este hecho es también una causa de que los contenidos no se salgan de lo establecido por ese examen.

Matemáticas es una asignatura que es mucho más productivo entenderla que memorizarla. Saber por qué se hace cada uno de los pasos en un método ayuda a que no haya errores en los mismos. Es conveniente aplicar los métodos en problemas contextualizados, siempre y cuando se entiendan los pasos que se están siguiendo y hacia donde se dirigen estos.

El inconveniente de no nombrar la programación lineal entera puede llevar a que los alumnos crean que todos los problemas se pueden resolver con esas técnicas aunque los datos deban ser enteros. Esto puede conducir a confusiones si en algún momento se encuentran con un problema que no cumpla esas características.

Sin embargo, pueden ver en este objeto una herramienta muy útil en muchos problemas reales, lo que favorece a la participación de los alumnos en su proceso de e-a.

C. LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

Para afrontar los aprendizajes acerca de la programación lineal, el alumno necesita saber los siguientes conocimientos:

- Modelizar algebraicamente situaciones cotidianas, es decir, utilizar el lenguaje algebraico para representar situaciones planteadas en contextos reales. Este conocimiento se lleva trabajando desde 1º de ESO con la introducción del álgebra, según el currículo de Aragón.
- Representar gráficamente rectas, a partir de la ecuación. Este contenido aparece por primera vez en 2º de ESO, según el currículo de Aragón.
- Resolver algebraicamente y gráficamente sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Este contenido comenzó a trabajarse en 2º de ESO, según el currículo de Aragón.
- Resolver inecuaciones lineales con una incógnita e interpretarlas gráficamente. Este contenido aparece por primera vez en matemáticas de 4º de ESO orientadas a las enseñanzas académicas, según el currículo de Aragón.
- Resolver gráficamente inecuaciones lineales con dos incógnitas y sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas. Este contenido no aparece hasta 2º de bachillerato en matemáticas aplicadas en las ciencias sociales, según el currículo aragonés, por lo que necesariamente se tendrá que haber explicado en alguna unidad anterior a la de programación lineal.

No obstante, hay contenidos que se trabajaron en cursos anteriores pero no se repitieron todos los años, mientras que otros no han dejado de trabajarse desde que empezaron a estudiarse. En la siguiente tabla se muestra cómo avanzan estos contenidos en los diferentes cursos académicos, según el currículo:

	1ºESO	2ºESO	3ºESO	4ºESO	1ºBach CCSS	2ºBach CCSS
Modelización	x	x	x	x	x	x
Representación gráfica de rectas		x	x	x	x	x
Sistemas de ecuaciones		x	x	x	x	x
Inecuaciones				x		x
Sistemas de inecuaciones						x

Siguiendo el currículo de Aragón, el estudiante habrá cursado con anterioridad todos los conocimientos necesarios para poder abordar la unidad de programación lineal. Sin embargo, es posible que el contenido "resolver inecuaciones lineales con dos incógnitas y sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas gráficamente" esté muy reciente por haber sido estudiado hace poco y por lo tanto puede no estar asimilado por completo, en el currículo aparece justo antes que la Programación Lineal, por lo que por lo general se habrá explicado en la unidad anterior.

Actividades para asegurar que se poseen los conocimientos previos

Para asegurar que se poseen los conocimientos previos, detallados anteriormente, se dedicará la primera sesión a repasarlos. Para ello se propondrán a la vez, dos problemas en esa primera clase, que serán los siguientes:

1. Plantea y resuelve gráfica y algebraicamente el siguiente problema: Una granja tiene gallinas y cerdos, en total hay 58 cabezas y 168 patas. ¿Cuántos cerdos y gallinas hay?
2. Dibuja la superficie que representa el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x - y \leq 4 \\ 2x + y \geq 0 \\ x \leq 3 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

El primer problema es deberán plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, es decir, tendrán que modelizar una situación real con un sistema de ecuaciones y resolverlo gráfica y algebraicamente.

El segundo problema será un sistema de inecuaciones, el cual tendrán que resolverlo gráficamente. Esta parte es la que se habrá visto recientemente, por lo que los alumnos deben llevar las técnicas para resolver el problema “frescas”, el único inconveniente que puede dar es que no estén asimiladas por completo.

Se dejará media clase (25 minutos aproximadamente), para resolver los dos problemas, en los que el profesor se irá pasando por las mesas para ayudar a algún alumno si necesita ayuda. En caso de que algún alumno los realice antes de tiempo, podrá ayudar a algún compañero que el profesor esté comprobando que le está costando más. Después se corregirán en la pizarra, para esto se pedirá a algún alumno (que el profesor haya comprobado que recuerda cómo se realizan los problemas) que sea el encargado de resolverlos en la pizarra, mientras tanto el profesor irá haciendo aclaraciones de los pasos que está dando el alumno.

En caso que el profesor crea que los conocimientos previos no están claros, se dedicará una sesión más para reforzarlos. En esta sesión extra, se realizarán problemas por parejas relacionados con estos conocimientos previos, de forma que los alumnos que tengan los conocimientos más olvidados realicen los ejercicios con los que se acuerden más.

D. LAS RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

Razón de ser histórica

La programación lineal se desarrolló en el siglo XX, adquiriendo su importancia por motivos logísticos y militares. Los acontecimientos en relación a este objeto matemático se van a ir explicando a continuación.

El matemático ruso Leonid Vitalevich Kantorovich (1912-1986), sentó las bases de la programación lineal con la publicación, en 1939, de una monografía titulada *Métodos matemáticos para la organización y la producción.* Esta obra no se dio a conocer hasta 20 años después. (Conejero, 2013)

Durante la Segunda Guerra Mundial (1939-1945), se hizo evidente que era esencial el uso eficaz de los recursos disponibles, para ello grupos de científicos plantearon modelos matemáticos para planificar los gastos y los retornos, a fin de reducir los costos al ejército y aumentar las pérdidas del enemigo (PHPSimplex, s.f.).

Entre 1941 y 1942, el matemático holandés Tjalling Charles Koopmans, estudió el problema conocido ahora como problema del transporte, este problema lo estaba trabajando simultáneamente aunque de forma independiente Kantorovich, ambos recibieron por ello el premio Nobel de Economía en 1975 (Conejero, 2013).

En 1945, George Joseph Stigler, planteó el problema de la dieta a raíz de la preocupación del ejército americano por asegurar unos requerimientos nutricionales básicos para sus tropas al menor coste posible (Sebastian, 2011).

En 1947, George Bernard Dantzig (1914-2005), se encontraba trabajando en el proyecto SCOOP (un grupo de trabajo de EEUU dedicado a mejorar los procesos de planificación a gran escala), cuando formuló el enunciado general al que se reduce cualquier problema de Programación Lineal y desarrolló el algoritmo del método del Simplex para la resolución de problemas, es por ello por lo que se conoce a este como “el padre de la Programación Lineal”. (PHPSimplex, s.f.)

El interés de la programación lineal se difundió rápidamente entre economistas, matemáticos, estadísticos e instituciones gubernamentales, y se comenzó a utilizar en los sectores sociales y económicos. Por lo tanto, el nacimiento de este objeto matemático fue social y económico. (Sebastian, 2011).

Razón de ser que se va a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático

Como ya se ha dicho, la programación lineal es un modelo matemático muy útil para resolver problemas de optimización de recursos en el campo económico. Por ello, se va a emplear esa utilidad para su introducción en el ámbito escolar.

En realidad, no hay que limitarse únicamente a situar estos problemas en el campo económico, ya que se puede utilizar este modelo en muchos problemas de la vida cotidiana. Por lo tanto, se va a partir de problemas a los que probablemente se hayan tenido que enfrentar en su vida diaria y no hayan podido resolver, de forma sencilla, con los conocimientos que tenían hasta entonces, para que así, vean su utilidad desde el primer momento. Después, se irán planteando otros problemas que sean más de carácter económico.

Ejemplos de problemas que constituyen la razón de ser

PRS1) Tu clase ha ganado un concurso y tú como delegado tienes que decidir qué hacer con el premio. Este premio es un vale de 120€ para comprar libros para la biblioteca de tu instituto, vas a poder comprar libros en castellano por 18€ y en inglés por 12€, además tu profesora te pone la condición de que los libros en castellano no pueden ser más que los libros en inglés, pero que tiene que haber, al menos, 2 en castellano. ¿Podrías comprar 6 libros en castellano y 1 en inglés? ¿Y 4 en castellano y 4 en inglés o 2 en castellano y 7 en inglés?

PRS2) Las 5 clases de tu curso van a hacer una excursión, en total 145 alumnos y 5 profesores. Para el trayecto se pueden alquilar minibuses de 30 plazas y autobuses grandes de 50 plazas ¿se podrían coger 5 minibuses y ningún autobús grande? Si consideramos que el precio de los minibuses es de 250€ y el de los autobuses de 400€ y tenemos en cuenta que queremos gastar la menor cantidad de dinero ¿sería mejor esa opción o coger únicamente 3 autobuses grandes?

PRS3) En una bolsa quieres guardar canicas rojas y verdes, el problema es que si en la bolsa metes más de 100 gramos de canicas esta se rompe. Si tienes 12 canicas rojas que pesan 7 gramos cada una y 10 canicas verdes que pesan 4 gramos cada una. ¿Cuál es el número máximo de canicas que puedes meter? ¿cuántas son de cada tipo?

PRS4) Para tu cumpleaños quieres invitar a chucherías a tus 31 compañeros de clase y te han dado una propina de 10€. Quieres comprar regalices que valen 0,15€/unidad y caramelos que valen 0,10€/unidad, además quieres dar a cada compañero, al menos, 2 regalices y a tus 4 mejores amigos, al menos, también un caramelo. Si quiero comprar la mayor cantidad de chucherías ¿Cuál es la mejor opción que tengo, es decir, cuántos caramelos y regalices tendré que comprar para comprar la mayor cantidad de chucherías posibles?

Metodología para implementar la razón de ser

Se comenzará con problemas de enunciado muy sencillo y familiar para los alumnos. Con estos problemas empezarán a darse cuenta de que la programación lineal es un instrumento que puede ser muy útil en la vida cotidiana. Además, en estos primeros problemas no tendrán que dibujar la región factible del problema, únicamente deberán entender el enunciado y comprobar si se van cumpliendo las condiciones. Estos problemas los realizarán por parejas, intentando que las parejas sean heterogéneas, y que los alumnos que peor realizaron la prueba inicial trabajen junto a los que mejor la realizaron.

El primer paso es trabajar en un problema en el que deberán probar posibles soluciones para que se den cuenta de que no todas pueden ser y puede darse el caso de que haya más de una buena.

El siguiente paso será abordar otro problema en el que probando y comparando posibles soluciones se den cuenta del hecho de que hay soluciones mejores que otras.

Para el tercer problema no se darán opciones para comparar, si no que serán ellos los que tendrán que buscar las soluciones del problema, para esto deberán experimentar con canicas de colores. Se repartirá a cada pareja el número de canicas que dice el enunciado, entre los dos deberán ir probando las posibles soluciones del problema y anotando los resultados del experimento, es decir, deberán utilizar la técnica *ensayo-error dirigido*, que consiste en elegir un resultado, imponerlo al problema y comprobar si lo ha resuelto, eligiendo esos resultados según un orden coherente y no de forma aleatoria. Como ya sabrán entonces, puede haber varias soluciones buenas.

Por último, se planteará un cuarto problema en el que nuevamente con la técnica *ensayo-error dirigido* tendrán que ir probando posibles soluciones factibles y decidir cuál es la mejor, en este caso deberán resolver el problema sin ayuda de ningún objeto físico.

El tipo de estos dos últimos problemas se conoce como el problema de la mochila.

E. EL CAMPO DE PROBLEMAS

Problemas que se van a presentar en el aula

Los tipos de problemas que se van a presentar se van a clasificar atendiendo a cómo es la región factible y cómo son las soluciones óptimas de esta. Estos problemas serán de uno de los siguientes tipos:

- CP1: región factible acotada.
  - CP1.1: solución óptima única.
  - CP1.2: solución óptima múltiple.
- CP2: región factible no acotada.
  - CP2.1: solución óptima única.
  - CP2.2: solución óptima múltiple.
  - CP2.3: sin solución óptima.

Además se trabajará, como ampliación, algún problema sencillo de programación lineal entera. Simplemente para que conozcan su existencia.

También podemos clasificar los problemas según la modelización de estos, esta modelización será de uno de los siguientes tipos:

- Problema de la mochila: elegir una combinación de objetos de forma que su peso, precio… se acerque lo máximo posible a una cantidad fija sin excederla, maximizando el número de objetos.
- Problema de producción: combinar recursos que maximicen beneficios o minimicen costes.
- Problema de la dieta: determinar la mejor combinación de alimentos que debe incluir una dieta con mínimo coste.
- Problema del transporte: minimizar los costes de distribución y los tiempos empleados en una distribución de mercancías.

A continuación se van a mostrar problemas de cada uno de los tipos que se van a trabajar:

- CP1.1: Región factible acotada con solución óptima única.

  (P1) Problema 1 (problema del transporte) Desde los almacenes A y B, se distribuye todos los días fruta a tres mercados de una cuidad. El almacén A tiene una capacidad de 10 toneladas de fruta y el B de 15 toneladas de fruta, que se reparten en su totalidad. Los mercados 1 y 2 necesitan 8 toneladas de fruta diarias y el mercado 3 necesita 9 toneladas al día. El coste del transporte del Almacén A hasta los mercados 1, 2 y 3 es de 10€, 15€ y 20€ respectivamente, mientras que desde el mercado B es de 15€, 10€ y 10€ también respectivamente. ¿Cómo debe ser la distribución de fruta para que el coste sea mínimo? ¿Cuánto costará esa distribución?

- CP1.2: Región factible acotada con solución óptima múltiple.

  (P2) Problema 2 (problema de producción) Una fábrica produce lavadoras de dos tipos de modelos L1 y L2. El modelo L1 necesita 3 horas de montaje y 3 horas de acabado, mientras que el modelo L2 necesita las mismas horas de montaje que el modelo anterior pero el doble de acabado. Con todos los trabajadores de la empresa de la sección de montaje, se disponen de 120 horas diarias para esta labor, y con los de la sección de acabado se tienen 180 horas al día. El beneficio por cada lavadora L1 es de 200€ y por cada lavadora L2 400€. ¿Cuántas lavadoras de cada modelo debe fabricar la empresa diariamente para obtener mayor beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?

- CP2.1: Región factible no acotada con solución óptima única.

  (P3) Problema 3 (problema de producción) Para desinfectar una piscina se necesitan un mínimo de 24 litros de un producto A, y un mínimo de 25 litros de un producto B. Para elaborar el desinfectante existen dos tipos de líquidos, el líquido R y el líquido S, que cuestan 10 y 30 euros el litro de cada uno de ellos, respectivamente. La composición de R hay un 10% de A y un 50% de B, y el la de S hay un 40% de A y un 10% de B. ¿Cuántos litros de cada uno de los líquidos se necesitan para desinfectar la piscina con el mínimo coste posible?

- CP2.2: Región factible no acotada con solución óptima múltiple.

  (P4) Problema 4 (problema de la dieta) Un granjero está elaborando una dieta para sus animales mezclando piensos de tipo R y S, el precio de ambos piensos es de 3€/kg. Quiere que esta dieta tenga al menos 2 mg de vitamina A, 3 mg de vitamina B, 30 mg de vitamina C y 2 mg de vitamina D. El contenido vitamínico de un kg de pienso R es 1 mg de A, 1 mg de B, 20 mg de C y 2 mg de D, y el de un kg de pienso S es 1 mg de A, 3 mg de B, 7.5 mg de C y 0 mg de D. ¿Cómo deben mezclarse los piensos para que el coste sea mínimo? ¿Cuánto costará el kg de ese pienso?

- CP2.3: Región factible no acotada sin solución óptima.

  (P5) Problema 5 (problema de producción) Un pastelero elabora dos tipos de pasteles de chocolate, uno de chocolate negro y otro de chocolate blanco. Por cada pastel de chocolate blanco obtiene un beneficio de 2€ y por cada uno de chocolate blanco obtiene un beneficio de 1,5€. Para cubrir los gastos de las pastelería necesita ganar al día un mínimo de 200€. ¿Cuántos pasteles de cada tipo debe vender para conseguir el máximo beneficio?

Metodología para implementar los diferentes problemas

Para empezar se realizarán los problemas sobre la razón de ser del objeto matemático, trabajándose la técnica ensayo-error dirigido.

Para no perderse la razón de ser del objeto matemático se trabajarán únicamente problemas contextualizados, por lo tanto será necesario aprender a modelizar los diferentes tipos de problemas antes de conocer las técnicas de resolución, las cuales se explicarán en el siguiente capítulo. Sin embargo, no es posible clasificar los diferentes problemas sin conocer las técnicas de resolución, pues estos se clasifican según el tipo de solución. Por lo tanto los problemas se irán introduciendo a la vez que las técnicas.

Principalmente los alumnos trabajarán por parejas y se pondrán en común entre toda la clase los resultados en los momentos críticos de resolución.

F. LAS TÉCNICAS

Modificaciones de técnica inicial a las técnicas finales

La técnica inicial (TI) será ensayo-error dirigido, que como ya se ha dicho que consiste en elegir un resultado, imponerlo al problema y comprobar si lo ha resuelto, eligiendo esos resultados según un orden coherente y no de forma aleatoria, trabajándose esta en los problemas 3 y 4 elegidos para explicar la razón de ser del objeto matemático (PRS3 y PRS4). Con ello se pretenderá que los alumnos vean su utilidad, a la vez de la necesidad de resolver estos tipos de problemas de una forma más rápida.

Después, se aprenderá a modelizar los problemas de programación lineal, para poder resolverlos más adelante.

Luego, se comenzará a trabajar con el programa GeoGebra, con la idea de que los alumnos vayan descubriendo con la ayuda del programa las diferentes técnicas de resolución que se van a trabajar:

- T1: método gráfico.
- T2: método analítico.

Por si algún alumno no ha trabajado nunca con el programa GeoGebra, se recomendará a los alumnos ver en casa en YouTube el video llamado *Tutorial de Geogebra* de Fernandez, J. del canal *Soy Matemáticas* (23 de junio de 2015): https://www.youtube.com/watch?v=Wkb9eW4uQP0 en el que se explican todos los conceptos básicos que se deban tener sobre este programa.

Una vez que conozcan las técnicas, comenzarán a aplicarlas también con papel y boli, trabajándose con ellas todos los tipos de problemas.

Por último, se planteará algún problema de programación lineal entera en el que la solución con las técnicas normales no tenga sentido, pues la solución deberá ser un número entero y las esquinas de la región factible no lo son, es decir, la solución no se encuentra en la frontera. Por lo tanto, se empleará una variante de las técnicas habituales para la resolución de problemas de programación lineal. Este paso es muy importante para que los alumnos comprueben habitualmente que las soluciones que han obtenido tienen sentido.

Ejercicios que se van a presentar en el aula

Antes de resolver los problemas tendrán que aprender a modelizar algebraicamente los problemas. Después, en el procedimiento de resolución se irán descubriendo las diferentes situaciones que pueden suceder, es decir, los diferentes tipos de problemas a los que tienen que saber enfrentarse y resolver. Por ello los diferentes tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula van a ser:

1. Modelizar el problema.
2. Dibujar la región factible.
3. Dibujar la función objetivo (método gráfico).
4. Hallar los vértices de la región factible (método analítico).
5. Evaluar los vértices de la región factible en la función objetivo (método analítico).
6. Discutir cuál es la solución óptima.
7. Analizar si la solución óptima tiene sentido.

Técnicas que se ejercitan en los ejercicios

A continuación se van a mostrar las diferentes técnicas que se van a emplear en los diferentes tipos de ejercicios que se van a presentar. Para explicar cada uno de ellos se va a poner como ejemplo el problema 2 (P2), el cual se irá resolviendo siguiendo los pasos de los diferentes ejercicios con la ayuda de GeoGebra:

→ (P2) *Una fábrica produce lavadoras de dos tipos de modelos L1 y L2. El modelo L1 necesita 3 horas de montaje y 3 horas de acabado, mientras que el modelo L2 necesita las mismas horas de montaje que el modelo anterior pero el doble de acabado. Con todos los trabajadores de la empresa de la sección de montaje, se disponen de 120 horas diarias para esta labor, y con los de la sección de acabado se tienen 180 horas al día. El beneficio por cada lavadora L1 es de 200€ y por cada* *lavadora L2 400€. ¿Cuántas lavadoras de cada modelo debe fabricar la empresa diariamente para obtener mayor beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?*

1. Modelizar el problema.

Se utilizarán tablas para organizar los datos, cuando haya muchos, en caso de que sean pocos los datos se puede plantear el problema directamente. Después de organizar los datos se plantearán la función objetivo y las restricciones. Los pasos que se seguirán para esto serán los siguientes:

Se emplearán tablas en las que se irán ordenando los datos. Los pasos para completar la tabla serán:

1) Elegir las variables de decisión o incógnitas, que serán siempre 2.
2) Organizar los datos de las restricciones en la tabla en función de esas incógnitas (coeficientes).
3) Organizar los recursos, colocarlos en la tabla y determinar el tipo de desigualdad de cada uno de ellos.
4) Organizar los costes o beneficios de cada incógnita (coeficientes de la función objetivo) y determinar si se desea minimizar o maximizar.

Un ejemplo de este tipo de tabla es el siguiente:

Productos / Restricciones	P_1	P_2	Recursos
r_1	a_{11}	a_{12}	$(\geq$ o $\leq)$ b_1
r_2	a_{21}	a_{22}	$(\geq$ o $\leq)$ b_2
r_3	a_{31}	a_{32}	$(\geq$ o $\leq)$ b_3
Costes o beneficios	c_1	c_2	min o máx
Variables (decisión)	$x \rightarrow \ldots$	$y \rightarrow \ldots$	

Una vez organizados los datos se plantearán las restricciones y la función objetivo, teniendo en cuenta que muchas veces hay que añadir las restricciones de la no negatividad de las variables.

Quedando planteados de una de estas formas:

$$\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ \leq \ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ \leq \ b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \ \leq \ b_3 \\ \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\min \quad z = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ \geq \ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ \geq \ b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \ \geq \ b_3 \\ \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

■En el problema 2:

Productos / Restricciones	L_1	L_2	Recursos
Montaje	3	3	≤ 120
Acabado	3	6	≤ 180
Beneficios	200	400	máx
Variables (decisión)	x →modelo L1	y →modelo L2	

$$\max \quad z = 200x + 400y$$

$$\begin{cases} 3x + 3y \ \leq \ 120 \\ 3x + 6y \ \leq \ 180 \\ \quad x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

*<u>Caso particular de modelización del problema del transporte:</u>

La modelización del problema del transporte es un poco diferente a la del resto de problemas.

La tabla que habrá que completar tendrá como filas los orígenes y por columnas las demandas. En función de únicamente dos incógnitas se deberá completar la cantidad de cada distribución, con una fila y columna extra con el número de las ofertas y demandas de cada origen y destino, respectivamente, de forma que al sumar el número de ofertas entre todos los orígenes siempre va a ser igual a la suma de las demandas entre todos los destinos. Para completar esta tabla se comenzará rellenando el número de ofertas y demandas de cada origen y destino respectivamente, y después con las dos variables se completará el resto de la tabla de forma que la suma de la fila o la columna sea igual al número de ofertas o de demandas que se necesitan.

Por otro lado, se hará una segunda tabla con los costos de distribución de cada trayecto.

Estas tablas son de la forma:

Destino / Origen	D1	D2	D3	Ofertas
O1	x	y	a_1-x-y	a_1
O2	b_1-x	b_2-y	a_2-b_1-b_2+x+y o b_3-a_1+x+y	a_2
Demandas	b_1	b_2	b_3	Suma =

Tomando todos estos trayectos como no negativos se obtienen las restricciones.

Para la función objetivo que realizará la otra tabla con los costes, y se combinaran las variables de la primera con los datos organizados de la segunda.

Destino / Origen	D1	D2	D3
O1	c_{11}	c_{12}	c_{13}
O2	c_{21}	c_{22}	c_{23}

■ Como ejemplo de este caso particular de modelización se va a plantear el problema 1 (P1), aunque este problema no se resolverá, pues una vez planteado se resuelve como el resto de problemas:

→ *(P1) Desde los almacenes A y B, se distribuye todos los días fruta a tres mercados de una cuidad. El almacén A tiene una capacidad de 10 toneladas de fruta y el B de 15 toneladas de fruta, que se reparten en su totalidad. Los mercados 1 y 2 necesitan 8 toneladas de fruta diarias y el mercado 3 necesita 9 toneladas al día. El coste del transporte del Almacén A hasta los mercados 1, 2 y 3 es de 10€, 15€ y 20€ respectivamente, mientras que desde el mercado B es de 15€, 10€ y 10€ también respectivamente. ¿Cómo debe ser la distribución de fruta para que el coste sea mínimo? ¿Cuánto costará esa distribución?*

Destino / Origen	Mercado1	Mercado2	Meercado3	Ofertas
Almacen1	x	y	10-x-y	10
Almacen2	8-x	8-y	-1+x+y	15
Demandas	8	8	9	25

Se toman todos estos trayectos como no negativos para calcular las restricciones.

Destino / Origen	Mercado1	Mercado2	Meercado3
Almacen1	10	15	20
Almacen2	15	10	10

z=10x+15y+20(10-x-y)+15(8-x)+10(8-y)+10(-1+x+y)=390-15x-5y, luego:

$$\min \quad z = 390 - 15x - 5y$$

$$\begin{cases} 1 \leq x + y \leq 10 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 8 \end{cases}$$

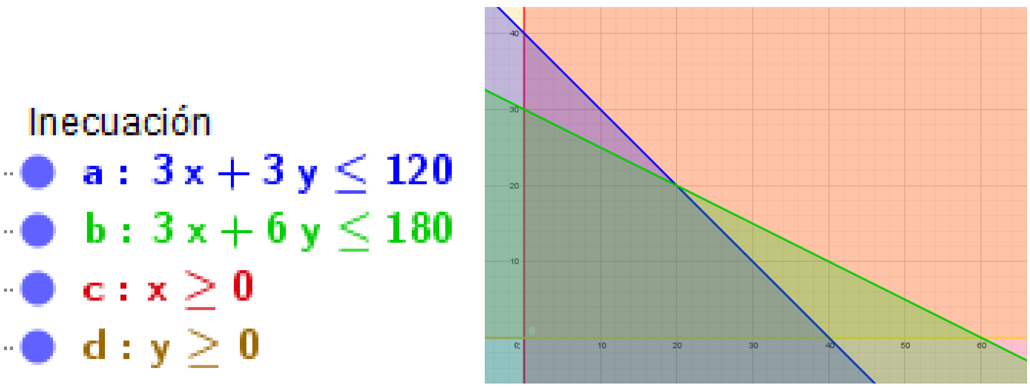
2. **Dibujar la región factible.**

En GeoGebra se dibujará la región factible introduciendo la inecuación de cada restricción del problema en *Entrada*. Utilizarán varios colores si es necesario para que quede más claro.

Con papel y boli tendrán que dibujarla utilizando las técnicas que conocen de resolución de sistemas de inecuaciones. Es decir, dibujando la recta que se obtiene con la igualdad de cada inecuación y pintando la región que satisface cada desigualdad.

En ambos casos se deberá analizar que no sea vacía, en caso de que no sea vacía decidir si es acotada o no acotada y también si hay alguna restricción superflua, es decir que no afecta para dibujar la región factible.

■ En el problema 2:



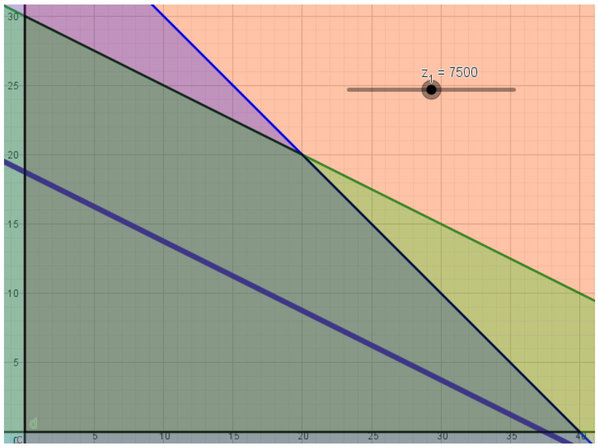
La región factible no es vacía, es acotada y no hay restricciones superfluas.

3. **Dibujar la función objetivo (método gráfico).**

En GeoGebra se dibujará la función objetivo con la ayuda de deslizadores. Es decir, se creará un deslizador y se igualará la función objetivo a este. Moviendo el deslizador se verá como la función va creciendo de valor atravesando al función objetivo. Se puede animar el deslizador también para ver este efecto.

Con papel y boli tendrán que dibujarla comenzando por la función objetivo con valor nulo, después se dibujarán otras líneas de nivel paralelas a la primera dibujada, aumentando el valor de la función objetivo; sabiendo que si la pendiente de la recta es negativa cuanto más arriba se dibuje la función objetivo mayor será su valor, y si la pendiente es positiva, cuanto más arriba se dibuje menor será su valor. Para ello utilizarán las técnicas que conocen de dibujar rectas en gráficas.

■ En el problema 2:

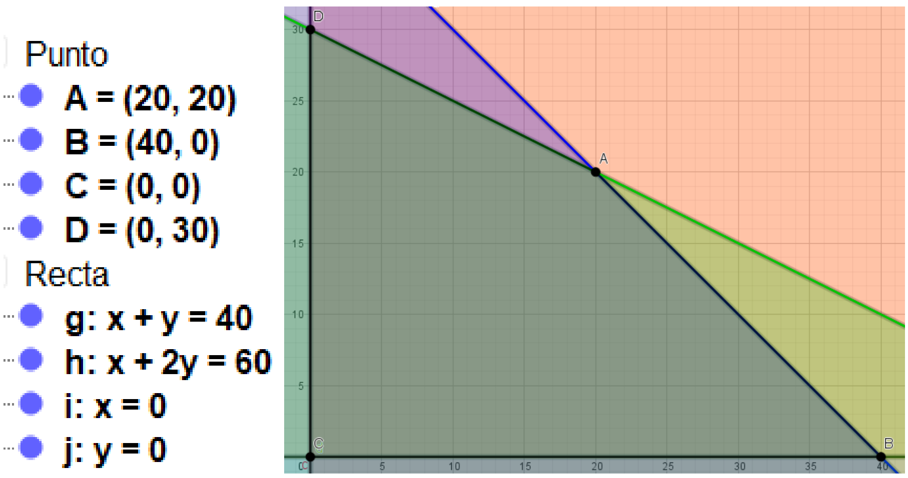


4. Hallar los vértices de la región factible (método analítico).

En GeoGebra se dibujará un punto en cada uno de los vértices. Para ello se dibujará la frontera de la región, es decir, las funciones de las restricciones cuando se satisfacen las igualdades, introduciéndolas en *Entrada* y después se dibujaran los puntos de intersección de las rectas que forman la frontera.

Con papel y boli tendrán que hallarlos utilizando las técnicas que conocen de resolución de sistemas de ecuaciones. Es decir, resolver un sistema de ecuaciones para cada par de ecuaciones de la frontera.

■ En el problema 2:



5. **Evaluar los vértices de la región factible en la función objetivo (método analítico).**

En GeoGebra se introducirá la función objetivo como función en *Entrada*, y en esa misma barra se introducirá la función evaluada en cada uno de los extremos o vértices de la región factible.

Con papel y boli deberá utilizar las técnicas que conocen de Análisis para evaluar puntos en funciones de dos variables.

■ En el problema 2:

Función multivariable

$f(x, y) = 200x + 400y$

Número

- **fA = 12000**
- **fB = 8000**
- **fC = 0**
- **fD = 12000**

Obteniendo esos valores como f(A), f(B), f(C) y f(D), siendo esos puntos los vértices de la región factible.

6. **Discutir cuál es la solución óptima.**

Esta parte se realizará a partir de los resultados de los apartados anteriores. Si la región es no acotada puede no haber solución óptima.

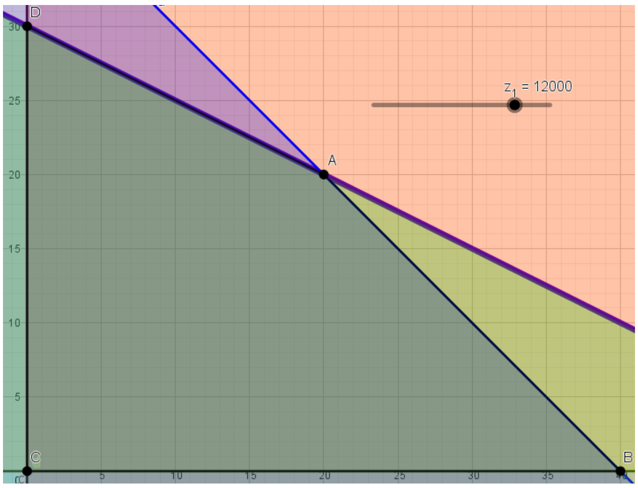
Si se está trabajando con el método analítico se compararan los resultados de los vértices de la región factible y se elegirá el punto o puntos de mayor o menor valor, dependiendo de si se está maximizando o minimizando. Si hay varios vértices con el mismo valor y ese el óptimo, todos los puntos del segmento que une los dos puntos también serán soluciones óptimas. Por último si la región factible es no acotada, habrá que analizar si algún punto que no sea un vértice tiene mayor (o menor) valor, es decir se elegirán un punto de la frontera a cada lado del vértice que se esté considerando óptimo y se evaluarán, si en alguno de esos puntos el resultado es mejor dará como conclusión que no hay solución óptima (esta parte puede ser confusa con este método, por lo que es preferible resolverlo gráficamente si la región es no acotada).

Si se está trabajado el método gráfico se deberá comprobar en qué punto o puntos de la región se obtiene mayor o menor valor en la función objetivo, dependiendo de si se está maximizando o minimizando. En este paso hay que tener en cuenta que puede haber solución única si la función objetivo sólo toca en un punto a la región factible cuando obtiene el resultado óptimo, también puede haber solución múltiple si la toca en varios puntos de un segmento en ese momento, o puede no haber solución si la región no está acotada y la función objetivo puede crecer infinitamente cuando se está maximizando o puede decrecer infinitamente cuando se está minimizando tocando siempre la región factible.

■ En el problema 2:

Con el método analítico se comparan los resultados: f(A)=12000, f(B)=8000, f(C)=0 y f(D)=12000. Como se está maximizando se mira los mayores, entre los cuales hay dos de máximo valor, el punto A y D, por lo que la solución óptima es múltiple, siendo solución cualquier punto del segmento de extremos A y D. con valor en la función objetivo 12000.

Con el método gráfico se mueve el deslizador hasta el punto o puntos de la región factible con mayor valor de ese deslizador, es decir hasta 12000, siendo la solución cualquier punto de ese lado de la frontera:



7. Analizar si la solución óptima tiene sentido.

Esta parte tratará de discutir la solución o soluciones tienen sentido, es decir si se ha obtenido un número no entero y el resultado debe ser entero, o si por cualquier otra circunstancia el resultado no es lógico.

En caso de que la solución no tenga sentido por motivo de no obtener un número entero y que esto sea necesario, se punteará toda la región con las posibles soluciones factibles enteras y se aplicará la técnica gráfica, el último punto o puntos que corten a alguna de las paralelas de la función factible será la solución óptima.

Este paso es muy importante para que los alumnos se acostumbren a analizar las soluciones obtenidas.

■ En el problema 2:

En este problema se ha obtenido como solución óptima los puntos de la región factible cuyo valor en la función objetivo sea 12000. Entre esos puntos están los puntos A=(20,20) y D=(0,30), estos puntos tienen en las coordenadas número naturales, lo cual tiene sentido pues el número de lavadoras debe ser un número natural. Por lo tanto entre las soluciones óptimas está fabricar 20 lavadoras de cada modelo o fabricar 30 lavadoras del modelo L2, o cualquier otra solución con números naturales cuyo beneficio sea 12000.

Adecuación de las técnicas al campo de problemas

Estas técnicas son para problemas de programación lineal continua, sin embargo en este caso se aplican para problemas de programación lineal entera, debido a que la resolución de problemas de programación entera es mucho más complicada y se escapa a los contenidos de este curso. Por ello los problemas estarán preparados para que puedan ser resueltos con estas técnicas. Sin embargo, al final de la unidad se explicará esta cuestión, para que los alumnos entiendan que en ocasiones por la naturaleza del problema no se puede resolver de esta forma.

Metodología para implementar las diferentes técnicas

Para aprender a modelizar los problemas primero se escribirá, entre toda la clase y con la ayuda del profesor, el planteamiento del problema (la función objetivo y las restricciones) del problema 4 sobre las razones de ser del objeto matemático. Para este no será necesario emplear una tabla pues los alumnos ya han tenido que resolver este problema con la técnica ensayo-error dirigido, por lo tanto los alumnos ya han pensado en el planteamiento de este problema para resolverlo por tanteo, pero no lo han planteado de una forma formal, por lo que este será el punto de partida para que vean los componentes de estos problemas, es decir la función objetivo y las restricciones, y por tanto los elementos que tienen que detectar en los enunciados de los problemas.

El siguiente paso será aprender a ordenar los datos de los problemas completando las tablas de modelización. Para ello, primero se realizará entre toda la clase y con la ayuda del profesor, paso a paso la tabla del problema 2, (este es problema que se ha puesto como ejemplo de resolución cuando se estaban explicando las técnicas). Después, a partir de los datos identificados y ordenados en la tabla deberán realizar el planteamiento del problema escribiendo la función objetivo y las restricciones.

Luego se modelizarán los demás problemas de carácter más económico propuestos anteriormente. Para todos ellos se intentará que se aprenda a modelizar entendiendo el enunciado y no de forma algorítmica. Se comenzará por los de producción, pues son los que más se acercan al planteamiento anterior, después los de dietas, y por último el caso del transporte, ya que es un caso más particular que el resto. Nuevamente trabajarán por parejas, intentando que sean los propios alumnos los que vayan modelizando utilizando como referencia el problema modelizado entre todos. El caso particular del transporte se modelizará entre toda la clase con la ayuda del profesor.

Después de haber entendido cómo se modelizan los problemas, el siguiente paso será aprender a resolverlos. Para esto se necesitará la ayuda de GeoGebra, con este programa se trabajará de nuevo por parejas.

El primer paso será dibujar la región factible con la ayuda de colores, los cuales pinten la región de cada restricción. Después, se analizará la región factible y se clasificará en acotada o no acotada.

El siguiente paso es, con la ayuda de deslizadores (previa explicación del profesor de la idea de curvas de nivel), dibujarán la función objetivo, animando el deslizador comprobarán que las función objetivo se va desplazando por medio de rectas paralelas que atraviesan la región factible, creciendo y decreciendo el valor de esa función objetivo. Dependiendo de si están maximizando o minimizando esa función, elegirán la solución óptima del problema cuando la función valga lo más o lo menos posible, que será el último punto o puntos de la región factible que corta alguna de esas paralelas, con ello deducirán la técnica gráfica.

Con el ejercicio anterior, también podrán comprobar que los puntos óptimos siempre se obtienen en las esquinas de la región factible, con ello serán capaces de deducir también la técnica analítica. El profesor irá guiando a los alumnos si los ve algo perdidos en este punto, como por ejemplo preguntándoles que al ser una función lineal la curva de nivel, si se alterna el crecimiento y decrecimiento del valor de esta función según se va atravesando la región factible con esta recta.

Después, se discutirá sobre qué pasa en cada uno de los tipos de problemas, es decir, cuando se encuentran con regiones factibles acotadas o no acotadas y con soluciones optimas únicas o múltiples.

Una vez más, se comenzará por el problema 4 sobre la razón de ser del objeto matemático, el cual ya conocen su solución. Luego, se pasará a resolver el resto de problemas propuestos.

Después de deducir las técnicas de resolución, se aplicarán al papel y boli. En este caso se trabajará de forma individual. Se emplearán para dibujar la región factible las técnicas que conocen de resolución de sistemas de inecuaciones y para hallar los puntos de los vértices deberán resolver los sistemas de ecuaciones de cada par de rectas. Para el caso gráfico se partirá de la recta correspondiente a la función objetivo de valor nulo y luego se recorrerá la región factible con el resto de funciones objetivo, mientras que para el caso analítico se evaluarán todos los vértices.

El último paso, como ya se ha dicho, será trabajar la programación lineal entera. Por la naturaleza del problema, los valores pueden quedar condicionados a valores enteros y por tanto el resultado óptimo puede no encontrarse en ningún vértice. Para ello se resolverá el problema 3 sobre la razón de ser del objeto matemático, con los métodos vistos hasta entonces y después se aplicará la técnica del puntear la región factible. Estos lo trabajarán por parejas con la ayuda de GeoGebra y después se pondrá en común entre toda la clase las conclusiones a las que se ha llegado.

G. LAS TECNOLOGÍAS

Razonamientos para justificar las técnicas

Para justificar las técnicas se emplean los siguientes razonamientos:

- Método gráfico (T1): Curvas de nivel de la función objetivo:
    - Las curvas de nivel de la función objetivo $z= c_1x+c_2y$, son aquellas expresiones en las que la función objetivo toma un determinado valor constante.
    - Se parte de la recta de beneficio nulo ($c_1x+c_2y=0$), esta recta se mueve paralelamente buscando barrer la región factible de soluciones. La recta paralela a la anterior que toque a la región factible y que tenga el mayor valor o menor valor (dependiendo de si se está maximizando o minimizando) de todas las posibles será la que proporcione la solución óptima:
        - Si esta recta toca en un solo punto a la región factible entonces hay solución óptima única.
        - Si esta recta toca en varios puntos a la región factible entonces hay solución óptima múltiple.
        - Si la región factible no está acotada y el valor de estas rectas puede crecer o decrecer (según si se está maximizando o minimizando) infinitamente, entonces no hay solución óptima.
- Método analítico (T2): Teorema Fundamental de la Programación Lineal:
    - Si existe una única solución que optimice la función objetivo, esta se encuentra en un vértice de la región factible (principio de las esquinas).
    - Si la función objetivo toma el mismo valor óptimo en dos vértices (consecutivos) de la región factible, también toma ese mismo valor en los puntos del segmento que determinan esos dos vértices. En este caso el problema tiene solución múltiple.

- Si la región factible no está acotada, el problema lineal puede carecer de solución. En el caso de que exista, se encuentra en los vértices de la región factible.

Proceso para justificar las técnicas

La justificación de las técnicas va a ser algo que van a llevar a cabo entre el profesor y los alumnos. Para esta labor se precisará también de la ayuda de GeoGebra, a la vez que los propios alumnos están empleando las diferentes técnicas.

Aunque, antes de dibujar la función objetivo, el profesor hará una institucionalización de lo que son las curvas de nivel, es decir, aquellas expresiones en las que la función objetivo toma un determinado valor constante. Para ello escribirá la función con dos variable $f(x,y)=x+y=0$, y propondrá que se le den diferentes valores para dibujarla, con ello se verá que están dibujando una recta, después se hará lo mismo con la función $f(x,y)=x+y=1$, para mostrar que se obtiene una recta paralela a la primera, por último lo harán una vez más con la función $f(x,y)=x+y=-1$. En todas estas rectas se escribirá la recta de forma explícita para ver que la pendiente es la misma, en este caso negativa. Después se hará lo mismo con la función $f(x,y)=x-y$, y verán que la pendiente es positiva. Finalmente institucionalizará qué es lo que se quiere conseguir con estas rectas y que si la pendiente es negativa cuanto mayor sea el valor de la función más hacia arriba se encuentra la recta, mientras que si es positiva, cuanto mayor sea el valor la función más hacia abajo está.

Después, para justificar el método gráfico se emplearán las curvas de nivel y con la ayuda de GeoGebra, empleando animaciones verán qué va sucediendo. De este modo los alumnos irán viendo que en algunas ocasiones el mejor valor se da en un solo punto (solución única), en otros casos se da en varios puntos (solución múltiple) y en otros no se puede determinar ninguna solución (sin solución).

El propio método gráfico será el encargado de ir descubriendo el Teorema Fundamental de la Programación Lineal. Es decir, a partir de los resultados obtenidos se irá viendo que los óptimos siempre se encuentran en la frontera de la región factible, y si el óptimo es único se encuentra en un vértice. De este modo los alumnos serán capaces de sacar las conclusiones necesarias para poder enunciar el Teorema Fundamental de la Programación Lineal y por tanto la justificación del método analítico, aunque el enunciado formal de este teorema será institucionalizado, al final, con la ayuda del profesor.

Por otro lado, después de plantear el primer problema (el problema 4 sobre las razones de ser del objeto matemático), el profesor institucionalizará los nombres de los diferentes elementos del problema, es decir, función objetivo, restricciones, variables de decisión…y con todo ello se intentará dar una definición de lo que son los problemas de programación lineal entre toda la clase. De igual modo que a la vez que se vayan resolviendo los diferentes tipos de problemas, y por tanto saliendo los diferentes tipos de soluciones, se dedicarán 5 minutos para clasificar el problema en su correspondiente campo de problemas.

Metodología para implementar las tecnologías

En cuanto a la metodología para implementar las tecnologías, serán los alumnos por parejas los que trabajarán con GeoGebra, y el profesor el que al principio con las curvas de nivel y al final con el Teorema Fundamental de la Programación Lineal, el que dará la explicación formal, con el grupo entero, de lo que se está haciendo, pero siempre intentando apoyarse en las conclusiones que ha ido viendo que iban sacando los alumnos, con la intención de que toda la clase vaya llegando a los puntos clave y por tanto entendiendo qué es lo que están haciendo y por qué se realiza así, es decir, serán explicaciones lo más interactivas y participativas posible.

Como ya se ha dicho, el profesor recomendará la visualización en casa de un tutorial para aprender o recordar los conceptos básicos que necesitan de GeoGebra.

H. LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA

Se estima que la duración de esta unidad didáctica será de unas 12 sesiones, distribuidas de la siguiente forma:

Nº de sesión	**Actividad**
1	Repaso de conceptos previos.
2	Implementación de la razón de ser.
3	Modelización. (PRS4 y P2)
4	Modelización. (P3, P4, P5 y P1)
5	Método gráfico GeoGebra. (PRS4 y P2)
6	Método gráfico GeoGebra. (P3 y P5)
7	Método analítico GeoGebra. (P2, P3 y P5)
8	Método gráfico a mano. (P4)
9	Método analítico a mano. (P1)
10	Programación lineal entera. (PRS3)
11	Prueba de evaluación.
12	Post prueba de evaluación.

Es posible que para el repaso de los conceptos previos se precise una sesión más, si el profesor considera que estos conceptos no están muy claros.

A continuación se van a hacer una descripción más detallada de cada una de las sesiones. Si algún alumno no termina lo previsto en una sesión deberá acabarlo en casa:

- <u>Sesión 1:</u> Repaso de conceptos previos.

Esta primera sesión estará dedicada a comprobar que los alumnos poseen los conocimientos necesarios para estudiar la programación lineal. Para ello se propondrán a la vez, dos problemas (especificados en el capítulo C):

- El primero es un sencillo problema en el que hay que plantear y resolver un sistema de ecuaciones, algebraica y gráficamente. Con ello se comprueban tanto la capacidad de modelizar, como la de dibujar gráficamente y la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones.
- El segundo es la representación gráfica de un sistema de inecuaciones. Este conocimiento es fundamental para representar las regiones factibles de los problemas.

Estos problemas se resolverán individualmente, durante unos 25 minutos, aunque si algún alumno acaba antes podrá ayudar a sus compañeros, el resto de la sesión se dedicará a corregirlos en la pizarra. El encargado de corregirlos será algún alumno o alumnos, que el profesor haya comprobado que los estaban resolviendo bien, mientras el profesor irá haciendo aclaraciones en voz alta.

En caso de que estos conceptos no queden claros, se dedicará una sesión extra a trabajar más problemas de este tipo. Pero en esa ocasión los alumnos trabajarán por parejas, siendo parejas heterogéneas, es decir, los alumnos que peor lleven estos conceptos trabajaran con los que mejor los lleven.

- <u>Sesión 2:</u> Implementación de la razón de ser.

En esta sesión se pretenderá que los alumnos entiendan la necesidad y utilidad de la programación lineal, es decir su razón de ser. Para ello se irán proponiendo problemas (PRS) de enunciado sencillo y cotidiano (especificados en el capítulo D), concretamente serán 4 problemas, en los que vaya surgiendo la necesidad de un objeto matemático para resolverlos sin tener que de ir probando posibles soluciones.

Con los dos primeros problemas se pretende que entiendan el enunciado y la problemática que se puede dar, que haya soluciones no factibles o que puede haber más de una solución buena. Después, se intentará mostrar lo costoso que puede ser ir probando posibles soluciones (técnica ensayo-error dirigido), para esto último se comenzará con objetos manipulables (canicas) para hacerles el trabajo más sencillo. Con los dos últimos problemas se volverá a trabajar en sesiones posteriores.

En estos problemas se trabajará por parejas, siendo estas lo más heterogéneas posible. Se irán corrigiendo los problemas según se vayan haciendo, para asegurar que todos van obteniendo las respuestas correctas.

- <u>Sesión 3:</u> Modelización. (PRS4 y P2)

En esta primera sesión se comenzará a modelizar los diferentes problemas. Estos se pueden encontrar propuestos en el capítulo E.

Se comenzará por el problema PRS4 (problema 4 sobre la razón de ser) que resolvieron con la técnica ensayo-error dirigido. Entre toda la clase se planteará algebraicamente el problema. Como ya pensaron en la sesión anterior sobre este, será más sencillo entenderlo. Después, el profesor institucionalizará las partes de este planteamiento, es decir, la función objetivo y las restricciones.

La segunda parte de la sesión se dedicará a plantear, también entre toda la clase, el problema 2 (problema de producción). Para ello, el profesor dibujará una tabla vacía en la pizarra, la cual deberán de rellenar los alumnos para ordenar los datos. A partir de esta tabla, plantearán la función objetivo y las restricciones de este problema.

- <u>Sesión 4:</u> Modelización. (P3, P4, P5 y P1)

La siguiente sesión se dedicará a plantear los otros problemas propuestos del capítulo E.

En la primera mitad de la sesión trabajarán, nuevamente por parejas, en la modelización de los problemas 3, 4 y 5, los cuales son similares al problema 2, estos problemas son de producción o de dietas. El profesor irá por la mesas guiándoles y comprobando que los están haciendo correctamente.

La segunda mitad de la sesión se dedicará a la modelización del problema 1, que es de transporte, y por tanto es un caso particular de modelización. Para esto se trabajará con el grupo entero, planteándoles de nuevo tablas vacías que deben rellenar, siguiendo el orden que se les va indicando.

- Sesión 5: Método gráfico GeoGebra. (PRS4 y P2)

Para esta sesión se necesitará la ayuda de GeoGebra. Los alumnos ya han modelizado los diferentes problemas y ahora es el momento de resolverlos por parejas.

En primer lugar se resolverá gráficamente el problema PRS4, de este problema ya conocen la solución, pues lo resolvieron con la técnica ensayo-error dirigido. Para esto primero dibujarán la región factible. Después el profesor hará una institucionalización de las curvas de nivel (procedimiento explicado en las tecnologías). Tras ello dibujarán la función objetivo con deslizadores. Con ello comenzarán a ver en que consiste el método gráfico. Este problema tiene solución única.

El siguiente paso será resolver gráficamente el problema 2, para ello dibujarán la región factible y la función objetivo, y después deberán discutir cual es la solución óptima, en ese caso es un problema con la región factible acotada con solución múltiple (CP1.2) y analizar si esta solución tiene sentido.

- Sesión 6: Método gráfico GeoGebra. (P3 y P5)

En esta sesión se seguirá trabajando, al igual que en la sesión anterior, con el método gráfico con GeoGebra. Pero en esta ocasión con los problemas 3 y 5, los cuales tienen región factible no acotada, con solución única y sin solución, respectivamente (CP2.1 y CP2.3). De este modo se irán introduciendo los diferentes campos de problemas y sus formas re resolución gráfica.

El final de esta sesión se dedicará a institucionalizar, a partir de los resultados que se han ido obteniendo, el Teorema Fundamental de la Programación Lineal, el cual es la justificación del método analítico, que se trabajará en la siguiente sesión.

- Sesión 7: Método analítico GeoGebra. (P2, P3 y P5)

Esta será la última sesión en la que se trabaje con GeoGebra, se realizará con las parejas de siempre. A partir del Teorema Fundamental de la Programación Lineal, se resolverán analíticamente los problemas 2, 3 y 5 (los cuales ya han sido resueltos gráficamente). Para ello deberán hallar los vértices de la región factible y evaluarlos, analizando qué sucede en cada problema, en relación con la solución que ya conocen. Cabe destacar el caso del problema 5, el cual es confuso resolverlo con esta técnica, para este se evaluará también algún punto que no sea vértice de la zona no acotada.

- <u>Sesión 8:</u> Método gráfico a mano. (P4)

En esta sesión se comenzará a emplear las técnicas empleadas con GeoGebra, pero ahora con papel y boli. Primero será el turno de la técnica gráfica, para ello se resolverá el problema 4, que es un problema con región factible no acotada con solución múltiple (CP2.2).

Los pasos a seguir serán dibujar la región factible con las técnicas que conocen de resolución de sistemas de inecuaciones y dibujar la función objetivo, comenzando con la recta de beneficio nulo. Después se discutirá el tipo de solución, y por tanto el tipo de problema y por último se analizará si esta tiene sentido.

En esta sesión se trabajará individualmente, y el profesor ira pasando por las mesas, recordándoles los pasos a seguir.

- <u>Sesión 9:</u> Método analítico a mano. (P1)

En esta sesión se trabajará el método analítico con papel y boli, nuevamente individualmente. Para ello se resolverá el problema 1, que tiene la región factible acotada con solución única (CP1.1).

Para este problema primero volverán a dibujar la región factible con las técnicas que conocen de resolución de sistemas de inecuaciones y después deberán de hallar los vértices de esta región resolviendo los sistemas de ecuaciones (dos a dos), de las rectas que se cortan formando los vértices, y evaluarlos estos en la función objetivo. Por último deberán de discutir la solución óptima y analizar si tiene sentido.

- Sesión 10: Programación lineal entera. (PRS3)

Esta sesión se será fundamental para que los alumnos entiendan que siempre deben analizar que la solución tiene sentido. Para ello se modelizará y resolverá con Geogebra el problema 3 sobre las razones de ser del objeto (PRS3), con la técnica gráfica. De este modo verán que las soluciones dadas por los vértices no tienen sentido y que por tanto la solución óptima se encuentra en el interior. Después se propondrá que punteen en esta región las posibles soluciones factibles y vean cómo avanza la función objetivo, eligiendo así la mejor solución posible.

La sesión concluirá con la explicación del profesor de que estas técnicas son para problemas de programación continua y que por la naturaleza de los problemas, en ocasiones, nos encontramos con problemas de programación entera.

En esta sesión se volverán a trabajar en parejas, siendo estas las mismas que se habían empleado para trabajar con GeoGebra.

- Sesión 11: Prueba de evaluación.

Esta sesión se dedicará a la realización de un examen individual, el cual está especificado en el capítulo I. Durante esta sesión las únicas dudas que se resolverán serán dudas de enunciado.

- Sesión 12: Post prueba de evaluación.

Esta sesión se dedicará a la corrección y comunicación de resultados de la prueba escrita. El profesor habrá corregido fuera del aula las pruebas escritas. Durante esta sesión los alumnos se pondrán con las mismas parejas que han realizado todas las actividades de esta unidad y deberán volver a hacer los ejercicios del examen con la ayuda de GeoGebra, después de realizar cada ejercicio con el ordenador, el profesor comentará los errores más comunes en la pizarra. Por último, se repartirán las pruebas escritas para que cada alumno vea sus fallos. La explicación más detallada de esta sesión se encuentra en el capítulo I.

I. LA EVALUACIÓN

Prueba escrita:

1. (3,5 puntos) Resuelve con el método analítico el siguiente problema:

Una furgoneta tiene que distribuir diariamente manzanas desde dos almacenes (A y B) hasta tres hipermercados distintos (1, 2 y 3). La siguiente tabla muestra los costes de distribución desde cada almacén hasta cada hipermercado, y también, los kilos de manzanas que se guarda en cada almacén y las necesidades que requiere cada hipermercado:”

	Hiper 1	Hiper 2	Hiper 3	Capacidad
Almacén A	2€	3€	1€	40kg
Almacén B	1€	4€	2€	80kg
Necesidades	20kg	40kg	60kg	(Total 120kg)

a) ¿Cuál es el mínimo coste al que se puede hacer la distribución para satisfacer las demandas requeridas?

b) ¿Qué distribución o distribuciones proporcionan ese mínimo coste?

2. (3,5 puntos) Resuelve con el método gráfico el siguiente problema:

Las necesidades vitamínicas diarias de una persona son de al menos 36mg de vitamina A, 28mg de vitamina D y 36mg de vitamina E. Para cubrir estas necesidades se pueden tomar dos tipos de vitamínicos el X y el Y. Cada pastilla del vitamínico X cuesta 0,02€ y proporciona 2mg de vitamina A, 2mg de vitamina D y 6 mg de vitamina E; mientras que cada pastilla del vitamínico Y cuesta 0,04€ aportando 3 mg de vitamina A, 2mg de vitamina D y 2 de vitamina E.

a) ¿Cuál es el mínimo coste que puede pagar una persona diariamente para cubrir las necesidades vitamínicas básicas?

b) ¿Cuántas pastillas de cada tipo de vitamínico se debe tomar diariamente para ello?

3. (3 puntos) Resuelve con el método gráfico el siguiente problema:
Una constructora quiere contratar a albañiles y fontaneros para crear una sección de reformas. Por las necesidades del mercado el número de albañiles tiene que ser mayor o igual al de fontaneros, pero que el número de albañiles no sea más de dos veces del de fontaneros. El beneficio de la constructora en jornadas por la contratación de cada albañil es de 150€ y de 120€ por cada fontanero. ¿Cuántos trabajadores de cada especialidad deben contratarse para obtener el máximo beneficio?

Conocimientos que evalúa la prueba escrita

Cada ejercicio de la anterior prueba escrita evalúa los siguientes campos de problemas, técnicas y tecnologías:

1. CP1.2: región factible acotada con solución óptima múltiple (de transportes).
   La técnica que se debe usar es la del método analítico (T2), cuya tecnología es el Teorema Fundamental de la Programación Lineal.
2. CP2.1: región factible no acotada con solución óptima única (de dietas).
   La técnica que se debe usar es la del método gráfico (T1), cuya tecnología son las curvas de nivel.
3. CP2.3: región factible no acotada sin solución óptima.
   La técnica que se debe usar es la del método gráfico (T1), cuya tecnología son las curvas de nivel.

Los tres ejercicios son similares, por lo que se van a explicar las tareas principales y auxiliarles de los tres ejercicios a la vez:

- Tareas principales:
  - Modelización del problema.
  - Aplicar el método de resolución correcto: gráfico o analítico.
  - Discutir cuál es la solución óptima según el método empleado.
- Tareas auxiliares específicas:
  - Resolver gráficamente sistemas de inecuaciones lineales, es decir, dibujar la región factible.

- Tareas auxiliares generales:
  - Representación gráfica de puntos, para dibujar rectas.
  - Representación gráfica de rectas, es decir, de la función objetivo y de las igualdades de las restricciones.
  - Resolución de sistemas de ecuaciones, es decir, hallar los vértices de la región factible.
  - Evaluar puntos en una función de dos variables, es decir, evaluar los vértices de la región factible.
  - Hallar la pendiente de la recta, es decir, escribir la recta en forma explícita para ver el signo de la pendiente.
  - Operaciones.

Los ejercicios están relacionados con los estándares de aprendizaje Est.MCS.2.2.1 y Est.MCS.2.2.2, los cuales son del criterio de evaluación Crit.MCS.2.2:

Crit.MCS.2.2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, sistemas de ecuaciones, inecuaciones y programación lineal bidimensional, interpretando críticamente el significado de las soluciones obtenidas.

- *Est.MCS.2.2.1. Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, el sistema de ecuaciones lineales planteado (como máximo de tres ecuaciones y tres incógnitas), lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas en contextos reales.*
- *Est.MCS.2.2.2. Aplica las técnicas gráficas de programación lineal bidimensional para resolver problemas de optimización de funciones lineales que están sujetas a restricciones e interpreta los resultados obtenidos en el contexto del problema.*

Solución de la prueba escrita

1. Se va a resolver analíticamente.

- Modelización del problema: es un problema de transportes.

Destino / Origen	Hiper1	Hiper2	Hiper3	Ofertas
Almacén A	x	y	40-x-y	40
Almacén B	20-x	40-y	20+x+y	80
Demandas	20	40	60	Total 120

Por lo que el planteamiento del problema va a quedar así:

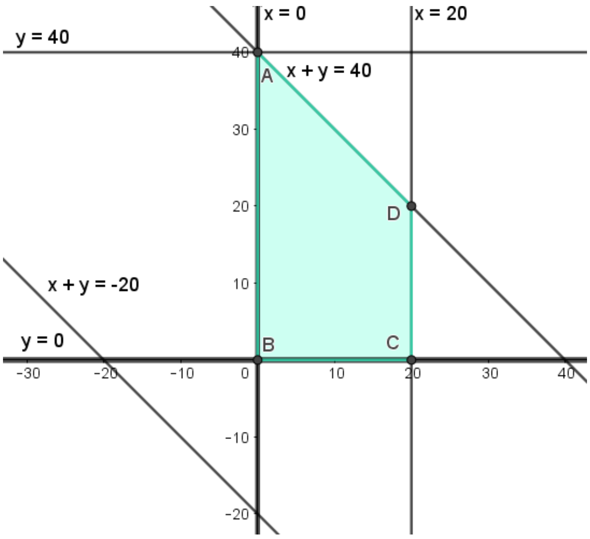
Min 2x+3y+(40-x-y)+(20-x)+4(40-y)+2(20+x+y) = Min 2x+260

R: $x \geq 0$; $y \geq 0$, $40-x-y \geq 0 \rightarrow x+y \leq 40$, $20-x \geq 0 \rightarrow x \leq 20$, $40-y \geq 0 \rightarrow y \leq 40$, $20+x+y \geq 0 \rightarrow x+y \geq -20$

$$\min \ z = 2x + 260$$

$$\begin{cases} -20 \leq x + y \leq 40 \\ \quad 0 \leq x \leq 20 \\ \quad 0 \leq y \leq 40 \end{cases}$$

- Dibujar la región factible (dibujar las rectas dándoles dos puntos a cada una):



x+y=-20		x+y=40	
x	y	x	y
0	-20	0	40
-20	0	40	0

$x+y \geq -20$ restricción superflua.

La región está acotada.

- Hallar los vértices de la región factible (resolver los siguientes sistemas):

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 40 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 20 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 20 \\ x + y = 40 \end{cases}$$

Estos sistemas son inmediatos y tienen de soluciones los puntos:

A(0,40), B(0,0), C(20,0) y D(20, 20).

- Evaluar los vértices en la función objetivo: por el Teorema Fundamental de la Programación Lineal, el valor o valores óptimos se encuentran en los vértices de la región factible.

z(0,40)=260, z(0,0)=260, z(20,0)=300, z(20, 20)=300.

- Discutir cual es la solución óptima:

Como el problema es de minimizar se elegirá el vértice con menor valor. En este caso dos vértices tienen el mínimo valor, por lo que la solución óptima va a ser múltiple.

a) El mínimo coste al que se puede hacer la distribución es 260€.
b) Las posibles distribuciones son todas las soluciones que se encuentran en el segmento cuyos vértices son los puntos A(0,40) y B(0,0). Es decir, todas las distribuciones factibles en las que la x es 0. Un ejemplo de estas múltiples soluciones óptimas es:
   Desde el almacén A van las 40 al hipermercado 3 y desde el almacén B va 20 al hipermercado 1, 40 al hipermercado 2 y 20 al hipermercado 3. (0,0).

2. Se va a resolver gráficamente.

- Modelizar el problema: es un problema de dietas.

	Pastillas X	Pastillas Y	Recursos
Vitamina A	2mg	3mg	≥36mg
Vitamina D	2mg	2mg	≥28mg
Vitamina E	6mg	2mg	≥36mg
Coste	0,02€/pastilla = 2cent/pastilla	0,04€/pastilla = 4cent/pastilla	minimizar
Variable	x (nº pastillas X)	Y (nº pastillas Y)	

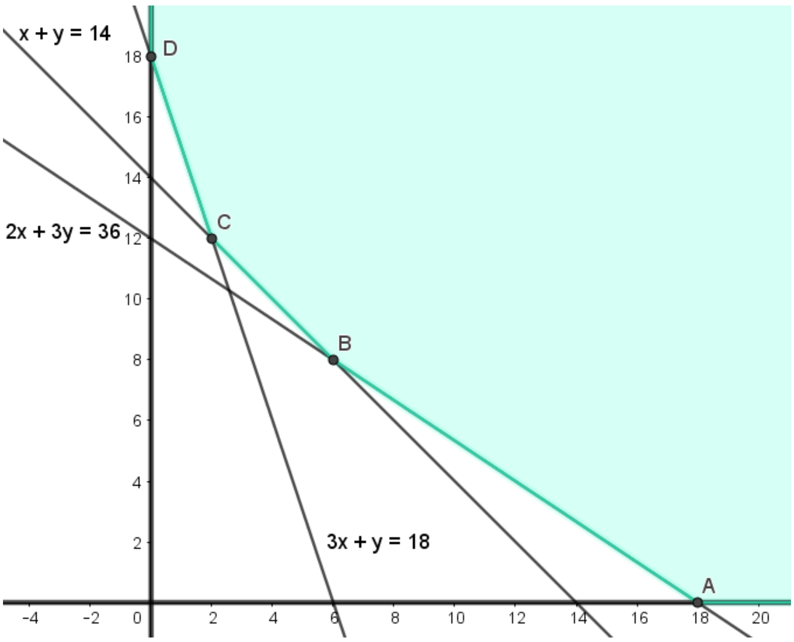
Por lo que el planteamiento del problema va a quedar así:

$$\min \quad 2x + 4y$$

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 36 \\ 2x + 2y \geq 28 \\ 6x + \geq 2y \geq 36 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- Dibujar la región factible (dibujar las rectas dándoles dos puntos a cada una

2x+3y=36		2x+2y=28→x+y=14		6x+2y=36→3x+y=18	
x	**y**	**x**	**y**	**x**	**y**
0	12	0	14	0	18
18	0	14	0	6	0



La región factible no está acotada.

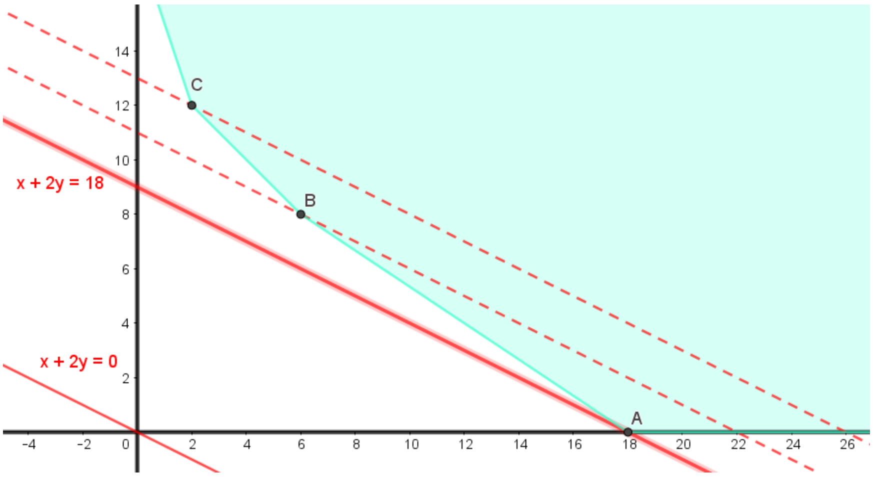
- Dibujar la función objetivo.

Para dibujar la función objetivo es equivalente dibujar la función x+2y. Estas rectas tienen por ecuación x+2y=n, si despejamos la y para ver su pendiente se obtiene que:

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{n}{2}$$

Luego la pendiente es negativa y cuanto más arriba se dibuje la recta mayor será su valor, por lo tanto el mínimo será la recta que toque la región lo más abajo posible.

Se comienza dibujando la recta x+2y=0, y después se desplaza esta recta, trazando rectas paralelas de forma que toque la región factible en un solo punto o puntos (si todos ellos pertenecen a la frontera de la región factible), de forma que el valor de esta función sea el mínimo posible.



x+2y=0		x+2y=18	
x	y	x	y
0	0	18	0
-2	1	0	9

- Discutir cual es la solución óptima:

En este caso el mínimo se encuentra en el punto A(18,0).

a) El mínimo coste sería 2·18+4·0=36, es decir 36centimos/día.
b) Se debe tomar 18 pastillas del vitamínico X y ninguna del Y.

3. Se va a resolver gráficamente.

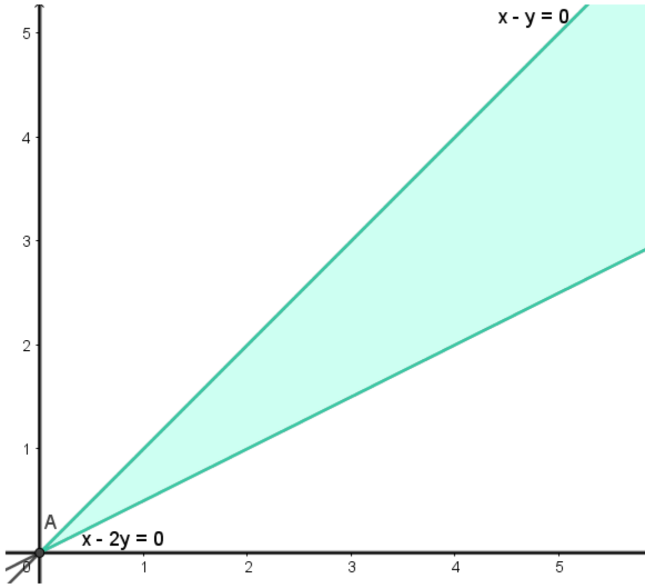
- Modelizar el problema: en este problema hay muy pocos datos por lo que es sencillo plantearlo directamente.

$$\max \quad 150x + 120y$$

$$\begin{cases} x \geq y \\ x \leq 2y \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- Dibujar la región factible (dibujar las rectas dándoles dos puntos a cada una):

x-y=0		x-2y=0	
x	y	x	y
0	0	0	0
1	1	2	1



La región factible no está acotada.

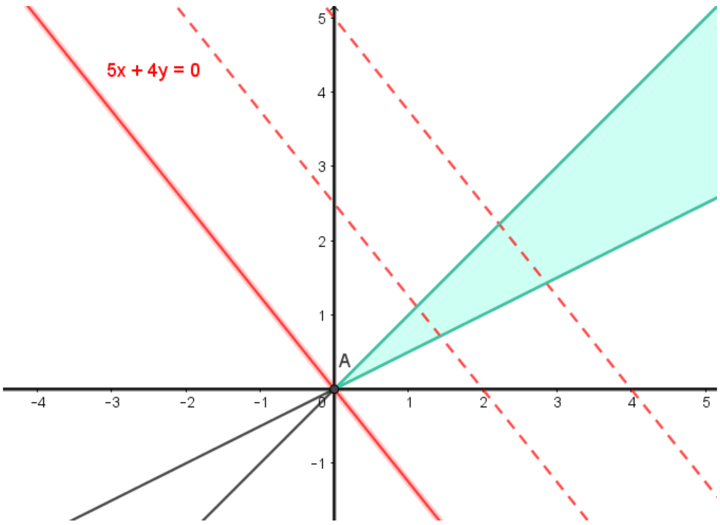
- Dibujar la función objetivo.

Para dibujar la función objetivo es equivalente dibujar la función 5x+4y. Estas rectas tienen por ecuación 5x+4y=n, si despejamos la y para ver su pendiente se obtiene que:

$$y = \frac{-5}{4}x + \frac{n}{4}$$

Luego la pendiente es negativa y cuanto más arriba se dibuje la recta mayor será su valor, por lo tanto el máximo será la recta que toque la región lo más arriba posible.

Se comienza dibujando la recta 5x+4y=0, y después se desplaza esta recta, trazando rectas paralelas de forma que toque la región factible en un solo punto o puntos (si todos ellos pertenecen a la frontera de la región factible), de forma que el valor de esta función sea el máximo posible.



5x+4y=0	
x	y
0	0
-4	5

- Discutir cual es la solución óptima:

En este caso no hay solución óptima, ya que la función puede crecer infinitamente y sigue tocando la región factible.

Por lo que la respuesta es que cuantos más trabajadores se contraten mayor será el beneficio, sin haber restricción en la cantidad máxima de estos. Siempre y cuando el número de contrataciones se encuentre dentro de la región factible.

Posibles errores de la prueba escrita

Entre los errores que pueden cometer en estos problemas están:

- Modelización:
    - No entender el enunciado del problema.
    - Confundir maximizar y minimizar.
    - Poner mal las desigualdades de las restricciones o dejarse alguna.
    - Identificar mal las variables de decisión.
- Resolución:
    - Aplicar otro método distinto al que se pide.
    - Identificar mal el tipo de soluciones que tiene.
- Otros:
    - Dibujar mal la región factible.
    - Resolver mal los sistemas de ecuaciones.
    - Evaluar mal en la función objetivo.
    - Dibujar mal la función objetivo (las curvas de nivel de esta).

Criterios de calificación

Para los tres ejercicios se van a emplear las mismas puntuaciones, que serán:

- Penalización de hasta el 100% por plantear mal el problema. Se corregirá el planteamiento incorrecto si demuestra que entiende el enunciado.
- Penalización de hasta el 80% por:
    - Aplicar en la resolución un método distinto al que se pide.

- Discutir mal cual la solución del problema.

- Penalización de hasta el 50% por dibujar mal la región factible.
- Penalización de hasta el 20% por:
    - La resolución incorrecta de los sistemas de ecuaciones.
    - La evaluación incorrecta de en la función objetivo.
    - Dibujar incorrectamente las curvas de nivel de la función objetivo.

Comunicación de resultados

La comunicación de resultados se realizará en la última sesión, después de que el profesor haya corregido las pruebas fuera del aula. Pero antes de comunicarlos, el profesor aprovechará la sesión para que los alumnos aprendan de los errores que han tenido y de las dificultades que encontraron.

Durante esta sesión los alumnos se pondrán con las mismas parejas que han trabajado durante toda la unidad de programación lineal. Estas parejas deberán volver a hacer los tres ejercicios del examen con la ayuda de GeoGebra, después de la realización de cada uno de los ejercicios se comentará en la pizarra los errores más comunes que ha visto en los exámenes en cada ejercicio y dará las soluciones de estos, pero sin decir quién los ha cometido, para que todo el mundo piense en todos ellos.

La idea de volverlo a hacer con GeoGebra es porque con este programa, las tareas auxiliares las realiza él solo, introduciendo los diferentes pasos en Entrada, mientras que las generales tendrán que pensarlas de nuevo y ponerse de acuerdo con la pareja de cómo se hacen. Es decir, aquellos alumnos que hayan fallado en las tareas generales recapacitarán con el compañero que cómo se hacían y finalmente compararán con los resultados que da el profesor si habían acertado.

Por último, el profesor repartirá individualmente las pruebas escritas para que vean sus fallos, después de que ya sepan cómo debían hacerlo.

Para los alumnos que hayan fallado sobre todo en las tareas auxiliares, el profesor les dará unos ejercicios de repaso sobre esas tareas, es decir, sistemas de ecuaciones, de inecuaciones…

J. BIBLIOGRAFÍA Y PÁGINAS WEB

Barrios, L. (2005). Unidad didáctica: Programación Lineal. *Proyecto Descartes.*

Bullido, F. V. (1994). *El empleo de materiales en la enseñanza de la Geometría.* Revista interuniversitaria de formación del profesorado, (21), 95-104.

Conejero, E. (2013). *Programación lineal: aplicación a la producción de helados.* (Trabajo fin de grado). Universidad de Sevilla, Sevilla.

Escoredo, A., Gómez, M.D., Lorenzo, J., Machín, P., Pérez, C., Rey, M.J., Río, J., & Sánchez, D. (2009). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 2º Bachillerato.* Madrid: Santillana Educación.

Espinel, M. C., & Noda, J. A. (2012). Gasta sólo lo que puedes pagar: una experiencia de optimización con alumnos de secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1(2), 71-85.

Faulin, J., & Juan, Á. A. (2016). Aplicaciones de la programación lineal. *Universitat Oberta de Catalunya* (UOC).

García, M.C. (s.f.). Diccionario empresarial. *Wolters Kluwer*. Disponible en http://diccionarioempresarial.wolterskluwer.es/Content/Documento.aspx?params=H4sIAAAAAAAEAMtMSbF1jTAAASNTYwtztbLUouLM_DzbsMz01LySVAD2h3eRIAAAAA==WKE

ORDEN ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín Oficial de Aragón*. Aragón, 2 de junio de 2016, núm. 105, pp. 13022-13105.

ORDEN ECD/494/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín Oficial de Aragón*. Aragón, 3 de junio de 2016, núm. 106, pp. 14123-14151.

PHPSimplex. (s.f.). Optimizando recursos con Programación lineal: Historia de la Investigación Operativa. Disponible en http://www.phpsimplex.com/historia.htm

Rochera, M. J., Colomina, R., & Barberá, E. (2001). Optimizar los aprendizajes de los alumnos a partir de los resultados de la evaluación en Matemáticas. *Revista Investigación en la Escuela*, (45), 33-44.

Ruiz, M. J., Llorente, J., González, C., Aparicio, A.M., & Arribas, F. (2016). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II 2º Bachillerato (LOMCE).* Madrid: Editex.

Sebastián. (2011). Cuando la matemática va a la guerra: Investigación operativa y método Simplex. *Pizarrón Matemático*. Disponible en https://pizarronmatematico.wordpress.com/2011/06/27/cuando-la-matematica-va-a-la-guerra/

ANEXO

En este anexo se van a resolver los problemas propuestos anteriormente según la forma que se trabajaría en clase con cada uno de ellos:

Problemas de repaso de conceptos previos:

- Problema 1: Plantea y resuelve gráfica y algebraicamente el siguiente problema: Una granja tiene gallinas y cerdos, en total hay 58 cabezas y 168 patas. ¿Cuántos cerdos y gallinas hay?

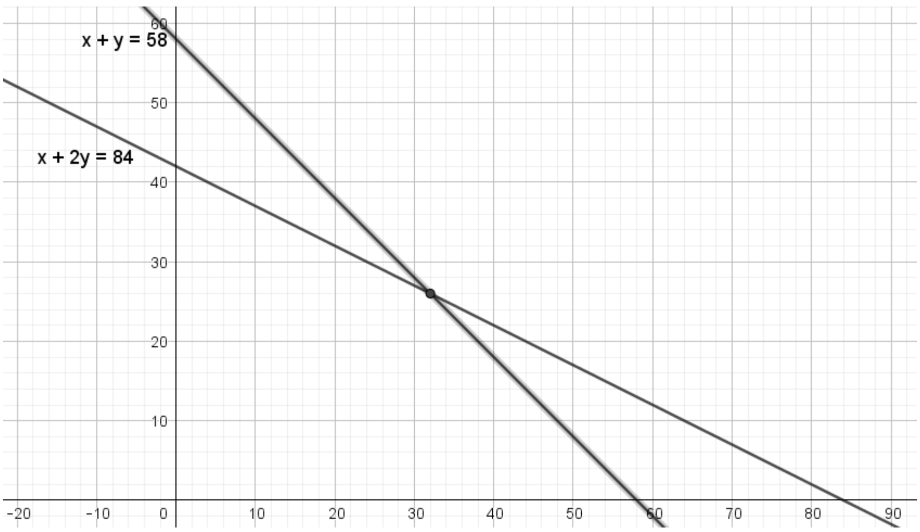
Solución:

$x = nº\ de\ gallinas$

$y = nº\ de\ cerdo$

$$\begin{cases} x + y = 58 \\ 2x + 4y = 168 \end{cases}$$

$x + y = 58$		$2x + 4y = 168$	
x	y	x	y
0	58	0	42
58	0	84	0



$x = 58 - y$

$2(58 - y) + 4y = 168 \rightarrow 116 - 2y + 4y = 16 \ \rightarrow 2y = 52 \rightarrow y = 26$

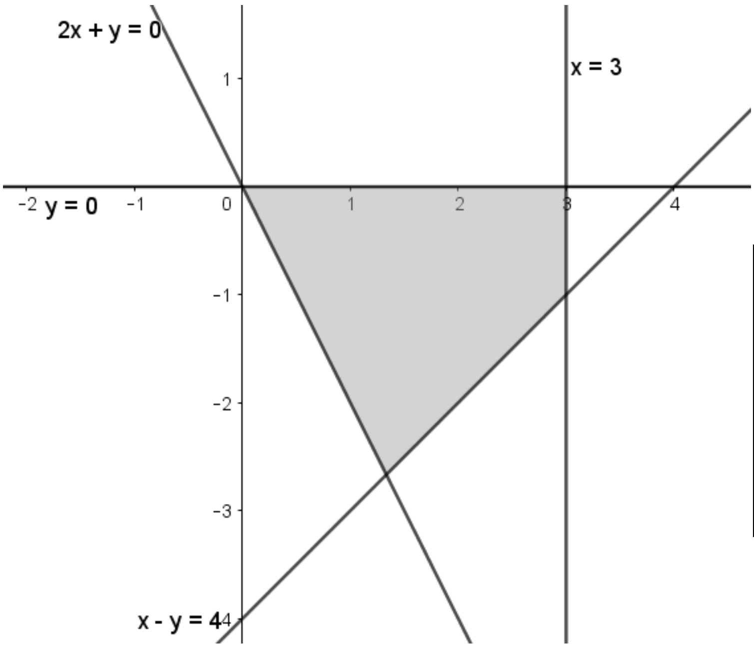
$x = 58 - 26 = 32$

Luego hay 32 gallinas y 26 cerdos.

- Problema 2: Dibuja la superficie que representa el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x - y \leq 4 \\ 2x + y \geq 0 \\ x \leq 3 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

Solución:



$x - y = 4$		$2x + y = 0$	
x	y	x	y
0	-4	0	0
4	0	-1	2

Problemas que constituyen la razón de ser:

- PRS1: Tu clase ha ganado un concurso y tú como delegado tienes que decidir qué hacer con el premio. Este premio es un vale de 120€ para comprar libros para la biblioteca de tu instituto, vas a poder comprar libros en castellano por

18€ y en inglés por 12€, además tu profesora te pone la condición de que los libros en castellano no pueden ser más que los libros en inglés, pero que tiene que haber, al menos, 2 en castellano. ¿Podrías comprar 6 libros en castellano y 1 en inglés? ¿Y 4 en castellano y 4 en inglés o 2 en castellano y 7 en inglés?

Solución:

- No puede haber 6 libros en castellano y 1 en inglés porque los libros en castellano no pueden ser más que los libros en inglés.
- Sí que pueden ser 4 en castellano y 4 en inglés porque son los mismo de cada tipo, los de castellano son más de 2 y además 4·18+4·12=120€.
- Sí que pueden ser 2 en castellano y 7 en inglés porque hay menos en castellano que en inglés, los de castellano son 2 y además 2·18+7·12=120€.

- <u>PRS2:</u> Las 5 clases de tu curso van a hacer una excursión, en total 145 alumnos y 5 profesores. Para el trayecto se pueden alquilar minibuses de 30 plazas y autobuses grandes de 50 plazas ¿se podrían coger 5 minibuses y ningún autobús grande? Si consideramos que el precio de los minibuses es de 250€ y el de los autobuses de 400€ y tenemos en cuenta que queremos gastar la menor cantidad de dinero ¿sería mejor esa opción o coger únicamente 3 autobuses grandes?

Solución:

- Se podrían coger 5 minibuses, porque 5·30=150plazas=150personas.
- Es mejor coger 3 autobuses grandes ya que 3·400=1200€<1250€=5·250 (3·50=150plazas=150personas).

- <u>PRS3:</u> En una bolsa quieres guardar canicas rojas y verdes, el problema es que si en la bolsa metes más de 100 gramos de canicas esta se rompe. Si tienes 12 canicas rojas que pesan 7 gramos cada una y 10 canicas verdes que pesan 4 gramos cada una. ¿Cuál es el número máximo de canicas que puedes meter? ¿cuántas son de cada tipo?

Solución: (realizar con canicas)

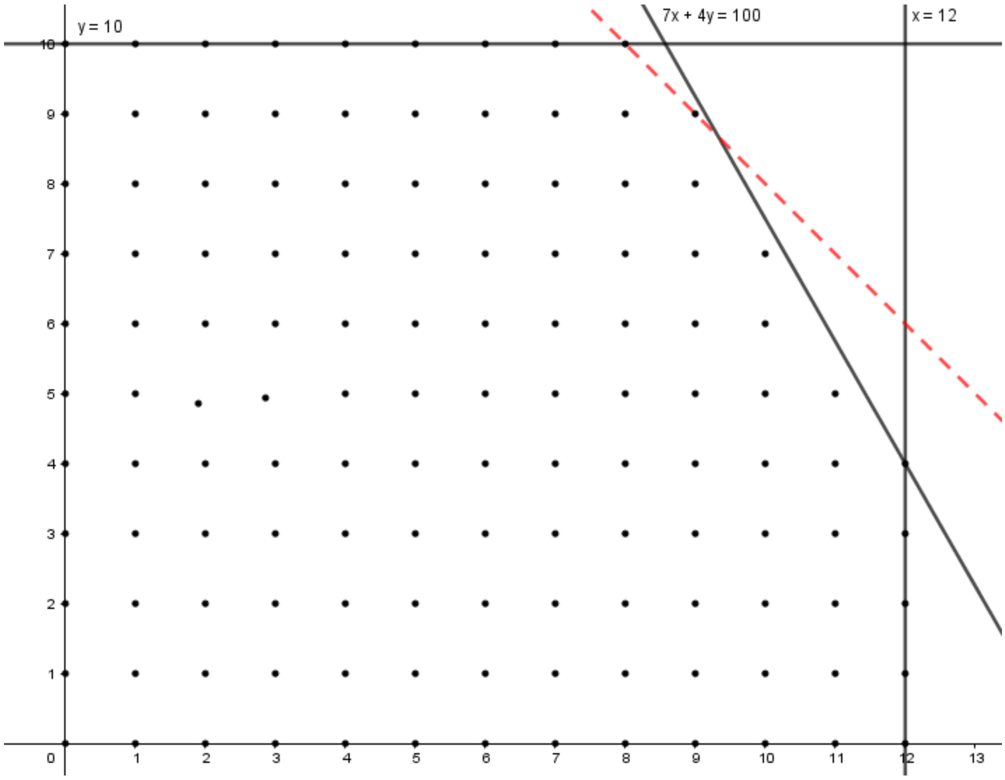
Nº canicas rojas	Nº canicas verdes	Peso total
12	10	12·7+10·4=124 gramos
11	10	11·7+10·4=117 gramos
10	10	10·7+10·4=110 gramos
9	10	9·7+10·4=103 gramos
8	10	8·7+10·4=96 gramos
9	9	9·7+9·4=99 gramos

El número máximo de canicas es 18, de las que pueden ser 8 rojas y 10 verdes o 9 de cada color.

Para cuando se trabaje con programación lineal entera:

$$\max \quad x + y$$

$$\begin{cases} 7x + 4y \leq 100 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 10 \end{cases}$$



- <u>PRS4:</u> Para tu cumpleaños quieres invitar a chucherías a tus 31 compañeros de clase y te han dado una propina de 10€. Quieres comprar regalices que valen 0,15€/unidad y caramelos que valen 0,10€/unidad, además quieres dar a cada compañero, al menos, 2 regalices y a tus 4 mejores amigos, al menos, también un caramelo. Si quiero comprar la mayor cantidad de chucherías ¿Cuál es la mejor opción que tengo, es decir, cuántos caramelos y regalices tendré que comprar para comprar la mayor cantidad de chucherías posibles?

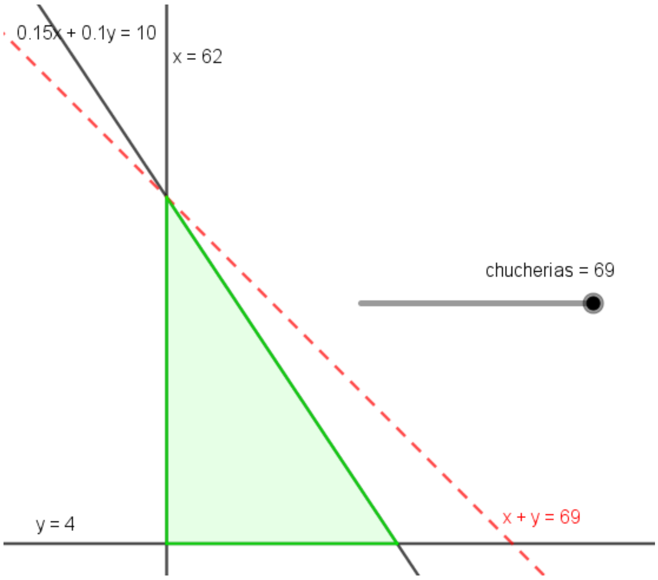
Solución:

Regalices	Caramelos	Precio total
62	4	62·0,15+4·0,10=9,70€
62	5	62·0,15+5·0,10=9,80€
62	6	62·0,15+6·0,10=9,00€
62	7	62·0,15+7·0,10=10€

El número máximo de chucherías es 69, de las que 62 son regalices y 7 son caramelos.

$$\max \quad x + y$$

$$\begin{cases} 0{,}15x + 0{,}10y \leq 10 \\ 62 \leq x \\ 4 \leq y \end{cases}$$



Problemas de cada campo de problemas:

- P1: (CP1.1 - problema del transporte) Desde los almacenes A y B, se distribuye todos los días fruta a tres mercados de una cuidad. El almacén A tiene una capacidad de 10 toneladas de fruta y el B de 15 toneladas de fruta, que se reparten en su totalidad. Los mercados 1 y 2 necesitan 8 toneladas de fruta diarias y el mercado 3 necesita 9 toneladas al día. El coste del transporte del Almacén A hasta los mercados 1, 2 y 3 es de 10€, 15€ y 20€ respectivamente, mientras que desde el mercado B es de 15€, 10€ y 10€ también respectivamente. ¿Cómo debe ser la distribución de fruta para que el coste sea mínimo? ¿Cuánto costará esa distribución?

Solución:

- Modelización del problema

Destino / Origen	Mercado1	Mercado2	Mercado3	Capacidad
Almacén A	x	y	10-x-y	10
Almacén B	8-x	8-y	-1+x+y	15
Necesidad	8	8	9	Total 25

Costes:

Destino / Origen	Mercado1	Mercado2	Mercado3
Almacén A	10	15	20
Almacén B	15	10	10

Por lo que el planteamiento del problema va a quedar así:

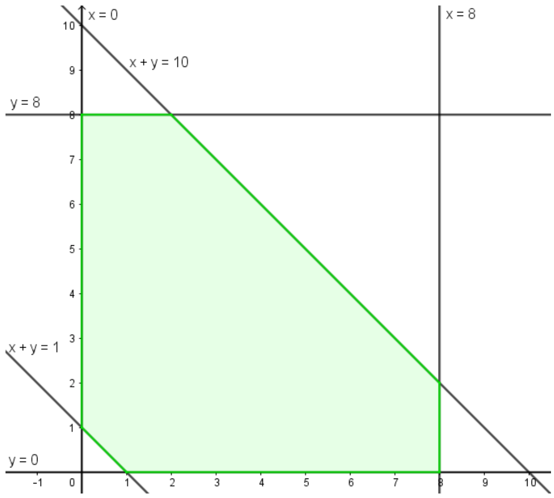
Min 10x+15y+20(10-x-y)+15(8-x)+10(8-y)+10(-1+x+y)=390-15x-5y

R: x≥0; y≥0, 10-x-y≥0→x+y≤10, 8-x≥0→x≤8, 8-y≥0→y≤8, -1+x+y≥0→x+y≥1

$$\min \ z = 390 - 15x - 5y$$

$$\begin{cases} 1 \leq x + y \leq 10 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 8 \end{cases}$$

- Dibujar la región factible (dibujar las rectas dándoles dos puntos a cada una):



x+y=1		x+y=10	
x	y	x	y
0	1	0	10
1	0	10	0

Región acotada

- Hallar los vértices de la región factible (resolver los siguientes sistemas):

$$\begin{cases} x = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 10 \\ y = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8 \\ x + y = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Estos sistemas son inmediatos y tienen de soluciones los puntos:

A(0,1), B(0,8), C(2,8), D(8,2), E(8,0) y F(1,0).

- Evaluar los vértices en la función objetivo: por el Teorema Fundamental de la Programación Lineal, el valor o valores óptimos se encuentran en los vértices de la región factible.

z(0,1)=385, z(0,8)=350, z(2,8)=320, z(8,2)=260, z(8,0)=270, z(1,0)=375.

- Discutir cual es la solución óptima:

Como el problema es de minimizar se elegirá el vértice con menor valor. En este caso es el vértice D(8,2), con un coste de 260€, por lo que la solución óptima es única:

Destino / Origen	Mercado1	Mercado2	Mercado3
Almacén A	8 T	2 T	0
Almacén B	0	6 T	9 T

- <u>P2:</u> (CP1.2 - problema de producción) Una fábrica produce lavadoras de dos tipos de modelos L1 y L2. El modelo L1 necesita 3 horas de montaje y 3 horas de acabado, mientras que el modelo L2 necesita las mismas horas de montaje que el modelo anterior pero el doble de acabado. Con todos los trabajadores de la empresa de la sección de montaje, se disponen de 120 horas diarias para esta labor, y con los de la sección de acabado se tienen 180 horas al día. El beneficio por cada lavadora L1 es de 200€ y por cada lavadora L2 400€. ¿Cuántas lavadoras de cada modelo debe fabricar la empresa diariamente para obtener mayor beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?

  Solución:

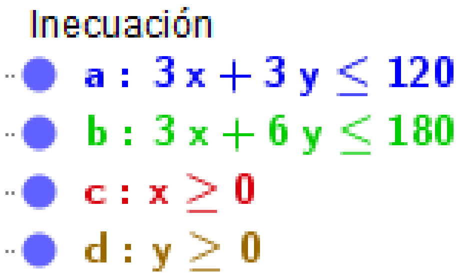
  - Modelización del problema

Productos / Restricciones	L_1	L_2	Recursos
Montaje	3	3	≤ 120
Acabado	3	6	≤ 180
Beneficios	200	400	máx
Variables (decisión)	x → modelo L1	y → modelo L2	

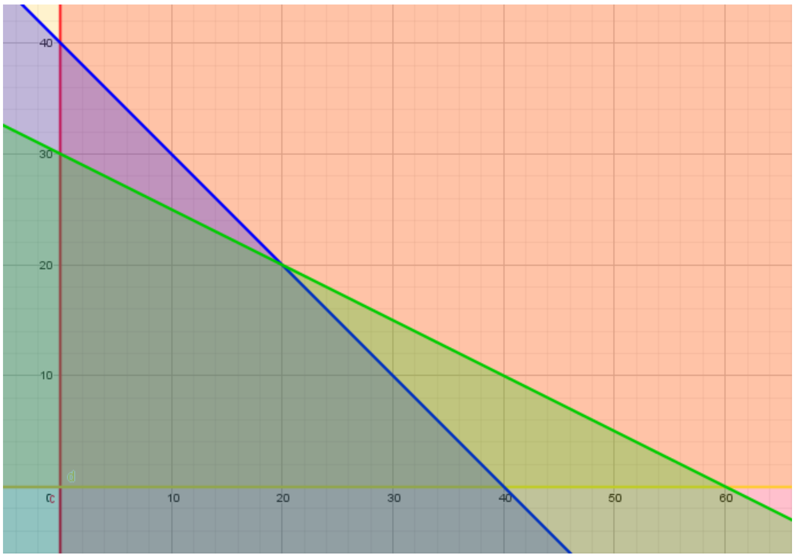
$$\max \quad z = 200x + 400y$$

$$\begin{cases} 3x + 3y \leq 120 \\ 3x + 6y \leq 180 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

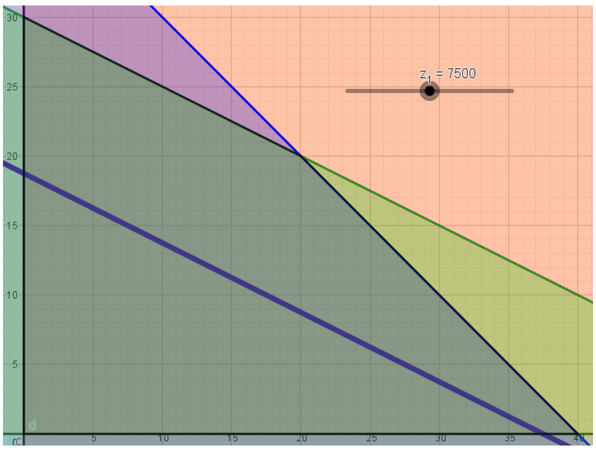
- Dibujar la región factible:



Región factible acotada



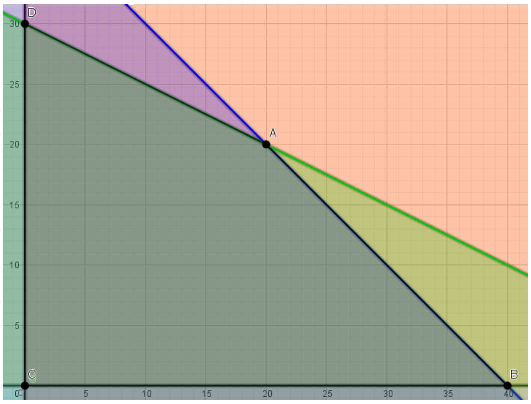
- Dibujar la función objetivo (método gráfico):



- Hallar los vértices de la región factible (método analítico):

Punto
- A = (20, 20)
- B = (40, 0)
- C = (0, 0)
- D = (0, 30)

Recta
- g: x + y = 40
- h: x + 2y = 60
- i: x = 0
- j: y = 0



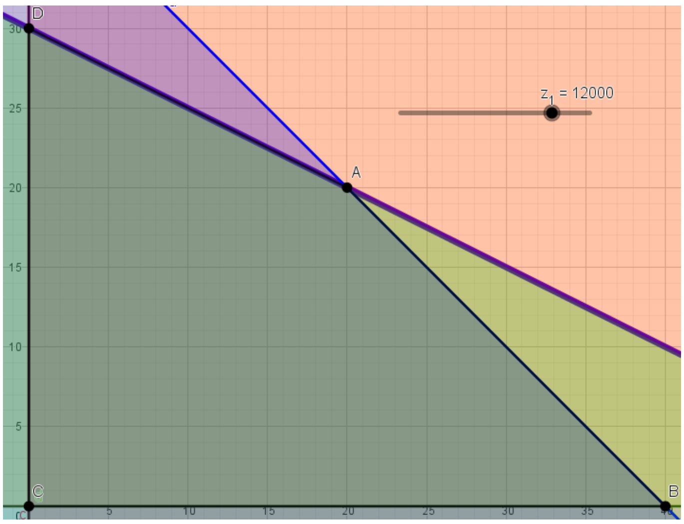
- Evaluar los vértices de la región factible en la función objetivo (método analítico).

Función multivariable
- $f(x, y) = 200x + 400y$

Número
- fA = 12000
- fB = 8000
- fC = 0
- fD = 12000

- Discutir cuál es la solución óptima.

La solución óptima es múltiple, ya que dos vértices tienen el mismo valor y este es el óptimo. Los puntos A(20,20) y D(0,30) y el segmento que los une son todas las soluciones óptimas, siempre y cuando estas sean números enteros (y por tanto tengan sentido), el beneficio óptimo será 12000€.



- P3: (CP2.1 - problema de producción) Para desinfectar una piscina se necesitan un mínimo de 24 litros de un producto A, y un mínimo de 25 litros de un producto B. Para elaborar el desinfectante existen dos tipos de líquidos, el líquido R y el líquido S, que cuestan 10 y 30 euros el litro de cada uno de ellos, respectivamente. La composición de R hay un 10% de A y un 50% de B, y el la de S hay un 40% de A y un 10% de B. ¿Cuántos litros de cada uno de los líquidos se necesitan para desinfectar la piscina con el mínimo coste posible?

Solución:

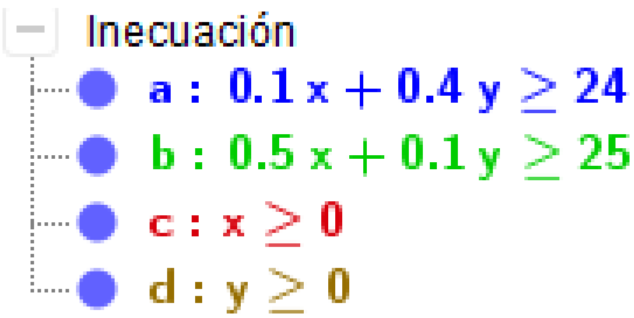
- Modelización del problema

Productos Restricciones	Liquido R	Liquido S	Recursos
Producto A	0,1	0,4	≥ 24
Producto B	0,5	0,1	≥ 25
Coste	10	30	min
Variables (decisión)	x →liquido R	y →liquido S	

$$\min \quad z = 10x + 30y$$

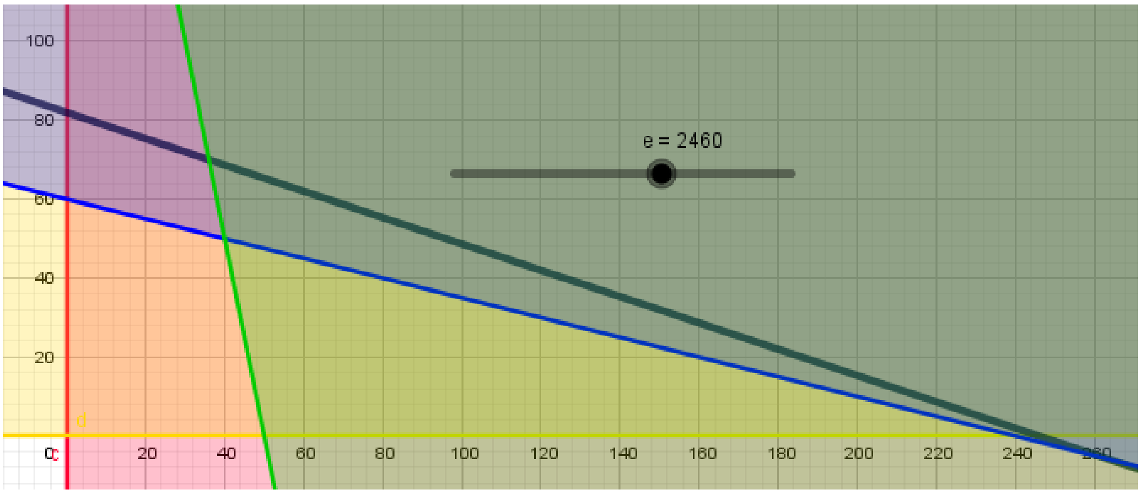
$$\begin{cases} 0{,}1x + 0{,}4y \geq 24 \\ 0{,}5x + 0{,}1y \geq 25 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- Dibujar la región factible:



Región factible no acotada

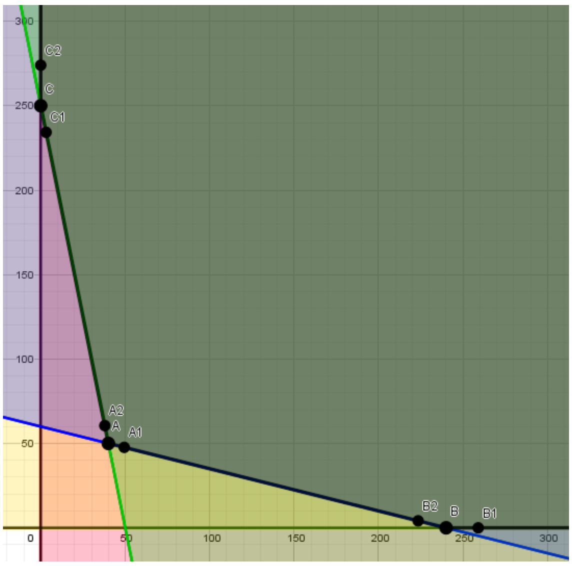
- Dibujar la función objetivo (método gráfico):



- Hallar los vértices de la región factible (método analítico): no acotado

Punto
- A = (40, 50)
- A1 = (49.41, 47.65)
- A2 = (37.9, 60.52)
- B = (240, 0)
- B1 = (258.99, 0)
- B2 = (223.44, 4.14)
- C = (0, 250)
- C1 = (3.14, 234.29)
- C2 = (0, 274.02)

Recta
- g: 0.1x + 0.4y = 24
- h: 0.5x + 0.1y = 25
- i: x = 0
- j: y = 0



- Evaluar los vértices de la región factible en la función objetivo (método analítico).

Evaluamos también puntos de la frontera que estén al lado de los vértices.

Función multivariable

$k(x,y) = 10x + 30y$

Número

kA = 1900

kA1 = 2194.48

kA2 = 1923.53

kB = 2400

kB1 = 2589.92

kB2 = 2358.59

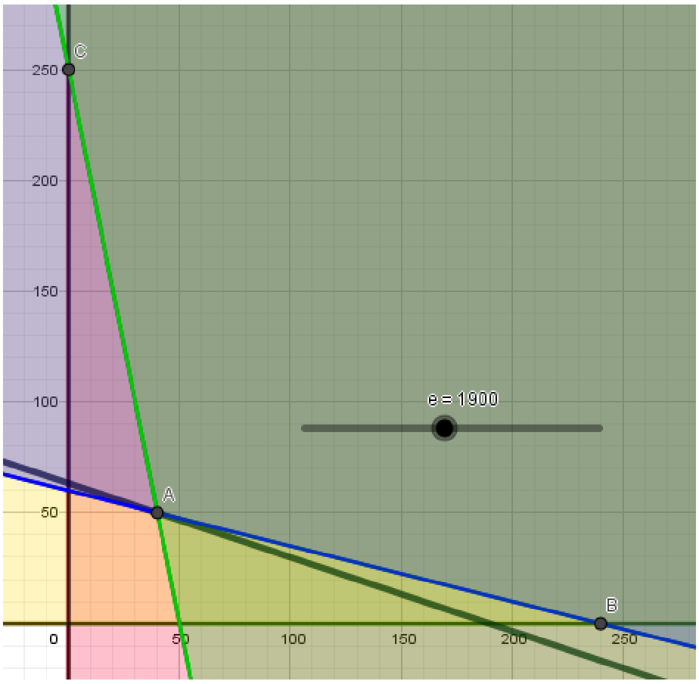
kC = 7500

kC1 = 7060.15

kC2 = 8220.73

- Discutir cuál es la solución óptima.

La solución óptima es única, y se encuentra en el vértice A(40,50), pues es el punto con menor valor al evaluarlo en la función objetivo. Por lo tanto la solución es 40 litros de líquido R y 50 litros de líquido S, con un coste de 1900€.



- P4: (CP2.2 - problema de la dieta) Un granjero está elaborando una dieta para sus animales mezclando piensos de tipo R y S, el precio de ambos piensos es de 3€/kg. Quiere que esta dieta tenga al menos 2 mg de vitamina A, 3 mg de vitamina B, 30 mg de vitamina C y 2 mg de vitamina D. El contenido vitamínico de un kg de pienso R es 1 mg de A, 1 mg de B, 20 mg de C y 2 mg de D, y el de un kg de pienso S es 1 mg de A, 3 mg de B, 7.5 mg de C y 0 mg de D. ¿Cómo deben mezclarse los piensos para que el coste sea mínimo? ¿Cuánto costará el kg de ese pienso?

Solución:

- Modelización del problema

Restricciones \ Productos	Pienso R	Pienso S	Recursos
Vitamina A	1	1	≥ 2
Vitamina B	1	3	≥ 3
Vitamina C	20	7,5	≥ 30
Vitamina D	2	0	≥ 2
Coste	3	3	Min
Variables (decisión)	x →pienso R	y →pienso S	

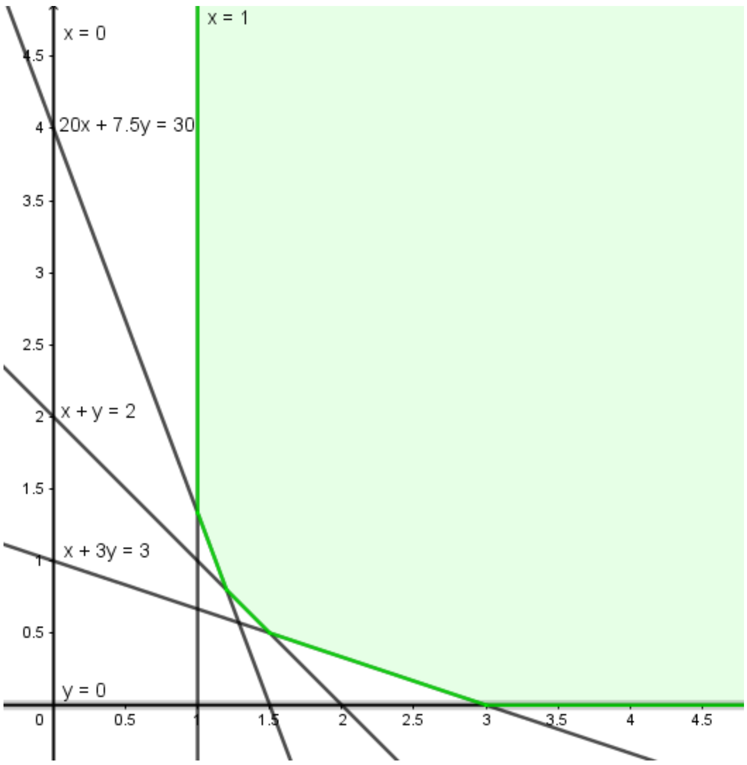
$$\min \quad z = 3x + 3y$$

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x + 3y \geq 3 \\ 20x + 7{,}5y \geq 30 \\ 2x \geq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- Dibujar la región factible:

x+y=2		x+3y=3		20x+7,5y=30	
x	y	x	y	x	y
0	2	0	1	0	4
2	0	3	0	1,5	0

Región factible no acotada



- Dibujar la función objetivo:

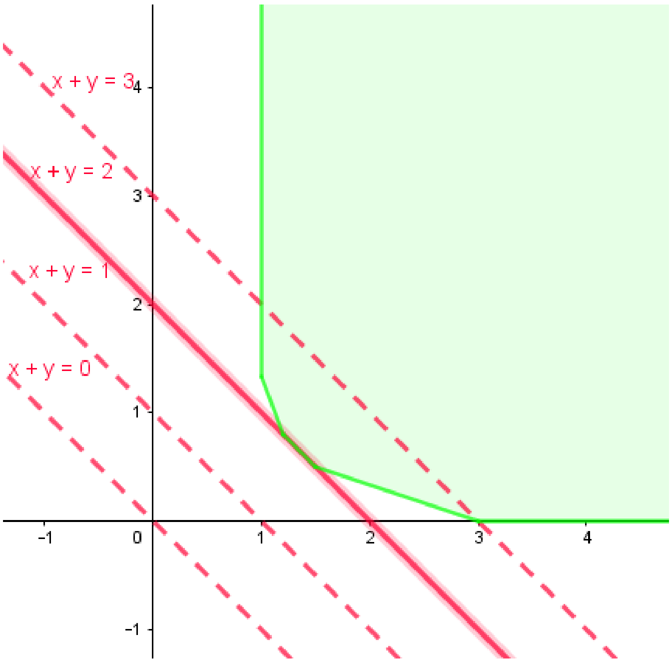
Es equivalente dibujar la función 3x+3y, a dibujar la función x+y. Estas rectas tienen por ecuación x+y=n, si despejamos la y para ver su pendiente se obtiene que:

$$y = -x + n$$

Luego la pendiente es negativa y cuanto más arriba se dibuje la recta mayor será su valor, por lo tanto el mínimo será la recta que toque la región lo más abajo posible.

Se comienza dibujando la recta x+y=0, y después se desplaza esta recta, trazando rectas paralelas de forma que toque la región factible en un solo punto o puntos (si todos ellos pertenecen a la frontera de la región factible), de forma que el valor de esta función sea el mínimo posible.

x+y=0		x+y=1		x+y=2		x+y=3	
x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	1	0	2	0	3
1	-1	1	0	2	0	3	0



- Discutir cuál es la solución óptima.

La solución óptima es múltiple, cuyo valor son los puntos de la recta x+y=2 que pertenecen a la frontera. Luego el pienso costará 2€/kg y Lla composición podrá ser cualquiera cuyos puntos estén en el segmento que unen los siguientes vértices (solución de los siguientes sistemas:

$$A\begin{cases} x+y=2 \\ x+3y=3 \end{cases} \qquad B\begin{cases} x+y=2 \\ 20x+7.5y=30 \end{cases}$$

x=2-y

x+3y=3 → 2-y+3y=3 → 2y=1 → y=0.5 → x=2-0.5=1.5.   A(1.5,0.5)

20x+7.5y=30 → 20(2-y)+7.5y=30 → 40-20y+7.5y=30 → 10=12.5y → y=0.8 →x=2-0.8=1.2.   B(1.2,0.8)

- P5: (CP2.3 - problema de producción) Un pastelero elabora dos tipos de pasteles de chocolate, uno de chocolate negro y otro de chocolate blanco. Por cada pastel de chocolate blanco obtiene un beneficio de 2€ y por cada uno de chocolate blanco obtiene un beneficio de 1,5€. Para cubrir los gastos de las pastelería necesita ganar al día un mínimo de 200€. ¿Cuántos pasteles de cada tipo debe vender para conseguir el máximo beneficio?

Solución:

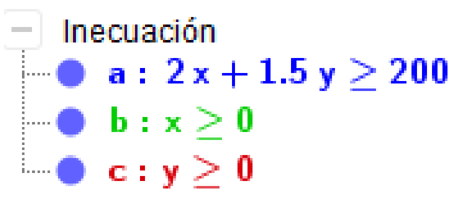
- Modelización del problema

Productos / Restricciones	Chocolate Negro	Chocolate Blanco	Recursos
Producto	2	1.5	≥ 200
Beneficio	2	1.5	máx
Variables (decisión)	x →liquido R	y →liquido S	

$$\min \quad z = 2x + 1.5y$$

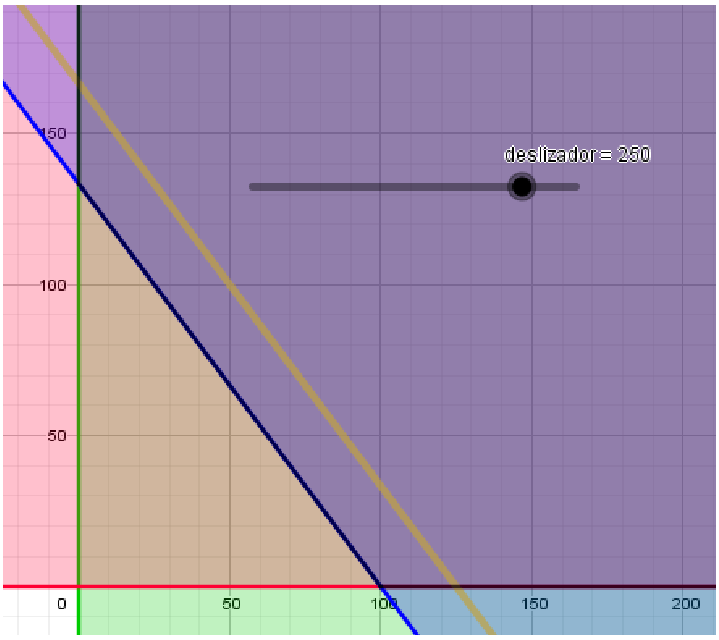
$$\begin{cases} 2x + 1.5y \geq 200 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- Dibujar la región factible:



Región factible no acotada

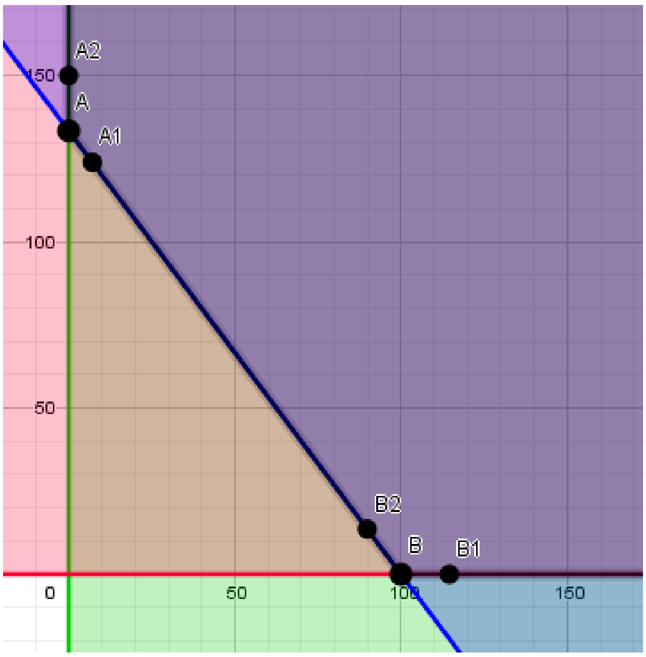
- Dibujar la función objetivo (método gráfico):



- Hallar los vértices de la región factible (método analítico): no acotado

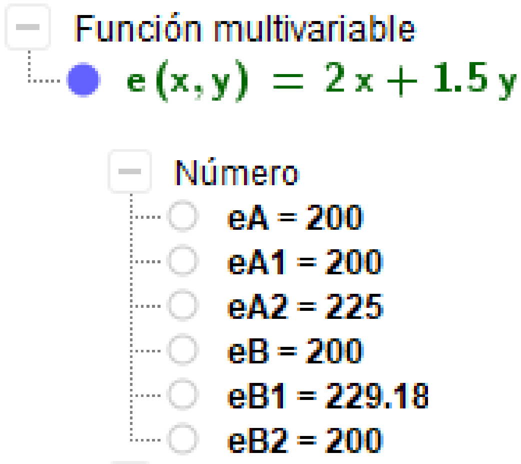
Punto
- A = (0, 133.33)
- A1 = (7.09, 123.88)
- A2 = (0, 150)
- B = (100, 0)
- B1 = (114.59, 0)
- B2 = (89.82, 13.57)

Recta
- f: 2x + 1.5y = 200
- g: x = 0
- h: y = 0



- Evaluar los vértices de la región factible en la función objetivo (método analítico).

Evaluamos también puntos de la frontera que estén al lado de los vértices.



- Discutir cuál es la solución óptima.

No hay solución óptima, ya que la función objetivo puede crecer infinitamente dentro de la región factible. Además esto se puede ver al evaluar los punto de la frontera cercanos a los vértices, en los que se obtiene mayor valor (y por lo tanto mejor) que en los propios vértices.