

La paradoja de Banach-Tarski



Julia Bielsa López

Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Julio J. Bernués Pardo
20 de junio de 2017

Prólogo

Podemos tomar una esfera maciza y dividirla en cinco partes, de manera que aplicándoles movimientos rígidos, se formen dos esferas del mismo tamaño que la inicial. Es decir, podemos duplicar la esfera utilizando tan solo rotaciones y traslaciones. Este hecho se conoce con el nombre de Paradoja de Banach-Tarski y, aunque parezca difícil de creer, es un teorema totalmente válido que fue demostrado por Banach y Tarski en 1924. Existe otra manera de enunciar este teorema y es quizás aún más sorprendente: es posible cortar un guisante en un número finito de trozos y desplazarlos mediante movimientos rígidos hasta obtener una bola del tamaño del sol. Esta demostración será el objetivo de la primera parte del trabajo y para ello usaremos el famoso Axioma de Elección que, de manera informal, afirma que dada una colección de cajas con objetos dentro de ellas, es posible *elegir* un objeto de cada caja. Este axioma se utiliza en muchas áreas de las matemáticas y ha sido un tema muy polémico, puesto que tiene consecuencias como la que acabamos de nombrar o la existencia de conjuntos no medibles. En 1938 Kurt Gödel probó que el Axioma de Elección es consistente con los axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fränkel. Además, Paul Joseph Cohen demostró en 1963 de que su negación también es coherente con estos principios. Esto quiere decir que, a partir de los axiomas usuales de ZF , no podemos demostrar su veracidad, puesto que tanto $ZF + AC$ como $ZF + \text{no } AC$ son sistemas consistentes. (Ver [1, pág 207]).

Banach probó en 1923 que, si dos conjuntos medibles y acotados del plano son equivalentes por descomposición, entonces sus áreas son iguales. Por esta razón, en el plano no existen paradojas como las vistas en el capítulo anterior. Sólo podemos duplicar, como veremos más adelante, ciertos conjuntos de medida cero. Es natural preguntarse si el recíproco también es cierto. En este trabajo sólo estudiaremos el caso particular en el que los conjuntos son polígonos, en el que sí se cumple la doble implicación. Explicaremos el concepto de congruencia por disección, que consiste en cortar un polígono en un número finito de piezas y desplazarlas mediante las isometrías del plano hasta formar otro polígono, como si se tratara de las piezas de un tangram. Este concepto es distinto de la equivalencia por descomposición vista en la primera parte del trabajo, puesto que ahora ignoramos las fronteras. Sin embargo, veremos que en el caso de los polígonos estos dos conceptos son equivalentes. Es decir, dos polígonos con la misma área son siempre congruentes por disección, aunque existe el problema de hacerlo con el menor número de piezas posible. Veremos aquí un ejemplo de cómo transformar un triángulo equilátero en un cuadrado con tan sólo cuatro piezas. Esta construcción fue propuesta por Henry E. Dudeney en 1902, hasta la fecha sólo existía una solución con cinco piezas. Dudeney, autor inglés que aunque no fuera matemático poseía una fuerte intuición para la geometría, fue el principal inventor de este tipo de puzzles, además de producir cientos de acertijos de todo tipo. Por último, uno puede plantearse qué ocurre si un conjunto es un círculo y el otro un cuadrado, es decir, el famoso problema de la cuadratura del círculo. Explicaremos brevemente los resultados logrados sobre esta cuestión aunque omitiremos las demostraciones.

Finalmente, también es inevitable pensar que al duplicar una esfera existe un problema de conservación del volumen. Para ver que no hay nada matemáticamente incorrecto hay que recurrir a la teoría de la medida, puesto que las partes en las que dividimos la esfera son conjuntos no medibles. Es decir, no podemos asociarles una medida y por lo tanto no podemos hablar de volumen. La existencia de estos conjuntos surge, como dijimos al principio, al aplicar el axioma de elección. Al final de este trabajo

probaremos la existencia de este tipo de conjuntos.

Summary

Our aim is the proof of the following result: given a solid ball in \mathbb{R}^3 , there exists a decomposition of the ball into a finite number of disjoint subsets, which can then be put back together in a different way to yield two identical copies of the original ball. This is known as the Banach-Tarski Paradox. The fact that the Axiom of Choice is used in the construction makes it quite distant from physical reality. However, there are some examples that do not need the Axiom of Choice, as we will see in the theorem 1.4.

We begin with a formal definition of the idea of duplicating a set using certain transformations.

Definition. Let G be a group acting on a set X and suppose $E \subset X$. E is G -paradoxical if for some positive integers m, n there are partitions $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ of E and $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ such that $E = \bigcup g_i(A_i)$ and $E = \bigcup h_j(B_j)$.

Now we can state the Banach-Tarski Paradox as: any ball in \mathbb{R}^3 is paradoxical with respect to the group of isometries of \mathbb{R}^3 . But, when does a group produce these paradoxes? It has to do with the free group on two generators, known as free group of rank 2. Recall that the free group F with generating set M is the group of all finite words using letters from $\{\sigma, \sigma^{-1} : \sigma \in M\}$, where two words are equivalent if one can be transformed to the other by the removal or addition of finite pairs of adjacent letters of the form $\sigma\sigma^{-1}$ or $\sigma^{-1}\sigma$. A word with no such adjacent pairs is called a reduced word and to avoid the use of equivalence classes, F may be taken to consist of all reduced words, with the group operation being concatenation.

Any group acts naturally on itself by left translation, so a group can be paradoxical with respect to this action. It turns out that a group is paradoxical when it contains a free group of rank 2. Moreover, we will proof (here it is where the Axiom of Choice will be required) that if a group G is paradoxical and acts on X without nontrivial fixed points, then X is G -paradoxical.

The group of isometries on \mathbb{R}^3 contains a free group of rank 2, which means that it is paradoxical. In fact, even the group of all rotations on \mathbb{R}^3 , SO_3 , is paradoxical. It also acts on the sphere (except for a countable set D) without nontrivial fixed points. This is known as the Hausdorff Paradox: there is a countable subset D of S^2 such that $S^2 \setminus D$ is SO_3 -paradoxical. But we want the whole sphere to be paradoxical. The group of isometries on \mathbb{R}^3 acts on S^2 with nontrivial fixed points, so this is not immediate. However we will see how this small set, D , can be eliminated, yielding the Banach-Tarski Paradox: S^2 is SO_3 -paradoxical. Finally, if we want a solid ball in \mathbb{R}^3 to be paradoxical, we will show that not only SO_3 but the group of isometries on \mathbb{R}^3 will be necessary.

The second part of this dissertation takes place in the plane. Here we can only duplicate sets of measure zero, as we see in the theorem 1.4. Therefore, we won't be able to create those kind of paradoxes we did in the first part. However, we can consider the problem of congruence by dissection of polygons. The idea of cutting a figure into pieces and rearranging them to form another figure goes back at least to Greek geometry. Notice that when forming such rearrangements, one totally ignores the boundaries of the pieces.

Our aim in this part is to show if this is possible in all cases. We can prove that two polygons are congruent by dissection if and only if they have the same area. In the first part, we used the concept of equidecomposition, which doesn't ignore the boundaries. It turns out that these two concepts are equivalent in this context, although we only prove one implication here. That is, two polygons are equidecomposable if and only if they are congruent by dissection. At the end we will explain one example of congruence by dissection: how can we form a square from an equilateral triangle.

Finally, we can't avoid the Circle-Squaring problem. In 1925, Alfred Tarski asked whether a circle can be partitioned into finitely many pieces that can be rearranged to form a square. The paper [4] shows that this is possible with a finite number of measurable pieces.

The Lebesgue measure problem is the topic of the last part. In 1902, he asked if all bounded subsets in \mathbb{R} could be measured and verify the following conditions:

- (I) $\mu(E) > 0$ for some bounded set E .
- (II) if there exists an isometry from E to F , then $\mu(E) = \mu(F)$.
- (III) if E_i are bounded and pairwise disjoint sets and we call E the union of all of them, then:

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Now we know the unbounded sets are not problematic so we can consider any set. Besides, instead of considering all isometries, we will only ask the sets to be invariant under translations. However, if we want our measure to verify these conditions, there are some subsets which can't be measured and they are called non measurable sets. There seems to be a volume conservation problem when we duplicate our sphere. The reason why this is mathematically correct is that the pieces we use are non measurable sets, so we can't even talk about volume. We are not going to study here those pieces in particular, but we will prove the existence of a non measurable set.

Índice general

Prólogo	III
Summary	V
1. Conjuntos paradójicos	1
2. Grupos paradójicos. El papel del AE.	7
3. Grupo de isometrías. La paradoja de Banach-Tarski	9
4. El plano. Polígonos congruentes	13
5. Conjuntos no medibles	21
Bibliografía	23

Capítulo 1

Conjuntos paradójicos

Veamos en primer lugar que cuando un grupo actúa sobre un conjunto puede dar lugar a lo que llamaremos un conjunto paradójico. La principal característica de estos conjuntos es que pueden “duplicarse”, lo que será una idea fundamental para probar la paradoja de Banach-Tarski. Para ver esto en más detalle, necesitaremos las siguientes definiciones.

Definición 1.1. Decimos que un grupo G actúa sobre un conjunto X si existe una aplicación $\Phi: G \times X \rightarrow X$, denotada $\Phi(g, x) = gx$, tal que

- (a) $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$, para $g_1g_2 \in G$ y $x \in X$,
- (b) $1x = x$, siendo 1 el neutro en G .

Notar que cada elemento $g \in G$ es una aplicación biyectiva:

$$\begin{aligned} g: X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto gx. \end{aligned}$$

Observación 1.1. Consideramos en X la relación de equivalencia dada por

$$xRy \quad \text{si y sólo si existe } g \in G \text{ tal que } gx = y$$

Diremos que la clase de equivalencia de un punto $x \in X$ es la *órbita* de x , $G(x)$. El conjunto de las órbitas es una partición de X . Esto último será muy importante a la hora de utilizar el axioma de elección, puesto que lo que haremos será formar un conjunto de representantes, eligiendo uno de cada órbita.

Vamos a introducir una definición que será fundamental en todo lo que sigue.

Definición 1.2. $A, B \subset X$ son *equivalentes por descomposición finita bajo la acción de G* , $A \sim_G B$, si existen $n \in \mathbb{N}$ y dos familias de subconjuntos dos a dos disjuntos, $\{A_1, \dots, A_n\}$ de A y $\{B_1, \dots, B_n\}$ de B y elementos $g_1, \dots, g_n \in G$, tales que

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^n B_i \quad \text{y} \quad B_i = g_i A_i, \quad \text{para } i \in \{1, \dots, n\}.$$

En algunas ocasiones, para simplificar, omitiremos el grupo G si queda claro por el contexto y diremos *equivalente* en lugar de *equivalente por descomposición finita*.

Veamos un ejemplo sencillo de equivalencia por descomposición finita. Es un ejemplo muy relevante, ya que además de aclarar esta definición, será la idea de algunas de las demostraciones que veremos más adelante. Podemos tomar una circunferencia, partirla en dos trozos, hacer girar uno de ellos de

manera que sigan siendo disjuntos y unirlos de nuevo, de forma que obtengamos una circunferencia a la que le falte un punto. Repitiendo este proceso, podremos quitar de la circunferencia cualquier número finito (o incluso numerable) de puntos. De manera más precisa:

Ejemplo 1.1. La circunferencia unidad de centro el origen, C , es equivalente por descomposición finita bajo la acción de G a $C \setminus \{p\}$, donde p es un punto cualquiera de C y G es el grupo de rotaciones de la circunferencia alrededor del origen.

Denotamos $T \in G$ al giro de ángulo 1. Es decir, si giramos el punto p mediante T , obtenemos otro punto $T(p)$ de C . Este otro punto lo podemos volver a girar: $T(T(p)) = T^2(p)$ y así sucesivamente. De esta manera, formamos el conjunto $A = \{p, T(p), T^2(p), T^3(p), \dots\}$. Si ahora giramos el conjunto A mediante T , llegamos a $T(A) = \{T(p), T^2(p), T^3(p), \dots\}$. Sin embargo, el punto p no pertenece al nuevo conjunto $T(A)$. Esto se debe a que, como el número π es irracional, todos los puntos $p, T(p), T^2(p), \dots$ van a ser distintos.

Para ver esto en más detalle, identificamos \mathbb{R}^2 con el plano complejo \mathbb{C} , entonces

$$T^n(p) = e^{in}p, \quad n \in \mathbb{N}$$

Si fuera $T^n(p) = p$, entonces $e^{in}p = p$. Como $p \neq 0$ por pertenecer a la circunferencia unidad, $e^{in} = 1$, y esto es cierto si y sólo si $n = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, por lo que tendríamos $\pi = \frac{n}{2k}$, contradicción, porque π es irracional.

Por lo tanto, $T(A) = A \setminus \{p\}$. Ahora ya tenemos la solución. Nuestro conjunto A de la definición anterior es la circunferencia C , y B será $C \setminus \{p\}$. Dividimos la circunferencia C en dos partes disjuntas, A y $C \setminus A$, (que serán nuestros A_1 y A_2). Al primero le aplicamos el giro T y obtenemos $T(A) = A \setminus \{p\}$ y el segundo lo dejamos como está, $C \setminus A$. Si unimos ahora $A \setminus \{p\}$ y $C \setminus A$, obtenemos $C \setminus \{p\}$, como queríamos probar.

Teorema 1.1. La “equivalencia por descomposición” entre partes de X es una relación de equivalencia.

Demostración. Ver que es reflexiva y simétrica son comprobaciones inmediatas. Vamos a probar que es transitiva. Sean $A, B, C \subset X$ tales que $A \sim_G B$ y $B \sim_G C$. Entonces existen $\{A_1, \dots, A_n\}$, $\{B_1, \dots, B_n\}$ y elementos $g_1, \dots, g_n \in G$ como en la definición anterior. Además existen dos familias de subconjuntos disjuntos dos a dos $\{B'_1, \dots, B'_m\}$ de B y $\{C_1, \dots, C_m\}$ de C y elementos $h_1, \dots, h_m \in G$ tales que

$$B = \bigcup_{j=1}^m B'_j, \quad C = \bigcup_{j=1}^m C_j \quad \text{y} \quad C_j = h_j B'_j, \quad \text{para } j \in \{1, \dots, m\}$$

Tomamos la familia $\{g_i^{-1}(B_i \cap B'_j)\}_{i,j}$ de subconjuntos de A . Notar que son disjuntos dos a dos por serlo los B_i y porque las funciones g_i^{-1} son biyectivas. Veamos ahora que su unión es el conjunto A :

$$\begin{aligned} \bigcup_{i,j} g_i^{-1}(B_i \cap B'_j) &= \bigcup_{j=1}^m \left(\bigcup_{i=1}^n g_i^{-1}(B_i \cap B'_j) \right) = \bigcup_{j=1}^m \left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap g_i^{-1} B'_j) \right) = \bigcup_{j=1}^m \left(A \cap \bigcup_{i=1}^n g_i^{-1} B'_j \right) = \\ &= A \cap \left(\bigcup_{i,j} g_i^{-1} B'_j \right) = A \end{aligned}$$

Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ aplicamos $h_j g_i \in G$ a estos subconjuntos. (Se comprueba fácilmente que los subconjuntos obtenidos son disjuntos dos a dos por serlo los C_j y por ser $h_j g_i$ biyectiva). Veamos que su unión es el conjunto C :

$$\bigcup_{i,j} (h_j g_i (A_i \cap g_i^{-1} B'_j)) = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i=1}^n (h_j g_i (A_i \cap g_i^{-1} B'_j))$$

y por ser las g_i biyectivas, en particular son inyectivas, luego

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i=1}^n (h_j g_i (A_i \cap g_i^{-1} B_j')) &= \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i=1}^n (h_j (g_i A_i \cap B_j')) = \bigcup_{j=1}^m h_j \left(\bigcup_{i=1}^n (g_i A_i \cap B_j') \right) = \bigcup_{j=1}^m h_j \left(\left(\bigcup_{i=1}^n g_i A_i \right) \cap B_j' \right) = \\ &= \bigcup_{j=1}^m h_j (B \cap B_j') = \bigcup_{j=1}^m h_j B_j' = C. \end{aligned}$$

Luego $A \sim_G C$ y por tanto es transitiva. □

Definimos ahora el tipo de conjuntos con los que trabajaremos, aquellos que podemos “duplicar.”

Definición 1.3. Se dice que $E \subset X$ es *paradójico* bajo la acción de G si existen subconjuntos disjuntos A y B de E tales que $A \cup B = E$ y $A \sim_G E \sim_G B$. Es decir, existen dos familias de subconjuntos dos a dos disjuntos $\{A_1, \dots, A_n\}$ de A y $\{B_1, \dots, B_m\}$ de B y elementos $g_1, \dots, g_n \in G, h_1, \dots, h_m \in G$, tales que

$$E = \bigcup_{i=1}^n g_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^m h_j(B_j).$$

Vamos a ver el siguiente lema que más adelante será útil para demostrar la paradoja de Banach-Tarski.

Lema 1.2. Sean $E, F \subset X$ dos conjuntos equivalentes (bajo la acción del grupo G), es decir, $E \sim_G F$. Entonces si E es paradójico, también lo es F .

Demostración. Sean $E, F \subset X$, tales que $E \sim_G F$. Podemos tomar $A, B \subset E$ disjuntos tales que $A \sim_G E \sim_G B$ con $A \cup B = E$. Es decir, existen $E_i \subset E$, disjuntos dos a dos, y $g_i \in G$ de manera que:

$$E = \bigcup_{i=1}^n E_i, \quad F = \bigcup_{i=1}^n g_i E_i$$

Y tomamos los conjuntos

$$A' = \bigcup_{i=1}^n g_i(A \cap E_i), \quad B' = \bigcup_{i=1}^n g_i(B \cap E_i),$$

que son subconjuntos de F y, además, $A' \cup B' = F$. Notar que, por ser biyectivas las aplicaciones g_i , son disjuntos. Por la misma razón, también son disjuntos dos a dos $\{g_i(A \cap E_i)\}_i$ y $\{g_i(B \cap E_i)\}_i$. Por tanto,

$$A' \sim_G \bigcup_{i=1}^n (A \cap E_i) = A \sim_G E \sim_G F$$

Lo mismo ocurre con $B' \sim_G F$. Por tanto, F también es paradójico. □

A continuación veremos un teorema que nos permitirá dar otra definición equivalente de estos conjuntos. Ésta última será más cómoda a la hora de probar algunos de los resultados.

Ya hemos visto que *ser equivalente por descomposición* es una relación de equivalencia. Definimos otra relación, \preceq , como

$$A \preceq B \quad \text{si y sólo si } A \text{ es equivalente a un subconjunto de } B.$$

Es inmediato comprobar que \preceq es reflexiva y transitiva.

Teorema 1.3 (de Banach-Schröder-Bernstein). *Sea G un grupo que actúa en X y $A, B \subset X$. Si $A \preceq B$ y $B \preceq A$, entonces $A \sim_G B$.*

Demostración. Veamos primero que la relación \sim_G satisface las dos siguientes condiciones:

- (a) si $A \sim_G B$, entonces hay una biyección $g : A \rightarrow B$ tal que $C \sim_G g(C)$ siempre que $C \subset A$.
 (b) si $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$, y si $A_1 \sim_G B_1$ y $A_2 \sim_G B_2$, entonces $A_1 \cup A_2 \sim_G B_1 \cup B_2$.

Ver que satisface la segunda propiedad es una comprobación inmediata. Vamos a probar que cumple la primera. Como $A \sim_G B$, existen $\{A_1, \dots, A_n\}$, $\{B_1, \dots, B_n\}$, $g_1, \dots, g_n \in G$ tales que

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^n B_i \quad \text{y} \quad B_i = g_i A_i, \quad \text{para } i \in \{1, \dots, n\}$$

Sea $a \in A$, entonces $a \in A_i$ para algún i , luego podemos definir la aplicación g de manera que $g(a) = g_i a$. (Notar que está bien definida porque los A_i son disjuntos dos a dos). Además existe la aplicación inversa. Sea $b \in B$, también $b \in B_i$ para algún i , luego $b = g_i a$ para algún $g_i \in G$ y algún $a \in A_i$. Por tanto, podemos definir $g^{-1}(b) = g_i^{-1} b = a$. Luego g es biyectiva.

Dividimos C en los subconjuntos $A_i \cap C$, que son disjuntos dos a dos por serlo los A_i . Además:

$$\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap C) = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \cap C = A \cap C = C.$$

Y aplicamos g_i a cada uno de estos subconjuntos y, como g es en particular inyectiva:

$$g_i(A_i \cap C) = g(A_i \cap C) = g(A_i) \cap g(C) = B_i \cap g(C).$$

Y estos subconjuntos también son disjuntos dos a dos por serlo los B_i . Sólo falta por ver que su unión es $g(C)$:

$$\bigcup_{i=1}^n (B_i \cap g(C)) = \left(\bigcup_{i=1}^n B_i \right) \cap g(C) = B \cap g(C) = g(C).$$

Y por tanto $C \sim_G g(C)$.

Con estas condiciones ya podemos demostrar el teorema. De $A \preceq B$ se tiene que existe $B_1 \subset B$ con $A \sim_G B_1$, y de $B \preceq A$ se tiene que existe $A_1 \subset A$ con $B \sim_G A_1$. Por lo tanto, existen las biyecciones $f : A \rightarrow B_1$, $g : A_1 \rightarrow B$, donde $B_1 \subset B$ y $A_1 \subset A$, dadas por (a). Sea $C_0 = A \setminus A_1$, y definimos C_{n+1} como $g^{-1}f(C_n)$, sea $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$. Entonces es fácil comprobar que $g(A \setminus C) = B \setminus f(C)$. En efecto, teniendo en cuenta que g y f son biyectivas,

$$\begin{aligned} g(A \setminus C) &= g\left(A \setminus \left((A \setminus A_1) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right)\right) = g\left(A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = g(A_1) \setminus g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = B \setminus g\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_{n+1}\right) \\ &= B \setminus g\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} g^{-1}f(C_n)\right) = B \setminus gg^{-1}f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\right) = B \setminus f(C). \end{aligned}$$

Y, por haber elegido las biyecciones como en (a), g implica que $A \setminus C \sim_G g(A \setminus C) = B \setminus f(C)$ y f implica que $C \sim_G f(C)$. Por la propiedad (b), $(A \setminus C) \cup C \sim_G (B \setminus f(C)) \cup f(C)$, es decir, $A \sim_G B$. \square

Observación 1.2. Decimos que una relación sobre un conjunto X es una relación de orden parcial si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Una relación es antisimétrica si para todo $a, b \in X$ se cumple que, si a está relacionado con b y b está relacionado con a , entonces $a = b$. Ya habíamos visto que la relación \preceq era reflexiva y transitiva. Este teorema prueba que también es antisimétrica. Por lo tanto, es una relación de orden parcial, definida sobre las clases de equivalencia dadas por \sim_G .

Gracias a este resultado podemos dar una definición equivalente de conjunto paradójico.

Corolario 1.1. Un subconjunto E de X es paradójico si y sólo si existen $A, B \subset E$ disjuntos tales que $A \sim_G E \sim_G B$.

Demostración. Es claro que, si un subconjunto E cumple nuestra definición inicial de paradójico, también cumple ésta. Recíprocamente, si existen A y B subconjuntos disjuntos de E , tales que $A \sim_G E \sim_G B$. Entonces, $E \sim_G B \subset E \setminus A \subset E$, luego $E \preceq E \setminus A$ y, trivialmente, $E \setminus A \preceq E$, por tanto, por el teorema que acabamos de probar, $E \sim_G E \setminus A$. Por tanto, ya tenemos dos subconjuntos disjuntos de E , A y $E \setminus A$, de manera que $A \sim_G E \sim_G (E \setminus A)$ y además $A \cup (E \setminus A) = E$, por lo que también cumple la primera definición de conjunto paradójico. \square

Observación 1.3. Notar que en esta última definición equivalente dada por el corolario 1.1 no es necesario exigir $A \cup B = E$, lo que nos facilitará las cosas en algunas demostraciones.

Por ejemplo, para probar la existencia del siguiente conjunto paradójico en el plano: podemos tomar cierto conjunto del plano, separarlo en dos partes disjuntas y ver que cada una de ellas es equivalente al conjunto inicial. Consideremos para ello la identificación de \mathbb{R}^2 con el plano complejo \mathbb{C} .

Teorema 1.4 (Mazurkiewicz-Sierpinski). *Existe en el plano un conjunto E que es paradójico bajo el grupo G de isometrías.*

Demostración. Sea $\phi(z) = z + 1$ y $\psi(z) = e^i z$, la traslación de longitud 1 a lo largo del eje real y la rotación de 1 radián en torno al origen, respectivamente. Sea E , el conjunto formado por el punto 0 y todos los obtenidos de él por aplicación sucesiva de un número finito de transformaciones ϕ y ψ en cualquier orden.

Sean $A = \phi(E)$ y $B = \psi(E)$, evidentemente A y B están contenidos en E , y además, trivialmente, $A \sim_G E \sim_G B$. Por tanto, para ver que E es paradójico solo falta probar que A y B son disjuntos.

Es fácil ver que cualquier punto de E viene expresado por un polinomio en e^i , $P(e^i)$, con coeficientes naturales. Se puede comprobar procediendo por inducción sobre el número k de aplicaciones al punto 0 de las transformaciones ϕ y ψ . Resulta inmediato para $k = 0, 1$. Si para $k = n$ el resultado ha sido el polinomio en e^i con coeficientes naturales $P(e^i)$, entonces para $k = n + 1$ tenemos

$$\phi(P(e^i)) = P(e^i) + 1 \quad \text{o bien,} \quad \psi(P(e^i)) = e^i P(e^i)$$

que son de nuevo polinomios en e^i con coeficientes naturales.

De esto además deducimos que si $p \in A$, su correspondiente término independiente es positivo, mientras que si $p \in B$, su correspondiente término independiente es nulo. Vamos a suponer que existe un punto $p \in A \cap B$ y llegaremos a contradicción. Si existiese tal punto, se tendría

$$p = P(e^i) = Q(e^i)$$

siendo $P(e^i)$ y $Q(e^i)$ polinomios en e^i no idénticos, es decir,

$$P(e^i) - Q(e^i) = 0$$

con el primer miembro un polinomio no nulo en e^i con coeficientes enteros. Pero esto es imposible, dado que e^i es un número trascendente, por el teorema de Lindemann [2], que afirma que e^α es trascendente para todo α algebraico no nulo.

□

Capítulo 2

Grupos paradójicos. El papel del AE.

En el capítulo anterior vimos la existencia de conjuntos paradójicos, que surgían cuando ciertos grupos actuaban sobre un conjunto. Nos planteamos aquí estudiar qué ocurre cuando estos conjuntos son, en particular, grupos. El ejemplo más sencillo de acción de un grupo es cuando lo hace sobre sí mismo mediante la operación que lo define. Un grupo opera sobre sí mismo a izquierda por multiplicación, es decir, para la ley $(g, h) \rightarrow gh$ de G sobre sí mismo, lo que da lugar a grupos paradójicos. Veremos que los ejemplos de estos grupos dependen, y mucho, de lo que llamaremos un *grupo libre de rango 2*. Además, utilizando el axioma de elección, probaremos que los grupos paradójicos que actúan libremente sobre conjuntos producen conjuntos paradójicos. Es decir, podemos trasladar a los conjuntos lo que ocurre en los grupos.

Definición 2.1. Un grupo G es *paradójico* si es paradójico bajo la acción anterior.

Definición 2.2. Dado un grupo G y $a, b \in G$, el producto $g_1 g_2 \dots g_n$ de elementos de G , todos iguales a a, b, a^{-1}, b^{-1} , se llama una *palabra* con respecto a las cuatro letras a, b, a^{-1}, b^{-1} .

Una palabra $g_1 g_2 \dots g_n$ se dice *reducida* si $g_i g_{i+1} \neq 1$ para cada $i < n$; de otro modo, si no hay dos términos consecutivos inversos el uno del otro.

Definición 2.3. En las anteriores condiciones $a, b \in G$ son *independientes* si los elementos a, b, a^{-1}, b^{-1} son todos distintos y para cada palabra con respecto a estas cuatro letras, es imposible tener

$$g_1 \dots g_n = 1 \quad \text{si} \quad g_i g_{i+1} \neq 1 \quad \text{para} \quad 1 \leq i < n.$$

El grupo H generado por a y b se llama *grupo libre de rango 2*. La identidad de este grupo, a la que denotaremos 1 , es la palabra vacía.

Teorema 2.1. *Un grupo libre de rango 2 es paradójico.*

Demostración. Sea G un grupo libre generado por los elementos a y b . Denotamos por $W(a)$ el conjunto de los elementos de G que comienzan por a . Por tanto, podemos escribir G como:

$$G = \{1\} \sqcup \{W(a)\} \sqcup \{W(a^{-1})\} \sqcup \{W(b)\} \sqcup \{W(b^{-1})\}$$

Claramente, $G = W(a) \sqcup aW(a^{-1})$. Y, análogamente, $G = W(b) \sqcup bW(b^{-1})$, y así, podemos tomar los conjuntos disjuntos

$$A = W(a) \cup W(a^{-1}) \quad \text{y} \quad B = W(b) \cup W(b^{-1})$$

y G es paradójico. □

Notar que para esta demostración hemos usado la definición de conjunto paradójico que nos daba el corolario 1.1.

Definición 2.4. Sea G un grupo que opera sobre el conjunto X , diremos que G opera *libremente* sobre X , si para cada $g \neq 1$ en G y todo $x \in X$ es $gx \neq x$.

Hasta ahora no hemos utilizado el axioma de elección, sin embargo, es imprescindible para probar el siguiente resultado, que será fundamental en nuestra demostración de la paradoja. La idea es que lo que ocurre en G pasa a X por la acción del grupo.

Teorema 2.2. (AE) Si un grupo G es paradójico y opera libremente sobre un conjunto X , entonces X es paradójico bajo la acción de G .

Demostración. Escogemos $A, B \subset G$, disjuntos, tales que $A \cup B = G$. Sean $A_1, \dots, A_n \subset A$ disjuntos dos a dos, $B_1, \dots, B_m \subset B$ también disjuntos dos a dos y elementos del grupo $g_i, h_j \in G$, tales que

$$G = \bigcup_{i=1}^n g_i A_i = \bigcup_{j=1}^m h_j B_j$$

Consideramos en X la relación de equivalencia definida por xRy si y sólo si $x = g(y)$ para algún $g \in G$, y escogemos, aquí es donde es necesario el Axioma de Elección, un representante de cada clase para formar un subconjunto $M \subset X$. La inexistencia de puntos fijos no triviales implica que la familia $\{g(M)\}_{g \in G}$ es una partición de X .

En efecto, sea $a \in g(M)$ y $a \in h(M)$. Entonces existe $m \in M$ tal que $a = gm$, donde m es el representante de a . Pero a sólo puede pertenecer a una clase de equivalencia, luego $a = hm$, es decir $gm = hm$ y por tanto $m = g^{-1}hm$. Pero como G actúa libremente, no puede haber puntos fijos no triviales, luego $g^{-1}h$ tiene que ser la identidad y por tanto $h = g$.

Definiendo $A'_i = \bigcup \{g(M) | g \in A_i\}$ y $B'_j = \bigcup \{g(M) | g \in B_j\}$ obtenemos una partición finita de X tal que $X = \bigcup_{i=1}^n g_i(A'_i) = \bigcup_{j=1}^m h_j(B'_j)$, lo cual prueba que X es paradójico. □

Corolario 2.1. (AE) Un grupo G que contiene un subgrupo H paradójico es también paradójico.

Demostración. Notar que un subgrupo siempre actúa libremente en un grupo por la existencia de inverso. □

Capítulo 3

Grupo de isometrías. La paradoja de Banach-Tarski

Para poder demostrar la paradoja de Banach-Tarski, tenemos que probar que la esfera es un conjunto paradójico, puesto que la principal característica de estos conjuntos es que pueden “duplicarse”. En el capítulo anterior vimos que, cuando un grupo paradójico actúa libremente sobre un conjunto, éste último también es paradójico. Por tanto, nuestro objetivo ahora será ver que el grupo de isometrías de \mathbb{R}^3 es un grupo paradójico, aunque no actúa libremente sobre la esfera. Sin embargo, sí actúa libremente si a la esfera le quitamos un conjunto numerable de puntos. Veremos que este último, que es paradójico, es equivalente por descomposición a la esfera, concluyendo que también la esfera es paradójica.

Definición 3.1. Una *isometría* de \mathbb{R}^3 es una biyección de f de \mathbb{R}^3 sobre sí mismo que preserva las distancias, es decir, usando la norma euclídea, se tiene

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|, \quad \text{para cada } x, y \in \mathbb{R}^3$$

El conjunto de las isometrías de \mathbb{R}^3 constituye un grupo de transformaciones de \mathbb{R}^3 , al que denotaremos G_3 . Las isometrías que dejan invariante el origen de coordenadas son particularmente interesantes: son aplicaciones lineales (biyectivas), que conservan la norma y el producto escalar. Las llamamos *transformaciones ortogonales* de \mathbb{R}^3 y son aquellas cuya matriz asociada verifica la igualdad $A^t = A^{-1}$: su determinante es ± 1 . Forman un subgrupo O_3 del grupo de las isometrías de \mathbb{R}^3 .

Las matrices ortogonales de determinante 1 corresponden a las rotaciones del espacio alrededor de un eje pasando por el origen. Forman un subgrupo de O_3 , el *grupo ortogonal especial* SO_3 . Vamos a probar ahora que este grupo tiene dos elementos independientes para ver que es paradójico.

Teorema 3.1. *Hay dos rotaciones independientes, ϕ y ρ , alrededor de los ejes en \mathbb{R}^3 . Entonces, SO_3 tiene un subgrupo libre de rango 2.*

Demostración. Sean ϕ y ρ rotaciones en sentido contrario a las agujas del reloj alrededor del eje x y del eje z , respectivamente, ambas con un ángulo $\arccos(\frac{1}{3})$. Entonces, $\phi^{\pm 1}$, $\rho^{\pm 1}$ están representados por matrices como sigue:

$$\phi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \rho^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Queremos probar que ninguna palabra, que no sea trivial, formada por $\phi^{\pm 1}$ y $\rho^{\pm 1}$, es igual a la identidad. La conjugación por ϕ no afecta a si una palabra es la identidad o no, es decir, $w = 1$ si y sólo

si $\phi w \phi^{-1} = 1$. Luego sólo tenemos que comprobar las palabras que terminan en $\phi^{\pm 1}$. Por tanto, para llegar a contradicción, suponemos que w es una palabra de este tipo y que es igual a la identidad.

Vamos a ver que $w(1, 0, 0)$ es de la forma $(a, b\sqrt{2}, c)/3^k$, donde a, b, c son enteros y b no es divisible por 3. Esto implica que $w(1, 0, 0) \neq (1, 0, 0)$ y, por tanto, llegamos a contradicción, ya que habíamos supuesto que w era la identidad.

Para probar esto, vamos a proceder por inducción sobre la longitud de w . Por la forma en la que hemos tomado w , si tiene longitud 1, tiene que ser $w = \phi^{\pm 1}$, y $w(1, 0, 0) = (1, \pm 2\sqrt{2}, 0)/3$. Luego se cumple para $k = 1$.

Supongamos ahora que $w = \phi^{\pm 1} w'$ ó $w = \rho^{\pm 1} w'$, donde $w'(1, 0, 0) = (a', b'\sqrt{2}, c')/3^{k-1}$. Si le aplicamos la matriz correspondiente, se ve que $w(1, 0, 0) = (a, b\sqrt{2}, c)/3^k$, donde $a = a' \mp 4b'$, $b = b' \pm 2a'$, $c = 3c'$, o bien, $a = 3a'$, $b = b' \mp 2c'$, $c = c' \pm 4b'$, dependiendo de si w empieza por $\phi^{\pm 1}$ o por $\rho^{\pm 1}$. De aquí es inmediato que a, b, c son siempre enteros.

Ahora falta ver que b nunca es divisible por 3. Surgen cuatro casos, dependiendo de si w es de la forma $\phi^{\pm 1} \rho^{\pm 1} v$, $\rho^{\pm 1} \phi^{\pm 1} v$, $\phi^{\pm 1} \phi^{\pm 1} v$ ó $\rho^{\pm 1} \rho^{\pm 1} v$, donde v puede ser la palabra vacía.

En el primero de los primeros casos, usando la notación anterior, para $\rho^{\pm 1} v$ tenemos $a' = 3a''$, $b' = b'' \mp 2c''$ y $c' = c'' \pm 4b''$. Por tanto, al hacer $\phi^{\pm 1} \rho^{\pm 1} v$ obtenemos $b = b' \pm 2a'$. Como a' es divisible por 3, b' lo es si y sólo si lo es b . El segundo caso es análogo.

Para los otros dos casos, sean a'', b'', c'' enteros que surgen de $v(1, 0, 0)$. Entonces en cualquier caso, $b = 2b' - 9b''$. Por ejemplo, en el tercer caso, $b = b' \pm 2a' = b' \pm 2(a'' \mp 4b'') = b' + b'' \pm 2a'' - 9b'' = 2b' - 9b''$. Una comprobación análoga nos sirve para el cuarto caso. Por tanto, si b' no es divisible por 3, tampoco lo es b , como queríamos probar. □

De manera que estas dos rotaciones son independientes y generan un grupo libre no abeliano de rango dos, al que llamaremos G .

Teorema 3.2. *El grupo G es paradójico. Como consecuencia (AE), SO_3 es paradójico.*

Demostración. Que el grupo G es paradójico se deduce directamente del teorema 2.1, y que lo sea SO_3 , del corolario 2.1. □

Sin embargo, todavía no se puede transferir este carácter paradójico al espacio como habíamos hecho en el teorema 2.2, ya que ni G , ni por tanto SO_3 operan libremente sobre \mathbb{R}_3 , puesto que cada rotación tiene una infinidad de puntos fijos.

Para resolver esto, consideramos la esfera sin los puntos fijos por el grupo G , que son los que causan problemas. De esta manera podremos aplicar el teorema 2.2 y ver que la esfera sin el conjunto de puntos fijos es paradójica. Notar que como G es un grupo de rotaciones de ejes pasando por el origen, opera también sobre la esfera unidad \mathbb{S}^2 , es decir, a todo punto $p \in \mathbb{S}^2$ que le apliquemos una rotación de este tipo, seguirá estando en la esfera.

Una rotación θ diferente de la identidad tiene dos puntos fijos, $a_\theta, b_\theta \in \mathbb{S}^2$. Sea:

$$D = \{a_\theta, b_\theta : \theta \in G, \theta \neq id\}$$

el conjunto de los puntos fijos en \mathbb{S}^2 por elementos de G diferentes de la identidad. Como G es numerable, D también lo es. G actúa libremente sobre $\mathbb{S}^2 \setminus D$, luego por el teorema 2.2 es inmediato el siguiente resultado.

Teorema 3.3 (Paradoja de Hausdorff). *(AE) En \mathbb{S}^2 existe un conjunto numerable D tal que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ es paradójico bajo la acción del grupo de las rotaciones.*

A partir de aquí es sencillo llegar al resultado que queremos. Usaremos el lema 1.2, que afirmaba que si E y F son dos conjuntos equivalentes y E es paradójico, entonces también lo es F . Por lo tanto, basta con probar que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ es equivalente a \mathbb{S}^2 , usando para ello la idea del ejemplo 1.1.

Tomamos un punto p cualquiera de $\mathbb{S}^2 \setminus D$, y sea p' su simétrico respecto el origen. Llamamos s_θ a la rotación de eje orientado (p, p') y de ángulo θ .

Para cada $z \in D$, sea

$$\mathcal{A}(z) = \{\theta : s_\theta(z) \in D\}$$

este conjunto es numerable porque D lo es. Luego la unión

$$\mathcal{A} = \bigcup_{z \in D} \mathcal{A}(z)$$

es también numerable. Por tanto, podemos elegir $\theta_0 \notin \mathcal{A}$. Entonces se tiene $s_{\theta_0}(z) \notin D$, para cada $z \in D$; luego $s_{\theta_0}(D) \subset \mathbb{S}^2 \setminus D$. Escribimos entonces

$$E = D \cup s_{\theta_0}(D) \cup s_{\theta_0}^2(D) \cup s_{\theta_0}^3(D) \cup \dots$$

Se comprueba fácilmente que $s_{\theta_0}(E) = E \setminus D$. En efecto, puesto que $s_{\theta_0}(D) \subset \mathbb{S}^2 \setminus D$, es trivial que $D \cap s_{\theta_0}(D) = \emptyset$. Además, $D \cap s_{\theta_0}^2(D) = \emptyset$. Supongamos que no son disjuntos. Entonces existe $q \in D \cap s_{\theta_0}^2(D)$. Por tanto, q es fijo, supongamos que con la rotación r . Además hay un punto $q_2 \in s_{\theta_0}(D)$, no fijo, tal que $q = s_{\theta_0}(q_2)$. Entonces la rotación $s_{\theta_0}^{-1}rs_{\theta_0}$ dejaría fijo al punto q_2 . Notar que esta rotación es distinta de la identidad por serlo r , luego q_2 sería un punto fijo y llegamos a contradicción. Este mismo argumento nos sirve para todo $n > 2$.

Por lo tanto,

$$E \sim_G E \setminus D$$

y, uniendo $\mathbb{S}^2 \setminus E$ en ambos lados de la equivalencia, resulta que

$$\mathbb{S}^2 \sim_G \mathbb{S}^2 \setminus D$$

Por la paradoja de Hausdorff sabemos que $\mathbb{S}^2 \setminus D$ es paradójico. Por tanto, por el lema 1.2, \mathbb{S}^2 también lo es. Se tiene así el siguiente resultado.

Teorema 3.4 (La paradoja de Banach-Tarski). (AC) *La esfera unidad \mathbb{S}^2 es paradójica bajo la acción del grupo de las rotaciones SO_3 de \mathbb{R}^3 .*

El paso de la esfera \mathbb{S}^2 a la bola unidad \mathbb{B}^3 sin el origen es muy simple: basta con reemplazar cada punto $z \in \mathbb{S}^2$ por el segmento $(0, z]$. Por lo tanto, es inmediato que $\mathbb{B}^3 \setminus \{0\}$ también es paradójica.

Sin embargo, la bola unidad \mathbb{B}^3 no es paradójica bajo la acción de SO_3 sólo. Esto se debe a que una rotación cualquiera siempre deja fijo el origen, por tanto todo conjunto equivalente a la bola bajo la acción de las rotaciones va a contener al origen. Para probar que la bola unidad \mathbb{B}^3 es paradójica necesitamos considerar también las traslaciones.

En efecto, sea $P = (0, 0, \frac{1}{2})$ y sea ρ una rotación respecto un eje arbitrario que pasa por P pero no por el origen, de ángulo θ tal que $\frac{\theta}{\pi}$ sea irracional. Para quitar el origen, procedemos como en el ejemplo 1.1. Consideramos

$$A_0 = \{0, \rho(0), \rho^2(0), \rho^3(0), \dots\}$$

Entonces $0 \neq \rho^n(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que sería $n\theta = 2k\pi$, y esto es una contradicción, puesto que $\frac{\theta}{\pi}$ es irracional. Por lo tanto, $\rho(A_0) = A_0 \setminus \{0\}$. Tomamos $A_1 = \mathbb{B}^3 \setminus A_0$. Entonces se verifica la igualdad

$$A_1 \cup \rho(A_0) = \mathbb{B}^3 \setminus \{0\}.$$

Por tanto, $\mathbb{B}^3 \setminus \{0\} \sim_{G_3} \mathbb{B}^3$, donde G_3 es aquí el grupo de isometrías en \mathbb{R}^3 . De manera que tenemos el siguiente

Corolario 3.1. (AE) La bola unidad en \mathbb{R}^3 privada del origen, $\mathbb{B}^3 \setminus \{0\}$ es paradójica bajo el grupo de las rotaciones SO_3 de \mathbb{R}^3 . Además, la bola \mathbb{B}^3 es paradójica bajo el grupo G_3 de isometrías en \mathbb{R}^3 .

Teorema 3.5. (La paradoja de Banach-Tarski, forma fuerte)(AC) Sean A y B dos subconjuntos acotados cualesquiera de \mathbb{R}^3 , con interior no vacío, entonces $A \sim_{G_3} B$.

Demostración. Basta con probar $A \preceq B$, ya que entonces el mismo razonamiento nos sirve para $B \preceq A$ y por el teorema de Banach-Schröder-Bernstein $A \sim_G B$. Elegimos dos bolas sólidas, K y L tales que $A \subset K$ y $L \subset B$, y sea n suficientemente grande para cubrir K con n copias de L . Sea S el subconjunto de n copias de L , aplicando la paradoja de Banach-Tarski repetidamente para duplicar L y usando las traslaciones para desplazar las copias obtenidas, se tiene que $S \preceq L$. Por lo tanto $A \subset K \preceq S \preceq L \subset B$, luego $A \preceq B$. \square

Este último teorema prueba lo que afirmamos en la introducción: es posible cortar un guisante en un número finito de trozos y desplazarlos mediante movimientos rígidos hasta obtener una bola del tamaño del sol. Podemos ver el artículo original en [9].

Capítulo 4

El plano. Polígonos congruentes

La paradoja de Banach-Tarski no tiene análogos en el plano cuando usamos el grupo de isometrías, como podemos ver en [1, pág 157]. En 1923, Banach probó que se puede definir un área para cualquier subconjunto del plano, con las propiedades habituales de aditividad finita e invariancia por movimientos del plano, que extendía el área usual de los subconjuntos cuya área se sabía calcular hasta entonces (los llamados conjuntos medibles Lebesgue). Como consecuencia, si una figura P se puede trocear en un número finito de piezas para que, recomponiéndolas por movimientos del plano, se obtenga otra figura Q , ambas deben tener la misma *área*. Por esta razón no es posible producir paradojas como las vistas en el capítulo anterior. Sólo podremos duplicar ciertos conjuntos de medida cero, como vimos en el teorema 1.4.

Es decir, Banach probó que en $n = 2$, si A y B son medibles y $A \sim_{G_2} B$, entonces su áreas son iguales, (donde G_2 es el grupo de isometrías en el plano). Podemos preguntarnos ahora si el recíproco también es cierto. En este capítulo estudiaremos el caso en el que A y B son polígonos. Veremos en el teorema 4.3 que, si sus áreas son iguales, A y B son lo que llamaremos congruentes por disección. Además, en el teorema 4.4 probaremos que la congruencia por disección implica equivalencia por descomposición, de manera que el recíproco sí es cierto para polígonos.

Por otro lado, es inevitable preguntarse qué ocurre cuando A es un cuadrado y B un círculo. Es decir, ¿puede descomponerse un círculo en un número finito de piezas de modo que, mediante movimientos del plano, se obtenga un cuadrado?. Este es el famoso problema de la cuadratura del círculo, que fue ya planteado por los antiguos griegos. Tarski se planteó esta misma cuestión en 1925. En 1964, Dubins, Hirsch y Karush probaron que un círculo y un cuadrado no son congruentes con papel y tijera. Esto último quiere decir que las piezas en las que se dividen deben ser discos topológicos, es decir, una curva de Jordan junto con su interior. (Ver [7]). Por otro lado, en 1990, Laczkovich dio una respuesta afirmativa a la pregunta de Tarski, como puede verse en [8]. En su demostración usó el Axioma de Elección, por lo que el número de piezas que se obtienen no son necesariamente medibles. Sin embargo, recientemente se ha demostrado que se puede cuadrar el círculo utilizando un número finito de piezas medibles. (Ver [4, pág 3]).

Como hemos dicho, aquí sólo estudiaremos el caso en el que ambos son polígonos. Veamos primero si podemos transformar un polígono en otro distinto cortando el original en un número finito de piezas y recomponiendo éstas mediante rotaciones y traslaciones en el plano. Es decir, pensamos en las piezas de los polígonos como si fueran las de un tangram. A priori ignoramos por completo las fronteras de las piezas, luego lo que hacemos ahora es distinto de la equivalencia por descomposición. Diremos en este caso que los dos polígonos son congruentes por disección.

Definición 4.1. Dos polígonos en el plano son *congruentes por disección* si uno de ellos puede ser descompuesto en finitas piezas poligonales, que pueden ser reorganizadas usando las isometrías del

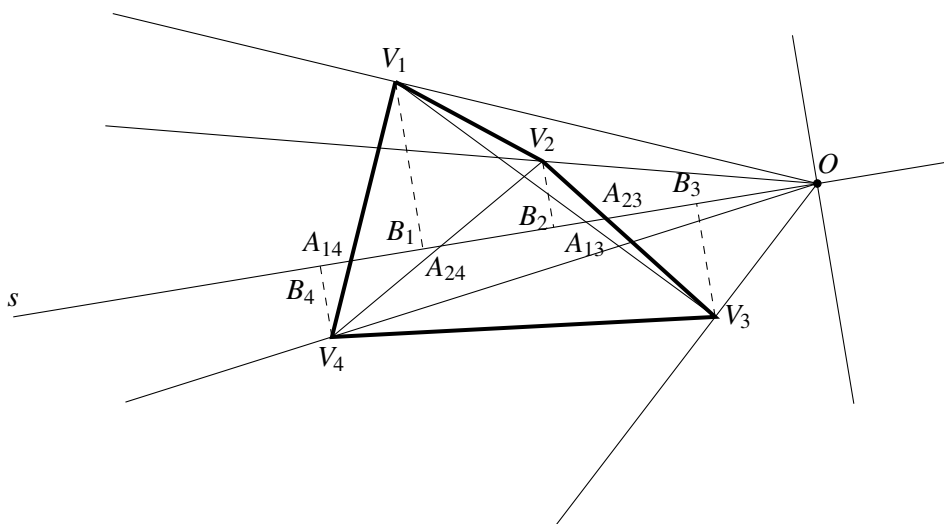
plano (e ignorando las fronteras) para formar el otro polígono.

Es trivial que los polígonos que son congruentes por disección tienen la misma área. El recíproco puede probarse utilizando que la congruencia por disección es una relación de equivalencia. (La transitividad se prueba fácilmente por superposición, teniendo en cuenta que la intersección de dos polígonos es otro polígono). Necesitaremos además los siguientes resultados.

Definición 4.2. Diremos que un vértice V de un polígono P es un *vértice proyectante* si es posible dibujar una recta que lo separe del resto de vértices de P .

Lema 4.1. Un polígono tiene, al menos, dos vértices proyectantes.

Demostración. Denotamos V_1, \dots, V_n a los vértices consecutivos de nuestro polígono P . Sea s una recta distinta de V_iV_j , ($i \neq j$). Trazamos, si no existe, el segmento V_iV_j y llamamos A_{ij} al punto de corte de V_iV_j con la recta s . Sea B_k el punto de s obtenido al trazar una recta perpendicular a s desde V_k . Elegimos en s un punto O distinto de todos los A_{ij} , de manera que todos los puntos B_k estén al mismo lado de O . Dibujamos las rectas OV_k para $k = 1, 2, \dots, n$. Estas rectas son distintas y todas están en un lado de la perpendicular a s en el punto O . Por lo tanto, dos de las semirrectas, llamémoslas OV_a y OV_b , determinan un ángulo dentro del cual se encuentran todas las demás semirrectas. Por tanto, los vértices V_a y V_b son claramente vértices proyectantes.

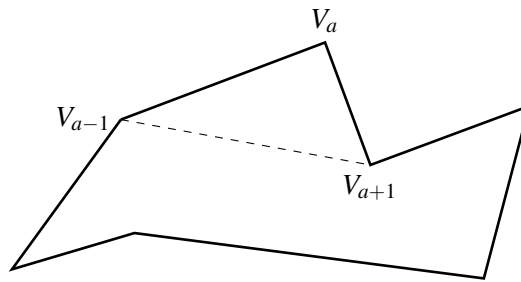


□

Teorema 4.2. *Cualquier polígono de n lados puede ser descompuesto en $n - 2$ triángulos cuyos vértices están sólo en los vértices del polígono.*

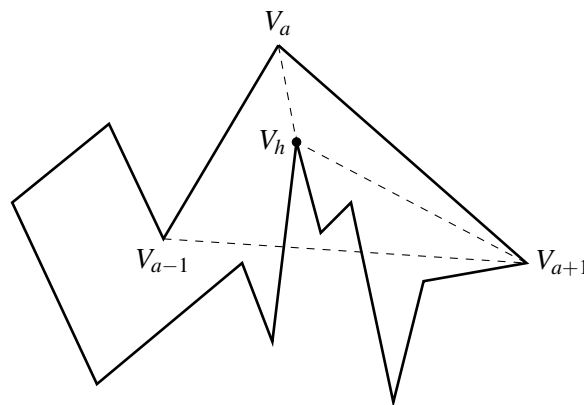
Demostración. Vamos a probarlo por inducción. Es trivial que se cumple para $n = 3$. Suponer que es cierto para los polígonos que tienen menos de k lados y sea P un polígono de k lados. Llamamos a sus vértices V_1, \dots, V_k . Por el lema 4.1 existe un vértice proyectante en P , al que llamaremos V_a . Dibujamos el segmento $V_{a-1}V_{a+1}$ y tenemos así dos casos:

- (a) Todos los demás vértices de P quedan fuera del triángulo $V_{a-1}V_aV_{a+1}$. En este caso, el segmento $V_{a-1}V_{a+1}$ divide a P en el triángulo $V_{a-1}V_aV_{a+1}$ y un polígono Q de $k - 1$ lados, cuyos vértices están en los vértices de P . Por hipótesis de inducción, se puede descomponer Q en $(k - 1) - 2$ triángulos, cuyos vértices están en los vértices de Q . Entonces P puede ser descompuesto en $1 + (k - 1) - 2 = k - 2$ triángulos cuyos vértices están sólo en los vértices de P , como queríamos probar.



- (b) En el segundo caso, hay un vértice V_h , dentro o sobre uno de los lados del triángulo $V_{a-1}V_aV_{a+1}$ tal que ningún otro vértice está dentro del triángulo $D = V_aV_{a+1}V_h$. Si $h = a + 2$, entonces tenemos el triángulo D y el polígono $R = V_hV_{h+1}\dots V_a$. Si $h \neq a + 2$, tenemos D , $S = V_{a+1}V_{a+2}\dots V_h$ y $T = V_hV_{h+1}\dots V_a$. Si R , S y T tienen r , s y t lados, entonces $r = k - 1$ y $s + t = k + 1$.

Por hipótesis de inducción, podemos descomponer R , S y T en $r - 2$, $s - 2$ y $t - 2$ triángulos con vértices sólo en R , S y T , respectivamente. Por tanto, podemos dividir P en $(r - 2) + 1 = k - 2$ o $(s - 2) + (t - 2) + 1 = k - 2$ triángulos, con vértices sólo en P .

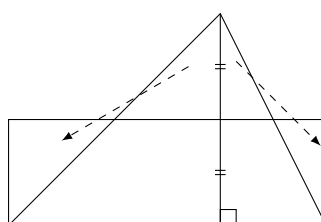


En cualquiera de los dos casos es cierto para un triángulo de k lados, por lo tanto, por inducción se cumple para un polígono con un número cualquiera de lados. □

Ahora ya podemos probar el resultado que queríamos.

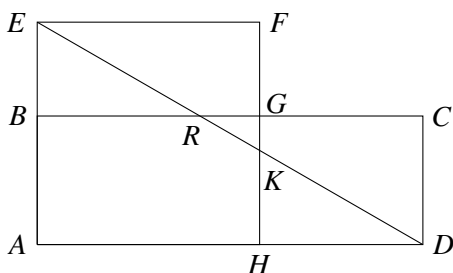
Teorema 4.3 (Wallace-Bolyai-Gerwein). *Dos polígonos son congruentes por disección si y sólo si tienen la misma área.*

Demostración. Es trivial que dos polígonos congruentes por disección tienen la misma área. Para probar el recíproco, por transitividad, basta con ver que cualquier polígono es congruente por disección con un cuadrado (necesariamente con la misma área.) Vamos a hacerlo primero con un triángulo. Cualquier triángulo es congruente por disección con un rectángulo, donde la longitud del rectángulo es igual al lado más largo del triángulo.



Veamos ahora que un rectángulo es congruente con un cuadrado. Sean a y b los lados del rectángulo, donde $a \geq b$, tenemos que considerar tres posibles casos,

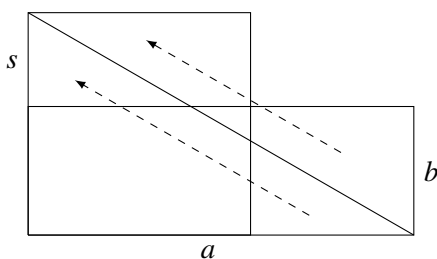
- (1) $a = b$. El rectángulo es igual que el cuadrado, luego trivialmente son congruentes.
- (2) $b < a \leq 4b$. Sea $s = \sqrt{ab}$ el lado del cuadrado que vamos a construir a partir de nuestro rectángulo. Dibujamos el cuadrado, $AEFH$, en el rectángulo, $ABCD$, como se muestra en el siguiente dibujo. Dibujamos ED , que corta a BC en R y a HF en K . Llamamos G al punto donde se cortan BC y HF , de manera que obtenemos:



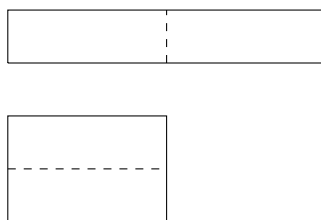
Como los triángulos KDH y EDA son semejantes, por el Teorema de Tales, tenemos que $HK/AE = HD/AD$, por tanto

$$HK = (AE)(HD)/AD = s(a - s)/a = s - s^2/a = s - b$$

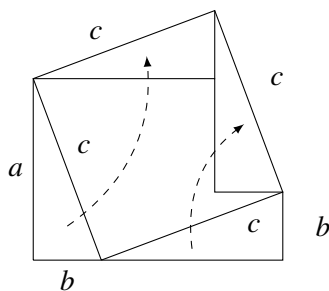
Por hipótesis, $4b \geq a$, luego $4b^2 \geq ab = s^2$, es decir $2b \geq s$, y por tanto $s - b \leq b$. Por esta razón, K está en el segmento HG , como en nuestro dibujo. Notar que el triángulo KHD es igual al triángulo EBR , puesto que son semejantes y los segmentos HD y EB miden ambos $s - b$. Por esta misma razón, son iguales los triángulos EFK y RCD , ya que el segmento CD tiene longitud b y, el KF , $s - (s - b) = b$. De manera que podemos desplazarlos como en el siguiente dibujo para obtener el cuadrado de lado s :



- (3) $a > 4b$ Podemos repetir el siguiente método las veces que sean necesarias hasta conseguir un rectángulo como en el caso anterior:



Por lo tanto, cualquier triángulo es congruente por disección con un cuadrado. Para terminar la demostración, observemos que el Teorema de Pitágoras se puede probar transformando por disección dos (o más) cuadrados en uno. Consideramos la siguiente figura:



De esta forma, a la vez que probamos la relación $c^2 = a^2 + b^2$, vemos que podemos transformar por disección dos cuadrados en uno. Usando este método repetidas veces, podemos transformar en un único cuadrado cualquier conjunto finito de ellos. Por el teorema 4.2, cualquier polígono puede ser descompuesto en triángulos, que pueden ser a su vez transformados en cuadrados. Combinando todos éstos como hemos indicado, obtenemos uno solo. Por tanto, cualquier polígono es congruente por disección con un cuadrado. □

Podemos preguntarnos ahora si los polígonos que son congruentes por disección son también equivalentes por descomposición. El problema está en que en el segundo de los casos tenemos que considerar las fronteras de las piezas, que hasta ahora no habíamos tenido en cuenta. Sin embargo, esto se soluciona aplicando el teorema de Banach-Schröder-Bernstein. De esta manera, podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 4.4. *Si dos polígonos P_1 y P_2 son congruentes por disección, entonces son equivalentes por descomposición.*

Demostración. Como P_1 y P_2 son congruentes por disección, podemos descomponer P_1 en un conjunto finito de polígonos de manera que, transformándolos mediante las isometrías del plano y uniéndolos de nuevo, obtengamos P_2 . Consideramos la unión del interior de estos polígonos, por un lado los de P_1 y, por otro, los de P_2 y las llamamos Q_1 y Q_2 , respectivamente. Como ya no tenemos problemas con las fronteras, es inmediato que $Q_1 \sim_G Q_2$. Por tanto, tenemos que ver que $P_1 \sim_G Q_1$ y que $P_2 \sim_G Q_2$, es decir, que podemos absorber los segmentos de la frontera. Para esto, vamos a probar antes lo siguiente: sea A un conjunto acotado en el plano con interior no vacío y sea T un conjunto acotado y disjunto de A , formado por un conjunto finito de segmentos, entonces $A \sim_G A \cup T$.

Consideramos un disco D contenido en A , de radio r . Podemos dividir los segmentos de T de manera que la longitud de todos ellos sea menor que r . Sea θ una rotación de D respecto su centro, como consideramos siempre, de manera que $\frac{\theta}{\pi}$ sea irracional. Sea R un radio cualquiera de D (excluyendo el centro de D), definimos el conjunto

$$R' = R \cup \theta(R) \cup \theta^2(R) \cup \dots$$

Sea s un segmento de T , entonces $D \cup s \preceq D$. En efecto, como hemos considerado esa rotación, R y $\theta(R')$ son disjuntos. También lo son $\theta(R')$ y $D \setminus R'$. Por lo tanto, $D \cup s = (D \setminus R') \cup R' \cup s \sim_G (D \setminus R') \cup \theta(R') \cup \sigma(s)$, donde σ es la isometría que lleva s a un subconjunto de R . Es inmediato que $D \preceq D \cup s$. Luego, por el teorema de Banach-Schröder-Bernstein, $D \sim_G D \cup s$. Podemos hacer esto con todos los segmentos de T , de manera que los vayamos absorbiendo en el disco, hasta tener $D \sim_G D \cup T$. Uniendo $A \setminus D$ en ambos lados obtenemos, como queríamos, $A \sim_G A \cup T$.

Una vez probado esto, sólo tenemos que considerar $A = Q_1$ y $T = P_1 \setminus Q_1$. □

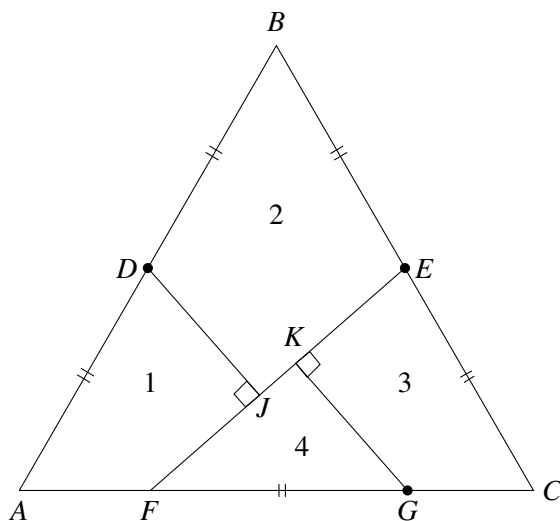
El recíproco también es cierto aunque aquí no lo probaremos. Se demuestra a partir de la existencia, en cualquier subconjunto de \mathbb{R}^2 , de una medida finitamente aditiva e invariante bajo el grupo de las isometrías, como se puede ver en [1, pág 155]. Por tanto, sabiendo que el recíproco también se cumple, podemos afirmar que dos polígonos son congruentes por disección si y sólo si son equivalentes por

descomposición y si y sólo si tienen igual área.

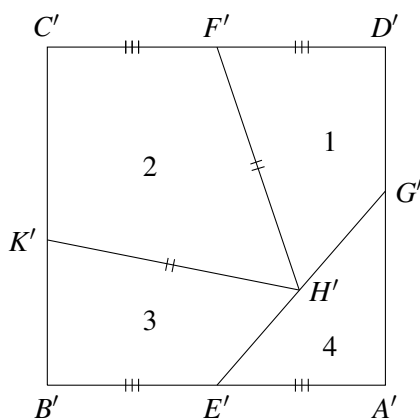
Vamos a ver un ejemplo de la congruencia por disección de un triángulo equilátero en un cuadrado. Durante mucho tiempo se conocía una solución a este problema usando cinco piezas y se creía que no podía mejorarse. Sin embargo, en 1902, Dudeney descubrió cómo hacerlo con sólo cuatro piezas, ver en [6, pág 226 227]

Ejemplo 4.1. Un triángulo equilátero es congruente por disección con un cuadrado.

Construimos las cuatro piezas de la siguiente manera. Los segmentos AD, DB, BE, EC, FG son iguales a la mitad del lado del triángulo; EF es igual al lado del cuadrado equivalente y DJ y GK son ambos perpendiculares a EF .



Rotando las piezas sobre los puntos G, E y D , con giros de 180° , podemos transformarlo en el siguiente cuadrado. Primero rotamos la pieza 4 respecto el punto G . Después, las piezas 3 y 4 respecto el punto E . Por último, rotamos las piezas 2, 3 y 4 respecto el punto D . De manera que obtenemos el siguiente cuadrado:



Está claro que los tres cuadriláteros encajan como en el segundo dibujo, puesto que, por construcción $BE = EC$ y $BD = DA$. Además, como es un triángulo equilátero, los ángulos A, B y C miden todos 60° . Por lo tanto, al juntarlos como en el último dibujo, forman un ángulo llano. Además, como elegimos FG de manera que mida la mitad del lado del cuadrado, encaja con las piezas 1, 2 y 3, ya que $FG = GC + AF$. De esta manera, ya podemos asegurar que la figura obtenida es un cuadrilátero. Como, además, los ángulos K y J son ángulos rectos por construcción, podemos asegurar que es un rectángulo. Como

habíamos elegido EF de manera que fuera la longitud del lado del cuadrado, podemos decir, además, que la figura obtenida es efectivamente un cuadrado.

Vamos a ver en detalle esto último. Para simplificar las operaciones, supondremos que los lados de nuestro triángulo miden 1. Tenemos que ver que la longitud elegida para el segmento EF es la adecuada para que se forme, en particular, un cuadrado. Llamamos $(p, 0)$ a las coordenadas del punto F . La ecuación de la recta que pasa por los puntos F y E es:

$$\sqrt{3}x + (4p - 3)y - p\sqrt{3} = 0$$

La distancia de una recta a un punto viene dada por la ecuación:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Sustituyendo, vemos que la distancia del punto D a la recta que pasa por EF es

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3 + (4p - 3)^2}}.$$

Y es la misma que la distancia de G a la recta que pasa por EF . De la misma manera, se comprueba que la distancia de D a F es la misma que la de E a G . Luego también miden lo mismo los segmentos FJ y KE , de manera que

$$FE = JE + KE$$

Notar que, al rotar las piezas, los segmentos JE y KE forman uno de los lados del cuadrilátero. Por tanto, si construimos el segmento FE con la misma longitud que el lado del cuadrado equivalente, el cuadrilátero obtenido será un cuadrado.

Capítulo 5

Conjuntos no medibles

En Geometría clásica, la medida de un intervalo es su longitud, la de un rectángulo su área, la de un paralelepípedo su volumen. A partir de ellas podemos medir figuras cada vez más complejas, cubriendo la figura estudiada por figuras de medida conocida. En este procedimiento intuitivo de medir figuras está la idea de que al desplazar cualquier figura no se altera su medida. En 1902, Lebesgue se planteó el problema de encontrar una medida definida para todos los subconjuntos acotados de la recta real que cumpliera esto. Es decir, presentó el problema de encontrar, si existe, una función μ con valores reales ≥ 0 , tal que verifique las tres condiciones siguientes:

- (a) $\mu(E) > 0$ para algún conjunto acotado E .
- (b) si hay una isometría que transforme el conjunto acotado E en el F , entonces $\mu(E) = \mu(F)$.
- (c) si E_i son conjuntos acotados disjuntos dos a dos y cuya unión es E , entonces

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

En el problema actual, sabemos que no hace falta considerar sólo los conjuntos acotados, ya que no es ahí donde encontramos los problemas de medibilidad. Además, nos conformaremos con intentar encontrar una medida que sea invariante por traslaciones en vez de por todas las isometrías. Por tanto, el problema quedaría de la siguiente manera:

- (a) $\mu(E) > 0$ para algún conjunto E . (Para no considerar la medida nula.)
- (b) si hay una traslación que transforme el conjunto E en el F , entonces $\mu(E) = \mu(F)$.
- (c) si E_i son conjuntos disjuntos dos a dos y cuya unión es E , entonces

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Vamos a ver que desafortunadamente no existe tal medida en \mathbb{R} (ni, por tanto, en \mathbb{R}^n). Para ello probaremos a continuación que, si suponemos la existencia de una medida con estas características, llegamos a contradicción. Necesitaremos otra vez el axioma de elección.

Teorema 5.1. (AC)

- (a) *No existe una medida numerablemente aditiva, invariante por rotaciones y definida para todos los subconjuntos de \mathbb{S}^1 , de manera que la medida de \mathbb{S}^1 sea 1.*

- (b) No existe una medida numerablemente aditiva, invariante por traslaciones y definida en todos los subconjuntos de \mathbb{R}^n , que normalice $[0, 1]^n$.

Demostración. (a) Definimos en \mathbb{S}^1 una relación de equivalencia: dos puntos son equivalentes si podemos obtener uno a partir del otro mediante una rotación respecto el origen, con un ángulo de $2k\pi$ radianes, donde $k \in \mathbb{Q}$. Llamamos M al conjunto de los representantes de esta clase de equivalencia.

Como el conjunto de los racionales es numerable, podemos enumerar las rotaciones que hemos considerado $\{\rho_i : i = 1, 2, \dots\}$. Sea ahora $M_i = \rho_i(M)$, entonces $\{M_i\}$ es una partición de \mathbb{S}^1 . Además, cualquier pareja de los M_i son congruentes por rotación. Por tanto, podemos rotar los $\{M_i : i \text{ par}\}$, individualmente, para formar todos los M_i , es decir, para cubrir toda la circunferencia. Para conseguir esto, rotamos M_2 para obtener M_1 , M_4 para obtener M_2 , M_6 para obtener M_3 , etc. Hacemos lo mismo para $\{M_i : i \text{ impar}\}$, con lo cual, obtenemos otra vez la circunferencia completa.

Con esta idea ya podemos probar que no existe tal medida. Supongamos que existiese una medida μ como en el enunciado. Entonces sea $A = \bigcup\{M_i : i \text{ par}\}$ y $B = \bigcup\{M_i : i \text{ impar}\}$. Como la medida de la circunferencia es 1,

$$1 = \mu(\mathbb{S}^1) = \mu(A) + \mu(B) \geq \mu(\mathbb{S}^1) + \mu(\mathbb{S}^1) = 2,$$

por lo que llegamos a contradicción.

- (b) Esta construcción en la circunferencia la podemos considerar ahora en el intervalo $[0, 1)$, usando la biyección que lleva $(\cos \theta, \sin \theta)$ a $\frac{\theta}{2\pi}$ y considerando las traslaciones en vez de las rotaciones. Por tanto, por el razonamiento anterior no puede existir una medida en el intervalo $[0, 1]$ que sea numerablemente aditiva, invariante por traslaciones y donde este intervalo mida 1. Por lo tanto tampoco existe para \mathbb{R} . Si existiese una medida como la del enunciado, en \mathbb{R}^n , habría una medida inducida en \mathbb{R} . Por lo tanto no existe tal medida. □

Del teorema anterior se sigue inmediatamente que existe un subconjunto de $[0, 1]$ que es no Lebesgue-medible.

La única manera de solucionar este problema es no medir todos los conjuntos, sino una σ -álgebra más pequeña que $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. La medida que mide la mayor σ -álgebra posible sin alterar la medida de los conjuntos al desplazarlos es la medida de Lebesgue.

Bibliografía

- [1] S. WAGON, *The Banach-Tarski Paradox* Cambridge University Press, 1985.
- [2] F. LINDEMANN, *Über die Zahl π* , *Mathematische Annalen*, vol. 20 (1882), pp. 213-225.
- [3] M. MACHO STADLER, *La paradoja de Banach-Tarski: como construir el sol a partir de un guisante*, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea
- [4] L. GRABOWSKI, A. MATHE, O. PIKHURKO, *Measurable circle squaring*, arXiv:1501.06122v4.
- [5] M. MARTINEZ PEREZ, *Seminario de la historia de la matemática*, Universidad Complutense de Madrid., 1979.
- [6] EVES, H., *A Survey of Geometry*, vol. 1, Boston: Allyn and Bacon, 1963.
- [7] L. DUBINS, M. HIRSH, J. KARUSH, *Scissors congruence*, *Israel J. Math.* 1 (1963), 239-247.
- [8] M. LACZKOVICH, *Equidescomposability and discrepancy: a solution of Tarski's circle squaring problema*, *J. Reine Angew. Math.* 404 (1990), 77-117.
- [9] BANACH, S., A. TARSKI, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents*, *Fund. Math.* 6 (1924), 244-277. Reprinted loc. cit.

