



TRABAJO DE FIN DE GRADO
GRADO EN FÍSICA

Tests de simetría Lorentz utilizando observaciones astrofísicas de alta energía

Autora:

Lucía Pereira Sáinz

Directores:

José Manuel Carmona
José Javier Relancio

Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza

Resumen

En la presente memoria se realiza una revisión bibliográfica sobre la búsqueda de posibles diferencias en tiempos de vuelo de fotones, así como la reproducción y extensión del análisis realizado en un trabajo reciente [1]. En una primera parte se introduce el contexto de gravedad cuántica y, específicamente, desviaciones de la Relatividad Especial, en el que se enmarca el fenómeno, describiendo el procedimiento y análisis experimental desarrollado por diferentes autores. Los resultados obtenidos por estos autores se recogen en detalle en una segunda parte, analizando con más detenimiento los estudios recientes. Por último, se incluye la reproducción de los resultados del artículo más reciente [1] mediante la utilización de un programa de autoría propia con ayuda de la herramienta computacional *Mathematica*, así como una extensión del análisis presentado en este trabajo.

Summary

In the present work we review the search for possible delays in the time of flight of photons. Furthermore, we reproduce and extend the results found in reference [1]. Firstly, we introduce the problem in the context of quantum gravity, specifically regarding deviations from Special Relativity (SR). We also describe the phenomenology and analysis procedures developed by different authors. The results reached in the distinct investigations are reviewed in the second half of the work, commenting in depth the most recent ones. Finally, we have reproduced and extended the results obtained in the latest article on the subject [1] by developing a program with the help of the computational tool *Mathematica*.

Listado de siglas

- AGN: Active Galactic Nuclei.
- BATSE: Burst And Transient Source Experiment.
- ECF: Energy Cost Function.
- EGRET: Energetic Gamma-Ray Experiment Telescope.
- FGTS: Fermi Gamma-ray Space Telescope.
- FLRW: Friedman-Lemaître-Robertson-Walker.
- GRB: Gamma Ray Burst.
- HESS: High Energy Stereoscopic System.
- HETE: High Energy Transient Explorer.
- KDE: Kernel Density Estimate.
- MAGIC: Major Atmospheric Gamma-ray Imaging Cherenkov telescope.
- MCCF: Modified Cross Correlation Function.
- OSSE: Oriented Scintillation Spectrometer Experiment.
- ML: Maximum Likelihood.
- PDF: Probability Density Function.
- PV: Pair View.
- RHESSI: Reuven Ramaty High Energy Solar Spectroscopic Imager.
- SM: Standard Model.
- SMM: Sharpness Maximization Method.
- SR: Special Relativity.
- WT: Wavelet Transform.

Índice

1. Introducción	1
2. Modificación del tiempo de vuelo de fotones	3
2.1. Obtención de la fórmula para Δt	4
2.2. Procedimiento de análisis	7
2.3. Métodos de análisis	8
3. Física no convencional en estudios de tiempos de vuelo	12
3.1. Estudios previos	12
3.2. Estudios recientes	14
3.2.1. Trabajos de Amelino-Camelia <i>et al.</i>	16
3.2.2. Trabajo de Xu y Ma	18
4. Análisis del trabajo de Xu y Ma (2018)	21
5. Conclusiones	23
Anexo	26
A. Código de programación en <i>Mathematica</i>	26

1. Introducción

Durante las últimas décadas la física moderna ha tratado de construir una teoría que unifique las cuatro fuerzas fundamentales. Actualmente, ha sido posible unificar tres de ellas, las fuerzas electromagnética, fuerte y débil, en el marco del Modelo Estándar de partículas (SM). Añadir la gravedad a este marco, requiere elaborar una teoría de gravedad cuántica.

Con el objetivo de comprender mejor el contexto en el que nos encontramos, vamos a tomar como punto de partida de las teorías de gravedad la Ley de Gravitación Universal de Newton (siglo XVII). Esta ley permite conocer la fuerza de atracción entre dos cuerpos (ecuación 1.1):

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.1)$$

donde $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ es la constante de gravitación universal.

Más adelante, aparece la teoría de la Relatividad Especial (SR), formulada por Einstein en 1905, cuyos dos postulados básicos son los siguientes:

- Los fotones viajan en el vacío con una velocidad constante: $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.
- El universo se comporta de la misma forma desde el punto de vista de cualquier observador inercial (principio de relatividad), lo que se conoce como simetría o invariancia Lorentz. Esto es así, ya que es posible relacionar los fenómenos detectados por distintos observadores a través de las transformaciones de Lorentz.

Einstein amplía su propia teoría y en 1915 surge la teoría de la Relatividad General, donde la gravedad se entiende como una deformación de un espacio-tiempo clásico, un ingrediente esencial en la descripción del universo. Más adelante, De Broglie propone la hipótesis de la dualidad onda-partícula (1924): $\lambda = h/p$, donde $h = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ es la constante de Planck, que proviene de la cuantificación de la energía de los fotones, $E = h\nu$.

A partir de la hipótesis de De Broglie se comenzaron a desarrollar las distintas teorías cuánticas, las cuales explican el comportamiento de la materia a pequeñas escalas y su interacción con otras partículas. Así, durante el siglo XX, se consiguen unificar tres de las interacciones básicas entre partículas bajo una teoría cuántica de campos relativista. Para incluir la gravedad y crear una teoría de gravedad cuántica (como la teoría de cuerdas, la teoría cuántica de bucles, etc.) actualmente se están considerando posibles consecuencias observables de dicha teoría. Entre estos se encuentra una violación de invariancia Lorentz (LIV), que es la que se estudia en la memoria.

Hasta donde sabemos, la simetría o invariancia Lorentz es una buena simetría aproximada a bajas energías. Sin embargo, esta podría no ser exacta, y violarse a altas energías, lo que implicaría la existencia de un sistema de referencia privilegiado (y la violación del segundo postulado de SR).

Por otra parte, hemos visto que en Relatividad Especial (SR) se considera un espacio-tiempo clásico, lo que ha llevado a diversos científicos a plantearse la posibilidad de la existencia de un “espacio-tiempo cuántico” en el marco de una teoría de gravedad cuántica. Este podría imaginarse como una espuma que sería visible únicamente para las partículas de altas energías, ya que para bajas energías no se observan efectos contradictorios con las actuales teorías.

Estamos diciendo, por tanto, que debemos buscar efectos de gravedad cuántica en partículas con altas energías. Se espera que la escala de estas energías sea del orden de la energía de Planck (E_{Pl}), lo que se traduciría para dimensiones espaciales en la longitud de Planck (L_{Pl}).

$$E_{\text{Pl}} = M_{\text{Pl}}c^2 = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = 1.22 \cdot 10^{19} \text{ GeV}, \quad (1.2)$$

$$\lambda_{\text{Pl}} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1.62 \cdot 10^{-35} \text{ m}. \quad (1.3)$$

Si se quiere observar experimentalmente algún efecto de gravedad cuántica a estas escalas, con los medios actuales sería imposible, ya que los aceleradores no son capaces de generar partículas con energías del orden de E_{Pl} . Por tanto, si en la Tierra no es posible crear estas partículas, se pasa a buscar los efectos de gravedad cuántica en las partículas provenientes del cosmos.

Las máximas energías observadas provienen de nucleones cósmicos ($E_{\text{obs}} \approx 10^{11} \text{ GeV}$), neutrinos ($E_{\text{obs}} \approx 10^6 \text{ GeV}$) y fotones cósmicos ($E_{\text{obs}} \approx 10^3 \text{ GeV}$). Podemos ver que estas energías no son tan altas como E_{Pl} , sin embargo, si las partículas provienen de un lugar muy lejano y (debido a una posible interacción con el espacio-tiempo cuántico) han perdido energía en su propagación, se podrían obtener efectos observables. Es decir, la violación de invariancia Lorentz a escalas pequeñas sufre una amplificación que sí que se puede detectar desde la Tierra.

Los efectos de gravedad cuántica mencionados incluirían la variación de la velocidad de las partículas en su propagación, lo cual resultaría en que partículas emitidas a la vez y con distintas energías llegarían a la Tierra en diferentes tiempos. En el caso concreto de los fotones, si su velocidad cambiara debido a una interacción con el espacio-tiempo cuántico, existiría una contradicción con el primer postulado de Einstein (SR). Además, fotones con distinta polarización podrían viajar a distinta velocidad, fenómeno conocido como birrefringencia del vacío.

Otros fenómenos de gravedad cuántica incluirían la variación de la cinemática de las partículas. Esto implicaría que reacciones o desintegraciones anteriormente prohibidas podrían estar permitidas, como, por ejemplo, la creación de un par electrón-positrón a partir de un único fotón ($\gamma \rightarrow e^- + e^+$) o la pérdida de energía por parte de un neutrino ($\nu_i \rightarrow \nu_i + e^- + e^+$).

Una vez introducido el contexto en el que nos encontramos, podemos tratar de comprender los estudios que plantean la posibilidad de observar una violación de invariancia Lorentz (LIV) a través de la detección de fotones de alta energía. Para ello, hemos reunido y comentado la información de distintos artículos científicos sobre el tema.

Desarrollaremos el estudio de uno de los fenómenos de gravedad cuántica, la variación en la propagación de las partículas (fotones) al interactuar con el espacio-tiempo cuántico, lo que implica una modificación de sus tiempos de vuelo. La explicación particular de este fenómeno, las fórmulas utilizadas para su estudio y los métodos de análisis aparecen en la sección 2.

En la sección 3 revisamos los trabajos realizados por distintos autores en los últimos 20 años, diferenciando estudios previos de estudios recientes, ya que tratan de hallar evidencias de efectos LIV para fotones enfocando el problema de distinta forma. Por último, hemos reproducido los resultados de uno de los estudios más recientes [1] mediante una simulación por ordenador utilizando el programa *Mathematica*, incluido en el anexo A.

2. Modificación del tiempo de vuelo de fotones

En la sección anterior, hemos introducido la idea de que una partícula pueda propagarse de forma distinta en un espacio-tiempo cuántico a como lo hacía en el clásico, debido a una violación de invariancia Lorentz (LIV). Clásicamente, la relación de dispersión que describe el movimiento de los fotones en el vacío sigue la forma de la ecuación 2.1. Este movimiento se caracteriza por una velocidad y un índice de refracción constantes, $c \approx 3 \cdot 10^8$ (m/s) y $n_r \approx 1$ respectivamente.

Al introducir la posible existencia de un efecto LIV, el vacío pasaría a actuar como un medio dispersivo ante el movimiento de los fotones, resultando en una relación de dispersión modificada. Esta se construye añadiendo una serie de Taylor a la relación de dispersión conocida, ya que las energías detectadas para los fotones se encuentran muy por debajo de la energía de Planck ($E \ll E_{\text{Pl}}$). Como no se conoce el número ni el orden n de los nuevos términos, una manera sencilla de afrontar el problema (y la que se sigue en los trabajos recopilados) es considerar que únicamente es relevante el término dominante, de orden $n = 1$ ó $n = 2$ (ver ecuación 2.2).

$$E^2 = |\vec{p}|^2 c^2, \quad (2.1)$$

$$E^2 \simeq |\vec{p}|^2 c^2 \left[1 - s_n \left(\frac{E}{E_{\text{LV},n}} \right)^n \right]. \quad (2.2)$$

De esta forma, la gravedad cuántica propone un movimiento de los fotones en el vacío caracterizado por un índice de refracción y una velocidad (de grupo) de los fotones en el medio dependientes de la energía, $n_r(E)$ y $v(E)$:

$$v(E) = \frac{\partial E}{\partial p} \simeq c \left[1 - s_n \frac{n+1}{2} \left(\frac{pc}{E_{\text{LV},n}} \right)^n \right]. \quad (2.3)$$

En las ecuaciones 2.2 y 2.3 podemos ver que aparece una constante $E_{\text{LV},n}$ que depende del orden n considerado. Esta caracteriza las desviaciones introducidas por los posibles efectos de gravedad cuántica en la relación de dispersión de Relatividad Especial, y es la que se busca en los distintos artículos (ver sección 3). Además, aparece un factor s_n que indica si los fotones de alta energía se mueven más rápido ($s_n = -1$) o más despacio ($s_n = +1$) que los fotones de baja energía.

Experimentalmente se podría comprobar la validez de la nueva relación de dispersión estudiando la modificación del tiempo de vuelo de fotones. Del razonamiento anterior se deduce que dos fotones de distintas energías emitidos a la vez se detectarían con una diferencia de tiempos Δt , ya que estos recorrerían el mismo espacio a diferente velocidad. La Relatividad Especial predice que no debería existir tal diferencia de tiempos, ya que la velocidad se consideraba constante para fotones con cualquier energía, de forma que estos se detectarían a la vez en la Tierra.

El fenómeno de diferencias en tiempos de vuelo es el que se desarrolla en la memoria, recopilando los trabajos de distintos autores que tratan de comprobar su existencia. En esta sección deducimos en primer lugar la fórmula que relaciona diferencias de tiempos de vuelo con energías de fotones. Posteriormente, comentamos las fuentes que nos permiten estudiar el fenómeno de diferencias de tiempos de vuelo y algunos de los métodos de análisis empleados en las distintas investigaciones.

2.1. Obtención de la fórmula para Δt

Con el objetivo de detectar una posible violación de invariancia Lorentz debemos disponer de magnitudes medibles que puedan dar cuenta de la modificación de tiempos de vuelo. En este caso, buscamos llegar a una ecuación que relacione directamente la energía de los fotones con las diferencias de tiempos de llegada.

Para hallar la relación mencionada, tendremos en cuenta que tanto el tiempo como la energía, por separado, se pueden escribir en función del *redshift*. Este *redshift* o corrimiento al rojo es una magnitud adimensional que indica el desplazamiento de las ondas electromagnéticas en el espectro al expandirse el universo: $1 + z = \lambda_{\text{obs}}/\lambda_{\text{em}} = \nu_{\text{em}}/\nu_{\text{obs}}$, donde el subíndice “em” hace referencia a la onda emitida y el “obs” a la observada. Esta magnitud z se utiliza para indicar la distancia a la que se encuentra una fuente (equivale a una longitud o a un tiempo).

En la propagación de partículas en el universo, se puede tomar como punto de partida la métrica FLRW (Friedman-Lemaître-Robertson-Walker), que define el invariante espacio-temporal como:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \cdot \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.4)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala del universo y r es la coordenada comóvil (*comoving*), la cual se define como una distancia constante, independientemente de la expansión del universo. Por otro lado, se tiene la distancia propia o distancia física R , la cual aumenta al expandirse el universo. La relación entre ambas para un universo plano como el nuestro ($\kappa = 0$) es $R(t, r) = a(t) \cdot r$.

Por otra parte, el *redshift* se puede relacionar con el factor de escala, y este con la constante de Hubble mediante las ecuaciones¹:

$$a(t) = \frac{a_0}{1 + z} \quad ; \quad H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2.5)$$

A partir de estas, se puede obtener la expresión diferencial que relaciona la coordenada temporal con la coordenada de *redshift*, de forma que una diferencia de tiempos positiva equivale a una diferencia de *redshift* negativa:

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} dt = -\frac{dz}{1 + z} \quad \Rightarrow \quad dt = -\frac{dz}{H(z)(1 + z)}. \quad (2.6)$$

Por otra parte, se puede obtener $H(z)$ aplicando la ecuación de Friedman:

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = H(z)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{\kappa}{a(t)^2} = H_0^2 \left[\frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho + \frac{\Lambda}{3H_0^2} - \frac{\kappa}{a_0^2 H_0^2} (1 + z)^2 \right], \quad (2.7)$$

que se puede reescribir en función de las constantes críticas Ω de materia (Ω_m), radiación (Ω_r), constante cosmológica (Ω_Λ) y curvatura (Ω_κ) del universo, definidas como:

$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{m0} \quad ; \quad \Omega_r = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{r0} \quad ; \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad ; \quad \Omega_\kappa = -\frac{\kappa}{a_0^2 H_0^2} (1 + z)^2. \quad (2.8)$$

¹El subíndice 0 indica el tiempo actual t_0 , $z(t_0) = 0$ y $H(t_0) = H_0$.

De este modo, para el tiempo actual ($H(z_0) = H_0$) la ecuación 2.7 queda:

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa. \quad (2.9)$$

Teniendo en cuenta la evolución de las densidades de materia y radiación en función del *redshift*, podemos reescribir la ecuación 2.7 para cualquier tiempo en función de las Ω :

$$\rho = \rho_m + \rho_r = \rho_{0m}(z+1)^3 + \rho_{0r}(z+1)^4, \quad (2.10)$$

$$H(z)^2 = H_0^2 \left[\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa(1+z)^2 \right] = H_0^2 \cdot h(z)^2. \quad (2.11)$$

El valor de las constantes Ω se puede conocer experimentalmente: $\Omega_m = 0.308$, $\Omega_r = 5.38 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_\kappa = -0.005$, $\Omega_\Lambda = 0.692$ [4]. Para los *redshifts* que se incluyen en los artículos ($z \sim 0 - 4$), se considera que la densidad de masa domina sobre la de radiación, y la contribución de la curvatura es muy inferior a la de masa o constante cosmológica. Por tanto, sólo serán comparables las densidades de masa y de constante cosmológica, y se podrán despreciar las otras dos. La expresión simplificada de $H(z)$ es la siguiente:

$$H(z)^2 \approx H_0^2 \left[\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda \right] \approx H_0^2 \cdot h(z)^2. \quad (2.12)$$

Por otra parte, sabemos que en la física convencional un fotón se propaga con velocidad constante $v = dR/dt = c$. Al considerar válida la relación de dispersión modificada (2.2), se encuentra también un término adicional en la velocidad, orden $n = 1$ ó 2 (ver ecuaciones 2.3, 2.13):

$$v(E) = \frac{dR}{dt} \simeq c \left[1 - \frac{n+1}{2} \left(\frac{E}{E_{LV,n}} \right)^n \right], \quad (2.13)$$

donde hemos supuesto $s_n = +1$: los fotones de altas energías son más lentos que los de bajas energías.

Para continuar el razonamiento, nos interesa utilizar la coordenada comóvil r , la cual se puede obtener a partir de su relación con la distancia física R :

$$R(t) = a(t)r \quad \rightarrow \quad dR = a(t) dr \quad \rightarrow \quad dr = \frac{1}{a(t)} dR = \frac{v(t)}{a(t)} dt. \quad (2.14)$$

La distancia comóvil desde un tiempo de emisión t_e hasta un tiempo de detección t_d es:

$$r(t_e, t_d) = \int_{t_e}^{t_d} \frac{v(t)}{a(t)} dt. \quad (2.15)$$

Para resolver la integral se realiza un cambio de variable de t a z (ecuación 2.6), ya que la dependencia de z con E es conocida: $E(z) = E_0(1+z)$. A cada diferencial de tiempo dt le corresponde una variación en *redshift* dz . El tiempo de emisión t_e tiene asociado el *redshift* de la fuente, z_e , y al tiempo de detección t_d le corresponderá el *redshift* del detector, z_d .

$$r(z_e, z_d) = \int_{z(t_e)}^{z(t_d)} \frac{v(z)}{a(t)} dt = - \int_{z(t_e)}^{z(t_d)} \frac{v(z)(1+z)}{a_0} \cdot \frac{dz}{H(z)(1+z)} = \int_{z_d}^{z_e} \frac{v(z)}{H(z)a_0} dz. \quad (2.16)$$

Sustituyendo la expresión de la velocidad, queda:

$$r(z_e, z_d) = \int_{z_d}^{z_e} c \left(1 - \frac{n+1}{2} \cdot \frac{E_0^n (1+z)^n}{E_{LV,n}^n} \right) \frac{dz}{H(z)a_0}. \quad (2.17)$$

Lo que se ha visto hasta ahora se puede aplicar a los tiempos de llegada de dos fotones con energías detectadas distintas: $E_h \equiv E_{0h}$ y $E_l \equiv E_{0l}$ para alta y baja energía respectivamente. Al proponer la ecuación de velocidad (2.13), habíamos supuesto que llegará antes al detector el fotón de menor energía (es más rápido). A este fotón le asociamos un tiempo de detección t_d , lo que implica que el fotón de mayor energía se detecta en $t_d + \Delta t$.

En términos de *redshift*, se detecta el fotón de menor energía en z_d , y el de mayor energía en $z_d - \Delta z$. Dicho de forma contraria, el de alta energía se detecta en z_d y el de baja en $z_d + \Delta z$. De esta forma, y llamando $b_n = (n+1)/2$, las coordenadas comóviles de cada fotón quedan:

$$r_l(z_e, z_{det}) = \int_{z_d+\Delta z}^{z_e} c \left(1 - b_n \cdot \frac{E_l^n (1+z)^n}{E_{LV,n}^n} \right) \frac{dz}{H(z)a_0}, \quad (2.18)$$

$$r_h(z_e, z_{det}) = \int_{z_d+\Delta z}^{z_e} c \left(1 - b_n \frac{E_h^n (1+z)^n}{E_{LV,n}^n} \right) \frac{dz}{H(z)a_0} + \int_{z_d}^{z_d+\Delta z} c \left(1 - b_n \frac{E_h^n (1+z)^n}{E_{LV,n}^n} \right) \frac{dz}{H(z)a_0}. \quad (2.19)$$

Como la distancia comóvil no varía con la expansión del universo, será la misma para los dos fotones (lo que varía es R): $r_l = r_h$, $R_l \neq R_h$. Igualando las ecuaciones 2.18 y 2.19 se tiene:

$$\int_{z_d+\Delta z}^{z_e} \frac{(E_h^n - E_l^n)(1+z)^n}{E_{LV,n}^n} \cdot \frac{b_n c \cdot dz}{H(z)a_0} = \int_{z_d}^{z_d+\Delta z} \frac{c dz}{H(z)a_0} - \int_{z_d}^{z_d+\Delta z} \frac{E_h^n (1+z)^n}{E_{LV,n}^n} \cdot \frac{b_n c \cdot dz}{H(z)a_0}. \quad (2.20)$$

A continuación, consideramos que el *redshift* de detección del fotón de alta energía es $z_d = 0$, de forma que para fotones detectados en tiempos o *redshifts* muy próximos la constante de Hubble varía muy poco y se puede considerar que no depende de z en las integrales del segundo miembro de 2.20. Además, la diferencia de tiempos o *redshifts* de detección se puede considerar muy pequeña (aunque medible), $\Delta z \ll 1$, y se obtiene:

$$\frac{c}{H_0 a_0} \Delta z \left(1 - \frac{b_n \cdot E_h^n}{E_{LV,n}^n} \right) = \frac{c}{H_0 a_0} \int_0^{z_e} \frac{(E_h^n - E_l^n)(1+z)^n}{E_{LV,n}^n} \cdot \frac{b_n \cdot dz}{h(z)}. \quad (2.21)$$

Como se ha mencionado, la escala $E_{LV,n}$ puede ser considerable, del orden de la energía de Planck, por lo que el cociente $E_h/E_{LV,n}$ será muy pequeño ($E_h \ll E_{LV,n}$):²

$$\Delta z = \left(1 - \frac{b_n \cdot E_h^n}{E_{LV,n}^n} \right)^{-1} \int_0^{z_e} \frac{(E_h^n - E_l^n)(1+z)^n}{E_{LV,n}^n} \cdot \frac{b_n \cdot dz}{h(z)}, \quad (2.22)$$

$$\Delta z \approx \left(1 + \frac{b_n \cdot E_h^n}{E_{LV,n}^n} \right) \int_0^{z_e} \frac{(E_h^n - E_l^n)(1+z)^n}{E_{LV,n}^n} \cdot \frac{b_n \cdot dz}{h(z)}. \quad (2.23)$$

²Esto permite que se pueda realizar el desarrollo de Taylor de $(1+x)^n \approx 1+nx$ para $x = -b_n \cdot E_h/E_{LV,n}$.

Por último, en la ecuación 2.23 vemos que hay dos sumandos que nos proporcionarían la diferencia de *redshift* para la detección de dos fotones. Podemos deducir, por la misma razón que antes ($E_h/E_{LV,n} \ll 1$) que el segundo sumando va a ser despreciable frente al primero:

$$\Delta z = \int_0^{z_e} \frac{(E_h^n - E_l^n)(1+z)^n}{E_{LV,n}^n} \cdot \frac{b_n \cdot dz}{h(z)}. \quad (2.24)$$

De esta forma, la diferencia de tiempos entre el fotón de alta energía y el de baja energía es:

$$\Delta t_n = \frac{\Delta z}{H_0} = \frac{n+1}{2H_0} \int_0^{z_e} \frac{(E_h^n - E_l^n)(1+z)^n}{E_{LV,n}^n} \frac{dz}{h(z)}. \quad (2.25)$$

En los artículos estudiados se utilizan correcciones a primer orden y segundo orden. Luego en esos casos la diferencia de tiempos queda:

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta E}{E_{LV,1}} \int_0^{z_e} \frac{(1+z) dz}{H(z)} \quad ; \quad \Delta t_2 = \frac{3}{2H_0} \frac{(E_h^2 - E_l^2)}{E_{LV,2}^2} \int_0^{z_e} \frac{(1+z)^2 dz}{h(z)}. \quad (2.26)$$

2.2. Procedimiento de análisis

Una vez establecido el fenómeno que se quiere estudiar, y las magnitudes con las que se trabaja (energía, tiempo y *redshift*), debemos conocer las fuentes astrofísicas que podrían proporcionar los mencionados efectos de gravedad cuántica. Las principales fuentes de fotones energéticos en el universo son los *Gamma Ray Bursts* (GRBs), *Active Galactic Nuclei* (AGNs) y púlsares.

- GRBs o brotes de rayos gamma: son las fuentes más luminosas de rayos- γ del universo y pueden tener duraciones diversas. Se producen cuando una estrella masiva o una estrella binaria colapsan, tras lo cual lo más probable es que aparezca un agujero negro. Se han detectado GRBs con *redshifts* de hasta $z \approx 8$, lo que correspondería a fotones emitidos hace $13.2 \cdot 10^9$ años, próximos al origen del universo.
- AGNs o núcleos de galaxias activas: se genera energía desde el centro de una galaxia, donde se encuentra un agujero negro. Entre estas se encuentran los cuásares, blázares y galaxias Seyfert. Los AGN medidos suelen tener *redshifts* entre 0 y 5 (emisión hace $12.7 \cdot 10^9$ años).
- Púlsares: se trata de estrellas de neutrones que emiten radiación electromagnética en una dirección muy definida. Además, estas estrellas rotan, de forma que detectamos su radiación periódicamente desde la Tierra. Se caracterizan por *redshifts* cercanos a 1 (emisión hace aproximadamente $8 \cdot 10^9$ años).

Las fuentes más utilizadas para modificación de tiempos de vuelo son los GRBs. Esto es así porque los efectos LIV tienen lugar a pequeñas escalas, de forma que cuanto más lejana se encuentre una fuente, mayor será la diferencia de tiempos detectada (se amplifica más el efecto). Sin embargo, la distancia también puede influir negativamente: se detectará un flujo menor cuanto mayor distancia nos separe de la fuente. Por esta razón, se suelen utilizar *redshifts* bajos para los cálculos, $z \sim 0 - 4$ (por ejemplo, en [1]), para los que se dispondrá de un mayor número de datos.

Los fotones provenientes de GRBs son detectados por satélites como Fermi (FGST), construido en 2008 con el objetivo de observar fuentes energéticas, principalmente GRBs y púlsares. Su rango de energías detectadas incluye desde 8 keV hasta 300 GeV. Otros satélites utilizados para este mismo fin son Swift, BATSE o HETE-2. Por otro lado, también existen telescopios terrestres (como MAGIC) que detectan radiación, principalmente proveniente de AGNs.

Los datos que nos proporcionan los telescopios y otros detectores (observatorios) son las llamadas curvas de luz. Estas recogen el número de fotones detectados (flujo) en una ventana de tiempos y para distintos valores de energía (ver figura 1). Analizando los datos por medio de diversas técnicas matemáticas se ha tratado de comprobar la aparición de efectos LIV (sección 2.3).

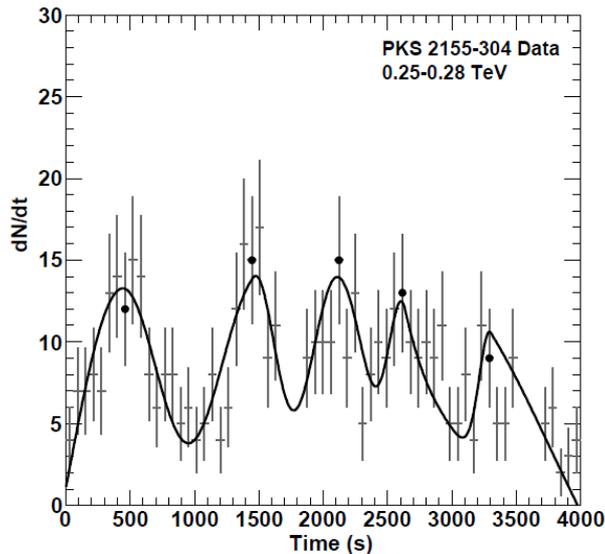


Figura 1: Curva de luz detectada para el AGN PKS 2155-304 [8].

2.3. Métodos de análisis

En la introducción mencionábamos que las referencias consultadas enfocan el problema de la modificación de tiempos de vuelos de fotones desde distintas perspectivas. Asimismo, se emplean métodos de análisis diferentes, incluso en aquellos estudios pertenecientes a la misma rama, frecuentemente para comparar resultados.

En algunos de los primeros estudios ([9, 10]) se pueden encontrar métodos de análisis sencillos. Los fotones detectados en distintas bandas de energías, permiten construir las curvas de luz. Estudiando su histograma y ajustando a una gaussiana el pico más alto de cada banda se obtiene el tiempo asociado a ese pico. Restando los tiempos de detección de los picos para distintas bandas, mediante la ecuación 2.27 se puede obtener la escala buscada.

$$\frac{\partial t}{\partial E} \simeq \frac{1}{H_0 E_{LV,1}} \int_0^z \frac{dz}{h(z)}. \quad (2.27)$$

Cabe mencionar que la fórmula anterior aparece en varias referencias, [10-12]. Esta es incorrecta, ya que se deduce a igualando distancias físicas R en lugar de distancias comóviles r y, por tanto, carece de un factor $1+z$ que nosotros sí que hemos incluido en el apartado anterior (2.26). Más adelante, Ellis *et al.* lo corrigen para los resultados de [13].

En otros artículos como [14] utilizan para el análisis una función de coste energético (*Energy Cost Function*, **ECF**). Se busca obtener un perfil de detección modificado (sin LIV) a partir de la curva de luz para cada banda de energía. En cada una de ellas existirá un máximo muy intenso. El método consiste en eliminar el retraso causado por LIV sumando o restando $\tau_1 E$ (caso lineal) o $\tau_2 E^2$ (caso cuadrático) a todos los tiempos de observación. Los tiempos del perfil modificado tendrían la forma $t'_{\text{obs}} = t_{\text{obs}} \pm \tau_n E^n$, donde τ_n es un parámetro del modelo y se corresponde con un valor de $E_{\text{LV},n}$ para $n = 1$ ó $n = 2$ (ver ecuación 2.28).

$$\tau_n = \frac{n+1}{H_0 E_{\text{LV},n}^n} \int_0^z \frac{(1+z)^n dz}{h(z)} \Rightarrow \Delta t_n = \tau_n (E_h^n - E_l^n). \quad (2.28)$$

A continuación, para cada valor de τ_n , se suman las energías del perfil modificado. Representando las energías suma frente a τ_n se contruye la función de coste energético (figura 2) y el máximo de ésta se corresponde con el τ_n que mejor recupera la señal de salida. Esto proporciona un valor que acota inferiormente $E_{\text{LV},n}$, ya que en [14] no observan efectos apreciables de Δt_n .

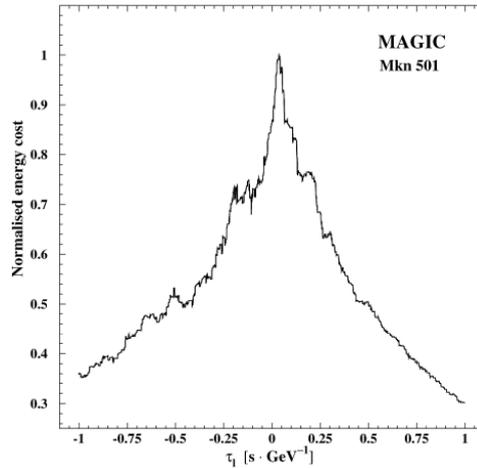


Figura 2: Método ECF aplicado al GRB Mkn501 [14].

El método de *Pair View* (**PV**) [5, 15] se basa en el cálculo de diferencias de energías y tiempos de detección entre los distintos pares de fotones detectados. Se define para ello el retraso espectral (*spectral lag*) para cada pareja de fotones, teniendo en cuenta que $t_i > t_j$:

$$l_{i,j} \equiv \frac{t_i - t_j}{E_i^n - E_j^n}. \quad (2.29)$$

Obteniendo la distribución de los $l_{i,j}$, se espera encontrar un pico para un determinado valor de diferencia de tiempos detectados, asociada a fotones emitidos al mismo tiempo dispersados por efectos LIV. Alrededor de este pico se agruparán los demás valores de $l_{i,j}$, correspondientes a fotones que no son emitidos a la vez, y se verán como ruido. La distribución de los $l_{i,j}$ se puede estudiar en forma de histograma o utilizando otros métodos (como el *Kernel Density Estimate*, KDE) que permiten estimar el valor del máximo sin utilizar un histograma (ver figura 3).

Por otra parte, el método de *Dispersion Cancellation* (**DisCan**) [6] consiste en hallar el valor de $E_{\text{LV},n}$ por medio de un algoritmo que prueba distintos valores de los parámetros que plantea hasta dar con el correcto.

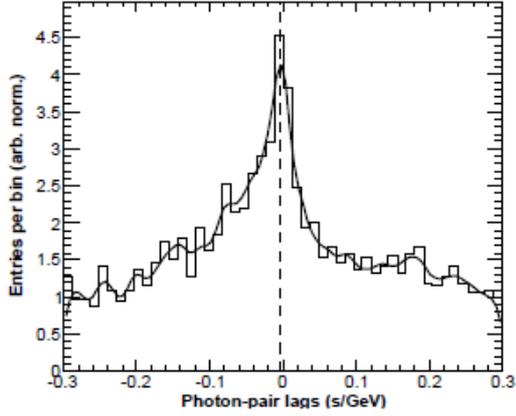


Figura 3: Método Pair View, un GRB [5].

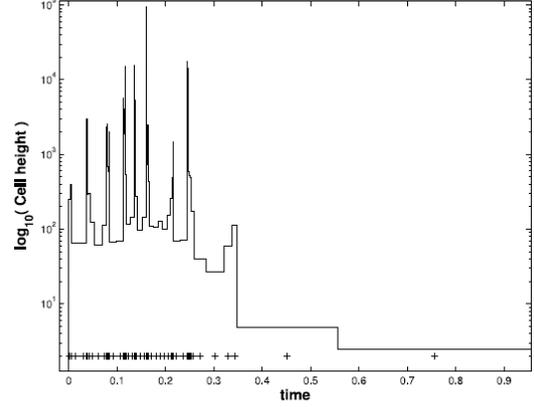


Figura 4: Método DisCan, un GRB [6].

Se debe haber establecido previamente un modelo para los tiempos de llegada, $t'_i = f(t_i^{\text{obs}}, E_i^{\text{obs}}, \theta)$, donde t'_i sería el tiempo detectado si no existiera LIV para un fotón i y θ hace referencia a los distintos parámetros del modelo. Por ejemplo, se propone $t'_i = t_{\text{obs}} \pm \tau_n E^n$, donde aparece un único parámetro τ_n (planteamiento equivalente a ECF).

A continuación, entra en juego un algoritmo, que proporciona un nuevo perfil de intensidad para cada τ_n . Este perfil se construye definiendo la intensidad x_j como el cociente entre el número de fotones que se escojan para una celda j y la longitud de esa celda (figura 4).

La longitud mencionada se calcula como el valor medio que separa los fotones de la celda de sus vecinos más próximos en las dos direcciones del eje temporal. La longitud de los bloques no es aleatoria, por lo que este método no proporciona pérdida de información (al contrario que al utilizar histogramas). Para cuantificar la distribución de intensidad observada, se utiliza una función de información, en este caso la de Shannon.

$$I = \sum_n p_n \log(p_n), \quad (2.30)$$

siendo p_n la distribución de probabilidad definida como $p_n = x_n / \sum_n x_n$.

Hallando el parámetro τ_n para el que se maximiza I y deshaciendo el proceso se encontrará la cota a la invariancia Lorentz buscada, la cual está relacionada con este parámetro mediante la ecuación 2.28. Este método resulta bastante útil cuando se dispone de un número limitado de datos y se busca averiguar si hay alguna correlación entre ellos. Además, aunque tenga la misma base que el de ECF, este es más amplio y completo.

Otro método similar al de DisCan es el método **SMM** (*Sharpness Maximization Method*). Este se basa nuevamente en eliminar la dispersión de los datos, maximizando una función coste $\mathcal{S}(\tau_n)$ que proporciona gráficas más “picudas” (ver figura 5):

$$\mathcal{S}(\tau_n) = \sum_{i=1}^{N-\rho} \log\left(\frac{\rho}{t'_{i+\rho} - t'_i}\right), \quad (2.31)$$

donde τ_n es el parámetro del método y t'_i es $t'_i = t_{\text{obs}} \pm \tau_n E^n$. En este caso se añade un parámetro ρ al método, el cual influye en que el pico de máximo se marque más o menos en la gráfica (ver figura 6). Para ρ bajos, no superiores a 3, la función $\mathcal{S}(\tau_n)$ puede fluctuar mucho.

Por otra parte, para valores de ρ altos, el máximo de la función $S(\tau_n)$ se vuelve más suave, perdiendo también precisión en la estimación de τ_n . La forma de escoger ρ difiere dependiendo de los datos (en [5] escogen $\rho = 50$, mientras que en [1] se toma $\rho = 5$).

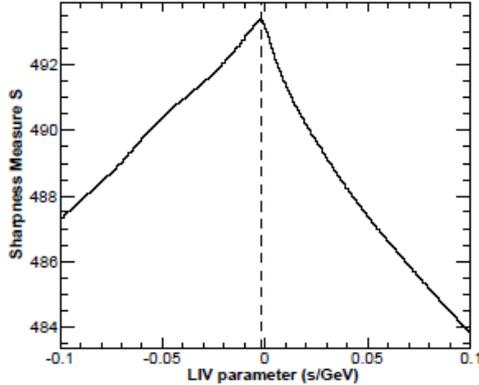


Figura 5: Método SMM con $n = 1$ y $\rho = 50$ [5].

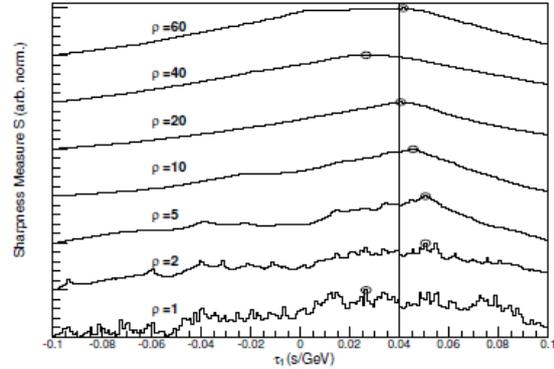


Figura 6: Método SMM para distintos valores de ρ [5].

Por último, el método de *Maximum Likelihood* (ML) [7] también trata de cuantificar la correlación existente entre las energías y los tiempos de llegada de fotones. Este trabaja bien aunque se tengan pocos fotones o emisión de GRB muy compleja (fotones con energías muy diferentes). Se propone una función *likelihood*, que tiene en cuenta la probabilidad de que un fotón i se detecte con energía E_i en un tiempo t_i .

Para construir la función *likelihood* (L), se deben realizar una serie de supuestos o hipótesis previas sobre la emisión, propagación y detección de los fotones. En primer lugar, se supone que los fotones se emiten con una distribución temporal de intensidades $F_s(t_s)$ y con un espectro de energías $\Gamma(E_s)$, donde t_s y E_s hacen referencia al tiempo y la energía de los fotones en la fuente.

En lo referente a la propagación, si existen efectos de gravedad cuántica aparecerá un retraso, que se puede indicar como $D(E_s, E_{LV,n}^n, z)$. El retraso depende de la energía de los fotones, la escala $E_{LV,n}$ para orden n y el *redshift*. Se podría considerar $D = -\tau_1 E$ para primer orden o $D = -\tau_2 E^2$ para segundo orden, donde τ_1 y τ_2 son parámetros del modelo.

En la detección, los fotones se caracterizan por energías E y tiempos $t = t_s + D(E_s, E_{LV,n}^n, z)$. La resolución con la que se toman medidas de energías es limitada, y se puede cuantificar en la función $G(E - E_s, \sigma_E(E_s))$. Tras los supuestos iniciales del método, los cuales pueden depender de un modelo a otro, se construye la función de densidad de probabilidad (PDF):

$$\frac{dP}{dE dt} = N \int_0^\infty F_s(t_s) \Gamma(E_s) G(E - E_s, \sigma_E(E_s)) C(E_s, t) dE_s, \quad (2.32)$$

donde P es la probabilidad de detectar un fotón con energía E en un tiempo t , $C(E_s, t)$ cuantifica los cambios en el área efectiva del detector y N es la constante de normalización. Conociendo la distribución de probabilidad para cada fotón, la función *likelihood* L se construye teniendo en cuenta las PDF de todos los fotones detectados (n_γ fotones):

$$L = \prod_{i=1}^{n_\gamma} \frac{dP}{dE_i dt_i} \quad (2.33)$$

La función L depende de varios parámetros, como $E_{LV,n}$, que se tratan de obtener ajustando el modelo lo máximo posible a los datos. En la práctica, se utiliza un algoritmo que va probando valores de los parámetros y minimiza la función $L' = -2 \log(L)$ para los óptimos (figura 7).

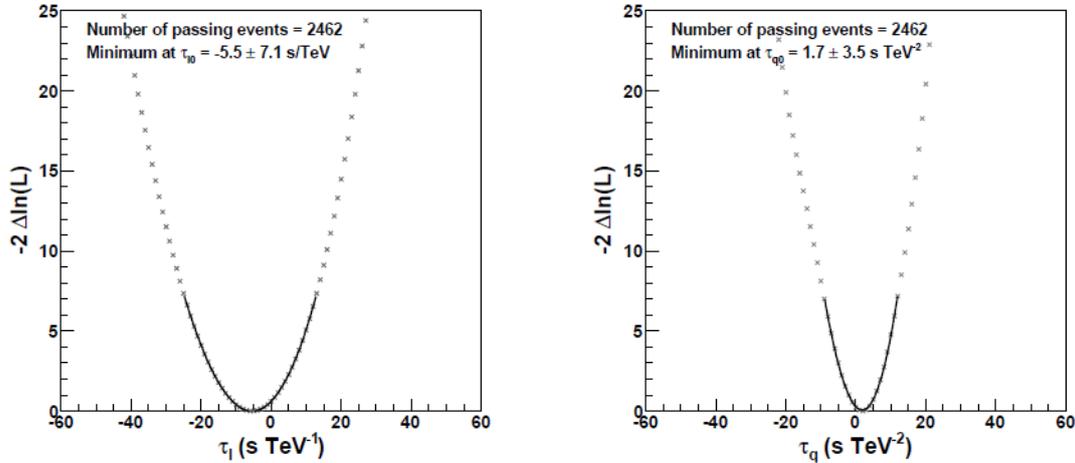


Figura 7: Método Maximum Likelihood para el PKS 2155-304 (AGN). Valores mínimos de τ_1 (τ_1) y τ_q (τ_2) [8].

Cabe mencionar que en todos los métodos se calcula un intervalo de confianza para los parámetros que se utilizan, lo que equivale a un intervalo de confianza para $E_{LV,n}$. Estos intervalos se suelen obtener simulando datos aleatorios para los GRBs a partir de los conocidos, de forma que en caso de existir correlación entre energías y tiempos se estaría eliminando. Calculando los parámetros para los datos simulados se obtienen los límites para los datos verdaderos.

3. Física no convencional en estudios de tiempos de vuelo

En esta sección reunimos los resultados obtenidos en estudios realizados durante los últimos 20 años. En primer lugar, consideramos trabajos previos (hasta 2015) y posteriormente nos centramos en más profundidad en publicaciones de los últimos tres años (2016-2018). En los estudios que hemos denominado previos se supone una emisión casi simultánea, es decir, sin tener en cuenta una estructura particular para estos tiempos. Los estudios recientes realizan otro tipo de suposiciones menos restrictivas en la emisión. Por tanto, podríamos decir que nos encontramos ante dos enfoques distintos del mismo problema.

3.1. Estudios previos

La posibilidad de observar efectos de gravedad cuántica en la propagación de fotones provenientes de fuentes astrofísicas como GRBs fue propuesta inicialmente por Amelino-Camelia *et al.* en 1998 [16]. Considera que la relación de dispersión de fotones se modifica añadiendo un término lineal y estima la diferencia de tiempos de llegada como:

$$\Delta t \propto \frac{L}{c} \cdot \frac{E}{E_{LV,1}}. \quad (3.1)$$

Comparando tiempos de llegada y energías se podría obtener un límite en la escala a la que la violación de invariancia Lorentz inducida por efectos de gravedad cuántica cobra importancia.

La ecuación anterior no recoge la expansión del universo y no es la que se utiliza para estudiar la relación entre Δt y E , siendo la relación correcta la deducida en la sección 2.1 (ecuación 2.25).

Los distintos artículos presentan como resultados los límites para $E_{LV,1}$ y $E_{LV,2}$. Estos valores establecen cotas en la escala afirmando que en los datos analizados no se ha observado el efecto LIV esperado, por lo que la escala deberá ser mayor que la obtenida.

Hemos recogido estas cotas en la tabla 1, donde los resultados tienen un 95% de confianza, de acuerdo con los intervalos de confianza definidos en cada método. Además, en todos los casos se considera que los fotones de alta energía llegan más tarde que los de baja energía ($s_n = +1$).

Fuente	Experimento	Método de análisis	Límite (GeV)	Referencia
Crab Pulsar	EGRET	Ajuste lineal	$E_{LV,1} = 1.8 \cdot 10^{15}$	P. Kaaret 1999 [9]
9 GRBs	BATSE + OSSE	WT	$E_{LV,1} = 6.9 \cdot 10^{15}$ $E_{LV,2} = 2.9 \cdot 10^6$	J.Ellis 2003 [11]
GRB 021206	RHESSI	Ajuste lineal	$E_{LV,1} = 1.8 \cdot 10^{17}$ $E_{LV,2} = 5.5 \cdot 10^7$	Boggs 2004 [10]
35 GRBs	BATSE + HETE + Swift	WT	$E_{LV,1} = 0.9 \cdot 10^{16}$ $E_{LV,1} = 1.4 \cdot 10^{16}$	J.Ellis 2006 [12] J.Ellis 2008 [13]
PKS 2155-304	HESS	MCCF	$E_{LV,1} = 7.2 \cdot 10^{17}$ $E_{LV,2} = 1.4 \cdot 10^9$	Ahar. 2008 [17]
Mkn 501	MAGIC	ECF	$E_{LV,1} = 2.1 \cdot 10^{17}$ $E_{LV,2} = 2.6 \cdot 10^{10}$	Albert 2008 [14]
Mkn 501	MAGIC	M. Likelihood	$E_{LV,1} = 0.3 \cdot 10^{18}$ $E_{LV,2} = 5.7 \cdot 10^{10}$	Martínez 2009 [7]
PKS 2155-304	HESS	Likelihood	$E_{LV,1} = 2.1 \cdot 10^{18}$ $E_{LV,2} = 6.4 \cdot 10^{10}$	Abr. 2011 [8]
GRB 090510	FGST	PV SMM	$E_{LV,1} = 9.3 \cdot 10^{19}$ $E_{LV,2} = 1.3 \cdot 10^{11}$	Vas. 2013 [5]
GRB 090510	FGST	ML	$E_{LV,1} = 3.42 \cdot 10^{19}$	Vas. 2015 [18]

Tabla 1: Tabla construida completando la tabla 1 de la referencia [19].

Lo más importante a destacar de los trabajos para este primer enfoque es la suposición de emisión casi simultánea para todos los fotones, la cual es una restricción bastante fuerte. Es necesario hacer una suposición porque los mecanismos de las fuentes, principalmente de GRBs, son desconocidos. Por ello, las diferencias de tiempo observadas (Δt_{obs}) podrían deberse a efectos en la propagación (LIV) o a efectos intrínsecos de emisión. En algunos artículos se defiende que cuanto mayor sea la distancia a la que se encuentra una fuente, más aumenta el efecto LIV en la propagación y más despreciables serían los efectos del mecanismo de emisión en Δt_{obs} .

Algo que puede llamar la atención al observar los resultados de la tabla es que difieren entre ellos en órdenes de magnitud, de forma que cada estudio plantea un límite distinto para la escala $E_{LV,n}$. Esto se debe a que para las fuentes analizadas no se está viendo la modificación en tiempos de vuelo planteada teóricamente, por lo que se establece un límite a la escala para las energías detectadas en cada caso.

Conforme avanzan los métodos de análisis y mejoran los sistemas de detección, se pueden detectar fotones de energías mayores. De esta forma, si siguen sin observarse efectos LIV apreciables, la escala calculada aumenta, y, en caso de existir efectos de gravedad cuántica, estos aparecerían para fotones con energías mayores a las estudiadas.

Cabe destacar que en los últimos límites encontrados [5, 18] se ha llegado a una escala de efectos LIV mayor que la energía de Planck ($E_{Pl} = 1.22 \cdot 10^{19}$ GeV). Esto parece poner en duda la existencia de los efectos considerados debidos a gravedad cuántica. Por otra parte, los *redshifts* de las fuentes utilizadas se encuentran entre 0 y 4, de forma que puede que se necesiten fuentes más lejanas para detectar este tipo de efectos.

La validez de los resultados de este enfoque es cuestionable, por una parte porque nos falta información sobre la emisión y por otra porque en la mayoría de los casos se estudia una única fuente, que no coincide para todos los trabajos. Si existiera el efecto LIV propuesto, deberíamos obtener los mismos resultados para los distintos métodos y fuentes.

3.2. Estudios recientes

Entre los estudios recientes recogemos aquellos desarrollados por Amelino-Camelia *et al.* ([15, 22]) y por Xu y Ma ([1, 20, 21]). En ellos, tratan de obtener nuevamente valores para la escala $E_{LV,n}$, que, en este caso no serán cotas, ya que los autores creen observar los efectos LIV.

Comenzaremos comentando el artículo [20] de Xu y Ma. Estos autores parten de las ecuaciones de dispersión y velocidad modificadas para fotones de alta energía (2.2 y 2.3), considerando que el término dominante añadido a la ecuación de dispersión será el de primer o segundo orden, $n = 1$ ó 2 . Suponen que los fotones de alta energía llegan retrasados ($s_n = +1$), considerando emisión simultánea de fotones de alta y baja energía. Utilizan la ecuación 2.25 para relacionar las diferencias de tiempos y las energías de los fotones.

Los datos que analizan provienen de 7 GRBs distintos detectados por el telescopio Fermi (FGST) con *redshifts* $z \sim 0 - 4$. Además de considerar un gran número de fuentes, los autores establecen que la diferencia de tiempos observada, Δt_{obs} debe calcularse como la diferencia entre el tiempo de detección del fotón de alta energía y el primer pico de fotones de baja energía, $\Delta t_{obs} = t_h - t_l$. El pico de fotones de baja energía³ es característico de cada GRB y se considera que comprende fotones entre 8 y 260 keV.

Una gran diferencia que establecen respecto a anteriores estudios es que consideran que no todos los fotones son emitidos simultáneamente, luego Δt_{obs} no será únicamente la debida al retraso en la propagación (2.25), sino que contendrá también la diferencia de tiempos intrínseca entre los fotones, la cual llevará asociado un factor $1 + z$ debido a la expansión del universo:

$$\Delta t_{obs} = \Delta t_{in}(1 + z) + \Delta t_{LV}. \quad (3.2)$$

De esta forma, las diferencias de tiempos observadas pueden ser tanto positivas como negativas, según se hayan emitido los fotones de alta energía respecto a los de baja energía y teniendo en cuenta la propagación. Hemos llamado $\Delta t_{LV} = \Delta t_n$ (ver 2.25) por analogía con el artículo. Otros criterios utilizados consisten en considerar como fotones de alta energía a aquellos que tengan

³Los fotones de baja energía llegan con una cierta distribución, supuesta gaussiana, de forma que el pico mencionado se correspondería con la media de esa gaussiana.

energías medidas (E_h) mayores a 10 GeV y se hayan detectado en una ventana de tiempos de 90 s (respecto al pico de baja energía). Así, la energía de los fotones de baja energía (E_l) puede considerarse despreciable respecto a E_h y por tanto eliminarse de Δt_{LV} .

Según los criterios de selección establecidos, Xu *et al.* analizan 13 fotones de alta energía de los 7 GRBs disponibles hasta la fecha. Como método de análisis reescriben la ecuación 3.2 de forma que puedan estudiar la posible relación lineal entre $\Delta t_{\text{obs}}/(1+z)$ y κ_n .

$$\frac{\Delta t_{\text{obs}}}{1+z} = \Delta t_{\text{in}} + \frac{\kappa_n}{E_{LV,n}^n}, \quad (3.3)$$

$$\kappa_n = \frac{1+n}{2H_0} \cdot \frac{E_h^n}{1+z} \int_0^z \frac{(1+z')^n}{h(z')} dz. \quad (3.4)$$

Los resultados que obtienen se pueden ver en las figuras 8 y 9 para primer y segundo orden, respectivamente. En cada uno de los casos se ha obtenido una tendencia lineal principal, la que más datos es capaz de ajustar y de la mejor forma. Las otras rectas dibujadas (línea discontinua) tienen la misma pendiente que la principal (línea continua) pero distinta ordenada. Esta es Δt_{in} , la cual indica la diferencia de tiempos con el pico de fotones de baja energía en la fuente.

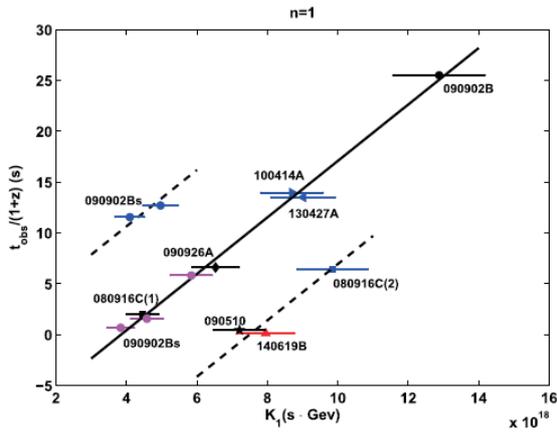


Figura 8: Ajuste lineal para $n = 1$ [20].

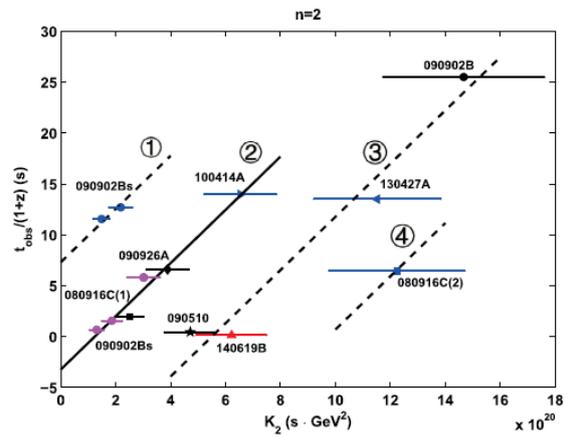


Figura 9: Ajuste lineal para $n = 2$ [20].

En el caso de primer orden, la recta principal contiene a 8 de los 13 fotones estudiados, y su expresión es la siguiente:

$$\frac{\Delta t_{\text{obs}}}{1+z} = (-10.7 \pm 1.5) + (2.78 \pm 0.20) \cdot 10^{-18} \cdot \kappa_1 \text{ (s)}. \quad (3.5)$$

A partir de la ecuación 3.5 se puede obtener la escala de violación de invariancia Lorentz buscada como la inversa de la pendiente: $E_{LV,1} = (3.6 \pm 0.27) \cdot 10^{17}$ GeV. El valor de Δt_{in} es negativo, por lo que aunque los fotones de alta energía han llegado más tarde que los de baja energía, podrían haberse emitido antes. Para segundo orden, la recta principal contiene a 6 de los 13 fotones estudiados. Su expresión es la siguiente:

$$\frac{\Delta t_{\text{obs}}}{1+z} = (-3.2 \pm 2.2) + (2.61 \pm 0.72) \cdot 10^{-20} \cdot \kappa_2 \text{ (s)}. \quad (3.6)$$

La escala obtenida es: $E_{LV,2} = (6.2 \pm 0.7) \cdot 10^9$ GeV. En este caso está menos claro que los distintos puntos de la gráfica sigan tendencias lineales, lo que sí que se distinguía fácilmente

para primer orden. En un posterior estudio de los mismos autores [21] se añade a los datos un fotón de alta energía que no se había analizado antes (correspondiente a la detección de un nuevo GRB). Representando de nuevo los datos, el fotón añadido se ajusta perfectamente a la tendencia lineal principal (ecuación 3.5). Esto lleva a los autores a reafirmar la existencia de una correlación entre las energías de los fotones y las diferencias de tiempos.

3.2.1. Trabajos de Amelino-Camelia *et al.*

Un posible fallo del estudio del apartado anterior [20] es que los autores no cuantifican la validez de los resultados obtenidos, y esto es precisamente lo que realizan Amelino-Camelia y colaboradores en un trabajo posterior [22]. Reescriben Δt_{LV} (ecuación 3.7), considerando únicamente el término añadido a la relación de dispersión para primer orden.

$$\Delta t_{LV} = \eta_X \frac{E}{E_{Pl}} D(z) \pm \delta_X \frac{E}{E_{Pl}} D(z), \quad (3.7)$$

$$D(z) = \int_0^z \frac{(1+z') dz'}{H_0 h(z')}. \quad (3.8)$$

El subíndice X hace referencia al tipo de partícula, su helicidad, o polarización (en caso de fotones); y $D(z)$ indica la distancia entre la fuente y el detector. En el desarrollo posterior se consideran fotones sin diferenciar su polarización.

En la ecuación 3.7 se tiene en cuenta tanto un término de gravedad cuántica sistemático, η_X , como uno aleatorio, δ_X . El término sistemático sería el que hemos mencionado a lo largo de la memoria y está relacionado con un retraso en la propagación por parte de los fotones de alta energía. Por su parte, el término aleatorio contendría otros efectos de gravedad cuántica que podrían dar fluctuaciones sobre los efectos sistemáticos.

Amelino-Camelia *et al.* definen una nueva energía reescalada, E^* , de forma que la ecuación 3.7 no dependa del *redshift*:

$$E^* = E \frac{D(z)}{D(1)}, \quad (3.9)$$

$$\Delta t_{LV} = \eta_\gamma D(1) \frac{E^*}{E_{Pl}} \pm \delta_\gamma D(1) \frac{E^*}{E_{Pl}}. \quad (3.10)$$

También tienen en cuenta un tiempo que denominan “de *offset*”, que sería equivalente al Δt_{in} anterior. De esta forma, la ecuación final sobre la que se representan los datos es la 3.11:

$$\frac{|\Delta t_{obs}|}{1+z} = t_{off} + \frac{\eta_\gamma}{E_{Pl}} D(1) \cdot \frac{E^*}{1+z} \pm \frac{\delta_\gamma}{E_{Pl}} D(1) \frac{E^*}{1+z}. \quad (3.11)$$

Los datos provienen de los 7 GRBs detectados por el telescopio Fermi y utilizados en [20]. Los criterios que establecen para escoger los fotones a estudio consideran cotas sobre tiempos y energías de emisión, mientras que Xu *et al.* ponían restricciones en las variables de llegada. Así, se estudian 11 eventos en lugar de 13, escogiendo fotones de alta energía que se hayan emitido en una ventana de 20 s respecto a los de baja energía y con $E_{h,em} > 40$ GeV.

Cabe mencionar que los GRBs utilizados deben tener un *redshift* conocido; de lo contrario, no se podrían relacionar las magnitudes de emisión y detección. Los resultados se muestran en la figura 10.

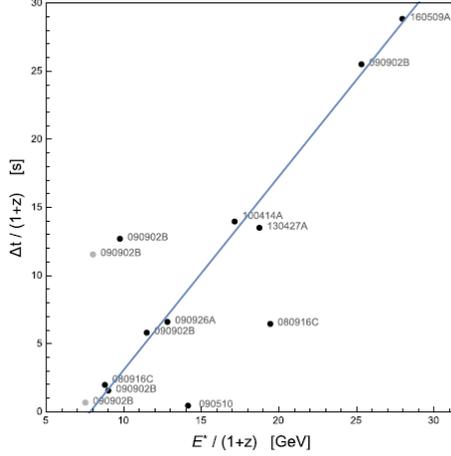


Figura 10: Ajuste lineal para $n = 1$ [22].

En este estudio, 8 de los 11 fotones se ajustan a una tendencia lineal. Los valores de los parámetros son: $t_{\text{off}} = 11 \pm 1$ s y $\eta_\gamma = 34 \pm 1$. De esta forma, la escala de violación de invariancia Lorentz queda la misma que en el anterior caso: $E_{\text{LV},1} = E_{\text{Pl}}/\eta_\gamma = 3.59 \cdot 10^{17}$ GeV. Esto es sorprendente, ya que en los estudios previos no se habían obtenido resultados tan parecidos utilizando distintos análisis.

Para cuantificar la validez de los resultados, Amelino-Camelia *et al.* realizan simulaciones de 11 fotones. Como energía de los fotones mantienen la de los datos originales, generando aleatoriamente Δt_{obs} dentro de la ventana establecida. De esta forma, proceden a calcular la correlación máxima asociada cogiendo 8 de los 11 fotones. Este proceso lo repiten miles de veces y obtienen que únicamente en el 0.0013 % de los casos, los datos generados aleatoriamente estarán tan correlacionados como los datos originales (un 99.59 % de correlación).

Con el objetivo de disponer de un mayor número de datos y comparar los resultados obtenidos mediante métodos distintos, Amelino-Camelia *et al.* amplían su estudio teniendo en cuenta los 148 fotones detectados para los 7 GRBs, no solo los de más alta energía [15]. La restricción en la energía es menor que antes, ya que consideran fotones con $E_{\text{h, em}}$ GeV, divididos en tres grupos:

- Fotones de baja energía: $5 < E < 15$ GeV.
- Fotones de energía media: $15 < E < 40$ GeV.
- Fotones de alta energía: $E > 40$ GeV.

El método que se utiliza es el de *Pair View*, estudiando la correlación entre diferencias de tiempos y energías por parejas. Estas estarán formadas por fotones del mismo GRB (fotones de distintos GRBs no mostrarán correlación entre tiempos y energías): Δt_{pair} y E_{pair}^* . A continuación, se construye una distribución para los $\eta_\gamma^{\text{pair}}$ definida en la ecuación 3.12:

$$\eta_\gamma^{\text{pair}} = \frac{E_{\text{Pl}} \cdot \Delta t_{\text{pair}}}{D(1) \cdot E_{\text{pair}}^*}. \quad (3.12)$$

Muchas de las parejas estarán formadas por fotones que no se emiten a la vez y por tanto no proporcionan la información que se está buscando (serán ruido), pero sí que habrá otras que

puedan dar este tipo de información. Si no hubiera correlación entre los tiempos de llegada, el parámetro $\eta_\gamma^{\text{pair}}$ se distribuiría según una función gaussiana simétricamente en torno a $\eta_\gamma^{\text{pair}} = 0$. Para comprobar la correlación entre los datos, se realizan 5 análisis estadísticos que recogen distintos fotones. El primero considera todos los fotones con energías mayores a 5 GeV (figura 11). El histograma resultante muestra en morado la distribución esperada para $\eta_\gamma^{\text{pair}}$, en rojo los valores que aparecen más veces debido a la correlación de los datos y en azul los que aparecen menos de lo esperado. Se obtiene mayor frecuencia para valores de $\eta_\gamma^{\text{pair}}$ entre 25 y 35.

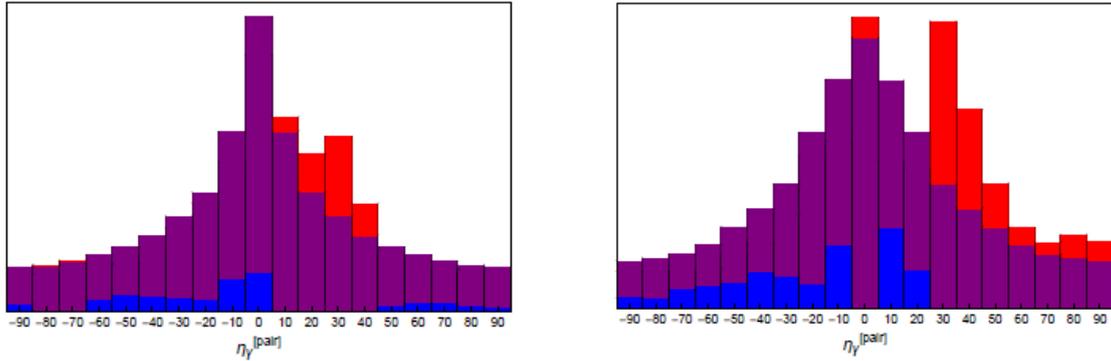


Figura 11: Resultados de $\eta_\gamma^{\text{pair}}$, todos los fotones [15]. Figura 12: $\eta_\gamma^{\text{pair}}$ fotones de baja y media energía [15].

El aumento de la frecuencia para ciertos valores de $\eta_\gamma^{\text{pair}}$ podría ocurrir accidentalmente en un 0.5% de los casos, tal como han calculado los autores generando 10^5 conjuntos de datos aleatorios, mezclando los tiempos y las energías calculados para las parejas, de forma que se elimina la posible correlación. Por tanto, se podría decir que la modificación de la velocidad de los fotones en la propagación es la que ha contribuido a este efecto observable.

Un resultado parecido es el que se obtiene si se consideran únicamente los fotones de baja y media energía (ver figura 12). Si no existiera LIV, este tipo de distribución sólo se vería en un 0.6% de los casos. En los tres casos restantes se obtienen distribuciones parecidas a las aquí expuestas. Los resultados obtenidos llevan a pensar que la dependencia lineal planteada (3.11) puede ser válida, indicando una escala de LIV en torno a dos órdenes de magnitud por debajo de la escala de Planck: $E_{\text{LV},1} = \eta_\gamma^{\text{pair}} / E_{\text{P1}} \approx 4.06 \cdot 10^{17}$ GeV, considerando $\eta_\gamma^{\text{pair}} = 30$.

3.2.2. Trabajo de Xu y Ma

El último artículo de Xu y Ma [1], publicado a principios de este año, recoge y amplía los resultados de los trabajos previos desarrollados en esta sección. Los autores realizan un análisis más objetivo y completo que los anteriores, ya que no tratan de hallar el valor probable de $E_{\text{LV},1}$ a partir de un ajuste lineal, sino que utilizan otra forma de análisis (combinan varios métodos) y además utilizan datos provenientes de 25 GRBs distintos ($z \sim 0 - 4.5$).

El punto de partida vuelven a ser las ecuaciones 2.2 y 2.3. Se considera únicamente el término lineal ($n = 1$) añadido a la ecuación de dispersión de SR, y fotones de alta energía más lentos que los de baja energía ($s_n = +1$).

Además, recuperamos las ecuaciones 3.2 y 3.3:

$$\Delta t_{\text{in}} = \frac{\Delta t_{\text{obs}}}{1+z} - \frac{\Delta t_{\text{LV}}}{1+z} = \frac{\Delta t_{\text{obs}}}{1+z} - \frac{\kappa_1}{E_{\text{LV},1}}. \quad (3.13)$$

Los criterios de selección de fotones consideran una ventana de tiempos de 90 segundos respecto al pico de fotones de baja energía (entre 8 y 260 keV, $t_l = 0$), y la restricción para la energía es considerar fotones con energía de emisión ($E_{h, \text{in}}$) mayores a 1 GeV. Las diferencias de energías de emisión para los fotones de alta energía son: $\Delta t_{\text{in}} = t_{h, \text{in}} - t_{l, \text{in}} = t_{h, \text{in}}$.

El método de análisis que se utiliza en este caso es una combinación de varios: DisCan, SMM, etc. El procedimiento consiste en crear una función de distribución $\mathcal{S}(E_{LV,1})$:

$$\mathcal{S}(E_{LV,1}) = \sum_{i=1}^{N-\rho} \log\left(\frac{\rho}{t_{i+\rho} - t_i}\right), \quad (3.14)$$

donde ρ es un número entero que indica cuánto fluctúa \mathcal{S} con $E_{LV,1}$, por lo que no debe ser muy alto (curva suave) ni muy bajo (grandes fluctuaciones). El valor escogido es $\rho = 5$.

En el caso de existir LIV, la distribución de \mathcal{S} proporcionará un máximo para un valor de $E_{LV,1}$ que será la escala a la que es más probable que aparezca este fenómeno. Para obtener la distribución descrita, Xu y Ma clasifican los 524 fotones de los 25 GRBs en cuatro grupos, según las energías de emisión de los fotones de alta energía, $E_{h, \text{em}} = (1 + z)E_{h, \text{obs}}$.

- Grupo 1: $1 < E_{h, \text{em}} < 10$ GeV. Compuesto por 481 fotones.
- Grupo 2: $E_{h, \text{em}} > 10$ GeV. Compuesto por 43 fotones.
- Grupo 3: $E_{h, \text{em}} > 20$ GeV. Compuesto por 20 fotones.
- Grupo 4: $E_{h, \text{em}} > 40$ GeV. Compuesto por 12 fotones.

Para cada uno de los grupos, generan además 10^5 distribuciones aleatorias con el objetivo de calcular la validez del valor de $E_{LV,1}$ más probable estimado. Los datos originales tienen unos ciertos valores de *redshift*, tiempos intrínsecos y energías de emisión (ver tabla 2). Para generar los datos aleatorios se deja z invariante y se distribuyen aleatoriamente las medidas Δt_{in} . Las energías intrínsecas se generan de acuerdo a una distribución de probabilidad, que se obtiene a partir del estudio del espectro de datos reales:

$$\frac{dN}{dE} \propto E^{-1.8}. \quad (3.15)$$

De esta forma se elimina la posible correlación entre los datos iniciales. La distribución \mathcal{S} para los datos aleatorios proporciona desviaciones típicas a 1σ , 3σ y 5σ . Así, se puede deducir la correlación implícita en los datos reales. Los resultados para los grupos 3 y 4 se muestran en las figuras 13 y 14, donde la línea roja representa la función \mathcal{S} para los datos medidos. Las regiones amarilla, verde y azul corresponden a los datos aleatorios para $\pm 1\sigma$, $\pm 3\sigma$ y $\pm 5\sigma$ respectivamente.

La gráfica correspondiente al grupo 1 no muestra un máximo y su tendencia no supera la región amarilla; por lo tanto, para fotones de estas energías no se apreciarían efectos LIV.

El grupo 2 es muy parecido al 3, y para ellos sí que se aprecia un pequeño máximo, que correspondería a un valor de $E_{LV,1}$ con un error de entre 1σ y 3σ (entre un 68.26% y un 99.73% de validez). Este resultado es significativo, pero no lo suficiente, ya que aún existiría una probabilidad no despreciable de que la característica vista fuera aleatoria.

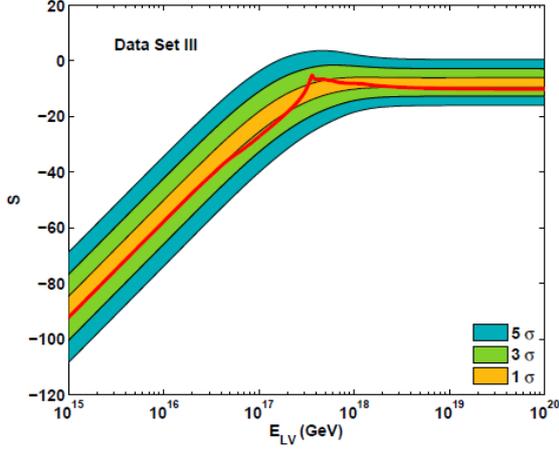


Figura 13: Distribución S para el Grupo 3 [1].

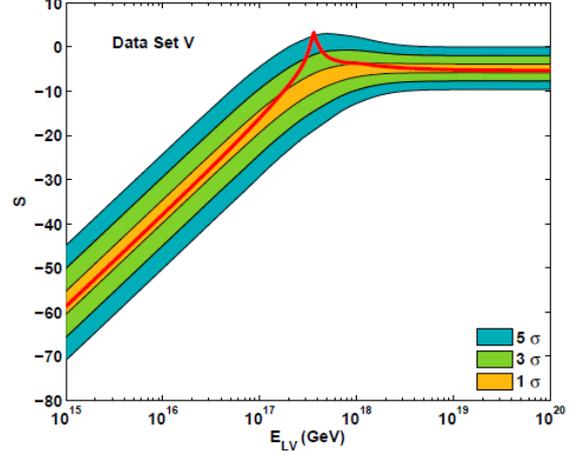


Figura 14: Distribución S para el Grupo 4 mod. [1].

Por su parte, los datos del grupo 4 presentan un máximo claro para $E_{LV,1} = 3.60 \cdot 10^{17}$ GeV, y su valor de S correspondiente excede incluso la zona azul de los datos aleatorios. Esto significa que es válido con una probabilidad mayor a 5σ (99.99%). Este grupo es el que proporciona los mejores resultados, que hemos reproducido y comentado en el último capítulo de la memoria.

Una vez obtenidas estas conclusiones, se representan los datos según la ecuación 3.13, para comprobar si cumplen la tendencia lineal vista en otros trabajos (figuras 15 y 16). Nuevamente los mejores resultados (donde se aprecia más correlación) los proporciona el grupo 4; sin embargo, es mucho más clara y visual la obtención del máximo de la función S .

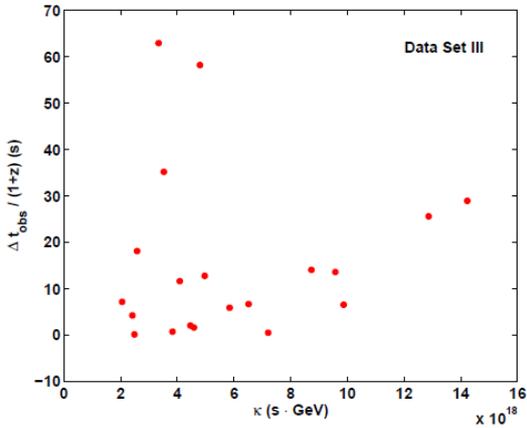


Figura 15: Ajuste lineal para el Grupo 3 [1].

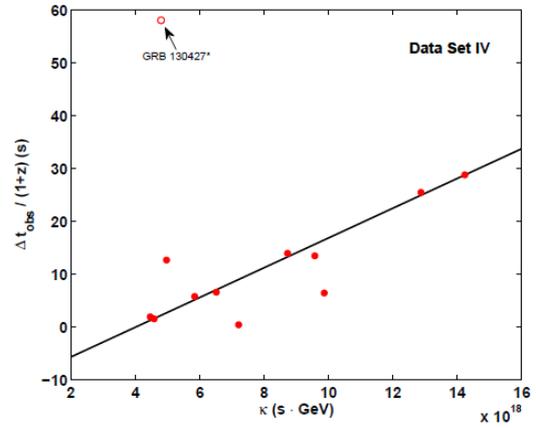


Figura 16: Ajuste lineal para el Grupo 4 [1].

Cabe mencionar que hay un dato en este grupo que se encuentra muy alejado de la tendencia lineal, el cual los autores deciden eliminar ya que puede tratarse de un fotón con propiedades distintas a los demás, y por tanto no es útil para lo que se quiere estudiar. La distribución sin este punto para el grupo 4 es la que se ha mostrado en la figura 14.

La conclusión del artículo es que la característica observada en estudios previos se puede ver también en este caso, obteniendo el mismo valor de la escala $E_{LV,1}$. El resultado de este trabajo es sorprendente ya que es exactamente el mismo que el de los otros artículos de esta sección, y se ha utilizado un método de análisis distinto.

4. Análisis del trabajo de Xu y Ma (2018)

En este último apartado trataremos de reproducir los resultados del trabajo de Xu y Ma del apartado anterior [1] considerando fotones de energías de emisión mayores a 40 GeV (grupo 4) y utilizando el programa *Mathematica*. El código para primer orden está recogido en el anexo A. Los datos con los que trabajamos se pueden observar en la tabla 2:

GRB	z	E_{in} (GeV)	Δt_{obs} (s)
160509	1.17	112.6	62.586
130427	0.3399	51.8	77.853
100414	1.368	70.6	33.081
090926	2.1071	60.5	20.518
090902	1.822	112.5	71.978
090902	1.822	51.1	16.400
090902	1.822	13.5	35.840
090902	1.822	40.1	4.399
090510	0.903	56.9	0.860
080916	4.35	146.7	34.525
080916	4.35	66.5	10.561

Tabla 2: Datos medidos del grupo 4 modificado [1].

En primer lugar, calculamos la función \mathcal{S} para primer orden ($n = 1$) a partir de los datos de la tabla y realizamos un primer barrido para un rango de valores de $E_{\text{LV},1}$ (ϵ en el programa) muy amplio, entre 10^{-40} y 10^{40} . Con esto pretendemos acotar el rango en el que puede encontrarse el máximo (ver figura 17), suponiendo que inicialmente no lo sabemos. En el primer barrido encontramos un máximo de $E_{\text{LV},1} = 10^{18}$ GeV.

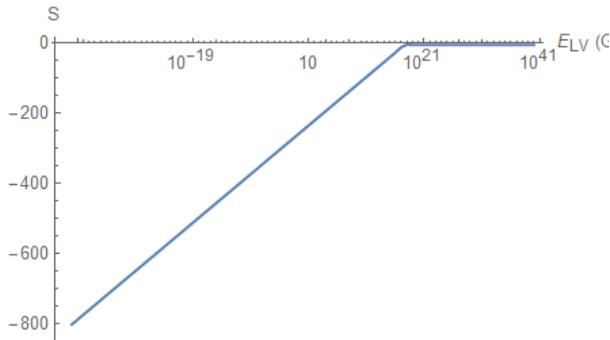


Figura 17: Rango completo para $n = 1$.

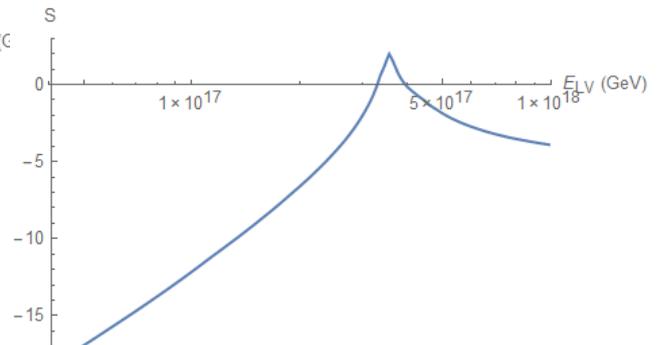


Figura 18: Máximo acotado para $n = 1$.

Considerando un rango menor, obtenemos un máximo en $E_{\text{LV},1} = 3.55 \cdot 10^{17}$ GeV (ver figura 18), valor que se encuentra muy próximo al obtenido por los autores. Este rango es, por tanto, el que utilizamos para generar los datos aleatorios. A continuación hemos simulado 5000 tablas de datos aleatorios, para las que hemos calculado la función \mathcal{S} correspondiente y, representando la dispersión de estos datos, hemos obtenido la gráfica de la figura 19.

En la gráfica obtenida podemos ver que el pico de los datos originales sobrepasa la zona de 5σ

de los datos aleatorios. Además, hemos realizado la representación de los puntos (figura 20) y hemos obtenido la tendencia lineal esperada.

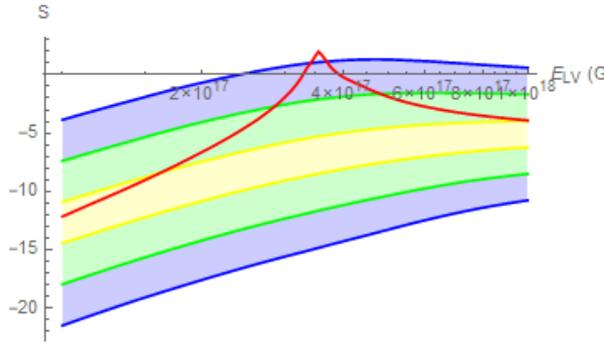


Figura 19: Resultados para $n = 1$.

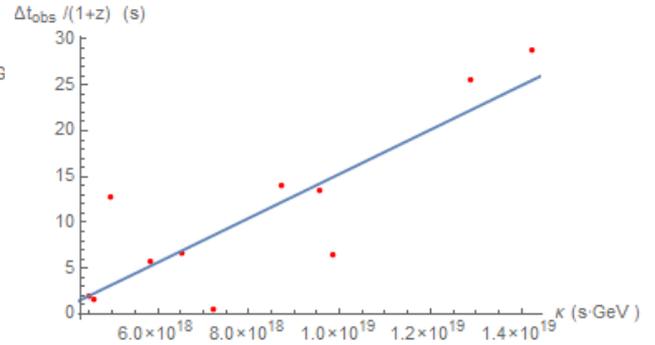


Figura 20: Ajuste lineal para $n = 1$

Hemos ampliado los resultados del artículo aplicando el método al caso $n = 2$, lo que implica utilizar κ_2 en lugar de κ_1 :

$$\kappa_2 = \frac{3}{2H_0} \cdot \frac{E_h^2}{1+z} \int_0^z \frac{(1+z')^2 dz}{h(z')}. \quad (4.1)$$

Realizando las modificaciones pertinentes, volvemos a buscar el máximo, como se puede ver en las figuras 21 (máximo en $E_{LV,n} = 10^{11}$ GeV) y 22 (máximo en $E_{LV,2} = 1.2 \cdot 10^{10}$ GeV). Generando nuevamente 5000 datos aleatorios y representándolos obtenemos la figura 23. La correspondiente a representar $\Delta t_{\text{obs}}/(1+z)$ frente a κ_2 es la figura 24.

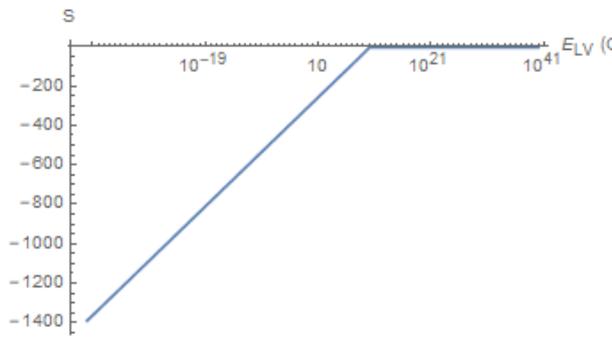


Figura 21: Rango completo para $n = 2$.

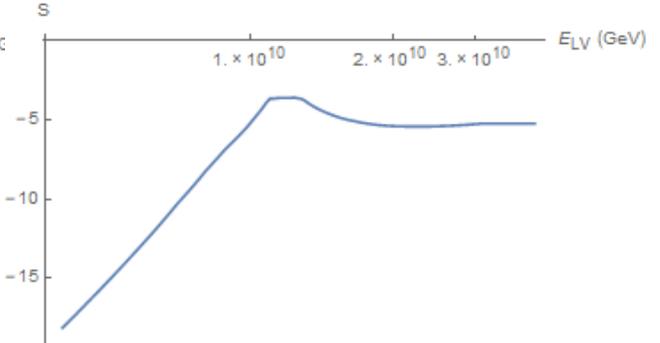


Figura 22: Máximo acotado para $n = 2$

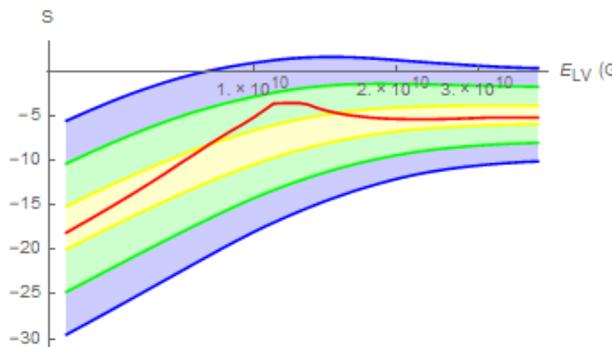


Figura 23: Resultados para $n = 2$.

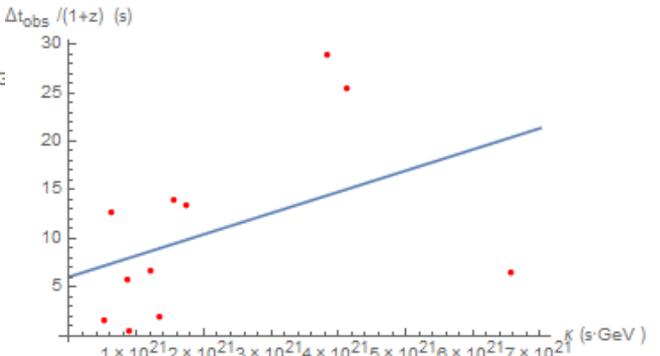


Figura 24: Ajuste lineal para $n = 2$

En este caso podemos ver que los datos originales no superan la zona verde de 3σ aleatoria, lo cual parece indicar que realmente no existe una variación de la relación de dispersión para este orden. Además, la correlación de los datos en este caso no es tan clara como veíamos para $n = 1$ y aparentemente no siguen ninguna tendencia lineal o de otro tipo. Por tanto, según los resultados de Xu y Ma a los que añadimos los nuestros podemos concluir que lo más probable es que si existen efectos cuánticos en la propagación de los fotones, estos sean de primer orden (al menos hasta lo que podemos comprobar experimentalmente).

5. Conclusiones

En los distintos trabajos revisados hemos obtenido resultados dispares. En primer lugar, los estudios previos proporcionan cotas a la escala $E_{LV,n}$, que van aumentando y actualmente superan el orden de la escala de Planck. Estos últimos límites [5, 18] establecen que no se observarían efectos LIV por debajo de la escala, o que estos no existirían.

Por otra parte, en los estudios recientes se escoge una estructura de tiempos de emisión no simultánea y sí que se observa modificación de tiempos de vuelo para escalas menores a E_{Pl} . De hecho, trabajos que parten de criterios distintos y que plantean métodos de análisis distintos, llegan a obtener la misma escala. Además, los últimos resultados resultan más completos, ya que analizan un mayor número de GRBs, detectados a lo largo de los años.

Los análisis llevados a cabo indican que la correlación que se observa sí que podría ser debida a la violación de la invariancia Lorentz, que sí que existiría una relación de dispersión de las partículas modificada y se estaría más cerca de plantear la comprobación experimental de las teorías de gravedad cuántica. Si estas indicaciones de nueva física se confirman, se estaría modificando uno de los principios fundamentales de la física (la constancia de la velocidad de la luz en el vacío), lo que supondría un gran avance para la física moderna.

No obstante, para tener una confirmación definitiva y poder proporcionar un valor “universal” de $E_{LV,n}$ asociado a la existencia de efectos de gravedad cuántica en estudios de tiempos de vuelo, sería necesario disponer de un mayor número de datos de distintas fuentes, y ahondar en el estudio de los mecanismos intrínsecos de estas, de forma que se pueda conocer la influencia de las particularidades de la emisión en los datos medidos.

A lo largo de la memoria se ha proporcionado un ejemplo de la aplicación del método científico a un problema particular, reproduciendo y extendiendo los análisis más recientes de la literatura. Al comparar distintas investigaciones, se ha podido percibir la gran dificultad que supone comprobar experimentalmente una teoría en desarrollo en el campo de la física teórica. Es previsible que la continuación de estos estudios permita dar una respuesta definitiva al problema considerado conforme se disponga de un mayor número de datos provenientes las fuentes astrofísicas.

Bibliografía

- [1] H. Xu y B.Q. Ma. «Regularity of high energy photon events from gamma ray bursts». En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* (2018). ISSN: 14757516. DOI: 10.1088/1475-7516/2018/01/050. arXiv: 1801.08084.
- [2] Floyd W. Stecker. «Testing Lorentz symmetry using high energy astrophysics observations». En: *Symmetry* 9.10 (2017).
- [3] *Quantum Gravity Phenomenology in Zaragoza*. URL: <https://qgraphenozaragoza.wordpress.com/grupo-qgrapheno-zaragoza/>.
- [4] Planck Collaboration y col. «Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters». En: 062.October (2015). ISSN: 0717-6163. DOI: 10.1051/0004-6361/201525830. arXiv: 1502.01589. URL: <http://arxiv.org/abs/1502.01589><http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201525830>.
- [5] V. Vasileiou y col. «Constraints on Lorentz invariance violation from Fermi-Large Area Telescope observations of gamma-ray bursts». En: *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology* 87.12 (2013). ISSN: 15507998. DOI: 10.1103/PhysRevD.87.122001. arXiv: 1305.3463v1.
- [6] Jeffrey D. Scargle, Jay P. Norris y J. T. Bonnell. «An Algorithm for Detecting Quantum Gravity Photon Dispersion in Gamma-Ray Bursts: DisCan». En: *The Astrophysical Journal* 673.2 (2008), págs. 972-980. ISSN: 0004-637X. DOI: 10.1086/524396. URL: <http://stacks.iop.org/0004-637X/673/i=2/a=972>.
- [7] Manel Martínez y Manel Errando. «A new approach to study energy-dependent arrival delays on photons from astrophysical sources». En: *Astroparticle Physics* 31.3 (2009), págs. 226-232. ISSN: 09276505. DOI: 10.1016/j.astropartphys.2009.01.005. arXiv: 0803.2120.
- [8] A Abramowski y col. «Search for Lorentz Invariance breaking with a likelihood fit of the PKS 2155-304 flare data taken on MJD 53944». En: *Astroparticle Physics* 34.9 (2011), págs. 738-747. ISSN: 09276505. DOI: 10.1016/j.astropartphys.2011.01.007. arXiv: 1101.3650.
- [9] Philip Kaaret. «Pulsar radiation and quantum gravity». En: *Astronomy and Astrophysics* 345 (1999), págs. L32-L34. arXiv: 9903464 [astro-ph]. URL: http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-bib%7B%5C_%7Dquery?bibcode=1999A%7B%5C%7DA...345L..32K%7B%5C%7Ddb%7B%5C_%7Dkey=AST%7B%5C%7Dhigh=436c7b4a7a24054.
- [10] Steven E Boggs y col. «Testing Lorentz Invariance with GRB021206». En: Sarkar 2002 (2003). DOI: 10.1086/423933. arXiv: 0310307 [astro-ph]. URL: <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0310307><http://dx.doi.org/10.1086/423933>.
- [11] J Ellis y col. «Quantum-gravity analysis of gamma-ray bursts using wavelets». En: *Astronomy and Astrophysics* 402.2 (2003), págs. 409-424. ISSN: 0004-6361. DOI: 10.1051/0004-6361:20030263. arXiv: 0210124 [astro-ph]. URL: <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0210124><http://www.edpsciences.org/10.1051/0004-6361:20030263>.

- [12] John Ellis y col. «Robust limits on Lorentz violation from gamma-ray bursts». En: *Astroparticle Physics* 25.6 (2006), págs. 402-411. ISSN: 09276505. DOI: 10.1016/j.astropartphys.2006.04.001. arXiv: 0510172 [astro-ph].
- [13] John Ellis y col. «Corrigendum to Robust limits on Lorentz violation from gamma-ray bursts» [Astropart. Phys. 25 (2006) 402] (DOI:10.1016/j.astropartphys.2006.04.001). En: *Astroparticle Physics* 29.2 (2008), págs. 158-159. ISSN: 09276505. DOI: 10.1016/j.astropartphys.2007.12.003.
- [14] J Albert y col. «Probing quantum gravity using photons from a flare of the active galactic nucleus Markarian 501 observed by the MAGIC telescope». En: *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics* 668.4 (2008), págs. 253-257. ISSN: 03702693. DOI: 10.1016/j.physletb.2008.08.053. arXiv: 0708.2889. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2008.08.053>.
- [15] Giovanni Amelino-Camelia y col. «In-vacuo-dispersion-like spectral lags in gamma-ray bursts». En: 3 (2017). arXiv: 1707.02413. URL: <http://arxiv.org/abs/1707.02413>.
- [16] G. Amelino-Camelia y col. «Tests of quantum gravity from observations of big gamma-ray bursts». En: *Nature* 393.October 1998 (1998), págs. 763-765. ISSN: 00280836. DOI: 10.1038/31647.
- [17] Observatoire De Paris y col. «Limits on an Energy Dependence of the Speed of Light from a Flare of the Active Galaxy PKS 2155-304». En: (2008). arXiv: arXiv:0810.3475v1.
- [18] Vlasios Vasileiou y col. «A Planck-scale limit on spacetime fuzziness and stochastic Lorentz invariance violation». En: *Nature Physics* 11.4 (2015), págs. 344-346. ISSN: 17452481. DOI: 10.1038/nphys3270.
- [19] J Bolmont y A Jacholkowska. *Lorentz Symmetry breaking studies with photons from astrophysical observations*. 2011. DOI: 10.1016/j.asr.2010.07.025. arXiv: 1007.4954 [astro-ph.HE].
- [20] Haowei Xu y Bo Qiang Ma. «Light speed variation from gamma-ray bursts». En: *Astroparticle Physics* 82 (2016), págs. 72-76. ISSN: 09276505. DOI: 10.1016/j.astropartphys.2016.05.008. arXiv: 1607.03203. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.astropartphys.2016.05.008>.
- [21] Haowei Xu y Bo Qiang Ma. «Light speed variation from gamma ray burst GRB 160509A». En: *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics* 760 (2016), págs. 602-604. ISSN: 03702693. DOI: 10.1016/j.physletb.2016.07.044. arXiv: 1607.08043. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2016.07.044>.
- [22] Giovanni Amelino-Camelia y col. «In-vacuo-dispersion features for GRB neutrinos and photons». En: (2016). DOI: 10.1038/s41550-017-0139. arXiv: 1612.02765. URL: <http://arxiv.org/abs/1612.02765> <http://dx.doi.org/10.1038/s41550-017-0139>.

Anexo

A. Código de programación en *Mathematica*

Programa para la reproducción de los resultados de la sección 3.2.2 para primer orden. La correspondiente a segundo orden se realizaría definiendo κ_2 tal como se indica en el texto (ecuación 4.1) y tomando $\Delta t_{LV,2}$ (ecuación 2.26).

- Introducimos las constantes (ϵ jugará el papel de escala de energía) (number sirve para rellenar la matriz del bucle)

$H = 67.3 / 3.086 * 10^{19}$; $\Omega_m = 0.315$; $\Omega_\Lambda = 0.685$; $\rho = 5$;

- Introducimos las variables del bucle ($N = (\text{fin} - \text{ini}) / \text{step}$, es un número entero)

$\text{ini} = 10^{17}$; $\text{fin} = 10^{18}$; $\text{step} = 5 * 10^{15}$; $\text{number} = 3$; $\text{repeat} = 5001$;

- La estructura de la tabla es "data={z, E_{in} , Δt_{obs} }"

```
data = {{1.17, 112.6, 62.586}, {0.3399, 103.3, 18.100},
        {1.368, 70.6, 33.081}, {2.1071, 60.5, 20.518}, {1.822, 112.5, 71.978},
        {1.822, 51.1, 16.400}, {1.822, 43.5, 35.840}, {1.822, 40.1, 4.399},
        {0.903, 56.9, 0.860}, {4.35, 146.7, 34.525}, {4.35, 66.5, 10.561}};
```

MatrixForm[data]

[forma de matriz

$$\begin{pmatrix} 1.17 & 112.6 & 62.586 \\ 0.3399 & 103.3 & 18.1 \\ 1.368 & 70.6 & 33.081 \\ 2.1071 & 60.5 & 20.518 \\ 1.822 & 112.5 & 71.978 \\ 1.822 & 51.1 & 16.4 \\ 1.822 & 43.5 & 35.84 \\ 1.822 & 40.1 & 4.399 \\ 0.903 & 56.9 & 0.86 \\ 4.35 & 146.7 & 34.525 \\ 4.35 & 66.5 & 10.561 \end{pmatrix}$$

- Definir funciones
- Funcion κ . Hay un cuadrado en el denominador porque tenemos medidas de la energía intrínseca, no de la extrínseca.

$$\kappa[i_] := \text{Extract}[data, \{i, 2\}] / \left(H \left(1 + \text{Extract}[data, \{i, 1\}] \right)^2 \right)$$

[extrae] [extrae]

$$\text{NIntegrate} \left[\frac{(1+c)}{\left((\Omega_m (1+c)^3 + \Omega_\Lambda) \right)^{1/2}}, \{c, 0, \text{Extract}[data, \{i, 1\}]\} \right]$$

[integra numéricamente] [extrae]

- Diferencia de tiempos intrínsecos si no hubiera LIV $\Delta t_z = \frac{\Delta t_{obs}}{1+z}$

$$\Delta t_z[i_] := \text{Extract}[data, \{i, 3\}] / \left(1 + \text{Extract}[data, \{i, 1\}] \right)$$

[extrae] [extrae]

- Definir t_{in}

$$t_{in}[\epsilon_, i_] := \Delta t_z[i] - \kappa[i] / \epsilon$$

- Calcular y representar la función S con los datos originales

sfunction =

$$\text{Table} \left[\text{Sum} \left[\text{Log} \left[\frac{\rho}{\left(\text{Extract} \left[\text{Sort} \left[\text{Table} \left[t_{in}[\epsilon, i], \{i, 1, 11\} \right] \right], \{j + \rho\} \right] - \text{Extract} \left[\text{Sort} \left[\text{Table} \left[t_{in}[\epsilon, i], \{i, 1, 11\} \right] \right], \{j\} \right] \right]} \right] \right], \{j, 1, 11 - \rho\} \right], \{\epsilon, \text{ini}, \text{fin}, \text{step}\} \right];$$

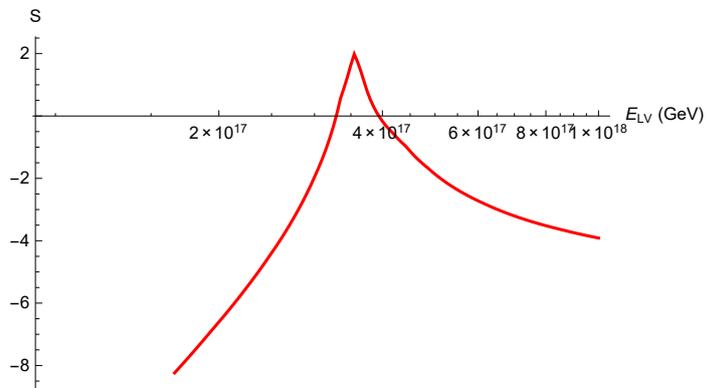
[tabla] [s...] [logaritmo] [extrae] [ord...] [tabla] [extrae]

stab = {energyvec, sfunction};

stab = Transpose[stab];

[transposición]

```
expdata = ListLogLinearPlot[stab,
  [representación log lineal de lista
  AxesLabel → {"ELV (GeV)", "S"}, PlotStyle → Red, Joined → True]
  [etiqueta de ejes [estilo de repres... [rojo [unido [verdadei
```



- Buscar el máximo de ϵ

```
maximo = Max[stab[[All, 2]]];
  [máximo [todo
```

```
pos = Position[stab, maximo];
  [posición
```

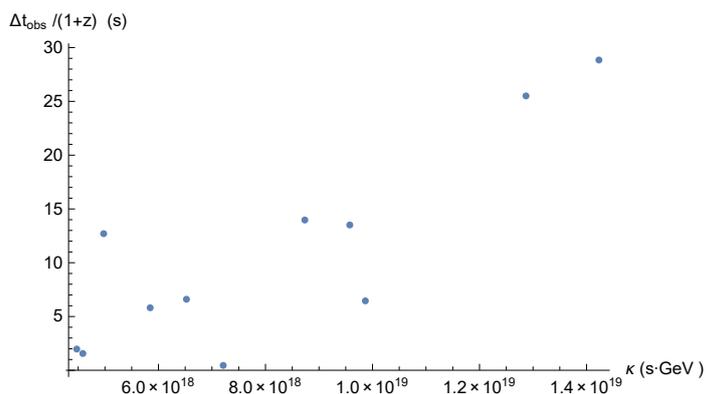
```
numpos = pos[[1, 1]];
```

```
emaxima = stab[[numpos, 1]]
```

```
355 000 000 000 000 000
```

- Comprobar que existe dependencia lineal de Δt_z frente a κ haciendo el ajuste lineal
- Representar los datos

```
ListPlot[Table[{κ[i], Δtz[i]}, {i, 1, 11}],
  [representa... [tabla
  AxesLabel → {"κ (s·GeV)", "Δtobs / (1+z) (s)"} ]
  [etiqueta de ejes
```



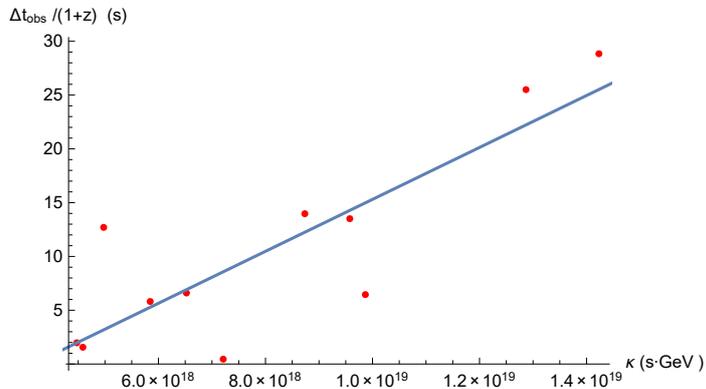
- El ajuste es el siguiente. A partir de la pendiente se podría hallar $E_{LV, 1}$, pero no es lo que buscamos en este caso.

```
linea = Fit[Table[{κ[i], Δtz[i]}, {i, 1, 11}], {1, x}, x]
  [aju... [tabla
```

```
-8.83331 + 2.41362 × 10-18 x
```

- Representar los datos junto con el ajuste

```
Show[ListPlot[Table[{κ[i], Δtz[i]}, {i, 1, 11}], PlotStyle → Red],
  mues· [representa... [tabla]                               [estilo de repre... [rojo]
  Plot[{linea}, {x, 1018, 2 * 1019}],
  [representación gráfica]
  AxesLabel → {"κ (s·GeV )", "Δtobs / (1+z) (s)"}]
  [etiqueta de ejes]
```



- Generar los datos aleatorios
- Definir la distribución de probabilidad de energías (entre el máximo y el mínimo de las correspondientes a los datos originales)

```
edistribution = ProbabilityDistribution[x-1.8, {x, 40, 147, 1}];
  [distribución de probabilidad]
```

- Definir una matriz que se va a ir rellenando a cada paso del bucle. La primera fila es el número de la fila y la segunda son los valores de energías ϵ .

```
energyvec = Flatten[Table[k, {k, ini, fin, step}]];
  [aplana] [tabla]
```

- Calcular la longitud del vector de energías

```
n = Length[energyvec];
  [longitud]
```

```
matrix = { Range[n], energyvec };
  [rango]
```

- Comenzar el bucle para generar los datos. enew=RandomVariate[edistribution, 11]

```

For[1 = 1, 1 < repeat, 1++,
  para cada
  data[[All, 1]] = Table[Extract[data, {i, 1}], {i, 1, 11}];
  todo      tabla      extrae
  anew = ParallelTable[RandomVariate[edistribution], {i, 1, 11}];
  tabla en paralelo      variable aleatoria
  deltat = data[[All, 3]]; deltatnew = RandomSample[deltat];
  todo      muestra aleatoria
  data[[All, 2]] = anew; data[[All, 3]] = deltatnew; sfunction =
  todo      todo
  Table[Sum[Log[ $\rho$  / (Extract[Sort[Table[tin[ $\epsilon$ , i], {i, 1, 11}]], {j +  $\rho$ ]} -
  tabla      s...      logaritmo      extrae      ord...      tabla
    Extract[Sort[Table[tin[ $\epsilon$ , i], {i, 1, 11}]], {j}]]], {j, 1, 11 -  $\rho$ }],
    ord...      tabla
  { $\epsilon$ , ini, fin, step}]; matrix = Insert[matrix, sfunction, number];
  inserta
  number = number + 1; Print["Ok"]; ]
  escribe
  ■ Eliminar las primeras dos filas de la matriz
  simplematrix = Drop[matrix, 2];
  elimina
  ■ Calcular la media y la dispersión para cada  $E_{LV,1}$ 
  average = Mean[simplematrix];
  media
  disp = StandardDeviation[simplematrix];
  desviación estándar
  ■ Calcular los datos que se van a representar
  disp1p = average + disp;
  disp1m = average - disp;
  disp3p = average + 3 * disp;
  disp3m = average - 3 * disp;
  disp5p = average + 5 * disp;
  disp5m = average - 5 * disp;
  ■ Representar gráficamente
  ■ Línea de medias
  Clear[matrix];
  borra
  matrix = {energyvec, average};
  sigma0t = Transpose[matrix];
  transposición
  ■ Línea de medias y error con una sigma

```

```

Clear[matrix];
borra

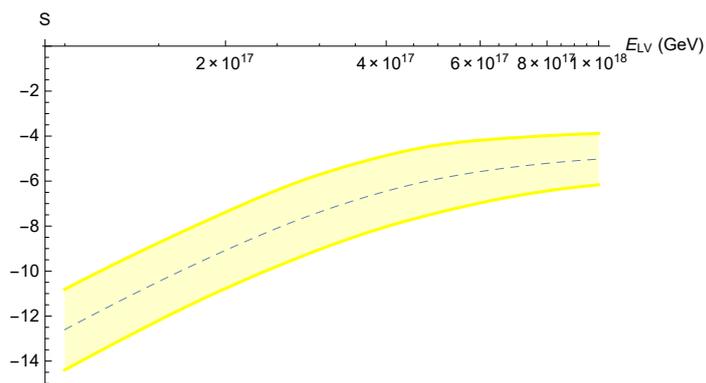
matrix = {energyvec, disp1p};
sigma1pt = Transpose[matrix];
transposición

Clear[matrix];
borra

matrix = {energyvec, disp1m};
sigma1mt = Transpose[matrix];
transposición

ListLogLinearPlot[{sigma0t, sigma1pt, sigma1mt},
representación log lineal de lista
  AxesLabel -> {"ELV (GeV)", "S"},
etiqueta de ejes
  PlotStyle -> {{Grey, Dashed, Thin}, Yellow, Yellow},
rayado delgado amarillo amarillo
  Joined -> {True, True, True}, Filling -> {{2 -> {1}}, {3 -> {1}}} ]
unido verda... verda... verdad... relleno

```



- Línea de medias y error con 3 sigmas

```

Clear[matrix];
borra

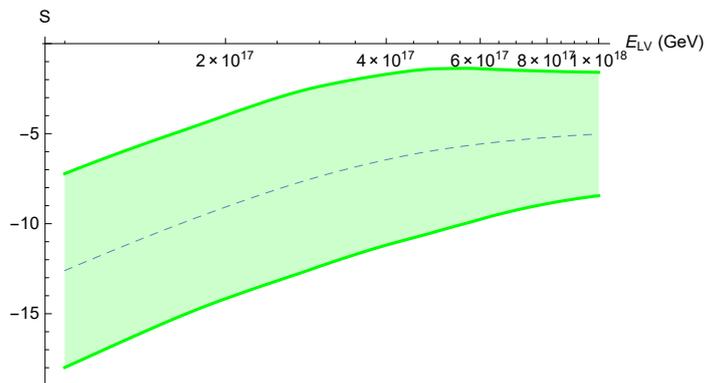
matrix = {energyvec, disp3p};
sigma3pt = Transpose[matrix];
transposición

Clear[matrix];
borra

matrix = {energyvec, disp3m};
sigma3mt = Transpose[matrix];
transposición

```

```
ListLogLinearPlot[{sigma0t, sigma3pt, sigma3mt},
  representación log lineal de lista
  AxesLabel -> {"ELV (GeV)", "S"},
  Etiqueta de ejes
  PlotStyle -> {{Grey, Dashed, Thin}, Green, Green},
  rayado delgado verde verde
  Joined -> {True, True, True}, Filling -> {{2 -> {1}}, {3 -> {1}}} ]
  unido verdadera verdadera verdadera relleno
```



■ Líneas de medias y error con 5 sigmas

```
Clear[matrix];
```

borra

```
matrix = {energyvec, disp5p};
```

```
sigma5pt = Transpose[matrix];
```

transposición

```
Clear[matrix];
```

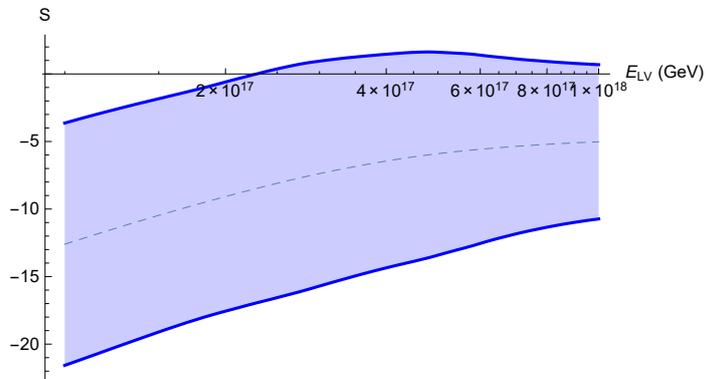
borra

```
matrix = {energyvec, disp5m};
```

```
sigma5mt = Transpose[matrix];
```

transposición

```
ListLogLinearPlot[{sigma0t, sigma5pt, sigma5mt},
  representación log lineal de lista
  AxesLabel → {"ELV (GeV)", "S"}, PlotStyle → {{Grey, Dashed, Thin}, Blue, Blue},
  etiqueta de ejes          estilo de representación  rayado  delgado azul azul
  Joined → {True, True, True}, Filling → {{2 → {1}}, {3 → {1}}} ]
  unido          verda... verda... verda... relleno
```



■ Gráfica final

```
ListLogLinearPlot[{sigma0t, sigma1pt, sigma1mt, sigma3pt,
  representación log lineal de lista
  sigma3mt, sigma5pt, sigma5mt, stab}, AxesLabel → {"ELV (GeV)", "S"},
  etiqueta de ejes
  PlotStyle → {None, Yellow, Yellow, Green, Green, Blue, Blue, Red},
  estilo de represe... ninguno amarillo amarillo verde verde azul azul rojo
  Joined → {True, True, True, True, True, True, True, True},
  unido          verda... verda... verda... verda... verda... verda... verda... verdadero
  Filling → {{2 → {1}}, {3 → {1}}, {4 → {2}}, {5 → {3}}, {6 → {4}}, {7 → {5}}} ]
  relleno
```

