



**Universidad
Zaragoza**

Proyecto Fin de Carrera

**Influencia de las aproximaciones sobre el
perfil de velocidad en vasos elásticos con
aplicación a la simulación numérica de flujo
sanguíneo en un modelo circulatorio
detallado.**

presentado para la obtención del título en

Ingeniería Industrial

Realizado por

Héctor Martínez Salvador

y dirigido por

Dr. Javier Murillo Castarlenas

Área de Mecánica de Fluidos

Departamento de Ciencia de Materiales y Fluidos

Escuela de Ingeniería y Arquitectura. Junio, 2017. Zaragoza

AGRADECIMIENTOS

En el tiempo y dedicación que he puesto en este trabajo, reconozco el valioso tiempo que otros han puesto para que salga adelante. En él se aprecia el sentido y buen hacer de quien ha tutorizado este proyecto y las buenas palabras, consejos y guías de las personas que integran la sala de colaboradores del Área de Mecánica de Fluidos. Y aunque no han sido los únicos, este trabajo no hubiera llegado a buen término sin la ayuda de Javier, Adrián y Diego.

En Zaragoza, a 9 de Junio de 2017.

Índice general

1. Introducción	9
2. Flujo Pulsátil en tubo rígido	15
2.1. Ecuaciones de Navier-Stokes: aplicación a flujo 1D	15
2.2. Flujo en condiciones de presión pulsátil.	16
2.3. Resolución de la ecuación homogénea	17
2.4. Resolución de la ecuación no homogénea	20
2.5. Perfil de velocidad en función del caudal	22
3. Flujo pulsátil en tubo elástico	25
3.1. Conservación de la masa. Ecuación integral	25
3.2. Conservación de la masa. Ecuación diferencial	26
3.3. Conservación del momento. Ecuación integral	26
3.4. Conservación del momento. Ecuación diferencial	29
3.5. Sistema de ecuaciones	29
4. Perfiles de Velocidad	31
4.1. Introducción	31
4.2. Perfil de velocidad plano	32
4.3. Perfil de velocidad de Poiseuille	32
4.3.1. Derivación del término de fricción	32
4.3.2. Derivación del coeficiente κ :	33
4.4. Perfil de velocidad de ley de Potencia	33
4.4.1. Derivación del término de fricción	33
4.4.2. Derivación del coeficiente κ :	34
4.5. Perfil de velocidades de capa viscosa de Stokes	34
4.5.1. Derivación del término de fricción	35
4.5.2. Derivación del coeficiente κ	35
4.6. Perfil de velocidad Aproximado	36
4.6.1. Derivación del término de fricción	38
4.6.2. Derivación del coeficiente κ	38
4.7. Perfil de velocidad de Womersley	40
4.7.1. Derivación del término de fricción	41
4.7.2. Derivación del coeficiente κ	43
4.8. Resumen	45
5. Caracterización de los vasos del sistema arterial	47
5.1. Introducción	47
5.2. Caracterización de los vasos por Grupos	49
5.3. Números adimensionales para los vasos arteriales	51
5.4. Determinación del cálculo armónico para Womersley.	53
5.5. Perfiles de velocidad para una simulación	56
5.6. Resumen	67

6. Análisis comparativo de perfiles de velocidad	69
6.1. Introducción	69
6.2. Análisis del término de fricción	70
6.2.1. Grupo I	70
6.2.2. Grupo II	70
6.2.3. Grupo III	71
6.2.4. Gráficas de cuantificación del error	72
6.3. Análisis del término convectivo	75
6.3.1. Coeficientes κ	75
6.3.2. Grupo I:	79
6.3.3. Grupo II	79
6.3.4. Grupo III	79
6.3.5. Gráficas de cuantificación del error	80
6.4. Resumen	84
7. Análisis diferencial de metodologías de cálculo	85
7.1. Introducción	85
7.2. Metodologías de cálculo para fricción y convección	85
7.3. Comparativa entre metodologías de cálculo para la fricción	87
7.4. Comparativa entre metodologías de cálculo para la convección	90
7.5. Resumen	93
8. Conclusiones	95
Bibliography	97
List of Figures	99
List of Tables	102
A. Funciones Kelvin	105
A.1. Introducción	105
A.2. Funciones Kelvin derivativas	106
A.2.1. Función Bessel-real	106
A.2.2. Función Bessel-imaginaria	107
A.3. Funciones Kelvin de primer orden	107
A.4. Funciones módulo y fase	108
B. Transformada de Fourier	109
B.1. Transformada Discreta de Fourier	109
B.2. TDF de datos reales	110
B.3. Aproximación trigonométrica usando la TDF	111
C. Womersley: Algoritmos para su implementación	113
C.1. Introducción	113
C.2. Kelvin functions	114
C.3. Cross-section calculations	116
D. Cálculos auxiliares para perfiles de velocidad	123
D.1. Poiseuille: flujo estacionario en vaso de pared rígida	123
D.2. Stokes: obtención del parámetro ϕ_0	124
D.3. Aproximado: derivación del perfil	125
E. Distribución de las variables de cálculo de la simulación	129

F. Evolución temporal a lo largo de un ciclo	133
G. Programación de los procedimientos de análisis	139
G.1. Calculo de la fricción	139
G.2. Obtención del coeficiente corrector mediante integración numérica	147
G.2.1. Programa principal	147
G.2.2. Subrutinas propias	150
G.3. Librerías generadas	154
G.3.1. Funciones geométricas	154
G.3.2. Serie de Fourier: obtención de los coeficientes armónicos	156
G.3.3. Cuartiles: distribución de los valores de un vector	157
G.4. Librerías externas	158

Capítulo 1

Introducción

Motivación

Cuando se desea reproducir mediante simulación numérica, el flujo y distribución de sangre en el cuerpo humano, es necesario modelizar matemáticamente la interacción entre este fluido y las vías que lo conducen de acuerdo con las características de cada una de las regiones que ha de atravesar.

Siguiendo un modelo realista, el sistema circulatorio modelizado en este trabajo comprende el corazón, la circulación sistémica y la circulación pulmonar [35]. El corazón es el órgano que se encarga de bombear la sangre, la circulación sistémica o periférica es la que aporta el flujo sanguíneo a todos los tejidos del organismo y la circulación pulmonar es la que lleva la sangre del corazón a los pulmones y de vuelta de los pulmones al corazón. Dentro la circulación sistémica, dividimos entre sistema arterial, el sistema venoso y el sistema capilar. Tanto dentro del sistema arterial como del sistema venoso, encontramos diferencias entre los grandes vasos, ya sea la aorta o la vena cava, como los pequeños vasos arteriales que derivan el flujo en arteriolas o los vasos venosos que lo recogen de las vénulas. El sistema capilar está compuesto por las arteriolas, los capilares y las vénulas. Dentro de la circulación pulmonar, encontramos la misma clasificación, aunque las condiciones fisiológicas son distintas respecto a la circulación y por tanto no atañe a este trabajo. Dentro del sistema circulatorio, y después del corazón, el sistema arterial en la circulación sistémica soporta mayor presión media, (100 mmHg frente a, por ejemplo, 17 mmHg en capilares) [35]. Por ello están provistos de un mayor espesor de pared.

La fricción entre la pared elástica y en continuo movimiento y la sangre transportada genera un perfil de velocidad sofisticado y variable en el tiempo. La simulación del flujo en un sistema completo necesita reproducir este comportamiento para poder caracterizar la fuerza de fricción en los diferentes vasos. Se justifica así el objetivo de este trabajo: analizar la influencia que tiene la elección de un determinado perfil de velocidad para flujo sanguíneo unidimensional en vasos grandes, medianos y pequeños pertenecientes al sistema arterial para el análisis de un modelo de sistema circulatorio completo en bucle cerrado.

El análisis en este trabajo se centra en arterias por varios motivos. En comparación con las arterias, tanto la presión como la variación de la presión en las venas es muy baja. Además, la pared en los vasos venosos es menos rígida y de menor espesor que en arterias. Por ello, las venas son, en media, ocho veces más distensibles que las arterias. La distensibilidad es un parámetro que cuantifica la capacidad de almacenar sangre ante un incremento de la presión. Las venas actúan como un reservorio de sangre, lo cual, en el global del sistema circulatorio, permite la regulación de la sangre a las necesidades fisiológicas [35]. El ser un reservorio, significa que, dentro del ciclo cardiaco, se producirá el llenado y vaciado de los vasos venosos de manera más o menos cíclica. Por las bajas presiones, estos colapsan fácilmente, tomando la sección transversal geometrías no circulares e invalidando los supuestos con los que sí se puede analizar el flujo arterial. Algunos de estos supuestos eran flujo unidimensional para vaso de sección circular.

Para el análisis de la microcirculación, o sistema capilar, hay que tener en cuenta la reología del fluido. A nivel macroscópico, la sangre se comporta como un fluido newtoniano a su paso por los vasos grandes y medianos. La sangre se compone de plasma, el cual transporta en suspensión células como son los leucocitos, los eritrocitos o las plaquetas. Conforme disminuye el diámetro y cambia el comportamiento del fluido circulante, así lo hace también la reología. Debido al efecto Fahraeus-Lindqvist, la viscosidad del fluido decrece conforme también lo hace el diámetro de los vasos por los que circula. El efecto es relevante para diámetros menores de un milímetro. Para los vasos arteriales, este efecto es despreciable y por tanto podemos considerar μ constante.

Para analizar la influencia del perfil de velocidad usaremos un modelo matemático multi-escala, en bucle cerrado y global [24]. Es un modelo multi-escala porque detalla el flujo arterial y venoso mediante un sistema de ecuaciones unidimensional e hiperbólico y detalla la microcirculación y el sistema pulmonar mediante un modelado paramétrico o cero-dimensional. El flujo sanguíneo que recorre el sistema circulatorio está gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes promediado en la sección transversal junto a las condiciones de contorno en la pared, puesto que la pared de los vasos se comporta como una pared móvil. La elasticidad de los vasos es la que atenúa de manera progresiva los efectos oscilatorios del flujo hasta atenuarlos y llegar a un estado cuasi-estacionario en los vasos terminales y arteriolas. La ecuación de estado establece la relación entre la presión y la sección transversal en los vasos. Para el resto de vasos se utiliza el modelo paramétrico o cero-dimensional, donde las variables se calculan mediante una formulación análoga a la de un circuito eléctrico. Aunque haya distintos modelos para los diferentes tipos de vasos, el sistema debe estar perfectamente acoplado a través de ecuaciones diferencial-algebraicas que incluyen conservación de la masa entre otras.

El sistema de ecuaciones promediado y derivado de Navier-Stokes, no asume a priori ningún tipo de perfil de velocidad, lo cual permite la generalidad en las ecuaciones. Pero la resolución del sistema requiere el cálculo del término de fricción sobre la pared y de un coeficiente corrector del término convectivo que aparece en el sistema de ecuaciones. La fricción es proporcional a la variación espacial del perfil de velocidad en la pared del vaso, y el coeficiente corrector del término convectivo es un coeficiente de forma que corrige la suposición de perfil plano en la obtención del término convectivo. Las fuerzas inerciales tienen mayor presencia frente a las viscosas conforme aumenta el diámetro del vaso y para mayores velocidades promedio. El perfil de velocidades se uniformiza cuando aumentan las fuerzas inerciales frente a las viscosas.

La selección de un perfil de velocidad que mejor recoja las características del flujo, nos permitirá realizar un cálculo mejor de los términos convectivo y de fricción, y en última instancia, unos resultados finales más verosímiles. También es destacable que en toda simulación numérica de fenómenos transitorios el coste computacional es un factor importante. Utilizar formulaciones para la fricción coherentes con la estructura del flujo, pero con un coste numérico mínimo, es necesario para poder utilizar la herramienta de simulación en situaciones complejas, como maniobras respiratorias o cambios posturales. Hay que advertir que la transitoriedad de estos flujos tiene un gran impacto en el campo de presiones en el cuerpo humano. La modelización de la fricción en estos casos utilizando valores instantáneos, evitando el uso de valores históricos que requieren de gran capacidad de memoria y coste en operaciones, es deseable. En este trabajo se verificará el impacto del perfil velocidad en las arterias en un caso donde la transitoriedad estará generada únicamente por la modelización de la región cardio-pulmonar.

Estado del arte

La circulación sanguínea ha sido materia de estudio desde la antigüedad, aunque no sería hasta el inicio de la época moderna cuando aparecieron trabajos significativos. En 1616 William Harvey describía la circulación de la sangre [1]. En el siglo XVIII, Isaac Newton añadía el concepto de viscosidad y su relación con la variación de la velocidad en el radio. Coetáneo de Newton, Stephen Hales observó la

importancia de la elasticidad en las arterias para la propagación del flujo durante la diástole y formuló el concepto de resistencia periférica vascular basado en la idea de pequeñas arterias capilares.

Ya en el siglo XIX, destacan dos personajes, Thomas Young y J. L. M. Poiseuille. El primero por sus estudios sobre la elasticidad, que, aplicado a las arterias, era la propiedad que explicaba el transporte de las ondas de presión y el pulso sanguíneo. El segundo por la relación entre caudal y gradiente de presión para vasos de pequeño diámetro [2]. Poiseuille desarrolló una ley del flujo para tubos rígidos cuando estudiaba el flujo sanguíneo. Este descubrimiento quedó reflejado en la publicación de un escrito científico, cuyo título en castellano, El movimiento de los líquidos en tubos de pequeño diámetro, donde se describe con precisión las condiciones a las que queda restringido el flujo [1]. El análisis que hiciera Hales sobre la resistencia vascular periférica tenía como objeto la descripción de la microcirculación. El estudio de Poiseuille validó las hipótesis de Hales.

En 1914, K. Witzig [3], y Paul Lambossy en 1952 [4] profundizaron en el aspecto del carácter pulsátil del gradiente de presión. Éste último desarrolló una expresión analítica para el cálculo de la fricción para gradiente de presión pulsátil. En 1955 y 1957 Womersley [6, 7] acompañado en sus investigaciones por McDonald [5], estudió y propuso una solución a la ecuación que gobierna el flujo para tubo rígido y gradiente pulsátil, cuya solución es el perfil de velocidades que denominamos perfil de Womersley. Esa propuesta estaba acompañada de otra para vasos de paredes elásticas [7]. Debido a la complejidad de las soluciones propuestas por Womersley, en este trabajo se desarrollaran soluciones asumiendo paredes rígidas. Este modelo genera resultados suficientemente realistas y es aceptado comúnmente en el estudio de la hemodinámica [12].

La solución de Womersley se encuentra en el dominio de la frecuencia, al ser necesario para su cálculo, no tanto su desarrollo temporal, si no la obtención de las componentes armónicas que forman la señal. Posteriormente será necesaria su traducción al dominio del tiempo. Aunque Womersley plantea un perfil de velocidad calculado en base a los armónicos del gradiente de presión, en este trabajo plantearemos la solución en función de los armónicos de caudal, ya que es la variable promedio resultante de las ecuaciones que es finalmente modelizada. Para disponer de los coeficientes armónicos que precisa la solución de Womersley, se analiza el fluido a través de la teoría de Fourier, usando la transformada de Fourier.

En años posteriores, otros autores trabajaron en el desarrollo de perfiles de velocidad con el que poder calcular los términos fricción viscosa y convectivo. En 1973 Hughes y Lubliner publican un artículo en el que desarrollaban el sistema de ecuaciones y proponían un perfil de velocidades de tipo ley de potencia [13]. Olufsen, en 2000, propone el uso del concepto de capa límite para dividir el perfil de velocidad en dos subdominios. El primero ocupa una parte central donde aparece un perfil plano dominado por los efectos inerciales. El segundo subdominio refleja la existencia una capa viscosa pegada a la pared del vaso, con un perfil con pendiente constante [8]. Gráficamente es un perfil trapezoidal, que se aproxima a un triángulo donde el dominio interno decrece conforme el diámetro de los vasos decrece (con la distancia de los vasos al corazón).

Basado en las propuestas de Hughes y Lubliner y de Olufsen, surge la propuesta de Bessems [10], el cual también distingue dos intervalos en la función. De igual manera, en el núcleo central se supone despreciable el efecto de la viscosidad y el predominio de las fuerzas inerciales. En la capa viscosa, se desprecia el papel de las fuerzas inerciales. La diferencia radica en que el espesor de la capa viscosa es obtenido asumiendo un equilibrio de fuerzas en la frontera entre ambas regiones.

Los modelos sugeridos por Hughes y Lubliner, Olufsen y Bessems, posteriores a la compleja teoría de Womersley, motivados por la necesidad de simplificar un problema ya de por sí complicado, investigan alternativas en la implementación del cálculo del término de fricción y del coeficiente corrector del término convectivo. Womersley precisa de analizar una señal periódica, calculando los coeficientes armónicos de esa señal, en el periodo anterior. En simulaciones realistas, la circulación se ve afectada por factores tan dispares como son la posición del cuerpo o el ritmo de respiración o la actividad física que se esté

desarrollando en el momento. Womersley no puede calcular con realismo simulaciones de ese tipo, ya que requiere de la descripción completa del propio ciclo. En una herramienta predictiva como la usada aquí, sólo se puede utilizar en casos en los que los ciclos cardiacos se repitan constantemente. A mayor realismo en las suposiciones, más complicado es obtener una señal de caudal periódica que se parezca a la anterior. La convergencia del problema muchas veces precisa más de una buena aproximación que de un cálculo más detallado, pero con resultados de poca fiabilidad.

Objetivos específicos

Para poder realizar un análisis de los distintos perfiles de velocidad, se han superado una serie de hitos a través de una serie de tareas intermedias. Estas tareas no sólo incluyen una búsqueda y recopilación bibliográfica sino también la programación de todos los algoritmos necesarios para la implementación de las herramientas de análisis utilizadas. Dada la alta especialización del campo científico en el que se centra el trabajo, este proceso no ha sido inmediato.

Uno de los perfiles más referenciados por su sencillez es el perfil hipotético de velocidad desarrollado en [8]. Este perfil tiene la desventaja asociada al uso de un espesor de capa viscosa constante, ya que fue desarrollado para grandes vasos. La variabilidad de la geometría en el árbol arterial aquí utilizado ha hecho necesario la extensión de este modelo a uno más completo utilizando las hipótesis de Bessems [10].

Por otro lado, a diferencia de la propuesta original de Womersley, donde el perfil de velocidad se desarrolla en función de las componentes armónicas del gradiente de presión, en este trabajo usamos el caudal en la sección transversal. En las ecuaciones utilizadas para modelar el flujo arterial, el caudal es una variable conservada y definida en cada volumen de cálculo. A partir de la ecuación de conservación de masa se obtiene el área transversal, que permite evaluar la presión en cada volumen de cálculo a través de una ley constitutiva de la pared elástica. En vasos de pequeña longitud, como aquellos en los que se divide la aorta, o en algunos periféricos, el flujo se evalúa utilizando un número de celdas muy reducido, en algunos casos, simplemente dos celdas computacionales. El gradiente de presión no puede calcularse con exactitud en estas condiciones, no sólo por el hecho de contar con pocas celdas, sino porque estas celdas actúan como vasos y como uniones en las ramificaciones arteriales. Aunque es posible generar un refinamiento de la malla de cálculo mucho mayor, esta posibilidad compromete la selección del paso de tiempo en el esquema predictivo utilizado, generando unos tiempos computacionales excesivamente largos. Como consecuencia, un objetivo fundamental fue analizar en detalle la resolución de la ecuación de Womersley y obtener la expresión de un perfil de velocidad en función de las componentes armónicas del caudal en los vasos arteriales. La solución a la ecuación de Womersley propuesta requiere una solución en el dominio de la frecuencia, y construye el perfil de velocidad con las componentes armónicas que conforman el caudal circulante en el vaso. Como consecuencia, un objetivo fue implementar un algoritmo FFT o Transformada rápida de Fourier, para poder analizar la variable caudal y luego sintetizarlo en una función en el dominio del tiempo.

Para la obtención de la solución analítica es preciso tratar con números complejos y funciones Bessel. Estas funciones son propias de geometrías cilíndricas y, en este caso, tienen argumento complejo. Los números complejos y un perfil de velocidad con parte real e imaginaria son consecuencia del análisis del caudal en el dominio de la frecuencia. Este trabajo anterior ha permitido la elaboración de una expresión para la determinación del término de fricción en la pared y otra expresión para el cálculo del coeficiente corrector del término convectivo, ambas derivadas del perfil de velocidad de Womersley desarrollado en este trabajo.

Este trabajo inicial permite realizar un análisis diferencial con otros perfiles de velocidad aproximados presentes en la literatura [2, 8, 10, 13]. Todas estas aproximaciones han sido recopiladas en este trabajo, detallando los perfiles de velocidad y derivando para cada uno de ellos una expresión para el cálculo de término de fricción en la pared y del coeficiente corrector del término convectivo. El modelo matemático, multi-escala y de bucle cerrado usa por defecto, la fricción calculada usando el perfil de Poiseuille y un

coeficiente corrector para perfil plano [23]. La aproximación de perfil plano para el coeficiente corrector es frecuentemente utilizada [23, 27–30]. Para la aproximación al valor del término fricción, Poiseuille es aceptada [23, 27], pero también lo es la fórmula asumiendo perfil potencial de parámetro $n=9$ [29, 31]. En la siguiente parte del trabajo se ha realizado un análisis diferencial usando los resultados de la simulación numérica del modelo global. Con estos datos se ha recalculado los términos de fricción y coeficiente corrector para todos los perfiles detallados en esta memoria y han sido comparados sistemáticamente con los resultados del perfil de velocidad de Womersley propuesto en este trabajo. Para poder analizar la gran cantidad de datos (302 vasos, 85 de ellos arteriales) se han agrupado los vasos utilizando como criterio el espesor aproximado de la capa viscosa [10]. Es destacable que las aproximaciones en [2, 8, 10, 13] son válidas en vasos largos, caracterizados por el criterio geométrico (D/L), diámetro de la sección del vaso (D) frente a su longitud (L), y parecería por tanto, lógico utilizar este parámetro. Un primer intento de análisis siguiendo este criterio mostró resultados incoherentes. La razón estriba en que el criterio geométrico (D/L) tiene en cuenta cómo longitud del vaso, la longitud de una rama arterial completa, y no sus segmentos, definidos entre las ramificaciones.

Usando las conclusiones del análisis diferencial previo se plantearon una serie de metodologías de cálculo alternativas al uso de un perfil de Poiseuille en todos los vasos y un coeficiente corrector para perfil plano. Con los resultados de la aplicación de estas metodologías al modelo global, se realizó un segundo análisis diferencial donde se reflejan las diferencias de la aplicación utilizando como referencia el caso por defecto con un coeficiente corrector para perfil plano y perfil de Poiseuille. Por último, se argumentan las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

Flujo Pulsátil en tubo rígido

J.R. Womersley [6, 7] desarrolló una teoría para el caso de flujo unidireccional y axisimétrico para el caso en el que se tiene un gradiente de presión pulsátil. Con ello, planteaba una hipótesis que le acercaba a la naturaleza oscilante de un flujo sanguíneo bombeado desde el corazón en ciclos cardiacos. En 1914, Witzig [3] había planteado el problema del flujo sanguíneo en estos términos y Lambossy [4] había calculado el término de fricción sobre la pared para un gradiente de presiones oscilante. Pero sería Womersley quién finalmente plantea el problema en función de los armónicos del gradiente de presión.

En este capítulo se obtendrán las leyes que gobiernan el flujo bajo las condiciones de flujo pulsátil para el perfil unidimensional (1D) que se desarrolla en la sección 2.1. En este trabajo se desarrolla como novedad la solución analítica del perfil de velocidad, variable en la sección y en el tiempo, en función del caudal circulante.

2.1. Ecuaciones de Navier-Stokes: aplicación a flujo 1D

Se consideran las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido viscoso e incompresible fluyendo a través de un vaso cilíndrico de pared rígida. La geometría del problema requiere de un sistema de coordenadas cilíndricas, en los ejes (r, θ, x) . Para cada eje, la velocidad correspondiente

$$\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_x).$$

Las ecuaciones generales en coordenadas cilíndricas son

- Ecuación de conservación de la masa:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial r \cdot v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

- Ecuación de conservación del momento:

En el eje radial:

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right\} \\ &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

En el eje circunferencial:

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} \right\} \\ = & -\frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

En el eje longitudinal:

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right\} \\ = & -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

con ρ y μ , densidad y viscosidad dinámica del fluido respectivamente. Asumiendo $L \gg D$, podemos considerar que

$$v_x \gg v_r, \quad v_x \gg v_\theta$$

lo cual informa de un flujo unidireccional y axisimétrico. Por tanto

$$v_r = v_\theta = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \ominus}{\partial \theta} = 0.$$

Las ecuaciones generales dependientes del tiempo que gobiernan el fluido son las siguientes:

- Ec. de conservación de la masa

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

- Ec. de conservación del momento

$$\left[\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right] + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \quad (2.6)$$

De ellas se deriva la ley que gobierna el flujo

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right]. \quad (2.7)$$

2.2. Flujo en condiciones de presión pulsátil.

Se define un gradiente de presiones pulsátil como

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -M e^{i\omega t} \quad (2.8)$$

con $M e^{i\omega t} = M (\cos \omega t + i \sin \omega t)$ y M una constante. Como cuando el flujo se comporta con la ley de Poiseuille, el gradiente de presiones induce el movimiento del fluido. Se considera la ecuación derivada de Navier-Stokes para flujo completamente desarrollado e inducido por un gradiente de presión pulsátil (2.8). Se reordenan los términos en la ecuación (2.7) y se opera la derivada del término convectivo, lo que conduce a

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{-M}{\mu} e^{i\omega t}, \quad (2.9)$$

donde aparece el término transitorio $\partial_t v$. Se tiene una ecuación diferencial de segundo orden cuasi-lineal. Es cuasi-lineal por aparecer coeficientes no constantes multiplicando los términos derivativos. La naturaleza de estos coeficientes clasifica una ecuación diferencial de segundo orden en elíptica, parabólica o hiperbólica. En nuestro caso, se tiene una ecuación de tipo hiperbólica, la cual depende de dos variables, tiempo y radio [20–22]. El «Método de Separación de Variables» planteado para esta situación sugiere una solución de la forma

$$v(r, t) = u(r)e^{i\omega t}. \quad (2.10)$$

Por consiguiente, los términos derivativos en (2.9) se convierten en

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} v = \ddot{u}e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial}{\partial r} v = \dot{u}e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial}{\partial t} v = u \cdot i\omega \cdot e^{i\omega t} \quad (2.11)$$

con $\dot{u} = \partial_r u$ y $\ddot{u} = \partial_r^2 u$. Cuando se reemplazan (2.10) y (2.11) en la ecuación (2.9), aparece entonces

$$\left(\ddot{u} + \frac{1}{r}\dot{u} - \frac{i\omega}{\nu}u \right) e^{i\omega t} = \left(\frac{-M}{\mu} \right) e^{i\omega t}. \quad (2.12)$$

El término exponencial en (2.12) se desvanece apareciendo una ecuación de segundo orden no homogénea cuya única variable es el radio.

$$\ddot{u} + \frac{1}{r}\dot{u} - \frac{i\omega}{\nu}u = \frac{-M}{\mu} \quad (2.13)$$

Esta ecuación se denomina la ecuación de Womersley. Como cualquier ecuación de segundo orden no homogénea, es preciso obtener primero la solución para el caso de la ecuación homogénea, $u_h(r)$, y obtener la solución para la ecuación no homogénea, $u_p(r)$, por no ser el término independiente nulo. Así, la solución completa será

$$u(r) = u_h(r) + u_p(r). \quad (2.14)$$

2.3. Resolución de la ecuación homogénea

La expresión generalizada para una ecuación de segundo orden sería la siguiente

$$\ddot{u} + p(r)\dot{u} + q(r)u = 0, \quad (2.15)$$

La ecuación de segundo orden homogénea asociada a la ecuación de Womersley es

$$\ddot{u} + \frac{1}{r}\dot{u} - \frac{i\omega}{\nu}u = 0, \quad (2.16)$$

donde, en la obtención de la solución homogénea se considerará la notación $u = u_h$.

Los coeficientes de 2.15 para este caso en (2.16) son

$$p(r) = \frac{1}{r - r_0}, \quad q(r) = \left(-i\frac{\omega}{\nu} \right) \quad (2.17)$$

donde $r_0 = 0$. Una ecuación de segundo orden con coeficientes no constantes requiere de una solución en forma de serie de potencias local en $r = 0$. Elegir un tipo específico de serie de potencias depende de las propiedades del coeficiente $p(r)$ en $r = 0$.

Punto ordinario. Un punto $r = r_0$ se denomina ordinario si satisface que la función $p(r)$ es analítica evaluada en el punto. En este caso, la solución sería una expresión de serie de potencias de $(r - r_0)$ con radio de convergencia positivo. Para comprobar si estamos en esta situación, calculamos el límite del coeficiente no lineal cuando $r = 0$.

$$\lim_{r \rightarrow 0} p(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} = \infty \quad (2.18)$$

Entonces $p(r)$ en r_0 no es analítica, y por tanto, no es un punto ordinario.

Punto singular regular. Es el punto que satisface que la función $p(r)$ es analítica en la vecindad del punto.

En (2.18) se muestra que $r_0 = 0$ es un punto singular regular. Por consiguiente, (2.16) se puede resolver de acuerdo al teorema de Frobenius. El teorema de Frobenius da una una solución para el caso de una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes no constantes y con el añadido de tener un punto singular regular

$$u(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r - r_0)^{n+m} \quad (2.19)$$

donde m is, *a priori*, desconocido y debe ser hallado. A continuación, se desarrolla el ansatz (2.19) dado por el Método de Frobenius.

Método de Frobenius para resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden

Multiplicando (2.16) por el factor r^2 , da la siguiente expresión

$$r^2 \ddot{u} + r \dot{u} + r^2 \left(-i \frac{\omega}{\nu} \right) u = 0. \quad (2.20)$$

Se desarrollan los términos de (2.20) para el ansatz, o solución tipo, en (2.19)

a) Término derivativo de segundo orden, $r^2 \ddot{u}$:

$$r^2 \ddot{u} = r^m \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+m)(n+m-1)a_n\} r^n \quad (2.21)$$

b) Término derivativo de primer orden, $r \dot{u}$:

$$r \dot{u} = r^m \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+m)a_n\} r^n \quad (2.22)$$

c) Término derivativo de orden cero, $r^2 \left(-i \frac{\omega}{\nu} \right) u$:

$$r^2 \left(-i \frac{\omega}{\nu} \right) u = r^m \left(-i \frac{\omega}{\nu} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n r^{n+2}\} \quad (2.23)$$

El sumatorio en (2.23) se reescribe como

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+2} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} r^k \quad (2.24)$$

donde $k = n + 2$, para así elevar todos los términos a la misma potencia. Así se logra la aparición de un término común, r^m , el cual podemos cancelar

$$r^m \left[\sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{n=0}^{\infty} + \sum_{n=2}^{\infty} \right] = 0 \quad (2.25)$$

De este modo se reduce la ecuación inicial, (2.20), a la siguiente expresión:

$$m^2 a_0 + (m+1)^2 a_1 r + \sum_{n=2}^{\infty} \left[(n+m)^2 a_n + \left(-i \frac{\omega}{\nu} \right) a_{n-2} \right] r^n = 0. \quad (2.26)$$

Para satisfacer (2.26), todos los términos deben ser nulos. De esta condición, surgen tres igualdades

- $a_0 m^2 = 0 \wedge a_0 \neq 0 \Rightarrow m = 0$
- $(m+1)^2 a_1 = 0 \wedge m = \pm 0 \Rightarrow a_1 = 0$
- $n^2 a_n + \left(-i \frac{\omega}{\nu} \right) a_{n-2} = 0$

La última igualdad provee la siguiente relación de recurrencia:

$$a_n = - \left(\frac{-i\omega}{n^2 \nu} \right) a_{n-2} \quad (2.27)$$

La relación de recurrencia en (2.27) informa de que todos los términos impares dependen de a_1 . Como $a_1 = 0$, se deduce que

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2n+1} = 0. \quad (2.28)$$

Sólo se conservan los términos de potencias pares. Para que el contador, n , vaya de $n = 1, 2, 3, \dots$ pero sólo calcule los términos pares, x^{2n} , se tiene que reescribir la relación de recurrencia en 2.27

$$a_{2n} = - \left(\frac{k}{(2n)^2} \right) a_{n-2}. \quad (2.29)$$

Se busca ahora la deducción de la expresión que da a_n en función del término independiente, a_0 .

$$\begin{aligned} n = 1 & \quad a_2 = (-1) \frac{k}{(2 \cdot 1)^2} a_0 \\ n = 2 & \quad a_4 = (-1) \frac{k}{(2 \cdot 2)^2} a_2 = (-1)^2 \frac{k^2}{(2^2)^2 2^2 1^2} a_0 \\ n = 3 & \quad a_6 = (-1) \frac{k}{(2 \cdot 3)^2} a_4 = (-1)^3 \frac{k^3}{(2^2)^3 3^2 2^2 1^2} a_0 \\ & \quad \dots \\ \forall n & \quad a_{2n} = (-1)^n \frac{k^n}{(2^2)^n n!^2} a_0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde $k = \left(-i \frac{\omega}{\nu} \right)$ y por lo tanto, el coeficiente de la serie, a_{2n} , se define como

$$a_{2n} = (-1)^n \left[\left(-i \frac{\omega}{\nu} \right)^n \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^n}{n!} \right\}^2 \right] a_0 \quad (2.31)$$

con lo que la solución o ansatz (2.19), toma la siguiente forma

$$u(r) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^n \left(-i \frac{\omega}{\nu} \right)^n \left\{ \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^n}{n!} \right\}^2 r^{2n} \right\} \quad (2.32)$$

La solución para la ecuación homogénea, tras reorganizar las potencias del mismo orden, es la siguiente

$$u_h(r) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left\{ \left(-i \frac{\omega}{\nu} \right)^{1/2} \frac{r}{2} \right\}^{2n} \quad (2.33)$$

volviendo a utilizar u_h para expresar la solución homogénea y u la solución global.

La solución en (2.33) resulta ser una función Bessel con argumento complejo. Al comparar la ec.(2.16) con la expresión A.1, ecuación Bessel de primer tipo genérica, se observa que (2.16) es una ecuación Bessel de orden cero, ya que $\xi = 0$, donde ξ es un parámetro con el que se formula la ecuación general de Bessel. La solución será una combinación lineal de funciones Bessel del siguiente modo,

$$y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x),$$

donde $c_2 = 0$, ya que, cuando el radio tiende a cero, sucede que

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y_0 = \infty,$$

y que para el eje del vaso, el valor del perfil de velocidad no puede ser infinito. La función Bessel del primer tipo de orden cero que permanece en la solución, no es si no, una serie de potencias local, cuya definición es la que sigue

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!^2} \left\{ \frac{x}{2} \right\}^{2n}. \quad (2.34)$$

Comparando términos, se observa en (2.34) la misma expresión que en (2.33), con $x = \sqrt{\left(-i \frac{\omega}{\nu} \right)} r$. Usando un radio adimensional, $y = r/R$, la solución a la ecuación homogénea es

$$u_h(y) = a_0 J_0 \left(R \sqrt{\left(-i \frac{\omega}{\nu} \right)} y \right). \quad (2.35)$$

2.4. Resolución de la ecuación no homogénea

Una vez obtenida la solución a la ecuación homogénea, es el turno de la obtención de la solución asociada a la ecuación no homogénea, u_p . El Método de Variación de los Parámetros permite encontrar la solución para una ecuación no homogénea de coeficientes no constantes. Pero se puede evitar ese procedimiento puesto que el término independiente, $-M/\mu$, es constante en (2.13). Por lo tanto,

$$u_p(r) = u_p \equiv \text{constant} \quad \Rightarrow \quad \dot{u}_p = \ddot{u}_p = 0. \quad (2.36)$$

Sustituyendo u_p en (2.13), se obtiene

$$0 + 0 + \left(-i \frac{\omega}{\nu} \right) u_p = \frac{-M}{\mu} \quad (2.37)$$

así, tras despejar u_p ,

$$u_p = \frac{M}{i\rho\omega}. \quad (2.38)$$

La solución general (2.14), sumando las expresiones obtenidas para la solución homogénea y para la solución no homogénea, queda del siguiente modo,

$$u(y) = \underbrace{a_0 J_0 \left(R \sqrt{\left(-i\frac{\omega}{\nu}\right) y} \right)}_{u_h(y)} + \underbrace{\frac{M}{i\rho\omega}}_{u_p(y)} \quad (2.39)$$

donde $y = \frac{r}{R}$.

Aplicando condiciones de contorno sobre la solución general, encontraremos a_0 . La condición de no deslizamiento en la pared del vaso, $y = 1$, conduce a

$$u(y = 1) = 0 = \frac{M}{i\rho\omega} + a_0 J_0 \left(R \sqrt{\left(-i\frac{\omega}{\nu}\right)} \right). \quad (2.40)$$

Por consiguiente, el valor de a_0 es

$$a_0 = \frac{-\frac{M}{i\rho\omega}}{J_0 \left(R \sqrt{\left(-i\frac{\omega}{\nu}\right)} \right)}. \quad (2.41)$$

Reemplazando la expresión de a_0 en la solución general

$$u(y) = \left[\frac{-\frac{M}{i\rho\omega}}{J_0 \left(R \sqrt{\left(-i\frac{\omega}{\nu}\right)} \right)} \right] J_0 \left(R \sqrt{\left(-i\frac{\omega}{\nu}\right) y} \right) + \frac{M}{i\rho\omega} \quad (2.42)$$

lo cual da

$$u(y) = \frac{M}{i\rho\omega} \left\{ 1 - \frac{J_0 \left(R \sqrt{\left(-i\frac{\omega}{\nu}\right) y} \right)}{J_0 \left(R \sqrt{\left(-i\frac{\omega}{\nu}\right)} \right)} \right\} \quad (2.43)$$

con $0 \leq y \leq 1$.

El número de Womersley, α , es el parámetro adimensional que compara los términos inerciales en un fluido frente a los viscosos. Su definición es la siguiente,

$$\alpha = R \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} \quad (2.44)$$

Si ponemos la ec. (2.43) en función del número de Womersley en (2.44) y teniendo en cuenta $i^3 = -i$, la solución general resulta

$$v(y, t) = \Re \left[\frac{M}{i\rho\omega} \left\{ 1 - \frac{J_0 \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha y \right)}{J_0 \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha \right)} \right\} e^{i\omega t} \right] \quad (2.45)$$

que se denominará solución de Womersley. Es necesario recordar que esta solución también depende de la posición longitudinal en el vaso, a través del valor que tome el módulo de gradiente de presión.

2.5. Perfil de velocidad en función del caudal

Se obtiene el perfil de velocidad de Womersley en función del caudal. A través de la definición del caudal como la integral del perfil de velocidad en la sección transversal,

$$Q(x, t) = \int_S v(r) dS = 2\pi \int_0^R v(r, x) r dr = 2\pi R^2(x, t) \int_0^1 v(y) y dy. \quad (2.46)$$

para una localización arbitraria en $x = x_0$ a lo largo del eje del vaso, el módulo del gradiente de presión M es constante en la sección transversal, y así, el caudal sólo depende del tiempo. Entonces $Q(t) = Q(x_0, t)$ y $M = M(x_0)$. Se sustituye $v(y)$ de (2.45) en la definición de caudal en (2.46),

$$Q(t) = \frac{2\pi R^2 M}{i\rho\omega} \int_0^1 \left\{ 1 - \frac{J_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha y\right)}{J_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\right)} \right\} e^{i\omega t} y dy \quad (2.47)$$

y aparecen dos integrales, en las que una involucra funciones de Bessel

$$Q(t) = \frac{2\pi R^2 M}{i\rho\omega} \left\{ \int_0^1 1 y dy - \frac{\int_0^1 J_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha y\right) y dy}{J_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\right)} \right\} e^{i\omega t}. \quad (2.48)$$

La primera integral es inmediata $\int_0^1 1 y dy = \frac{1}{2}$. Pero no así la segunda $\int_0^1 J_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha y\right) y dy$, la cual requiere el uso de la siguiente propiedad de las funciones Bessel

$$\int_0^1 J_0 x dx = x J_1(x) \quad (2.49)$$

siendo J_1 la función Bessel de primer tipo y orden cero. Se aplica un cambio de variable tal que,

$$x = \left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\right) y \Rightarrow dx = \left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\right) dy.$$

Los nuevos valores límite de la integral, acorde con el cambio de variables aplicado, son

$$\begin{aligned} y = 1 &\Rightarrow x = i^{\frac{3}{2}}\alpha \\ y = 0 &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

lo que conduce a

$$\int_0^1 y J_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha y\right) dy = \int_0^{i^{\frac{3}{2}}\alpha} \frac{x}{i^{\frac{3}{2}}\alpha} J_0(x) \frac{dx}{i^{\frac{3}{2}}\alpha} = \frac{J_1\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\right)}{i^{\frac{3}{2}}\alpha}.$$

Tras resolver las dos integrales, la ec. (2.48) se convierte en

$$Q(t) = \frac{\pi R^2 M}{i\rho\omega} \left\{ 1 - \frac{2}{i^{\frac{3}{2}}\alpha} \frac{J_1\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\right)}{J_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\right)} \right\} e^{i\omega t} \quad (2.50)$$

donde todos los términos son constantes excepto el término temporal. Con el flujo obtenido en (2.50) y asumiendo que $Q(t)$ puede ser definido con una expresión análoga a la del gradiente de presión,

$$Q(t) = \hat{Q} e^{i\omega t} \quad (2.51)$$

donde \hat{Q} constante. El módulo del gradiente de presión, M , en función del módulo del caudal, es

$$M(\hat{Q}) = \frac{\frac{i\rho\omega\hat{Q}}{\pi R^2}}{\left\{1 - \frac{2}{i^{\frac{3}{2}}\alpha} \frac{J_1(i^{\frac{3}{2}}\alpha)}{J_0(i^{\frac{3}{2}}\alpha)}\right\}}. \quad (2.52)$$

Sustituyendo M por (2.52) en la ecuación (2.45),

$$v(y, t) = \Re \left[\frac{\hat{Q}}{\pi R^2} \frac{\left\{1 - \frac{J_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha y\right)}{J_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\right)}\right\}}{\left\{1 - \frac{2}{i^{\frac{3}{2}}\alpha} \frac{J_1\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\right)}{J_0\left(i^{\frac{3}{2}}\alpha\right)}\right\}} e^{i\omega t} \right] \quad (2.53)$$

donde el perfil de velocidad de Womersley está expresado en términos del caudal que cruza la sección transversal y depende exclusivamente del tiempo.

Capítulo 3

Flujo pulsátil en tubo elástico

Existen modelos matemáticos unidimensionales, tridimensionales y paramétricos (o cero-dimensionales) para simular el flujo sanguíneo por los vasos. El análisis de las ecuaciones unidimensionales se plantea dentro de un modelo multiescala, en bucle cerrado y global. Para el modelo matemático utilizado [24], multiescala significa modelado unidimensional y paramétrico. El ámbito de estudio en este trabajo es el sistema arterial, el cual está detallado con un modelo unidimensional. En este capítulo se obtendrá el sistema de ecuaciones unidimensional e hiperbólico que gobierna el flujo en estos vasos, derivado de las ecuaciones de Navier-Stokes. Las variables del problema están promediadas en la sección transversal.

Definamos algunos conceptos que aparecen en las integrales: volumen fluido o material, V_m ; volumen de control, V_c ; superficie del volumen de control, S_c ; velocidad del fluido, v ; velocidad de la superficie de control, v_c ; velocidad relativa del fluido, $(v - v_c)$. Un sistema de coordenadas cilíndricas describe el espacio y el movimiento, (r, θ, x) . Para una sección de un vaso arbitrario dependiente del tiempo y la posición en el sistema arterial, se declara, $R(x, t)$.

3.1. Conservación de la masa. Ecuación integral

El primer Teorema del Transporte de Reynolds, —TTR— dice

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \psi dV = \int_{V_m(t)} \frac{\partial \psi}{\partial t} dV + \int_{S_c(t)} \psi v \cdot ndS. \quad (3.1)$$

Para el balance de masa, $\psi = \rho \cdot 1$. Por ser en términos del volumen material, no hay intercambio macroscópico a través de las superficie del volumen. Consecuentemente,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = 0. \quad (3.2)$$

El Tercer TTR concreta que

$$\frac{d}{dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = \frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho dV + \int_{S_c(t)} \rho(v - v_c) \cdot ndS. \quad (3.3)$$

Reemplazando la ec. (3.2) en el lado izquierdo de la igualdad de (3.3):

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho dV + \int_{S_c(t)} \rho(v - v_c) \cdot ndS = 0. \quad (3.4)$$

Término Temporal (TT):

Desarrollando el término temporal de la ec. (3.4), se obtiene que,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho dV = \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} \delta x \quad (3.5)$$

lo cual, viene de

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho dV = \int_{\delta x} \rho A(x, t) dx \quad (3.6)$$

$$\int_{\delta x} \rho A(x, t) dx = \int_{\delta x} \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} dx + A(x, t) \cdot 0 \quad (3.7)$$

$$\int_{\delta x} \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} dx + A(x, t) \cdot 0 = \frac{\partial A(x, t)}{\partial t} \delta x \quad (3.8)$$

Término convectivo (TC):

Desarrollando el término convectivo de la ec. (3.4) se obtiene que,

$$\int_{S_c(t)} \rho(v - v_c) \cdot n dS = \frac{\partial Q}{\partial x} \delta x \quad (3.9)$$

lo cual, viene de

$$\int_{S_c(t)} \rho(v - v_c) \cdot n dS = \int_{S_c(t)} \rho w_n dS \quad (3.10)$$

$$\int_{S_c(t)} \rho w_n dS = Q_{x+\delta x} - Q_x \quad (3.11)$$

$$Q_{x+\delta x} - Q_x = \left(Q_x + \frac{\partial Q}{\partial x} \delta x \right) - Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} \delta x \quad (3.12)$$

3.2. Conservación de la masa. Ecuación diferencial

La suma de (3.5) y (3.9) es igual a cero, así que se cancela el término común, δx . Por lo tanto,

$$\frac{\partial A(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (3.13)$$

la cual es la ecuación diferencial de balance de masa o ecuación de continuidad.

3.3. Conservación del momento. Ecuación integral

La definición del momento lineal es $m \cdot v$. Aplicando la segunda Ley de Newton a un volumen, se obtiene el momento lineal de este volumen,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_f(t)} \rho v dV = \int_{S_f(t)} \vec{n} \cdot \vec{\tau} dS + \int_{V_f(t)} \rho f_m dV \quad (3.14)$$

Cuando $V_m = V_c$, usando (3.3), el término de lado derecho en (3.14) cambia. Así,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho v dV + \int_{S_c(t)} \rho(u - v) \cdot n dS = \int_{S_c(t)} \vec{n} \cdot \vec{\tau} dS + \int_{V_c(t)} \rho f_m dV. \quad (3.15)$$

Término Temporal (TT):

La integral del término temporal es

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho v dV = \int_{V_c(t)} \rho \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} dx \quad (3.16)$$

la cual, viene de

$$\frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho v A(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{V_c(t)} \rho Q(x, t) dx = \int_{V_c(t)} \rho \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} dx. \quad (3.17)$$

Término Convectivo (TC):

La integral del término convectivo es

$$\int_{S_c(t)} \rho v(v - v_c) \cdot n dS = \int_0^{\delta x} \kappa \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) dx. \quad (3.18)$$

la cual, viene de

$$\int_{S_c(t)} \rho v(v - v_c) \cdot n dS = \int_{S_c(t)} \rho v^2 \cdot n dS = \rho \kappa \frac{Q^2}{A} \Big|_0^{\delta x} = \int_0^{\delta x} \frac{\partial Q u}{\partial x} dx \quad (3.19)$$

donde κ corrige el error que se produce al aproximar la velocidad por el caudal.

Términos de Fuerzas de Superficie (TFS):

Dos tipos de fuerzas son ejercidas sobre S_c : las fuerzas de presión y las fuerzas de fricción.

$$\int_{S_c(t)} \vec{n} \cdot \vec{\tau} dS = \int_0^{\delta x} \left\{ -A \frac{\partial p}{\partial x} dx + f(x) \right\} dx \quad (3.20)$$

la cual, viene de

$$\int_{S_c(t)} \vec{n} \cdot \vec{\tau} dS = - \int_{S_c(t)} p(x, t) n_x dS + \int f(x) dx. \quad (3.21)$$

La integral de la fricción viene dada por

$$= \int_0^{\delta x} f(x) dx, \quad (3.22)$$

mientras, la integral del término de presión es igual a

$$\int_{S_c(t)} p(x, t) n_x dS = pA|_0^{\delta x} + \int_{l(x)} p(x, t) n_x dl dx \quad (3.23)$$

resultado que viene de evaluar la presión sobre S_c , realizando el balance entre la sección transversal de entrada y la de salida y sobre la pared del vaso, para la componente axial, n_x . A continuación, el balance sobre S_c .

a) Balance de presión en las secciones transversales:

$$pA|_0^{\delta x} = (pA + \frac{\partial pA}{\partial x} \delta x) - pA = - \int_0^{\delta x} p \frac{\partial(pA)}{\partial x} dx \quad (3.24)$$

b) Presión sobre la pared del vaso:

$$\int_l dl \int_{\delta x} p(x, t) n_x dx = \int p(x) \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} dx \quad (3.25)$$

which comes from

$$\int_l p(x, t) n_x dr d\theta dx = \int p(x) n_x 2\pi R(x, t) dx = \int p(x) \frac{\partial A(x, t)}{\partial x} dx \quad (3.26)$$

La suma de ambos términos de presión se simplifica con la definición de derivada parcial de $(p(x) \cdot A(x))$, lo que conduce a

$$\frac{\partial}{\partial x}(pA) = A \frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial A}{\partial x}. \quad (3.27)$$

Término de Fuerzas Volumétricas (TFV):

Desarrollando las fuerzas volumétricas del (3.15):

$$\int_{V_c(t)} \rho f_v dV = \int_{V_c(t)} \rho A(x, t) g f \frac{\partial \eta}{\partial x} dx \quad (3.28)$$

la cual, viene de

$$\int_{V_c(t)} \rho f_v dV = \int_{\delta x} \rho f_v A(x, t) dx. \quad (3.29)$$

Las fuerzas volumétricas actúan por la acción de la gravedad sobre la sangre de las venas.

$$f_v = -\rho \nabla U \hat{x} \quad (3.30)$$

Se define un sistema absoluto de coordenadas en el plano vertical (el flujo es unidimensional): (η, γ) . La fuerza de la gravedad actúa en dirección del eje η . Para describir la fuerza gravitatoria según las coordenadas del eje local, se efectúa un cambio de coordenadas.

$$\eta = -\sin \varphi x + \cos \varphi r \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\sin \varphi. \quad (3.31)$$

Se sustituye la ec. (3.31) en (3.29)

$$\int_{V_c(t)} \rho f_m dV = \int_{V_c(t)} \rho g A(x, t) f \frac{\partial \eta}{\partial x} dx. \quad (3.32)$$

3.4. Conservación del momento. Ecuación diferencial

Remplazando TT de (3.16), TC de (3.18), TFS de (3.20), TFV de (3.28) en la ecuación (3.15), nos lleva a

$$\int_0^{\delta x} \rho \left\{ \frac{\partial Q}{\partial t} + \kappa \frac{\partial(Q^2/A)}{\partial x} \right\} dx = \int_0^{\delta x} \left\{ -A \frac{\partial p}{\partial x} dx + f \right\} dx + \int_0^{\delta x} \rho A(x, t) g f \frac{\partial \eta}{\partial x} dx \quad (3.33)$$

Todos los integrandos están en la misma variables, x , y para el mismo intervalo. Así, el operando integral se cancela, y permanecen todos los integrandos. Por lo tanto,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \kappa \frac{\partial Q^2/A}{\partial x} = -\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f}{\rho} - (gA) \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (3.34)$$

ecuación diferencial de conservación del momento.

3.5. Sistema de ecuaciones

Se ha derivado de las ecuaciones de Navier-Stokes un sistema de ecuaciones unidimensional e hiperbólico obtenido en (3.13) y (3.34):

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{G}(\mathbf{U}) \quad (3.35)$$

siendo $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, t)$, con

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} Q \\ \kappa \frac{Q^2}{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{A}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f}{\rho} - (gA) \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

y la ecuación constitutiva o de estado será

$$p - p_e = K \left\{ \left(\frac{A}{A_0} \right)^m - \left(\frac{A}{A_0} \right)^n \right\}. \quad (3.37)$$

El término de fricción, f , fuerza por unidad de longitud, depende de la tensión cortante sobre la pared del vaso. El coeficiente corrector del término convectivo es κ . La elección de un perfil de velocidad determina el método de cálculo de ambos dos términos.

$$\kappa = \frac{A}{Q^2} \int_A v^2 dA. \quad (3.38)$$

Considerando $A = \pi R^2$, una sección transversal circular para un vaso arbitrario, el término integral de (3.38) es

$$\int_A v^2 dA = \int_0^R v^2(r, x, t) r dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_0^R v^2(r, x, t) r dr.$$

Así, κ se convierte en

$$\kappa = \frac{A(x, t)}{Q^2(x, t)} 2\pi \int_0^R v^2(r, x, t) r dr. \quad (3.39)$$

Si el perfil de velocidad depende de y , radio adimensional, κ queda

$$\kappa = \frac{2}{\bar{v}^2(x, t)} \int_0^1 v^2(y, x, t) y dy. \quad (3.40)$$

Capítulo 4

Perfiles de Velocidad

4.1. Introducción

El sistema de ecuaciones unidimensional e hiperbólico en (3.36) se deriva de las ecuaciones de Navier-Stokes sin asumir ningún perfil de velocidad. Sin embargo, para la realización de la simulación numérica es obligado suponer uno, puesto que los cálculos del término de fricción, f , y del coeficiente corrector del término convectivo, κ lo requieren.

En este capítulo se recopilará y analizará los perfiles de velocidad más utilizados en la literatura. Se dedicará especial atención sobre el perfil de Womersley y a sus funciones geométricas. La denominación de función geométrica proviene de la relación con la geometría a través de las funciones Bessel y su valor adimensional. También se analizará el comportamiento de la fricción cuando sea relevante. Todos los perfiles asumen la condición de sección circular y $L \gg D$, longitud del vaso mucho mayor que su diámetro. A continuación, se listan los perfiles de velocidad

- Perfil plano
- Perfil de Poiseuille
- Perfil de ley de potencia o potencial
- Perfil de capa viscosa de Stokes
- Perfil aproximado
- Perfil de Womersley

Van de Vosse [11] clasifica los perfiles de velocidad según su origen. Los perfiles de forma hipotética, o perfiles hipotéticos, son aquellos en los que se asume una forma del perfil en base a criterios empíricos, o incluso heurísticos. El perfil Aproximado se basa en una serie de simplificaciones en la ecuación de Navier-Stokes, las cuales se detallan más adelante. El perfil de Womersley reproduce la periodicidad propia de la naturaleza pulsátil del gradiente de presión. Los perfiles hipotéticos, plano, de Poiseuille y potencial tienen la forma

$$v(y, x, t) = \phi(y)\bar{v}(x, t) \quad (4.1)$$

siendo $\phi(y)$ una función dependiente del radio adimensional y $\bar{v}(x, t)$ la velocidad promedio del fluido en la sección transversal [11, 13]. En adelante, por simplificación de la notación, \bar{v} . El perfil Aproximado, en su forma, representa una variación del perfil hipotético tipo (4.1).

Para cada perfil de velocidad, se derivan las expresiones para f , término de fricción, y para κ , coeficiente corrector del término convectivo. Las expresiones para su obtención son

$$f(y) = 2\pi\mu \frac{\partial v(y, x, t)}{\partial y} \quad \text{and} \quad \kappa = \frac{2}{\bar{v}^2} \int_0^1 v^2(y, x, t) y dy$$

Se considerará que, para un área $A = \pi R^2$, el caudal sea

$$Q = \int v(y, x, t) dA = \pi R^2 \bar{v}.$$

4.2. Perfil de velocidad plano

El perfil de velocidad plano es la planteamiento más sencillo para implementar en un modelo matemático. Asumir un perfil plano significa despreciar los efectos de la viscosidad y suponer un flujo dominado por las fuerzas inerciales. Un perfil plano supone que la función dependiente del radio adimensional tenga valor unitario para todo el dominio,

$$\phi(y) = 1$$

y por tanto, que el valor del perfil para todo el radio adimensional sea el de la velocidad promedio,

$$v(y, x, t) = \bar{v}. \quad (4.2)$$

Para un perfil de velocidad plano, y por tanto constante, la fricción, cuya expresión es proporcional a la variación de la velocidad en el radio (4.2) será

$$f = (2\pi) \mu \left. \frac{\partial v_{flat}}{\partial y} \right|_{y=1} = 0 \text{ for } y \in [0, 1] \quad (4.3)$$

La formulación del coeficiente κ para perfil plano es

$$\kappa = \frac{2}{\bar{v}^2} \int_0^1 v^2(y, x, t) y dy = \frac{2}{\bar{v}^2} \left(\frac{\bar{v}^2}{2} \right) = 1. \quad (4.4)$$

4.3. Perfil de velocidad de Poiseuille

El perfil de velocidad de Poiseuille es un perfil parabólico. Las hipótesis, ecuaciones, desarrollo y relaciones entre las variables caudal, velocidad promedio y gradiente de presión, se encuentran detalladas en §D.1. No es un perfil hipotético, puesto que se deriva de la ecuación que gobierna el flujo, pero puede expresarse como un perfil hipotético. Así la función del radio adimensional, $\phi(y)$, es

$$\phi(y) = 2 \{1 - y^2\},$$

y por tanto, el perfil de velocidad es

$$v(y, x, t) = 2 \{1 - y^2\} \bar{v}. \quad (4.5)$$

4.3.1. Derivación del término de fricción

Sustituyendo la expresión del perfil de velocidad (4.5) en la fórmula de la fricción,

$$\begin{aligned} f &= (2\pi\mu) \left\{ \left. \frac{\partial v_{pois}}{\partial y} \right|_{y=1} \right\} \\ &= (2\pi\mu) \left\{ -2(2y) \Big|_{y=1} \right\} \end{aligned}$$

Se obtiene la formulación del término de fricción para un perfil de Poiseuille

$$f = -8\mu\pi\bar{v}. \quad (4.6)$$

4.3.2. Derivación del coeficiente κ :

El término integral presente en (3.40) de la definición del coeficiente κ , es

$$\int v^2(y, x, t) dA = \frac{2}{3}\bar{v}^2$$

lo cual conduce a la formulación de κ para flujo de Poiseuille,

$$\kappa = \frac{2}{\bar{v}^2} \left\{ \bar{v}^2 \frac{2}{3} \right\} = \frac{4}{3}. \quad (4.7)$$

4.4. Perfil de velocidad de ley de Potencia

El perfil hipotético de ley de potencia, o perfil potencial, fue propuesto y utilizado por Hughes y Lubliner [13] y utilizado por Wan [14]. Es una generalización del perfil de velocidad de Poiseuille. La función $\phi(y)$ queda,

$$\phi(y) = \frac{n+2}{n} (1 - y^n),$$

y por tanto, el perfil de velocidad es,

$$v(y, x, t) = \frac{n+2}{n} (1 - y^n) \bar{v}. \quad (4.8)$$

Se observa como $n = 2$ nos lleva a (4.5). En la Figura 4.1 se encuentran graficados las distintas leyes potenciales utilizadas.

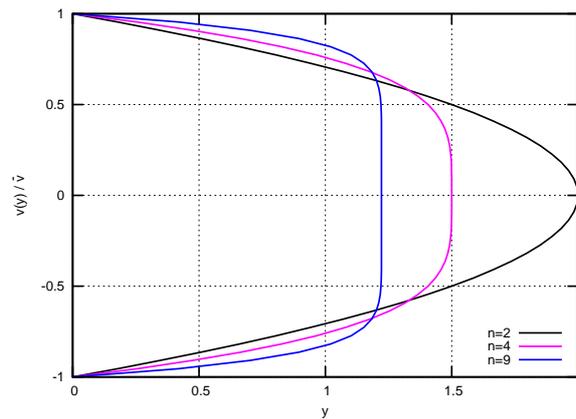


Figura 4.1: Perfil potencial: relación de forma para distintos valores del parámetro n . Casos para $n=2$ (poiseuille), $n=4$ y $n=9$.

4.4.1. Derivación del término de fricción

Sustituyendo la expresión del perfil de velocidad (4.8) en la fórmula de la fricción,

$$\begin{aligned}
f &= (2\pi) \mu \left. \frac{\partial}{\partial y} v_{PL} \right|_{y=1} \\
&= (2\pi R) \mu \left[-\frac{n+2}{n} (ny^{n-1}) \bar{v} \right]_{y=1} \\
&= (2\pi\mu) \{-(n+2)\} \bar{v}.
\end{aligned}$$

Se obtiene la formulación del término de fricción para un perfil potencial y parámetro n arbitrario,

$$f = -2(n+2)\mu\pi\bar{v}. \quad (4.9)$$

4.4.2. Derivación del coeficiente κ :

El término integral presente en (3.40) de la definición del coeficiente κ , es

$$\int v^2(y, x, t) dA = \frac{n+2}{n+1} \frac{\bar{v}^2}{2}.$$

Por lo tanto, la formulación de κ para un perfil potencial es

$$\kappa = \frac{2}{\bar{v}^2} \left\{ \frac{n+2}{n+1} \frac{\bar{v}^2}{2} \right\} = \frac{n+2}{n+1}. \quad (4.10)$$

4.5. Perfil de velocidades de capa viscosa de Stokes

Este perfil, desarrollado y utilizado por Olufsen [8], es un perfil hipotético puesto que no se deriva de las ecuaciones que gobiernan el flujo pero asume la existencia de una capa viscosa. Supone una función $\phi(y)$ evaluada a trozos, con valor constante en el centro y decreciente de manera lineal en la pared del vaso. Se declara la variable δ como el espesor dimensional de la capa límite. El perfil será decreciente en la zona de la capa límite. Olufsen utiliza un valor constante de espesor de la capa límite $\delta = 1\text{mm}$ como valor de referencia, valor que toma del trabajo de Lighthill.

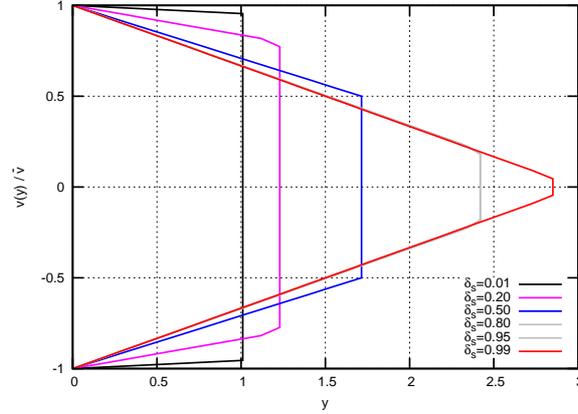
En este trabajo se considerará que el valor de la capa viscosa no es constante y para ello se asumirá la aproximación sugerida por Bessems [10], donde $\delta = R(\sqrt{2}/\alpha)$, con $\alpha = R\sqrt{\rho\omega/\mu}$ el número de Womersley para la frecuencia del ciclo cardíaco. El espesor de capa límite adimensional se define, $\delta_s = \delta/R$. Por tanto la función $\phi(y)$ queda,

$$\phi(y) = \begin{cases} \phi_0 & \text{for } y \leq (1 - \delta_s) \\ \frac{\phi_0}{\delta_s} (1 - y) & \text{for } (1 - \delta_s) < y < 1 \end{cases}$$

y por tanto, el perfil de velocidad es

$$v(y, x, t) = \begin{cases} \phi_0 \bar{v} & \text{for } y \leq (1 - \delta_s) \\ \frac{\phi_0}{\delta_s} (1 - y) \bar{v} & \text{for } (1 - \delta_s) < y < 1 \end{cases} \quad (4.11)$$

donde $\phi_0 = \frac{3}{3 - 3\delta_s + \delta_s^2}$, con δ_s el espesor de capa viscosa. En la Figura 4.2 se encuentra graficado el perfil para distintos espesores de capa posibles, para una velocidad promedio unitaria.

Figura 4.2: Perfil de Stokes: evolución para distintos espesores de capa viscosa, δ_s .

4.5.1. Derivación del término de fricción

Desarrollando el perfil de velocidad para la fórmula de cálculo de fricción,

$$\begin{aligned} f &= (\mu 2\pi) \left. \frac{\partial}{\partial y} v_{SL} \right|_{y=1} \\ &= (2\pi\mu) \left[\frac{-\phi_0}{\delta_s} \bar{v} \right]_{y=1} \end{aligned} \quad (4.12)$$

se obtiene la formulación de la fricción para el perfil de capa viscosa de Stokes

$$f = -\frac{2\pi\mu\phi_0}{\delta_s} \bar{v}, \quad (4.13)$$

donde, sustituyendo ϕ_0 por su valor,

$$f = -\frac{6\pi\mu}{(3 - 3\delta_s + \delta_s^2) \delta_s} \bar{v} \quad (4.14)$$

Esta formulación asume que la fricción estará en fase con la velocidad. A continuación se analiza los casos límite en el cálculo del término fricción. Cuando $\delta_s \rightarrow 0$,

$$\lim_{\delta_s \rightarrow +0} f = -\frac{6\pi\mu}{0} \bar{v} = -\infty, \quad \lim_{\delta_s \rightarrow -0} f = -6\pi\mu \bar{v} \quad (4.15)$$

existiendo una correspondencia con el caso de flujo para perfil plano. Cuando $\delta_s \rightarrow 1$,

$$\lim_{\delta_s \rightarrow 1} f = -\frac{6\pi\mu}{(3 - 3 + 1)} \bar{v} = -6\pi\mu \bar{v} \quad (4.16)$$

existiendo una correspondencia con el caso ideal de Poiseuille.

4.5.2. Derivación del coeficiente κ

El término integral presente en (3.40) de la definición del coeficiente κ , es

$$\int v^2(x, y, t) dA = \frac{\phi_0^2}{12R^2} (6 - 8\delta_s + 3\delta_s^2) \bar{v}^2.$$

Por lo tanto,

$$\kappa = \frac{2}{\bar{v}^2} \left\{ \frac{\phi_0^2 \bar{v}^2}{12} (6 - 8\delta_s + 3\delta_s^2) \right\}.$$

La formulación del coeficiente κ para un perfil de capa viscosa de Stokes es

$$\kappa = \frac{3(6 - 8\delta_s + 3\delta_s^2)}{2(3 - 3\delta_s + \delta_s^2)^2}. \quad (4.17)$$

El coeficiente κ toma valores de 1 a 1,5 en todo el rango de valores de δ_s . En la Figura 4.3 se muestra la evolución del coeficiente con respecto al espesor de capa viscosa.

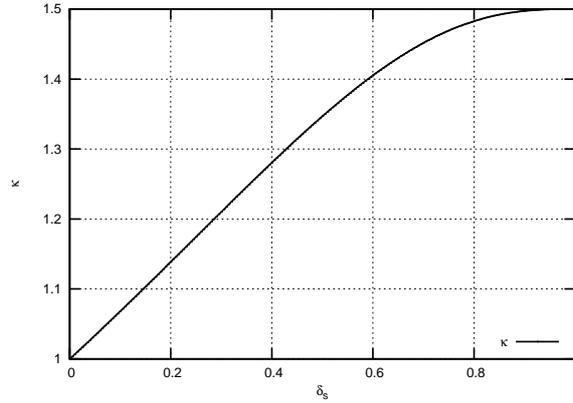


Figura 4.3: Perfil de Stokes: evolución del coeficiente κ para todo el rango de valores de δ_s .

4.6. Perfil de velocidad Aproximado

El perfil Aproximado fue introducido por Bessems [10], basado en el trabajo de Hughes y Lubliner [13]. La obtención detallada del perfil se encuentra en §D.3. En este trabajo se asume una función cuyo dominio se divide en dos subdominios, $Dom_v = (0, y_c) \cup (y_c, 1)$, donde y_c coordenada adimensional que localiza la frontera de la capa viscosa y por tanto $y_c < 1$. Bessems asume un subdominio central, $y \in (0, y_c)$ donde desprecia las fuerzas viscosas y un subdominio en el entorno de la pared del vaso, $y \in (y_c, 1)$. Estas hipótesis conducen a una redefinición de la ecuación de Navier-Stokes para cada subdominio y una definición del perfil de velocidad definido a trozos. El perfil de velocidad para el subdominio asumido como viscoso, será

$$v(y) = \phi_1(y)\bar{v} + \phi_2(y)v_p \quad \text{for } y \in (y_c, 1]$$

donde

$$v_p = \frac{p_x R^2}{4\mu} \quad \text{y} \quad \phi_1(y) = \frac{2 \ln y}{y_c^2 - 1}, \quad \phi_2(y) = (1 + y_c^2) \ln y + 1 - y^2.$$

y $p_x = -\partial_x p$. Se busca un perfil de velocidad de valor constante en el subdominio central,

$$v_c \text{ for } y \in [0, y_c].$$

Evaluando la continuidad del perfil de velocidad $v(y)$ en la frontera, conduce a

$$v_c = v(y_c) = \bar{v} \left\{ \frac{2 \ln y_c}{y_c^2 - 1} \right\} + \frac{p_x R^2}{4\mu} \left\{ \ln y_c (1 + y_c^2) - (y_c^2 - 1) \right\}. \quad (4.18)$$

Así, el perfil de velocidad segmentado queda,

$$v(y) = \begin{cases} v_c & \forall y \in [0, y_c] \\ \bar{v} \left\{ \frac{2 \ln y}{y_c^2 - 1} \right\} + \frac{p_x R^2}{4\mu} \{ (1 + y_c^2) \ln y + 1 - y^2 \} & \forall y \in (y_c, 1] \end{cases} \quad (4.19)$$

donde en la Figura 4.4 se detalla la relación de coordenadas utilizada.

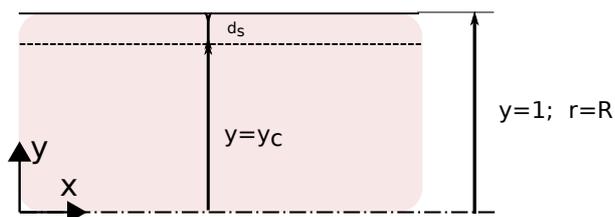


Figura 4.4: Perfil Aproximado: radio adimensional y localización de la frontera con la capa viscosa para un vaso arbitrario.

Una aproximación presente en [10] da la expresión para el espesor de capa viscosa. A continuación, se reproduce en (4.20),

$$y_c = 1 - \delta_s, \quad \delta_s = \min \left[1, \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \right], \quad (4.20)$$

donde α es el número de Womersley definido en (2.44) para la frecuencia cardiaca o primer armónico del caudal. En la Figura 4.5 se encuentra graficado el perfil para distintos espesores de capa posibles, bajo el supuesto de una relación de Poiseuille entre la velocidad promedio y el gradiente de presión, para una velocidad promedio unitaria.

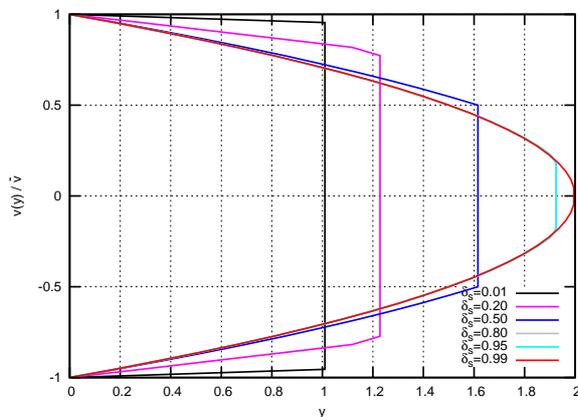


Figura 4.5: Perfil Aproximado: evolución para distintos espesores de capa viscosa, δ_s .

4.6.1. Derivación del término de fricción

Desarrollando el perfil de velocidades para la fórmula de cálculo de fricción,

$$\begin{aligned} f &= (2\pi) \mu \left. \frac{\partial}{\partial y} v_x \right|_{y=1} \\ &= (2\pi) \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{v} \left\{ \frac{2 \ln y}{y_c^2 - 1} \right\} + \frac{p_x R^2}{4\mu} \left\{ (1 + y_c^2) \ln y + 1 - y^2 \right\} \right]_{y=1} \\ &= (2\pi) \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{v} \left\{ \frac{2}{y_c^2 - 1} \right\} \frac{1}{y} + \frac{p_x R^2}{4\mu} \left\{ (1 + y_c^2) \frac{1}{y} - 2y \right\} \right]_{y=1}. \end{aligned}$$

Se obtiene la formulación del término de fricción para un perfil Aproximado

$$f = \bar{v} \left\{ \frac{4\pi\mu}{y_c^2 - 1} \right\} + p_x \left\{ \frac{\pi R^2}{2} (y_c^2 - 1) \right\} \quad (4.21)$$

La fórmula de la fricción derivada de un perfil Aproximado depende del valor de la localización de la capa viscosa, dado por el parámetro adimensional y_c . El gradiente de presión, p_x , aparece como segunda contribución junto a la velocidad promedio.

$$f = \bar{v} \left\{ \frac{4\pi\mu}{y_c^2 - 1} \right\} + p_x \left\{ \frac{\pi R^2}{2} (y_c^2 - 1) \right\}. \quad (4.22)$$

Cuando $y_c \rightarrow 1$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{y_c \rightarrow 1} f &= \bar{v} \lim_{y_c \rightarrow 1} \left(\frac{4\pi\mu}{y_c^2 - 1} \right) + p_x \frac{\pi R^2}{2} \lim_{y_c \rightarrow 1} (y_c^2 - 1) \\ &= \infty \cdot \bar{v} + p_x \frac{\pi R^2}{2} \cdot 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Así, se puede asegurar que a menos espesor de capa viscosa, menor es la influencia del gradiente de presión sobre la forma del perfil. Por el otro lado, cuando $y_c \rightarrow 0$,

$$\lim_{y_c \rightarrow 0} f = -4\pi\mu\bar{v} - p_x \frac{\pi R^2}{2} \quad (4.24)$$

o cuando se asume una relación de Poiseuille $\bar{v} = p_x \frac{\pi R^2}{8\mu}$ entre el gradiente de presión y la velocidad promedio,

$$\lim_{y_c \rightarrow 0} f = -4\pi\mu\bar{v} - p_x \frac{\pi R^2}{2} = -8\pi\mu\bar{v}. \quad (4.25)$$

4.6.2. Derivación del coeficiente κ

Siguiendo la notación de [10], se define el siguiente cambio de variables,

$$\zeta = y^2 \quad \implies \quad d\zeta = 2ydy$$

donde los límites de la nueva variables son,

$$y = 0 \Rightarrow \zeta = 0, \quad y = y_c \Rightarrow \zeta = \zeta_c, \quad y = 1 \Rightarrow \zeta = 1.$$

Se reescribe el término integral presente en (3.40), en función de la nueva variable ζ ,

$$\int_0^1 v^2(y, x, t) y dy = \frac{1}{2} \int_0^1 v^2(\zeta, x, t) d\zeta$$

donde la expresión del perfil de velocidad al cuadrado es

$$v^2(\zeta, x, t) = \phi_1^2(\zeta) \bar{v} + 2\phi_1(\zeta)\phi_2(\zeta) \bar{v} v_p + \phi_2^2(\zeta) v_p^2.$$

Entonces, la expresión del coeficiente κ queda del siguiente modo,

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{2}{\bar{v}^2} \frac{1}{2} \int_0^1 v^2(\zeta, x, t) d\zeta \\ &= \int_0^1 \left\{ \phi_1^2(\zeta) + 2\phi_1(\zeta)\phi_2(\zeta) \frac{v_p}{\bar{v}} + \phi_2^2(\zeta) \left(\frac{\bar{v}}{v_p} \right)^2 \right\} d\zeta \\ &= \int_0^1 \phi_1^2(\zeta) d\zeta + \frac{v_p}{\bar{v}} \int_0^1 2\phi_1(\zeta)\phi_2(\zeta) d\zeta + \left(\frac{\bar{v}}{v_p} \right)^2 \int_0^1 \phi_2^2(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (4.26)$$

A continuación, se declaran las funciones $\delta_1(\zeta_c)$, $\delta_2(\zeta_c)$ y $\delta_3(\zeta_c)$, definidas como

$$\begin{aligned} \delta_1(\zeta_c) &= \int_0^1 \phi_1^2(\zeta) d\zeta = \frac{2 - 2\zeta_c(1 - \ln \zeta_c)}{(1 - \zeta_c)^2}, \\ \delta_2(\zeta_c) &= -2 \int_0^1 \phi_1(\zeta)\phi_2(\zeta) d\zeta = \frac{1 + 4\zeta_c(\ln \zeta_c + 1) + \zeta_c^2(2 \ln \zeta_c - 5)}{1 - \zeta_c}, \\ \delta_3(\zeta_c) &= \int_0^1 \phi_2^2(\zeta) d\zeta = \frac{1}{3} + \zeta_c(3 + 2 \ln \zeta_c) + \zeta_c^2(3 - 2 \ln \zeta_c) - \frac{\zeta_c^3}{3}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

La utilización de las funciones delta, las cuales se muestran en la Figura 4.6, conducen a la siguiente expresión del coeficiente κ ,

$$\kappa = \delta_1(\zeta_c) - \delta_2(\zeta_c) \frac{v_p}{\bar{v}} + \delta_3(\zeta_c) \left(\frac{\bar{v}}{v_p} \right)^2. \quad (4.28)$$

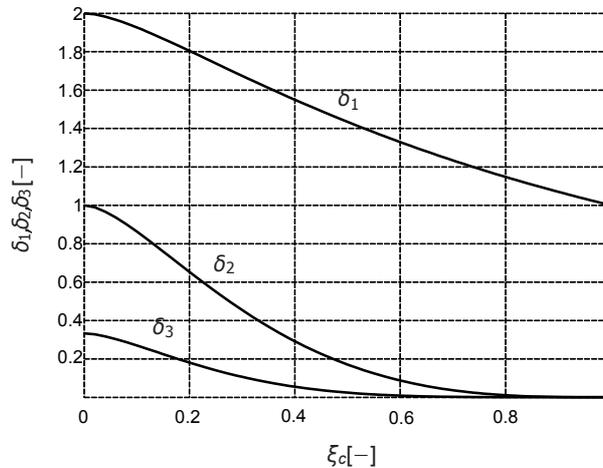


Figura 4.6: Perfil aproximado: funciones delta del coeficiente corrector del término convectivo. Imagen extraída de [10].

4.7. Perfil de velocidad de Womersley

En el §2 se encuentra la derivación de la formulación del perfil de Womersley dependiente del caudal que para mejor entendimiento, se reproduce ahora,

$$v(y, t) = \Re \left[\frac{\hat{Q}}{\pi R^2} \frac{\left\{ 1 - \frac{J_0(i^{\frac{3}{2}} \alpha y)}{J_0(i^{\frac{3}{2}} \alpha)} \right\}}{\left\{ 1 - \frac{2}{i^{\frac{3}{2}} \alpha} \frac{J_1(i^{\frac{3}{2}} \alpha)}{J_0(i^{\frac{3}{2}} \alpha)} \right\}} e^{i\omega t} \right]$$

Se observa en la expresión de arriba, tres funciones Bessel de argumento complejo. Los valores que toman estas funciones en la sección son números complejos. Para la obtención de un perfil de velocidad, u otro término derivado de esta, en parte real y parte imaginaria, se descomponen estas funciones en otras que permitan separar la parte real y la parte imaginaria. Se define una notación más simple para las funciones Bessel,

$$J_0(y) = J_0(i^{\frac{3}{2}} \alpha y), \quad J_0 = J_0(i^{\frac{3}{2}} \alpha) \quad \text{y} \quad J_1 = J_1(i^{\frac{3}{2}} \alpha). \quad (4.29)$$

En §A.4 se declaran las funciones módulo y fase. Se define una notación simplificada para las funciones módulo y fase,

$$M_\xi(y) = M_\xi(\alpha y), \quad \theta_\xi(y) = \theta_\xi(\alpha y) \quad \text{y} \quad M_\xi = M_\xi(\alpha), \quad \theta_\xi = \theta_\xi(\alpha), \quad (4.30)$$

donde ξ es el parametro que indica el orden de la función. A continuación, se define una serie de funciones, las cuales vamos a denominar geométricas, puesto que su origen es la geometría cilíndrica del vaso por el que circula el flujo sanguíneo. Se especifica una distinción entre las funciones geométricas del perfil, variables en el radio adimensional, y las funciones geométricas de caudal, aquellas que permiten pasar de un perfil de velocidad dependiente del gradiente de presión a otro dependiente del caudal circulante. Estas funciones permiten tratar la función Bessel de argumento complejo como un número complejo en notación polar.

Las funciones geométricas del perfil corresponden a dos pares de funciones. El primer par, M_p , ϵ_p , módulo y su fase asociada de un número complejo. El segundo par de funciones geométricas, h_0 y δ_0 , módulo y fase asociada a un número complejo. Primero, se definen éstas últimas,

$$h_0 = h_0(y) = \frac{M_0(y)}{M_0}, \quad \delta_0 = \delta_0(y) = \theta_0 - \theta_0(y) \quad (4.31)$$

de la expresión

$$h_0 e^{-i\delta_0} = \frac{M_0(y)}{M_0} \frac{e^{i\theta_0(y)}}{e^{i\theta_0}} = \frac{J_1}{J_0}.$$

El segundo par de funciones geométricas del perfil, M_p y ϵ_p , graficado en la Figura 4.7, se define como

$$M_p = (1 + h_0^2 - 2h_0 \cos(\delta_0))^{\frac{1}{2}}, \quad \epsilon_p = \arctan\left(\frac{h_0 \sin \delta_0}{1 - h_0 \cos \delta_0}\right). \quad (4.32)$$

de la expresión

$$M_p e^{i\epsilon_p} = 1 - h_0 e^{-i\delta_0} = 1 - \frac{J_0(y)}{J_0}.$$

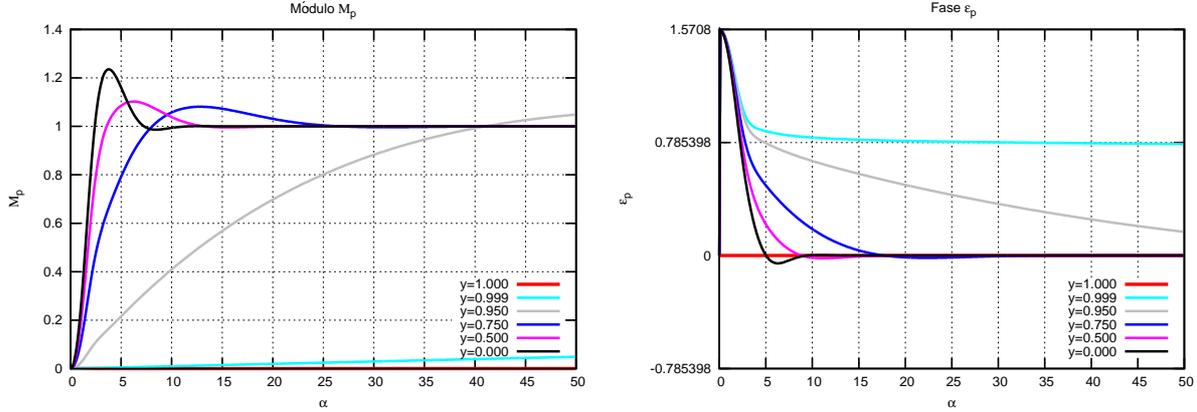


Figura 4.7: Perfil de Womersley: funciones geométricas del perfil. En el lado izquierdo, M_p , y en el lado derecho, ϵ_p .

Las funciones geométricas de caudal son cuatro funciones, M_{10} y ϵ_{10} , módulo y fase de un número complejo y h_{10} y δ_{10} , módulo y fase de un número complejo. Primero, se definen estas últimas,

$$h_{10} = \frac{2 M_1}{\alpha M_0}, \quad \delta_{10} = \theta_0 - \theta_1 + \frac{3\pi}{4} \quad (4.33)$$

de la expresión

$$h_{10}e^{-i\delta_{10}} = \frac{2 M_1 e^{i\theta_1}}{e^{i3\pi/4}\alpha M_0 e^{i\theta_0}} = \frac{2 J_1}{i^{\frac{3}{2}}\alpha J_0}.$$

Se define una nuevo par de funciones geométricas de caudal, M_{10} y ϵ_{10} ,

$$M_{10} = (1 + h_{10}^2 - 2h_{10} \cos(\delta_{10}))^{\frac{1}{2}}, \quad \epsilon_{10} = \arctan\left(\frac{h_{10} \sin \delta_{10}}{1 - h_{10} \cos \delta_{10}}\right). \quad (4.34)$$

de la expresión

$$M_{10}e^{i\epsilon_{10}} = 1 - h_{10}e^{-i\delta_{10}} = 1 - \frac{2 J_1}{i^{\frac{3}{2}}\alpha J_0}.$$

Las cuatro funciones geométricas de caudal se muestran en la Figura 4.8.

Aplicando las funciones geométricas sobre el perfil de velocidad de Womersley, conduce a

$$v(y) = M_p(y) \frac{Q^2}{M_{10}\pi R^2} \cos(\omega t - \phi + \epsilon_p(y) - \epsilon_{10}). \quad (4.35)$$

Esta solución es para una perfil de velocidad de un solo armónico. Pero se puede extender sistemáticamente al de un perfil multiarmónico.

4.7.1. Derivación del término de fricción

Se desarrolla la expresión del perfil de velocidad de Womersley en (2.45) para el cálculo del término fricción.

$$f(y, t) = 2\pi\mu \frac{\partial}{\partial y} v(y, t) = \mu \frac{2M\pi}{i\rho\omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [1] - \frac{\frac{\partial}{\partial y} \left[J_0 \left(i^{\frac{3}{2}}\alpha y \right) \right]}{J_0 \left(i^{\frac{3}{2}}\alpha \right)} \right\} e^{i\omega t}. \quad (4.36)$$

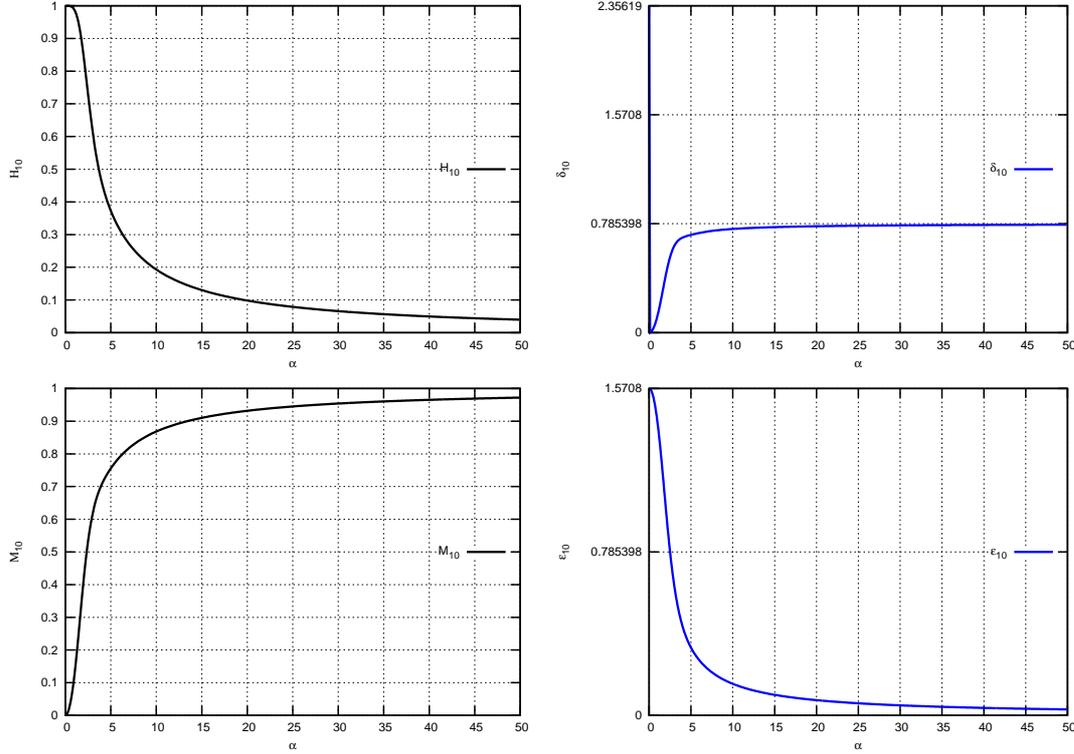


Figura 4.8: Perfil de Womersley: funciones geométricas de caudal. Arriba en la imagen, h_{10} y δ_{10} y abajo, M_{10} y ϵ_{10} .

Aplicando la siguiente propiedad de las funciones Bessel, $\frac{d}{dy} [J_0(x)] = -J_1(x)$, y la Regla de la Cadena en la derivación, $\frac{\partial f(g(x))}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial x}$, conduce a

$$\frac{d}{dy} \left[J_0 \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha y \right) \right] = - \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha \right) J_1 \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha y \right)$$

Así, el término de fricción en función del gradiente de presión, es

$$f(y, t) = \mu \frac{2M\pi}{i\rho\omega} \left\{ \frac{\left(i^{\frac{3}{2}} \alpha \right) J_1 \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha y \right)}{J_0 \left(i^{\frac{3}{2}} \alpha \right)} \right\} e^{i\omega t}. \quad (4.37)$$

Se reemplaza M , módulo del gradiente de presión por (2.52) y evaluando el término de fricción en la pared del vaso, $y = 1$,

$$f = f(y = 1) = \frac{2\mu\hat{Q}}{R^2} \frac{\left\{ \frac{\left(i^{\frac{3}{2}} \alpha \right) J_1}{J_0} \right\}}{\left\{ 1 - \frac{2 J_1}{i^{\frac{3}{2}} \alpha J_0} \right\}} e^{i\omega t}. \quad (4.38)$$

Se utilizan las funciones geométricas de caudal, (4.33) y (4.34) para reescribir el término de fricción,

$$f = \frac{\mu\hat{Q}}{R^2} \frac{\left(i^{\frac{3}{2}} \alpha \right)^2 h_{10} e^{-i\delta_{10}}}{M_{10} e^{i\epsilon_{10}}} e^{i\omega t} = \frac{\mu\hat{Q}\alpha^2}{R^2} \frac{h_{10}}{M_{10}} e^{i(\omega t - \phi - \delta_{10} - \epsilon_{10} + \frac{3}{2}\pi)} \quad (4.39)$$

Entonces,

$$f = \left\{ \frac{\mu \hat{Q} \alpha^2}{R^2} \frac{h_{10}}{M_{10}} \cos \left(\omega t - \phi - \delta_{10} - \epsilon_{10} + \frac{3}{2} \pi \right) \right\} + i \left\{ \frac{\mu \hat{Q} \alpha^2}{R^2} \frac{h_{10}}{M_{10}} \sin \left(\omega t - \phi - \delta_{10} - \epsilon_{10} + \frac{3}{2} \pi \right) \right\}. \quad (4.40)$$

Debido a que $\cos(A + \frac{3}{2}\pi) = \sin(A)$, la parte real del término de fricción es

$$f = \frac{\mu \hat{Q} \alpha^2}{R^2} \frac{h_{10}}{M_{10}} \sin(\omega t - \phi - \delta_{10} - \epsilon_{10}). \quad (4.41)$$

siendo análogo el proceso para la fórmula de la parte imaginaria de la fricción, donde $\sin(A + \frac{3}{2}\pi) = -\cos(A)$. La fórmula anterior, aunque no se ha especificado, está formulada para un armónico arbitrario. Se puede extender fácilmente a una señal que sea sumatorio de armónicos aplicando la fórmula a cada componente armónica.

$$f = \sum_{n=1}^{N/2} \frac{\mu Q_n \alpha_n^2}{R^2} \frac{h_{10}}{M_{10}} \sin(\omega_n t - \phi - \delta_{10} - \epsilon_{10}) \quad (4.42)$$

o, reescribiendo la fórmula en función de una teórica velocidad promedio armónica

$$f = \sum_{n=1}^{N/2} \mu \pi v_n \alpha_n^2 \frac{h_{10}}{M_{10}} \sin(\omega_n t - \phi - \delta_{10} - \epsilon_{10}) \quad (4.43)$$

con $v_n = Q_n/(\pi R^2)$. Se hace notar que h_{10} , M_{10} , ϵ_{10} y δ_{10} , son funciones dependientes del α . Cuando $\alpha \rightarrow 0$, $M_{10} = 0$, pero Womersley [7] dejó tabulado los valores de M_{10}/α_n^2 . Así,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha^2}{M_{10}} = 8, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} h_{10} = 1, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \delta_{10} = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \epsilon_{10} = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, la fricción para una sola componente armónica, resulta en la expresión del término de fricción derivado de Poiseuille,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f_n = -8\pi \mu v_n. \quad (4.44)$$

De este resultado hay dos lecturas útiles. La primera es que la componente estacionaria de la señal se trata como si de la fricción de Poiseuille se tratase. La otra es, que a bajos números de Womersley, la fricción se comporta como la fricción derivada de Poiseuille.

4.7.2. Derivación del coeficiente κ

Por la definición de κ en (3.40) aplicada al perfil de velocidad de Womersley en (2.53), conduce a

$$\kappa = \frac{\pi R^2}{\left\{ \hat{Q} e^{i\omega t} \right\}^2} 2\pi R^2 \int_0^1 \left[\frac{\left\{ \frac{\hat{Q} e^{i\omega t}}{\pi R^2} \right\}^2}{\left\{ 1 - \frac{2}{i^{\frac{3}{2}} \alpha} \frac{J_1(i^{\frac{3}{2}} \alpha)}{J_0(i^{\frac{3}{2}} \alpha)} \right\}^2} \left\{ 1 - \frac{J_0(i^{\frac{3}{2}} \alpha y)}{J_0(i^{\frac{3}{2}} \alpha)} \right\}^2 \right] y dy \quad (4.45)$$

que simplificado, resulta

$$\kappa = \frac{2}{\left(1 - \frac{2}{i^{\frac{3}{2}}\alpha} \frac{J_1(i^{\frac{3}{2}}\alpha)}{J_0(i^{\frac{3}{2}}\alpha)}\right)^2} \int_0^1 \left\{1 - \frac{J_0(i^{\frac{3}{2}}\alpha y)}{J_0(i^{\frac{3}{2}}\alpha)}\right\}^2 y dy \quad (4.46)$$

Desarrollando el binomio del integrando, entonces

$$\kappa = \frac{2}{\left(1 - \frac{2}{i^{\frac{3}{2}}\alpha} \frac{J_1(i^{\frac{3}{2}}\alpha)}{J_0(i^{\frac{3}{2}}\alpha)}\right)^2} \left\{ \int_0^1 y dy - 2 \frac{\int_0^1 J_0(i^{\frac{3}{2}}\alpha y) y dy}{J_0(i^{\frac{3}{2}}\alpha)} + \frac{\int_0^1 J_0^2(i^{\frac{3}{2}}\alpha y) y dy}{J_0^2(i^{\frac{3}{2}}\alpha)} \right\}. \quad (4.47)$$

Dentro de los corchetes de la ec. (4.47), aparecen tres integrales. Dos de ellas fueron ya calculadas en §2.5,

$$\int_0^1 1 y dy = \frac{1}{2} \quad y \quad \int_0^1 y J_0(i^{\frac{3}{2}}\alpha y) dy = \frac{J_1(i^{\frac{3}{2}}\alpha)}{i^{\frac{3}{2}}\alpha}$$

pero no la tercera integral, cuyo integrando contiene una función Bessel al cuadrad. En la teoría específica sobre funciones Kelvin, contenida en la teoría general para funciones Bessel, se encuentra la siguiente igualdad,

$$\int x J_0^2(x) dx = \frac{x^2}{2} \{J_0^2(x) + J_1^2(x)\}. \quad (4.48)$$

Antes de realizar la integración, se tiene que proceder a un cambio de variables ya visto antes en §2.5. Así

$$x = (i^{\frac{3}{2}}\alpha) y \Rightarrow dx = (i^{\frac{3}{2}}\alpha) dy$$

y por consiguiente, los nuevos límites de la integral son,

$$y = 1 \Rightarrow x = i^{\frac{3}{2}}\alpha, \quad y = 0 \Rightarrow x = 0$$

lo que cambia la forma de la integran y lleva a que,

$$\begin{aligned} \int_0^1 J_0^2(i^{\frac{3}{2}}\alpha y) y dy &= \frac{1}{(i^{\frac{3}{2}}\alpha)^2} \int_0^{i^{\frac{3}{2}}\alpha} x J_0^2(x) dx \\ &= \frac{1}{(i^{\frac{3}{2}}\alpha)^2} \left[\frac{x^2}{2} \{J_0^2(x) + J_1^2(x)\} \right]_0^{i^{\frac{3}{2}}\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \{J_0^2(i^{\frac{3}{2}}\alpha) + J_1^2(i^{\frac{3}{2}}\alpha)\}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Reemplazando la ec. (4.49) y las otras dos integrales en (4.47), lleva a:

$$\kappa = \frac{2}{\left\{1 - \frac{2}{i^{\frac{3}{2}}\alpha} \frac{J_1(i^{\frac{3}{2}}\alpha)}{J_0(i^{\frac{3}{2}}\alpha)}\right\}^2} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{2}{(i^{\frac{3}{2}}\alpha)} \frac{J_1(i^{\frac{3}{2}}\alpha)}{J_0(i^{\frac{3}{2}}\alpha)} + \frac{1}{2} \frac{J_0^2(i^{\frac{3}{2}}\alpha) + J_1^2(i^{\frac{3}{2}}\alpha)}{J_0^2(i^{\frac{3}{2}}\alpha)} \right\} \quad (4.50)$$

Reemplazando en (4.50) los dos pares de funciones definidos en (4.33) y (4.34), conduce a, κ expresada en notación polar para números complejos,

$$\kappa = \frac{2(1 - 2h_{10}e^{-i\delta_{10}}) + \left(\frac{\alpha h_{10}}{4}\right)^2 e^{i\left(\frac{3}{2}\pi - 2\delta_{10}\right)}}{\{M_{10}e^{i\epsilon_{10}}\}^2}. \quad (4.51)$$

Multiplicando la expresión anterior por $e^{-i2\epsilon_{10}}/e^{i2\epsilon_{10}}$, entonces

$$\kappa = \frac{e^{-i\epsilon_{10}}}{M_{10}} + \left(\frac{\alpha h_{10}}{2 M_{10}}\right)^2 e^{i(3\pi/2 - 2\delta_{10} - 2\epsilon_{10})}. \quad (4.52)$$

Tras aplicar una relación trigonométrica sobre el ángulo $(3\pi/2 - \theta)$, entonces, la parte real del coeficiente κ resulta ser

$$\Re\{\kappa\} = \frac{2}{M_{10}} \cos \epsilon_{10} - \left(\frac{\alpha h_{10}}{2 M_{10}}\right)^2 \sin(2\delta_{10} + 2\epsilon_{10}), \quad (4.53)$$

mientras la parte imaginaria resulta ser

$$\Im\{\kappa\} = -\frac{2}{M_{10}} \sin \epsilon_{10} - \left(\frac{\alpha h_{10}}{2 M_{10}}\right)^2 \cos(2\delta_{10} + 2\epsilon_{10}), \quad (4.54)$$

Ambas componentes del coeficiente se muestran en la Figura 4.9. Sólo tiene aplicación la parte real (4.53).

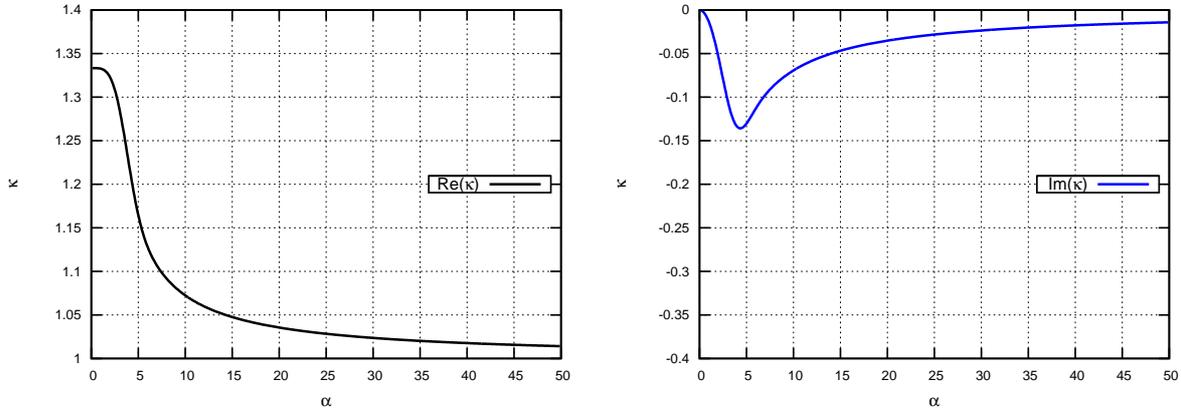


Figura 4.9: Perfil de Womersley: Coeficiente κ . A la izquierda, componente real de coeficiente; a la izquierda, la imaginaria.

4.8. Resumen

En este capítulo se han detallado los perfiles de velocidad que son de interés en este trabajo. Estos perfiles tiene por objeto describir la distribución de velocidades a largo del radio adimensional para una sección cualesquiera. De cada uno de ellos, se ha derivado las expresiones de los términos de fricción y los coeficientes correctores del término convectivo, que se denominarán como términos asociados al perfil de velocidad.

Excluyendo el perfil plano y el perfil de Poiseuille, se ha constatado relaciones y semejanzas entre el resto de los perfiles analizados con los mencionados, con uno o con los dos. El perfil potencial es, por definición, una extensión del perfil de Poiseuille. El perfil de capa viscosa parte de una configuración plana y evoluciona de manera trapezoidal, según se incrementa la capa viscosa prevista, a un triángulo.

Una interrelación entre los perfiles potencial y de capa viscosa de Stokes, en el perfil potencial para un hipotético valor de $n=1$, sería equivalente al perfil de capa viscosa de Stokes cuando $\delta_s = 1$. El perfil aproximado evoluciona desde un perfil tipo plano a otro tipo Poiseuille. Todo esto queda dentro del ámbito de la manipulación matemática de las fórmulas, puesto que la expresión del perfil aproximado se formula para unas hipótesis consideradas. La forma adoptada por el perfil de Womersley depende del número de Womersley, así que para bajos números de Womersley, más se aproxima a un perfil parabólico. No se ha demostrado en el capítulo, pero sucede que, a mayor número de Reynolds, más se acerca la forma del perfil de Womersley a uno plano.

También, en este capítulo, se ha extendido la hipótesis de Bessems sobre el espesor de capa viscosa variable, del mismo origen que el valor asignado al espesor de capa viscosa por Olufsen, sólo que constante. Añadiendo este detalle, se ha buscado mayor sofisticación y un análisis más preciso. De este modo, para los perfiles de capa de Stokes, el Aproximado y el de Womersley, la forma del perfil depende de la geometría y la frecuencia del ciclo cardiaco. Quedan patentes los efectos transitorios del flujo sobre su formulación.

Dentro del proceso de derivación de los términos asociados, se ha realizado un esfuerzo mayor para el perfil de Womersley para poder obtener expresiones analíticas, ya sea del perfil o de los terminos que de él se derivan. Las funciones geométricas, de caudal en este caso, que se han declarado, permiten desarrollar una formulación analítica en el tiempo para f y κ . Para el coeficiente corrector, κ , no se ha podido encontrar otra fórmula que la que desarrolla la expresión para un sólo armónico. Se ha hecho patente que calcular el coeficiente corrector implica la integración numérica para resolver $\int_0^1 v^2 dy$. Este asunto se abordará más adelante y de manera escueta.

Capítulo 5

Caracterización de los vasos del sistema arterial

5.1. Introducción

El sistema circulatorio humano comprende el corazón, la circulación sistémica o periférica y la circulación pulmonar. La circulación pulmonar se encarga del camino de ida y vuelta de la sangre del corazón a los pulmones y la circulación sistémica, del camino de ida y vuelta de la sangre a los tejidos. La circulación sistémica y pulmonar son análogas aunque con diferencias importantes.

La circulación sistémica, comprende el sistema arterial, el venoso y el capilar. Las funciones de cada sistema determinan las características de sus vasos. La función de los vasos arteriales es transportar la sangre con un nivel de presión alto para así superar la pérdida de carga que supone la distribución por todo el sistema capilar. La función del sistema venoso es recoger la sangre de los tejidos y servir de reservorio para regular las necesidades de sangre. La función del sistema capilar es la de distribuir y recoger la sangre por todos los tejidos (arteriolas y vénulas) y realizar el intercambio de líquidos, nutrientes y electrolitos (capilares).

Los vasos arteriales por su función, soportan mayor presión sanguínea. La presión media en arterias es de 100 mmHg frente a 17 mmHg en capilares, 16 mmHg en arterias del sistema pulmonar [35]. En una vena sistémica la presión es muy baja pero influyen en el valor de la presión, la denominada presión hidrostática o las válvulas venosas que obligan a la sangre a ir en un sentido. En la Figura 5.1 se observan los valores que toma la presión a su paso por los distintos tipos de vaso. También, las arterias son ocho veces menos distensibles en promedio que los vasos venosos y por tanto menos colapsables. La distensibilidad es la propiedad de un vaso para incrementar su volumen respecto de su volumen característico frente a un aumento de presión. Menos distensibilidad y soportar mayor presión explican por qué la pared de los vasos arteriales es más gruesa y por qué los vasos arteriales son menos colapsables que el resto

Por las razones antes dadas son por las que sólo en arterias se pueden asumir los perfiles de velocidad que hemos recopilado y analizado. Para implementar los perfiles de velocidad necesitamos un modelo matemático detallado para todo el sistema circulatorio. En este trabajo se utiliza la modelización matemática elaborada por [24]. La Figura 5.2 muestra el sistema global utilizado en la simulación. En rojo, a la izquierda se tiene la red de vasos arteriales, de interés en este trabajo, distribución desarrollada y utilizada por Müller y E. Toro en [23]. De los 302 vasos modelizados con un sistema de ecuaciones unidimensionales, 85 vasos forman parte del sistema arterial de la circulación sistémica.

El esquema numérico utilizado en este trabajo está basado en una discretización descentrada de los términos fuente de presión y fricción de las ecuaciones y el desarrollo de un método numérico específico para flujo unidimensional en arterias [24]. Este método numérico involucra la presencia de los términos fuente asegurando así la convergencia a la solución exacta mediante la introducción de una onda extra asociada al cambio en las propiedades de los materiales y el término de fricción. El esquema resultante, es un esquema energéticamente equilibrado, que asegura el equilibrio en condiciones de reposo y el equilibrio

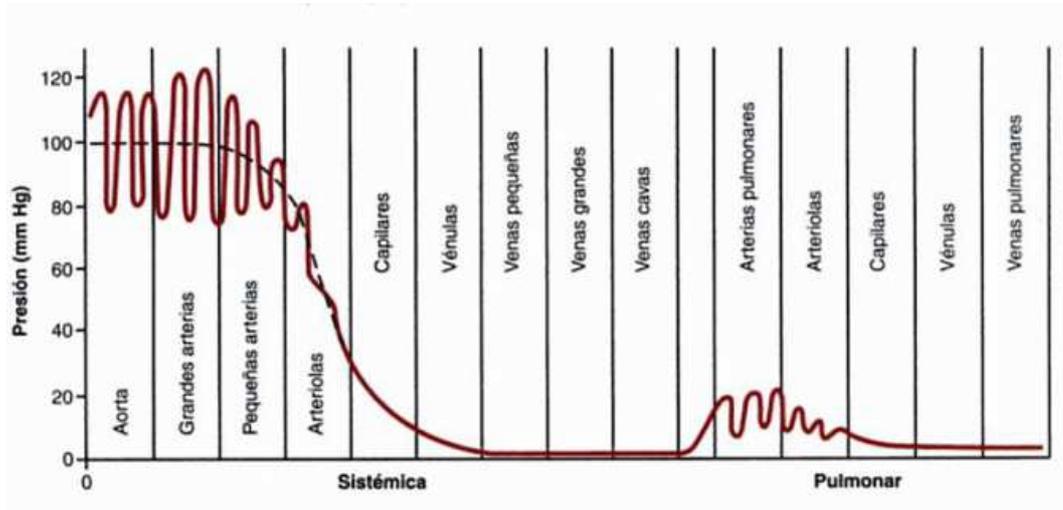


Figura 5.1: Presión esperada para las distintas componentes de la función circulatoria. Imagen extraída del Tratado de Fisiología Médica de Guyton y Hall [35].

numérico en casos con un nivel energético constante y velocidad. Así, este esquema es capaz de resolver el transporte de sustancias evitando la generación de oscilaciones no físicas.

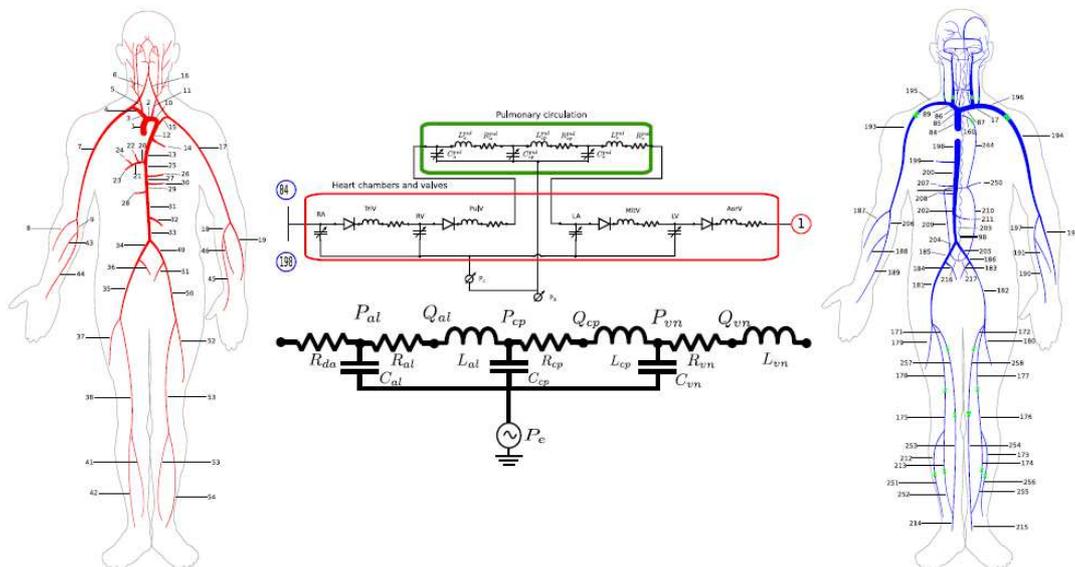


Figura 5.2: Circulación sanguínea: sistema global empleado en la simulación. Imagen extraída de [23].

Antes de realizar cálculo alguno, se procederá en este capítulo a la caracterización de los vasos arteriales a través de los resultados obtenidos de la simulación numérica del modelo matemático | [24]. En este capítulo, se clasificarán los vasos por grupos §5.2, se estudiará el comportamiento del fluido en los vasos en §5.3 y se analizará la importancia de los armónicos en el desarrollo del perfil de velocidad de Womersley.

Para esta caracterización, conviene saber qué valores se les da a algunas de las propiedades de la sangre circulante: densidad, $\rho = 0,00105[kg \cdot cm^{-3}]$; viscosidad dinámica, $\mu = 0,000045[kg \cdot cm \cdot s^{-1}]$; aceleración de la gravedad, $g = 980[cm \cdot s^{-1}]$. Algunos de los parámetros empleados en la simulación son: periodo del ciclo cardiaco, $T = 1s$; número de muestras por ciclo, $N_s = 2^{14} = 16834$, tiempo de muestreo, $\Delta = 2^{-14} = 0,00006103515625s$. La simulación numérica emplea, por defecto, el término de

fricción derivado del perfil de velocidad de Poiseuille, $f = -8\mu\pi\bar{v}$, y un coeficiente corrector del término convectivo para perfil plano, $\kappa = 1$.

5.2. Caracterización de los vasos por Grupos

Utilizando la hipótesis de Bessems sobre la región de influencia de una capa viscosa [10], la relación entre las fuerzas viscosas y las inerciales induciría en el fluido la aparición de dos regiones en el seno del vaso, en una de ellas predominarían las fuerzas inercias, mientras la otra estaría dominada por las viscosas. También Bessems proporciona una fórmula que provee de una aproximación para el espesor de esta capa.

$$\delta_s = \min \left[\frac{\sqrt{2}}{\alpha}, 1 \right].$$

donde δ_s , el espesor de la capa límite. La expresión nos indica que a mayor valor del número de Womersley, menor es el valor de la región viscosa. Bajos valores de δ_s van asociados con perfiles planos, y valores altos, con perfiles redondeados y próximos a Poiseuille. Los valores de capa viscosa obtenidos para los vasos arteriales del modelo pueden observarse en la Figura 5.3.

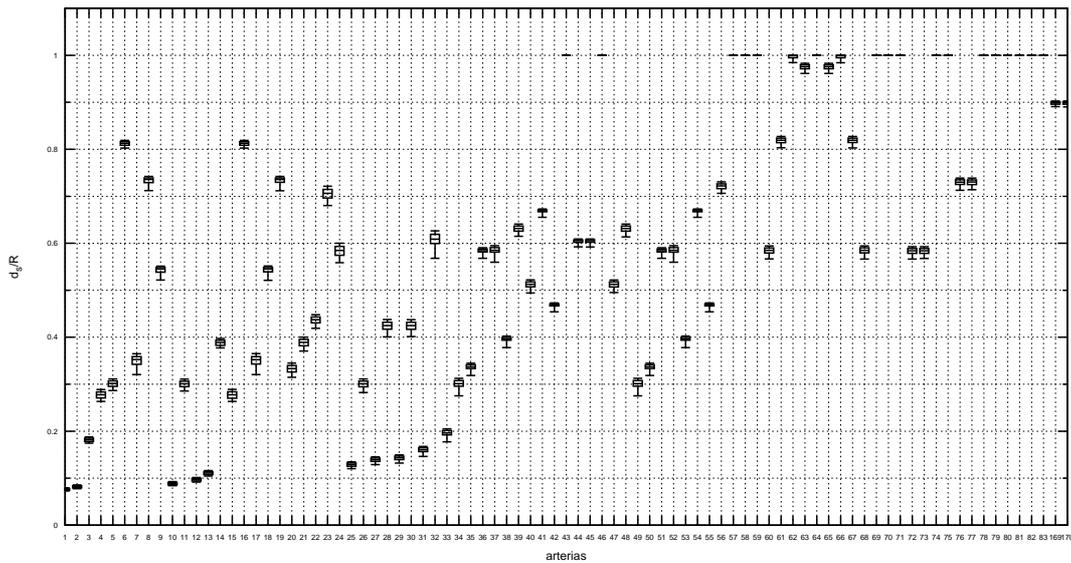


Figura 5.3: Espesor adimensional de casa viscosa, δ_s . Valores para cada vaso obtenidos a lo largo de un ciclo cardiaco.

Según el valor del espesor de capa límite se puede presuponer la forma que tendrá el perfil. Se propone una clasificación de los vasos en tres grupos,

- Grupo I: perfil de tipo plano

$$\delta_s \in (0, 0,2)$$

- Grupo II: perfil de tipo potencial

$$\delta_s \in (0,2, 0,8)$$

- Grupo III: perfil de tipo Poiseuille

$$\delta_s \in (0,8, 1)$$

donde ya en el anterior capítulo habíamos valorado las relaciones de los distintos perfiles con el perfil plano y el perfil de Poiseuille y ahora se le da forma clasificando al Grupo I y Grupo III como los casos en los que más se parecen los perfiles a estas formas ideales y al Grupo II como los casos de transición que bien pueden llamarse de tipo potencial, pues su formulación permite declarar infinitud de opciones intermedias entre ambos casos.

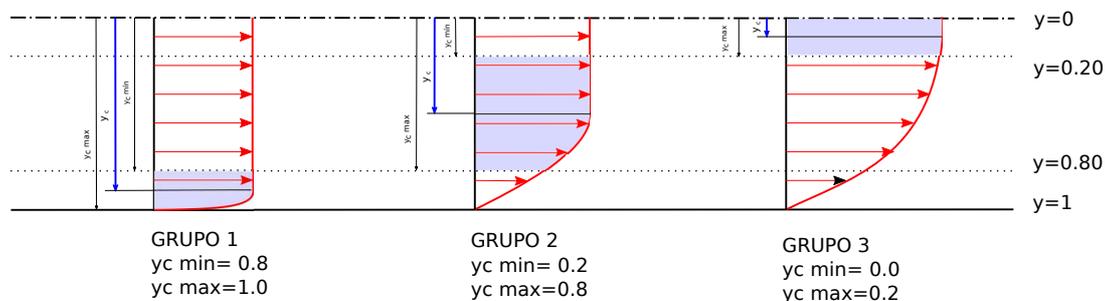


Figura 5.4: Grupos de vasos. Tipos de perfiles esperados en un vaso de acuerdo a la asignación de grupo.

Analizando qué vasos han ido a parar a cada grupo, se observa como el Grupo I recoge a todos los vasos correspondientes a la Aorta y a una bifurcación de ésta cerca del arco aórtico. Los vasos del Grupo II se encuentran la mayoría en el tronco y también algunas arterias importantes que irrigan la cabeza. Los vasos del Grupo III se encuentran la mayoría en la cabeza, y sólo dos, fuera de ésta, en los brazos. En la Figura 5.5 se muestra cómo queda la clasificación propuesta sobreimpresa sobre el árbol arterial de Müller [23].

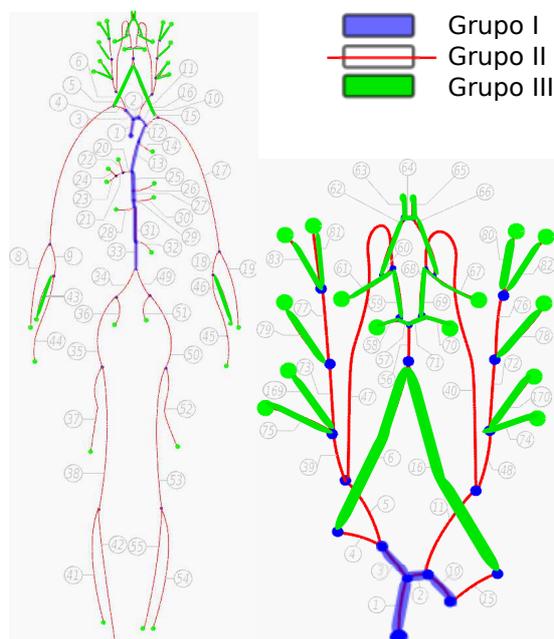


Figura 5.5: Red de vasos arteriales de la circulación sistémica. 85 vasos arteriales forman parte del estudio para la influencia del perfil de velocidad. Imagen editada por el autor de este texto extraída de [23].

La Figura 5.6 muestra la clasificación por grupos en un diagrama de dispersión donde se analiza la influencia de la geometría. La gráfica señala la imposibilidad de establecer una relación entre la longitud del vaso y la ratio L/D , debido a que la longitud de cada vaso se define a través de la distancia entre bifurcaciones y no se contempla el vaso real. Sí que se aprecia la relación entre diámetro y grupo, aunque es achacable a la relación intrínseca del espesor de capa viscosa al número de Womersley, α y éste con el radio de la sección transversal del vaso.

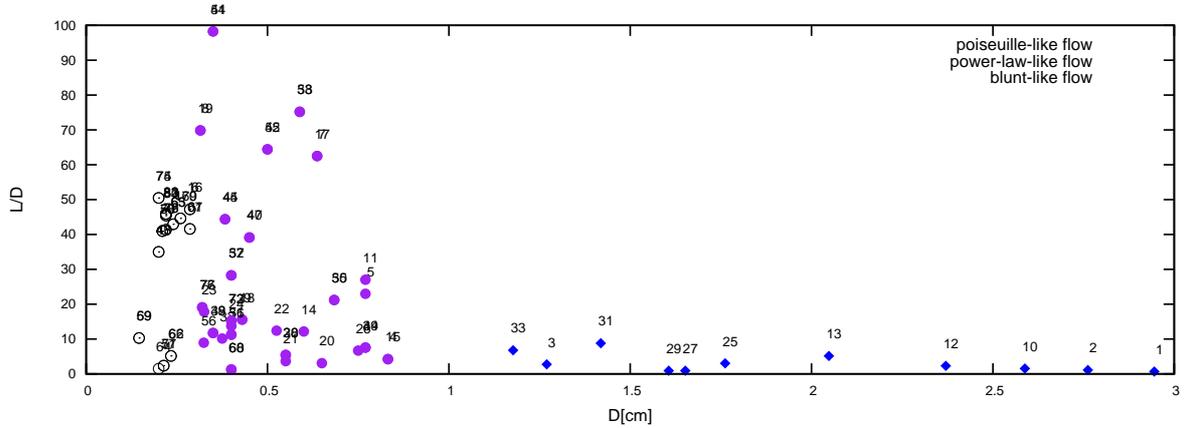


Figura 5.6: Vasos arteriales. Diagrama de dispersión de L/D frente a D . Los rombros azules hacen referencia al Grupo I; los círculos morados al Grupo II; los círculos blancos al Grupo III.

5.3. Números adimensionales para los vasos arteriales

Para determinar el comportamiento del fluido, se calcula, a partir de los resultados de la simulación para un ciclo cardiaco, el número de Reynolds y el número de Womersley. El número de Reynolds, Re , determina el comportamiento del flujo estacionario. El número de Womersley, aparece por primera vez en [3] y adquiere su dimensión actual con el trabajo de J.R. Womersley [6]. Determina el comportamiento del flujo oscilatorio.

Número de Reynolds

El número de Reynolds es la ratio entre las fuerzas convectivas y las viscosas. Un número de Reynolds bajo implica flujos laminares, y viceversa. Cuando un número de Re es alto, y por tanto el flujo es turbulento, viene determinado por cada configuración del flujo. Nuestra configuración es de fluido circulando por un vaso de geometría cilíndrica, de longitud mucho mayor que el diámetro de vaso. Otros parámetros influyen en el comportamiento del fluido, como la rugosidad de la pared del vaso. La definición de Reynolds para un vaso cilíndrico es

$$Re = \frac{\rho \bar{u} D}{\mu},$$

donde \bar{u} es la velocidad promedio del fluido en la sección de un vaso de diámetro D para un momento arbitrario del muestreo, la viscosidad dinámica de la sangre, μ . Para un vaso de paredes rígidas, se consideran los siguiente valores para el número de Reynolds, Re ,

- Flujo laminar : $Re \leq 2300$
- Flujo en transición: $2300 < Re < 4000$
- Flujo turbulento : $Re \geq 4000$

Si se grafica para cada vaso la distribución de los valores obtenidos de Reynolds, se observa la alta variabilidad de comportamiento que a lo largo de un periodo se alcanza. En el diagrama de cajas de la Figura 5.7, se observan los valores de los cuartiles de la distribución para cada vaso, Re_{min} , Re_{25} , Re_{50} , Re_{75} and Re_{max} . La gráfica incluye una línea continua indicando el valor medio. En el análisis de los resultados de la obtención de Re , se ignora, momentáneamente, la naturaleza pulsátil del fluido. De la gráfica se desprende valores instantáneos de turbulencia para los vasos pertenecientes a la arteria aorta. Bajo el análisis de flujo estacionario, se espera flujo laminar en el resto de vasos y también para la mayor parte del tiempo en la arteria aorta.

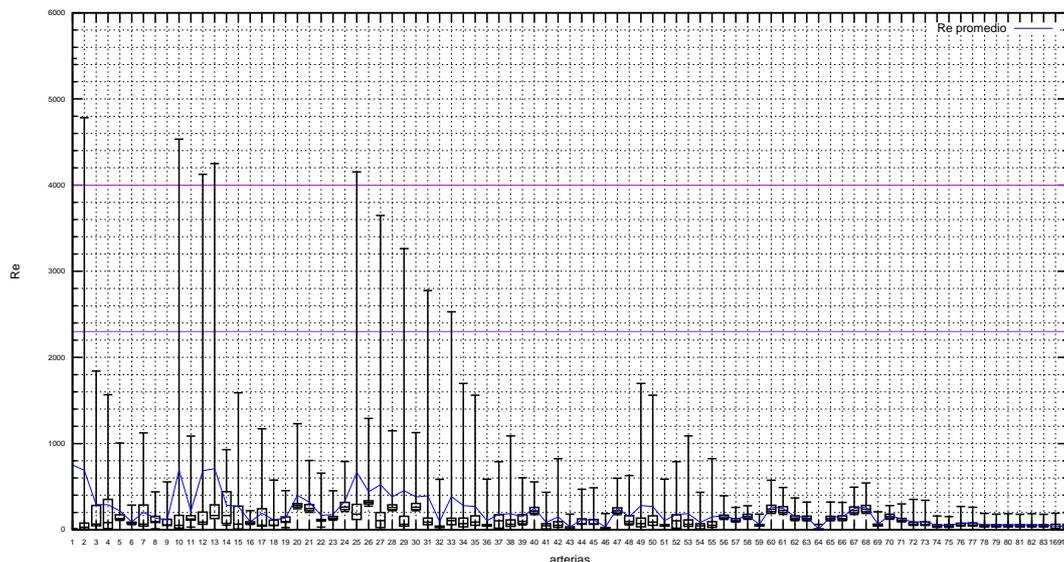


Figura 5.7: Número de Reynolds, Re . Distribución por cuartiles de los valores de Re para cada vaso a lo largo de un ciclo cardíaco simulado.

Si se analizan los valores Re_{max} , se tiene lo siguiente.

- $Re_{max} = 5469$, el mayor número de Re en el sistema arterial se encuentra en el primer vaso de la aorta, después del corazón.
- $Re_{max} > 4000$ valor alcanzado por los cinco primeros vasos de la aorta.
- $Re_{max} > 2300$ valores máximos superiores para toda la aorta
- $Re_{max} < 2000$ para el resto de vasos del sistema arterial.
- $Re_{max} = 1841$ mayor valor fuera de la aorta.

Otros valores significativos son que el mayor valor medio de Reynolds se encuentra en el primer vaso de la aorta, $\bar{Re} = 753$ y que, sin embargo, $Re_{75} = 441$ es el mayor valor para tercer cuartil en un vaso, de entre todos los vasos arteriales y se sitúa en el vaso 14. De este último valor se deduce que el 75% de los valores en todos los vasos se encontrarán por debajo de 441. Si el valor crítico es $Re = 2300$, sólo la Aorta presenta valores mayores. Por lo tanto se espera un comportamiento laminar salvo para la aorta en algunos momentos.

Número de Womersley

El número de Womersley, α es la ratio entre las fuerzas inerciales transitorias y las fuerzas viscosas. Por tanto es el número adimensional que tiene en cuenta la naturaleza periódica del flujo. Mediante el análisis dimensional y la manipulación de las ecuaciones [10], se relacionan α con la magnitud de la capa viscosa: $O(\alpha^{-1})$ —origen de la aproximación de Bessems en §D.3. Valores bajos de α implica un flujo dominado por las fuerzas viscosas y dan lugar a una δ_s mayor y por tanto, perfiles de velocidad redondeados. Valores altos de α implica un flujo dominado por las fuerzas inerciales y dan lugar a una δ_s menor y por tanto, perfiles de velocidad planos.

El comportamiento del flujo, para el caso pulsátil, se encuentra determinado tanto por el Re como por el valor de α [25]. En 1967, en el estudio del flujo pulsátil, Happel y Brenner [26] denominan como número de Reynolds vibracional al cuadrado del número de Womersley. Este hecho da idea de la utilización de α como contraparte del Re en flujo pulsátil.

Si se considera la clasificación por grupos, destacan los siguientes valores de α ,

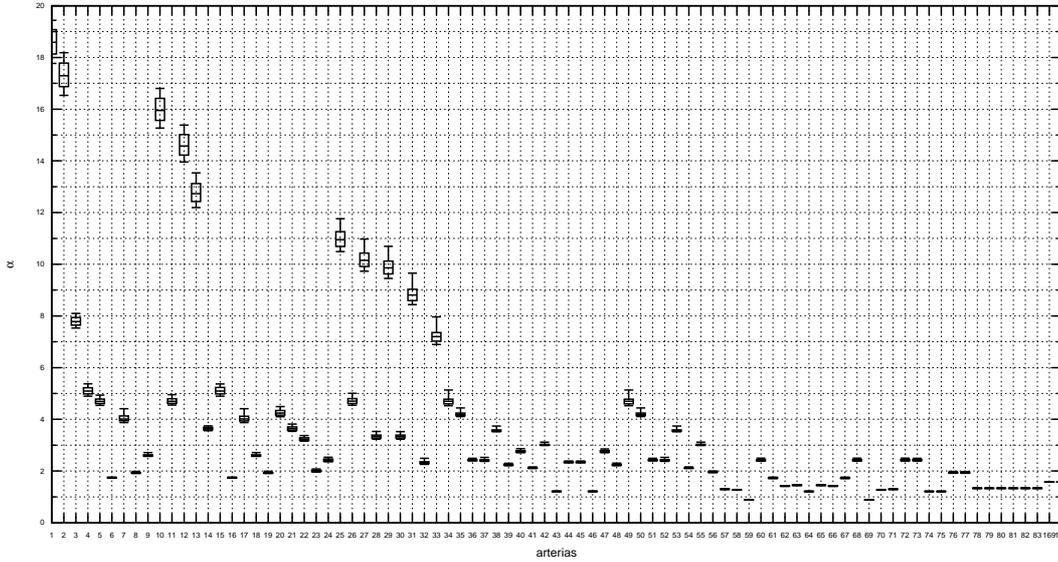


Figura 5.8: Número de Womersley, α . Distribución por cuartiles de los valores de α para cada vaso a lo largo de un ciclo cardiaco simulado.

- Grupo I: $\alpha \in (6, 20)$
- Grupo II: $\alpha \in (1, 9, 5, 4)$
- Grupo III: $\alpha \in (1, 2, 1, 76)$

Se han excluido de esos valores dos casos particulares, en los vasos etiquetados como 59 y 69, donde $0,88 < \alpha < 0,90$. Cuando $\alpha < 1$ se asume que el flujo es cuasi-estacionario, lo cual no significa el fin de la pulsatilidad del flujo. El resto de valores no supera el valor de 20. Existe una relación empírica que concluye que para $\alpha < 20$ y $Re < 5000$ los flujos son laminares [25]. Por lo tanto en todos los vasos se puede esperar un flujo laminar salvo casos puntuales en la aorta que quedan indeterminados, pues siempre hay unos valores de transición entre flujo laminar y flujo turbulento.

5.4. Determinación del cálculo armónico para Womersley.

En la simulación numérica de la circulación sanguínea, $Q(t)$ es una variable conservada que recoge los valores de caudal en cada instante muestreado. Para cada periodo en una posición fija, se puede recoger los valores en cada tiempo, para posteriormente analizarlos mediante un algoritmo de Fourier y así obtener los armónicos de la señal en cada vaso para un ciclo cardiaco. Una vez obtenidos las componentes armónicas del caudal, se puede obtener el perfil de velocidad de Womersley para cada vaso durante un ciclo cardiaco.

El algoritmo que se utiliza para el análisis del caudal es un algoritmo FFT y luego una interpolación en el tiempo de los datos a través de los coeficientes armónicos obtenidos del algoritmo. Para un ciclo cardiaco muestreado N_s veces, el algoritmo calcula una función interpolatoria exacta calculando $N_s/2 + 1$ modos armónicos. En la simulación, $N_s = 16384$ muestras, lo cual supone 8193 modos armónicos. Esto supone un coste computacional a la hora de calcular el perfil de velocidad de Womersley o las fórmulas derivadas de la f y κ , al tener que utilizar las fórmulas en §4.7 $N_s/2 + 1$ veces, tanto como modos armónicos tenga el caudal. Por ello es importante analizar si reduciendo el número de armónicos, los que se desprecian tienen un valor considerable o no.

En esta sección se analizará la repercusión de una reducción del número de armónicos utilizado y la similitud entre la señal de caudal calculada en la simulación numéricas y la aproximación armónica a través de Fourier. Se estudiarán los casos para número de armónicos de $n = 10$, $n = 15$, $n = 20$, $n = 40$.

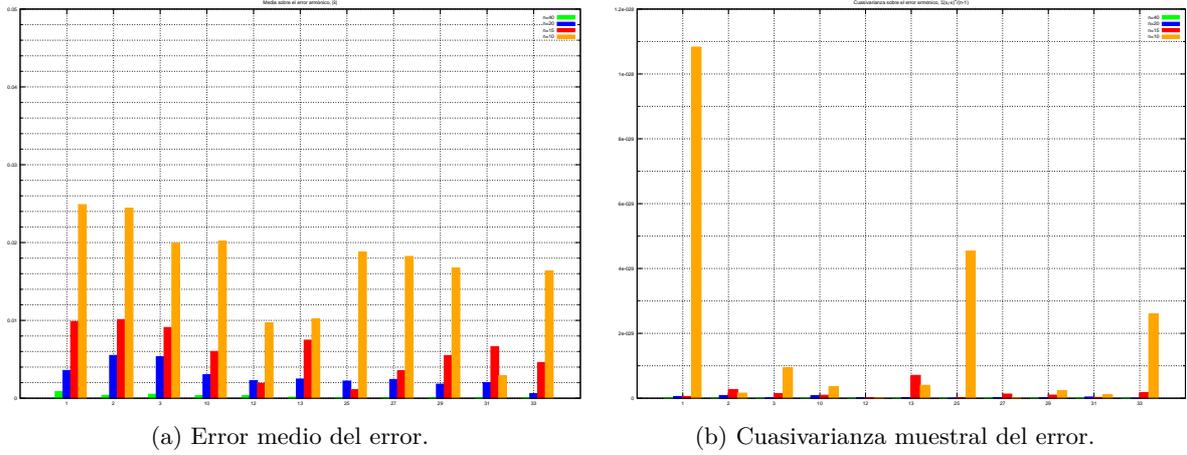


Figura 5.9: Grupo I: análisis del error armónico. Comparación entre la variable caudal, $Q(n)$ para un instante dado y un caudal sintetizado para un ciclo cardiaco completo.

Para realizar el análisis se define un vector error sobre el que se acumulará la diferencia entre los valores del caudal generado por la simulación y la proveniente de la aproximación armónica,

$$e(n) = \frac{|q(n) - q_\omega|}{q_{max}}$$

donde $q(n)$ es la caudal generado por la simulación y q_ω la aproximación armónica tras sintetizar un número arbitrario de armónicos, y donde se define q_{max} ,

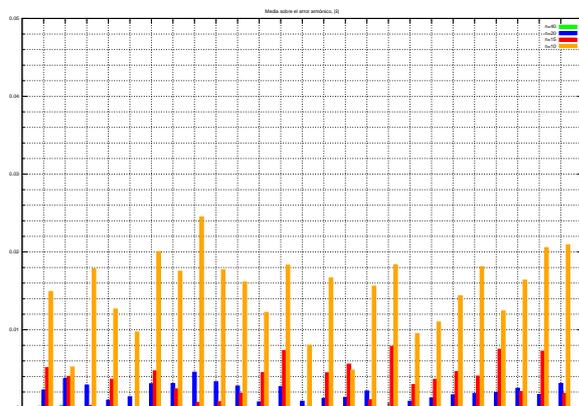
$$q_{max} = \max_{1 \leq n \leq N_s} q(n).$$

De este modo el error en cualquier vaso está normalizado a unos valores de $e(n) \in (0, 1)$. Una vez definido el vector error, se define los parámetros para su cuantificación,

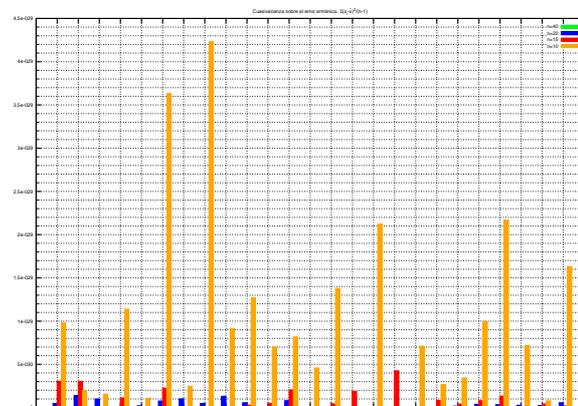
$$\bar{e} = \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} e(n), \quad \hat{S}e = \frac{1}{N_s - 1} \sum_{n=1}^{N_s} (e(n) - \bar{e})^2 \quad (5.1)$$

los cuales son la media muestral del error, \bar{e} , y la cuasivarianza muestral del vector error $\hat{S}(e)$. En los histogramas que acompañan a la sección se observa los valores por cada vaso y grupo de vasos arteriales según la clasificación propuesta anteriormente.

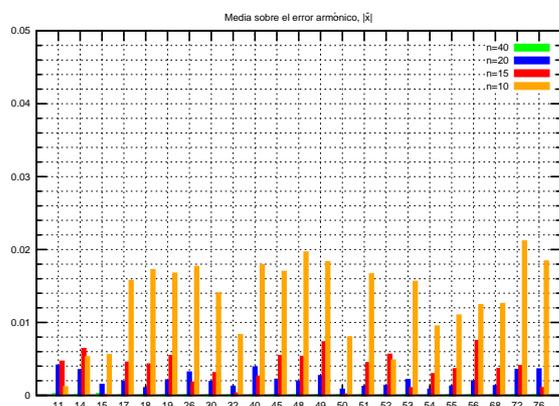
En las tres figuras sobre el error armónico, se observan valores muy bajos o despreciables de la cuasivarianza en todos los grupos, es decir, poca dispersión entre el valor del caudal de la simulación y las distintas síntesis armónicas propuestas. Analizando los valores de la media muestral, se aprecian diferencias notables. Para la aproximación sintetizada con 10 armónicos, se observan errores del 0,5 % and 2 % para el Grupo I en la Figura 5.9. Para los grupos II y III, mostrados en las Figuras 5.10 y 5.11, estos errores se incrementan en algunos vasos hasta el entorno del 4 %. La aproximación sintetizada con 15 armónicos se observa como un caso intermedio, dando en general errores mayores que la señal sintetizada con 20 armónicos salvo en casos circunstanciales. La aproximación sintetizada con 20 armónicos da un buen rendimiento para los Grupos I y II con valores por debajo del 0,6 % y sólo en el Grupo III se encuentran valores del 1 %. Para una aproximación sintetizada con 40 armónicos, el error resulta casi despreciable. Se concluye para el cálculo del perfil de Womersley, se aproxime el problema con los 40 primeros armónicos.



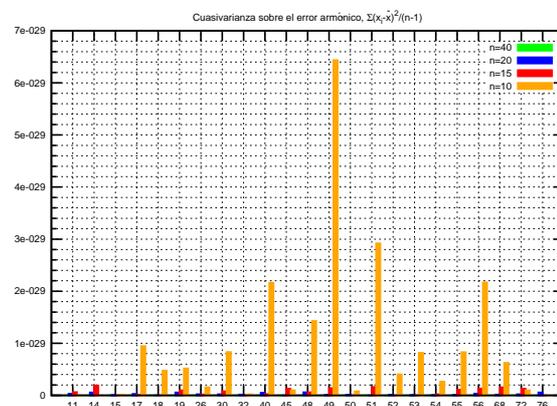
(a) Error medio del error.



(b) Cuasivarianza muestral del error.

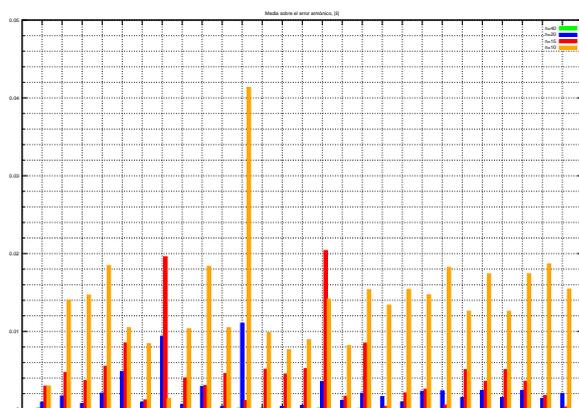


(c) Error medio del error.

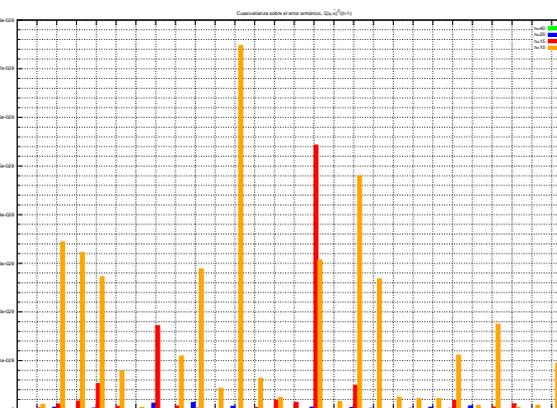


(d) Cuasivarianza muestral del error.

Figura 5.10: Grupo II: análisis del error armónico. Comparación entre la variable caudal, $Q(n)$ para un instante dado y un cuadal sintetizado para un ciclo cardiaco completo.



(a) Error medio del error.



(b) Cuasivarianza muestral del error.

Figura 5.11: Grupo III: análisis del error armónico. Comparación entre la variable caudal, $Q(n)$ para un instante dado y un cuadal sintetizado para un ciclo cardiaco completo.

5.5. Perfiles de velocidad para una simulación

Perfiles del Grupo I

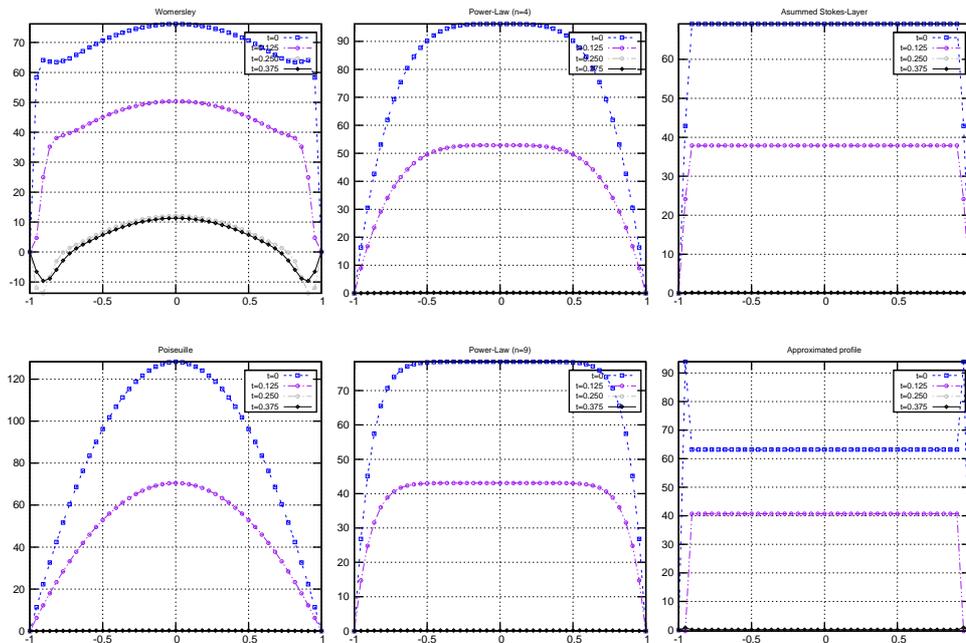


Figura 5.12: Grupo I: perfiles de velocidad para el vaso 1.

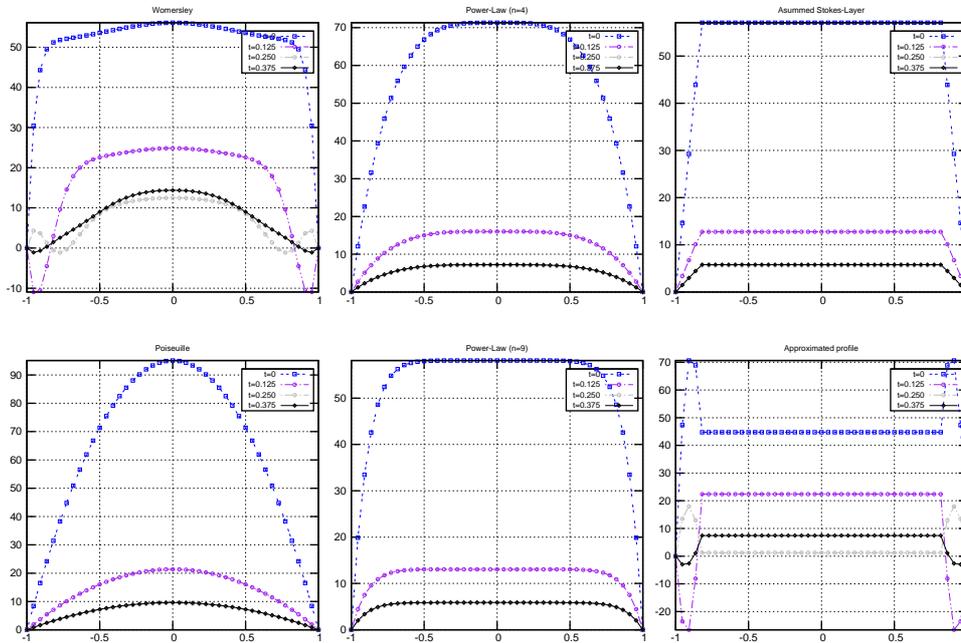


Figura 5.13: Grupo I: perfiles de velocidad para el vaso 3.

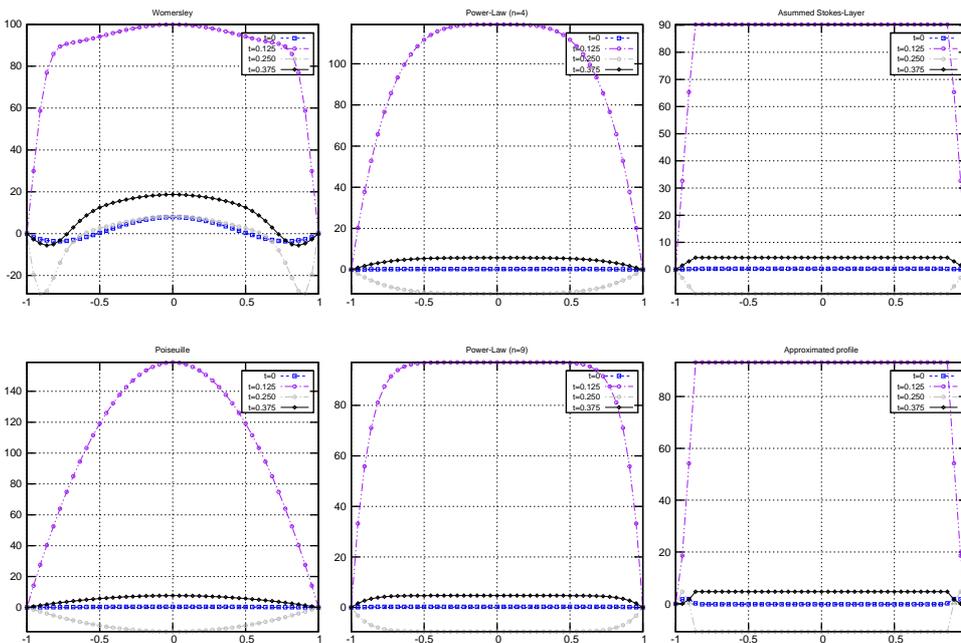


Figura 5.14: Grupo I: perfiles de velocidad para el vaso 27.

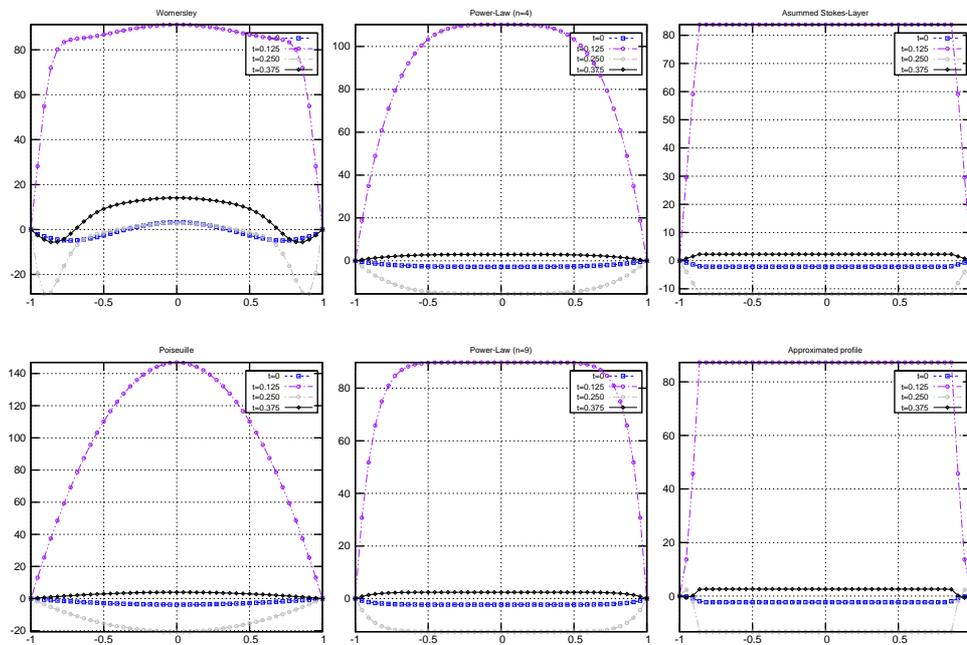


Figura 5.15: Grupo I: perfiles de velocidad para el vaso 29.

Perfiles del Grupo II

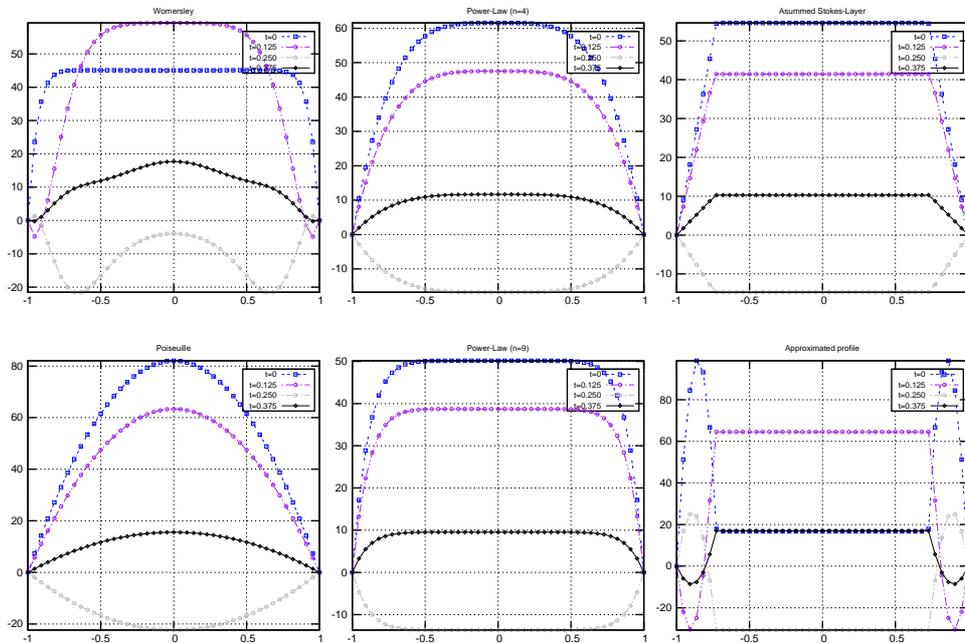


Figura 5.16: Grupo II: perfiles de velocidad para el vaso 15.

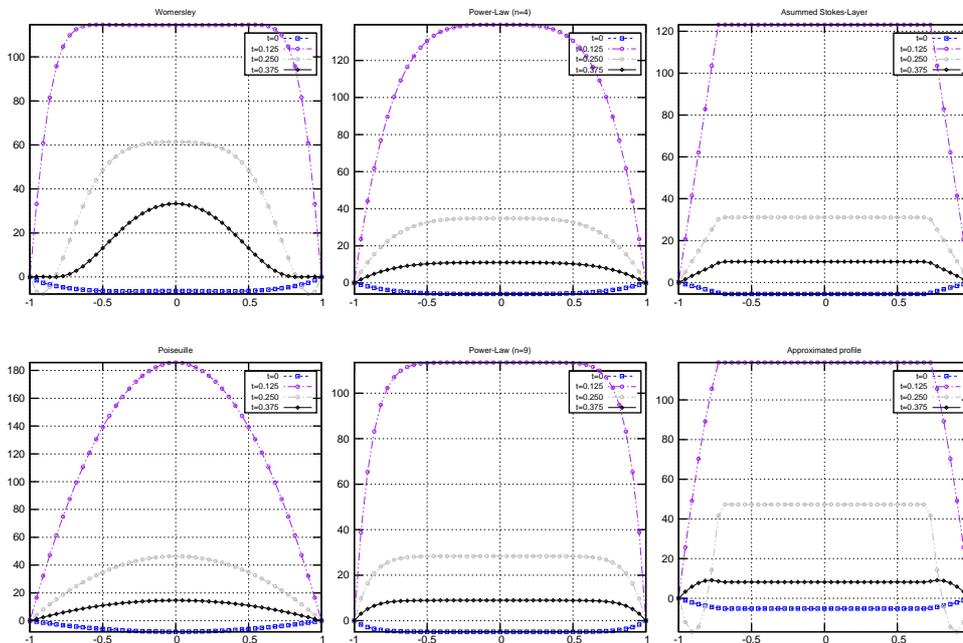


Figura 5.17: Grupo II: perfiles de velocidad para el vaso 49.

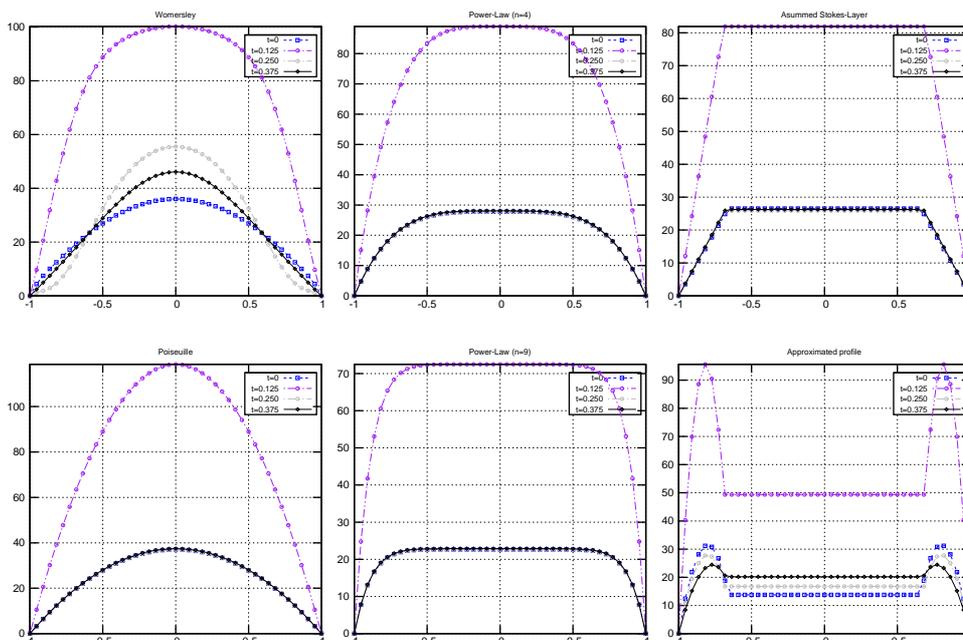


Figura 5.18: Grupo II: perfiles de velocidad para el vaso 20.

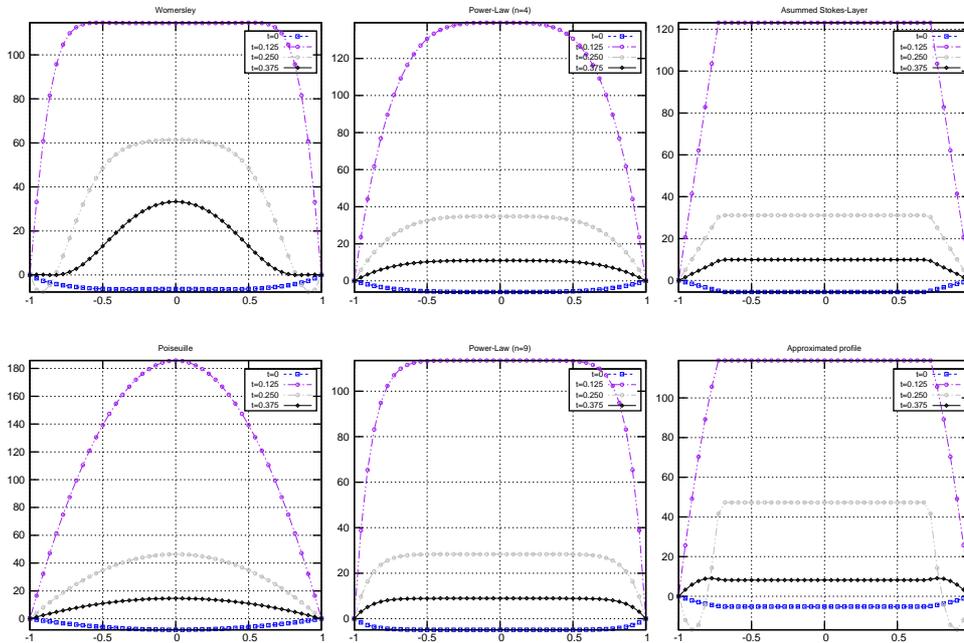


Figura 5.19: Grupo II: perfiles de velocidad para el vaso 34.

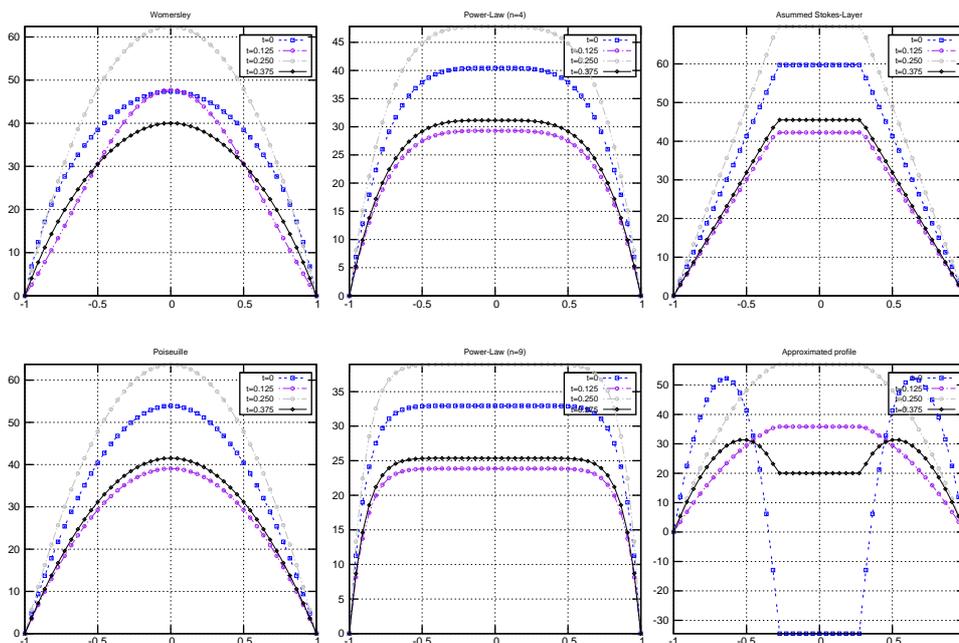


Figura 5.20: Grupo II: perfiles de velocidad para el vaso 56.

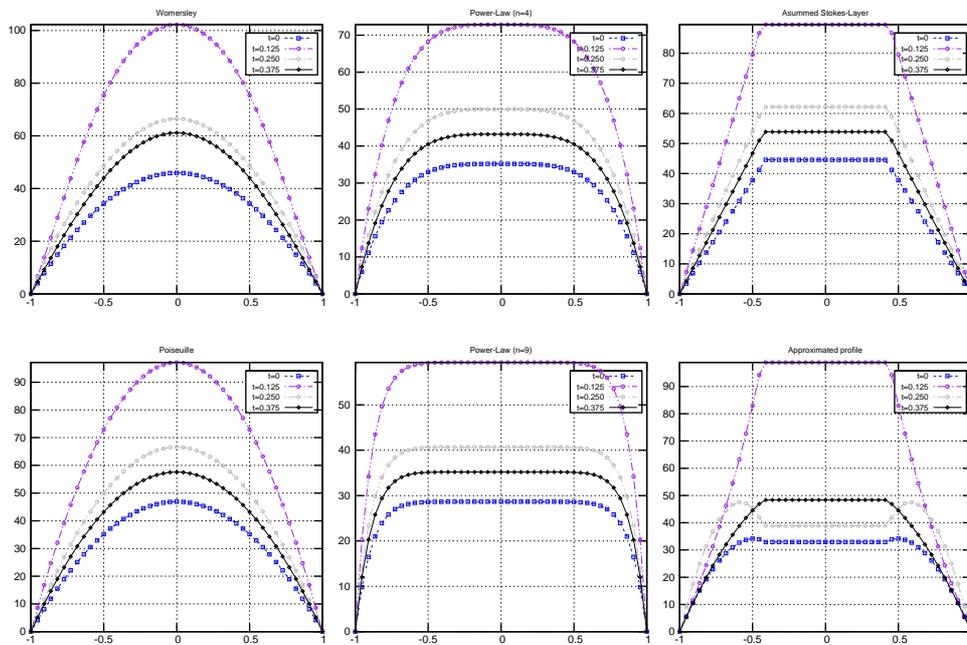


Figura 5.21: Grupo II: perfiles de velocidad para el vaso 60.

Perfiles del Grupo III

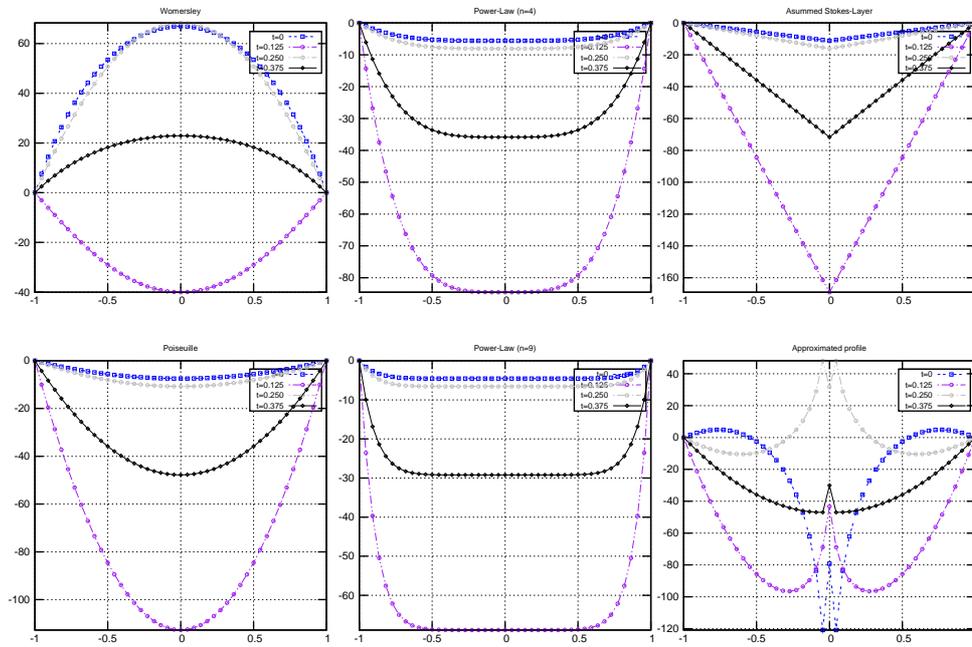


Figura 5.22: Grupo III: perfiles de velocidad para el vaso 59.

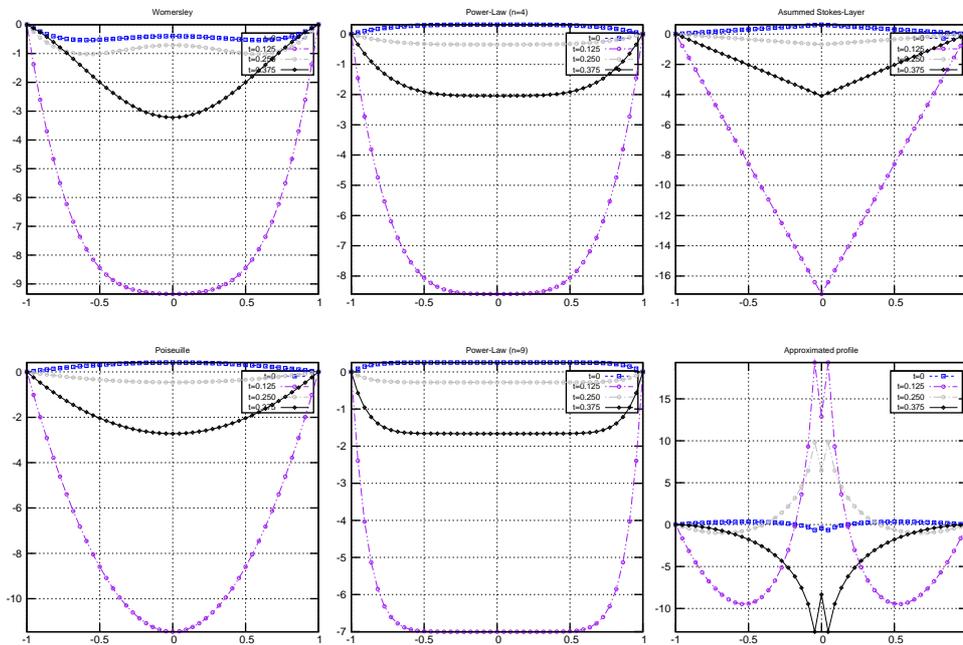


Figura 5.23: Grupo III: perfiles de velocidad para el vaso 64.

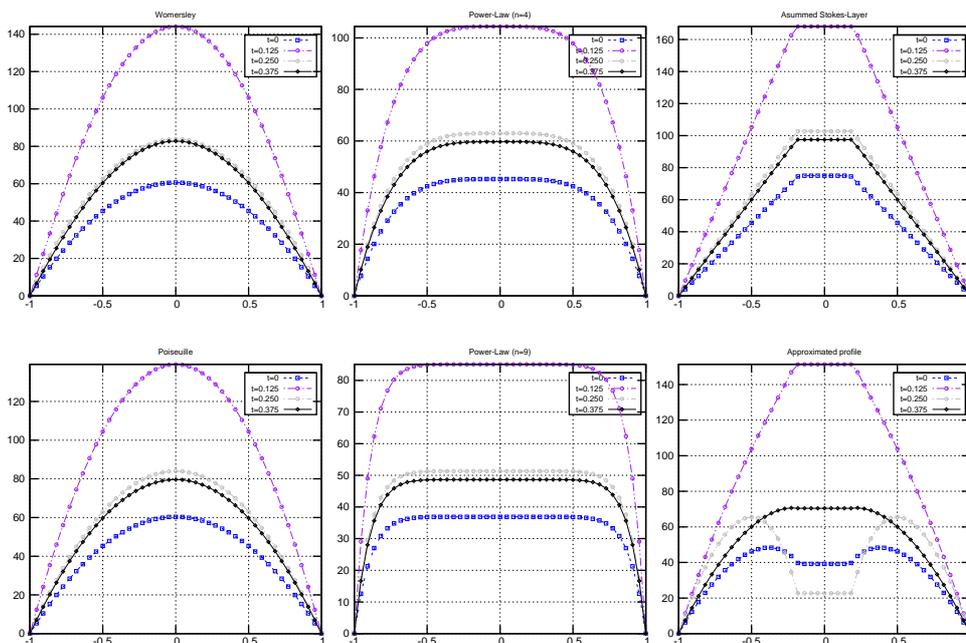


Figura 5.24: Grupo III: perfiles de velocidad para el vaso 67.

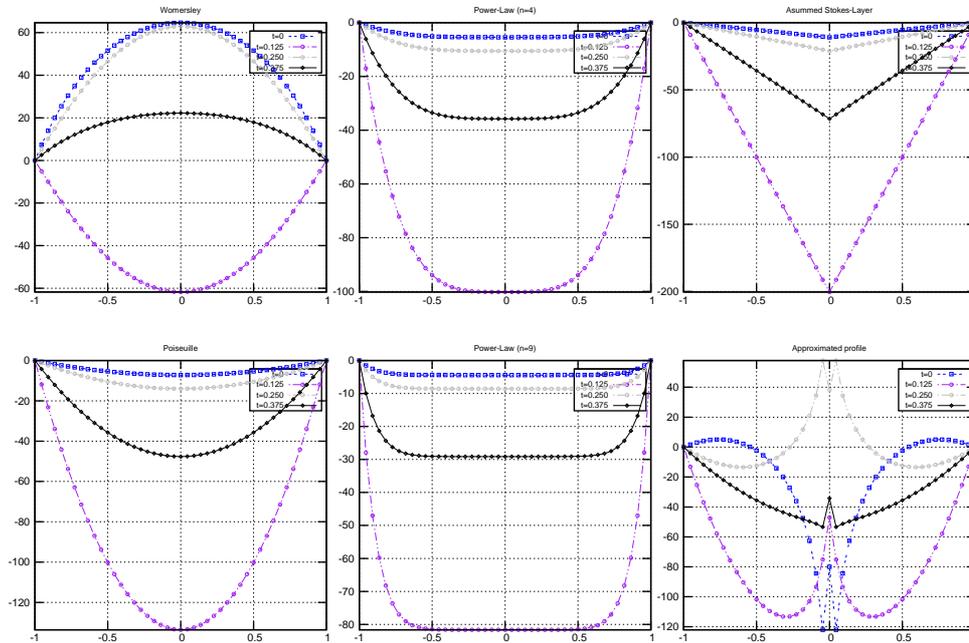


Figura 5.25: Grupo III: perfiles de velocidad para el vaso 69.

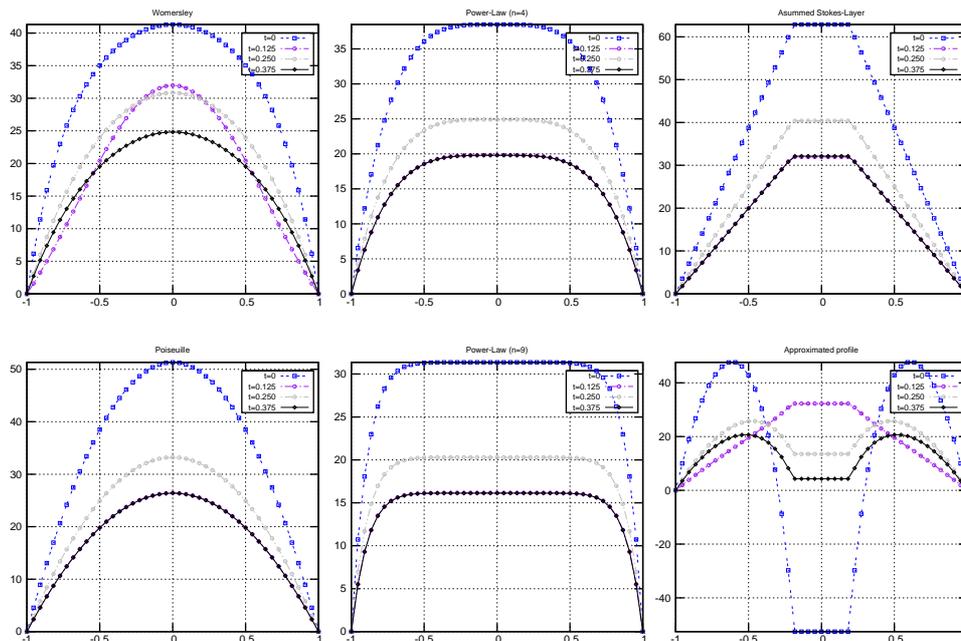


Figura 5.26: Grupo III: perfiles de velocidad para el vaso 6.

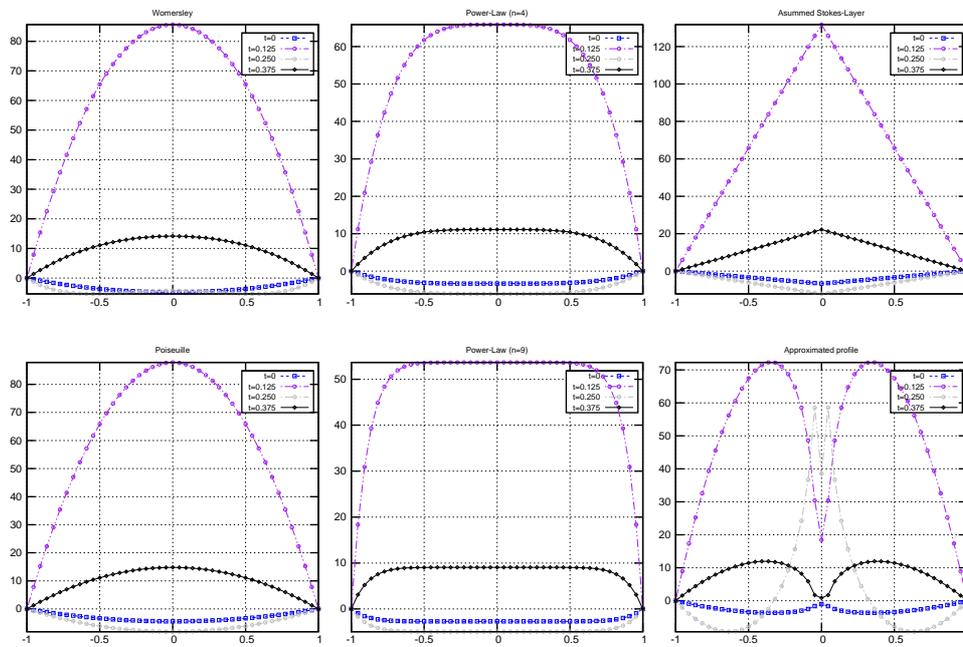


Figura 5.27: Grupo III: perfiles de velocidad para el vaso 46.

5.6. Resumen

En este capítulo se han caracterizado los vasos arteriales a través de tres parámetros: el espesor de la capa viscosa δ_s , el número de Reynolds, Re , y el número de Womersley, α . Con ello se pretende conocer las características del flujo a su paso por los vasos arteriales.

Se ha realizado una clasificación de los 85 vasos arteriales a través de los valores del espesor de capa viscosa. Se han determinado tres grupos mediante el establecimiento de dos valores de corte, para $\delta_s = 0,2$ y para $\delta_s = 0,8$. Cuando en el vaso se tiene $\delta_s \leq 0,2$ esperamos flujos tipo plano; en el intervalo intermedio se espera un flujo tipo potencial, es decir, en transición entre una forma plana y otra parabólica; para $\delta_s \geq 0,8$ se espera un flujo tipo Poiseuille. Con esto, se ha generalizado el uso de este parámetro para este trabajo.

Por referencias en la literatura [25], se tiene presente que el comportamiento del flujo no depende en exclusiva del número de Reynolds, si no que, influyen conjuntamente α y Re . Para $Re < 5000$ y $\alpha < 20$ se considera un flujo laminar. En los datos generados por la simulación, los valores del número de Reynolds están por debajo de esa cota salvo en el primer vaso de la aorta y el número de Womersley nunca rebasa el valor de 20. Se considera pues que por el árbol arterial el flujo es laminar, salvo instantes en la aorta, que hay razones para considerar flujo en transición más que flujo turbulentos.

Respecto a la influencia de los armónicos para el cálculo del perfil de velocidad de Womersley, se puede considerar que, si $Q(t)$ es un sumatorio de distintos caudales armónicos, se pueden sintetizar tantos modos como creamos conveniente para tener una buena aproximación. Una vez realizado el análisis se ha concluido que 40 armónicos dan una aproximación óptima. Si se requiere reducir el número de armónicos para reducir el tiempo de cálculos, se perderá por el camino cierta precisión.

Después del análisis armónico y teniendo desarrolladas las expresiones para los distintos perfiles de velocidad en §4, se han escogido de manera arbitraria una serie de vasos, para los cuales se ha graficado su perfil para determinados instantes del periodo. En ellos se ha podido ver la diferencia entre el comportamiento de los perfiles hipotéticos y los perfiles Aproximado y de Womersley.

Una vez se ha realizado ya la caracterización de los vasos del sistema arterial, se procede en el siguiente capítulo a calcular los términos convectivo y de fricción para cada vaso usando los perfiles de velocidad en §4 siendo comparados de manera sistemática con el perfil de velocidad de Womersley.

Capítulo 6

Análisis comparativo de perfiles de velocidad

6.1. Introducción

En este capítulo se realizará un análisis diferencial entre los perfiles de velocidad propuestos en §4. Para realizar este análisis diferencial, se usarán los datos provistos por la simulación numérica para un ciclo cardiaco, usando para los cálculos los valores por defecto de $f = -8\mu\pi\bar{v}$ y $\kappa = 1$. Con estos datos, se calcularán los términos de fricción y los términos convectivos con las fórmulas asociadas a cada tipo de perfil. Las variables de interés son: $Q(n)$, $U(n)$, $A(n)$, $\partial_x P(n)$, con $n = 1..N_s$ and N_s número de muestras por ciclo.

Una vez se tengan todos los términos de fricción y de convección, se realizará una comparación entre los distintos perfiles, salvo el de Womersley, pues sirve de referencia en la comparación. Para simplificar el análisis para 85 vasos arteriales, se utilizará la clasificación propuesta en §5.2.

Para el análisis de los términos convectivos, primero, se definirá un vector error, $e = [e_1 \dots e_{N_s}]$, donde N_s es el número de muestras por ciclo cardiaco. Este vector alojará, para un instante de muestreo, la diferencia absoluta entre el término de fricción asociado a un perfil de velocidad y el término de fricción derivado de Womersley. Así,

$$\begin{aligned} e_i^{\text{PoIS}} &= |f_i^{\text{PoIS}} - f_i^{\text{WP}}| \\ e_i^{\text{PL4}} &= |f_i^{\text{PL4}} - f_i^{\text{WP}}| \\ e_i^{\text{PL9}} &= |f_i^{\text{PL9}} - f_i^{\text{WP}}| \\ e_i^{\text{SL}} &= |f_i^{\text{SL}} - f_i^{\text{WP}}| \\ e_i^{\text{AP}} &= |f_i^{\text{AP}} - f_i^{\text{WP}}| \end{aligned}$$

Cada vector error para la fricción, está asociado un perfil de velocidad, salvo el de Womersley, puesto que se usa como referencia de todos. Para el análisis de los términos convectivos, se realiza lo mismo que con los términos de fricción. Se define para cada vaso un vector error, $e = [e_1 \dots e_{N_s}]$, donde N_s es el número de muestras por ciclo cardiaco. Este vector alojará, para un instante de muestreo, la diferencia absoluta entre el término de convección asociado a un perfil de velocidad y el término de convección derivado de Womersley. Así,

$$\begin{aligned} e_n^{\text{PoIS}} &= |\gamma_n^{\text{PoIS}} - \gamma_n^{\text{WP}}| \\ e_n^{\text{PL4}} &= |\gamma_n^{\text{PL4}} - \gamma_n^{\text{WP}}| \\ e_n^{\text{PL9}} &= |\gamma_n^{\text{PL9}} - \gamma_n^{\text{WP}}| \\ e_n^{\text{SL}} &= |\gamma_n^{\text{SL}} - \gamma_n^{\text{WP}}| \\ e_n^{\text{AP}} &= |\gamma_n^{\text{AP}} - \gamma_n^{\text{WP}}| \end{aligned}$$

Como con la fricción, el vector error para la convección, está asociado un perfil de velocidad, salvo el de Womersley. Para el análisis del error, sea fricción o convección, se calculará una serie de parámetros

con los cuales analizaremos el error en la fricción y el error en la convección. Los parámetros estadísticos son la media muestral y la cuasivarianza muestral, definiendo su cálculo sobre el vector error asociado a un perfil como,

$$\bar{e} = \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} e_n, \quad \hat{S} = \frac{1}{N_s - 1} \sum_{n=1}^{N_s} (e_n - \bar{e})^2 \quad (6.1)$$

con n el índice que recorre el valor del vector para cada instante muestreado y N_s el número total de muestaras por ciclo cardiaco. Para cuantificar el máximo error por ciclo o la acumulación del error a lo largo de un ciclo, se utilizará la norma infinito, L_∞ , para lo primero y la norma euclídea, L_2 , para lo segundo, ambas definidas a continuación,

$$\|L_\infty\| = \max_{1 \leq n \leq N} (e_n), \quad \|L_2\| = \sqrt{\sum_{n=1}^n (e_n - \bar{e})^2}. \quad (6.2)$$

6.2. Análisis del término de fricción

6.2.1. Grupo I

En la Figura 6.1 se muestra el análisis del error para el término de fricción en los vasos del Grupo I. El flujo circulante por los vasos arteriales del Grupo I se caracteriza por estar dominado por las fuerzas inerciales. Como se ha visto anteriormente, se alcanzan en algunos de estos vasos los valores máximos del número de Reynolds y de Womersley. Es de esperar perfiles de tipo plano.

El estadístico media muestral refleja que se da valores más pequeños para los errores asociados al perfil aproximado, al de capa de Stokes y al de ley de potencia para $n = 9$. El error asociado a Poiseuille tiene los peores valores. La cuasivarianza muestral es el valor cuya esperanza es la varianza de la población e informa indirectamente de la dispersión del error. El error asociado al perfil de capa de Stokes y de Ley de potencia para $n=9$ da los mejores valores, mientras el asociado al perfil aproximado da valores mayores de dispersión. Para el error asociado a Poiseuille, tanto la media como la varianza dan los mayores valores en todos los vasos.

La norma infinito informa del error máximo encontrado en cada vaso. El error asociado al perfil aproximado da los mayores valores, mientras para el error asociado a los perfiles de capa de Stokes y ley de potencia $n=9$ presentan una diferencia menor. La norma euclídea, se interpreta como una acumulación del error, presenta mayores valores para el error asociado a Poiseuille. Los menores valores se dan para el error asociado al perfil de capa de Stokes y el perfil de ley de potencia para $n = 9$.

Se colige de lo anterior que para el Grupo I de vasos arteriales, el perfil de capa de Stokes y de Ley de Potencia permiten un cálculo del término de fricción más próximo al término de fricción derivado de Womersley.

6.2.2. Grupo II

En la Figura 6.2 se muestra el análisis del error para el término de fricción en los vasos del Grupo II. El flujo circulante por los vasos arteriales del Grupo II se caracteriza por estar parcialmente dominado por las fuerzas inerciales y parcialmente por las fuerzas viscosas. Es de esperar perfiles más redondeados, aunque sin poder reconocer todavía un perfil de tipo Poiseuille. Por la cantidad de vasos presentes en este grupo, se realiza una división del grupo en dos subgrupos separando entre vasos situados al lado derecho y vasos situados al lado izquierdo del cuerpo.

El estadístico media muestral refleja que los errores asociados a Poiseuille, Aproximado y capa de Stokes dan valores parejos. La cuasivarianza muestral muestra indirectamente una mayor dispersión de los resultados, sobre todo en algunos vasos donde es especialmente acusado. El análisis con la norma infinito revela que el que menor valor absoluto da es el error asociado al perfil de ley de potencia para

$n=24$, seguido del error asociado a Poiseuille. El análisis de la norma euclídea revela poca diferencia salvo en casos aislados.

Como comentarios generales para todas las gráficas, el error asociado al perfil de Ley de Potencia para $n=9$ da los valores más grandes tanto en la media como en la varianza. Destaca de manera global como en los vasos 20 y 21, el error del cálculo de la fricción para perfil aproximado se dispara. En los vasos 34 y 35 también se disparan los valores para todos los perfiles, así que es debido a la fricción derivada de Womersley.

De lo anterior se colige que son los perfiles de Poiseuille, Aproximado y el de capa de Stokes, los que mejor se adaptan.

6.2.3. Grupo III

En la Figura 6.3 se muestra el análisis del error para el término de fricción en los vasos del Grupo III. El flujo circulante por los vasos arteriales del Grupo III se caracteriza por estar ampliamente dominado por las fuerzas viscosas. Es de esperar perfiles redondeados y muy cercanos a los perfiles de Poiseuille. Por la cantidad de vasos presentes en este grupo, se realiza una división del grupo en dos subgrupos separando entre vasos situados al lado derecho y vasos situados al lado izquierdo del cuerpo.

El estadístico media muestral y la cuasivarianza reflejan valores de menos a más en este orden: Poiseuille, Aproximado, capa de Stokes, ley de potencia para $n=4$ y ley de potencia para $n=9$. En la aplicación de la norma infinito y euclídea se ve el mismo comportamiento.

Se colige de lo anterior que para el Grupo III de vasos arteriales, el cálculo de la fricción mediante la fórmula derivada del perfil de Poiseuille da el mejor resultado.

6.2.4. Gráficas de cuantificación del error

A continuación, las gráficas con el análisis del error para los Grupos I, II y III.

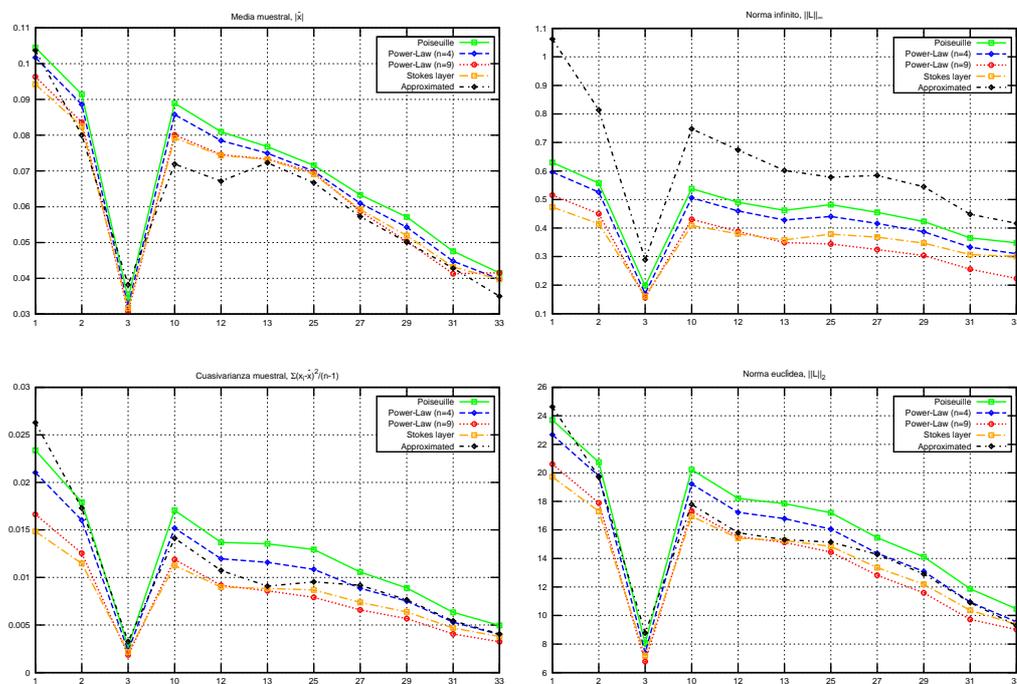


Figura 6.1: Grupo I: Análisis diferencial del error para el término de fricción usando Womersley como referencia. Error medio, cuasivarianza, norma euclídea y norma infito.

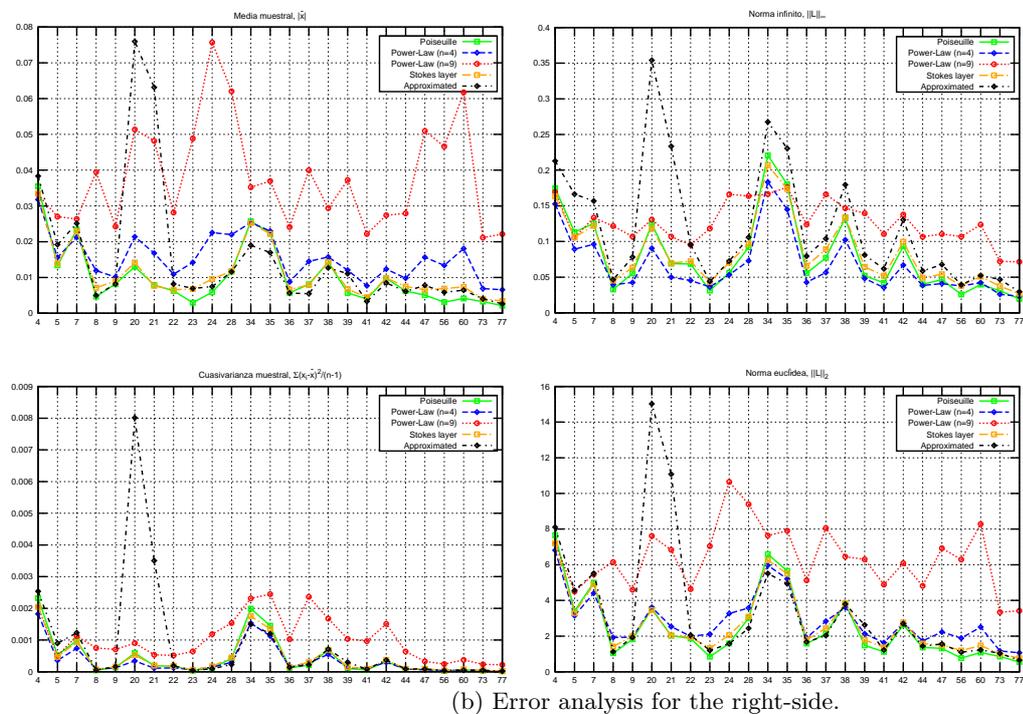
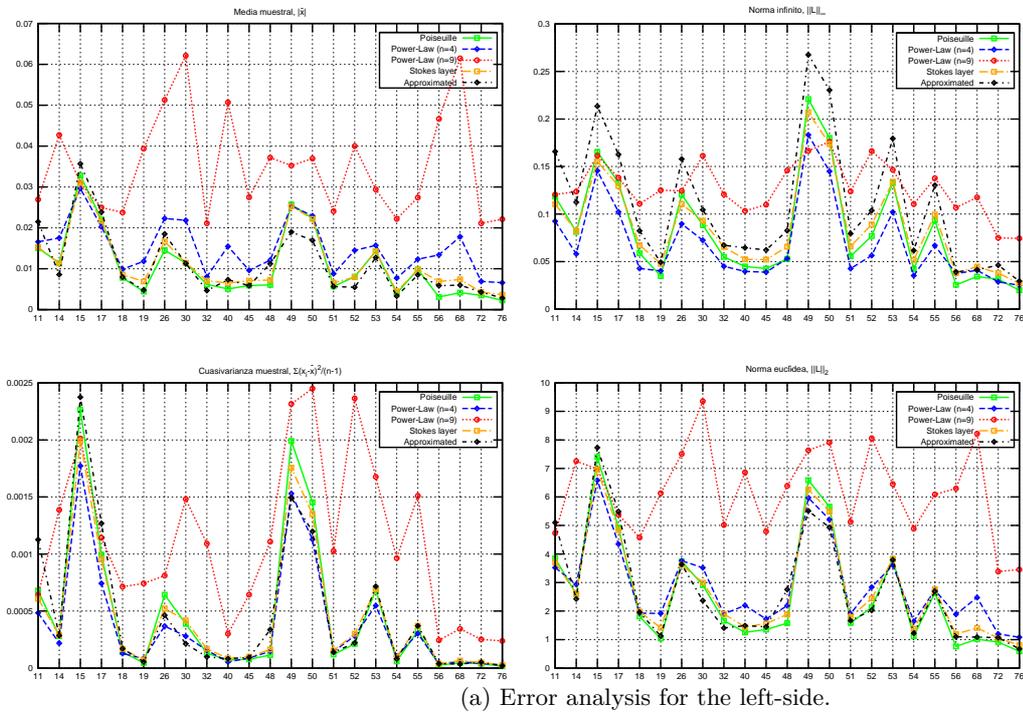
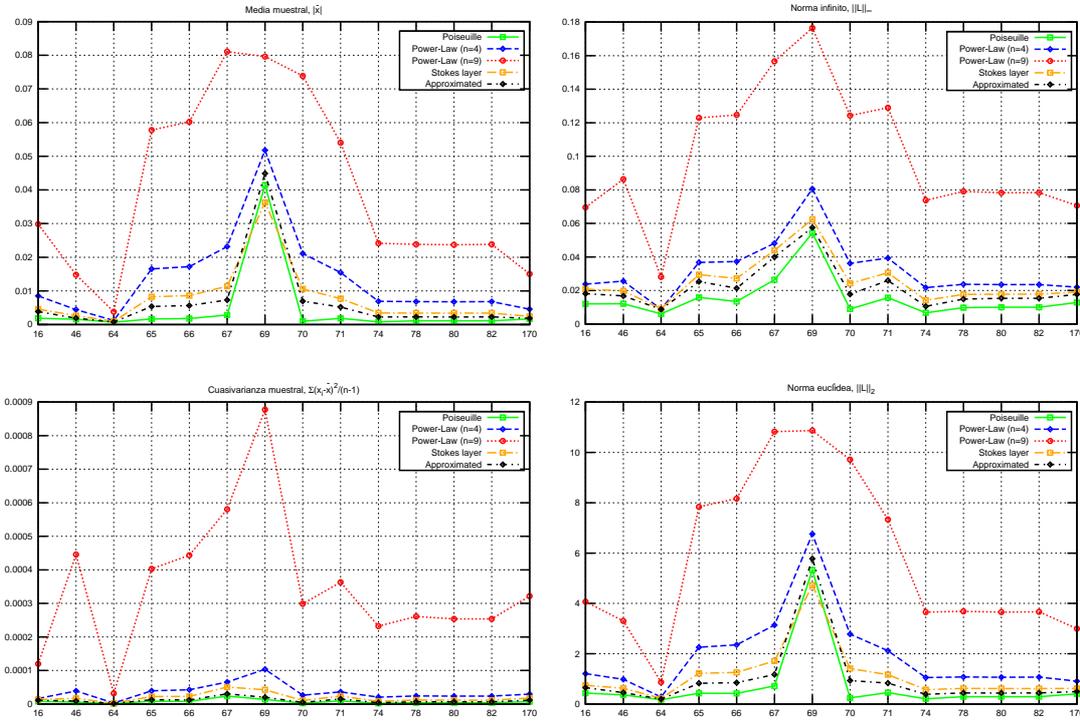
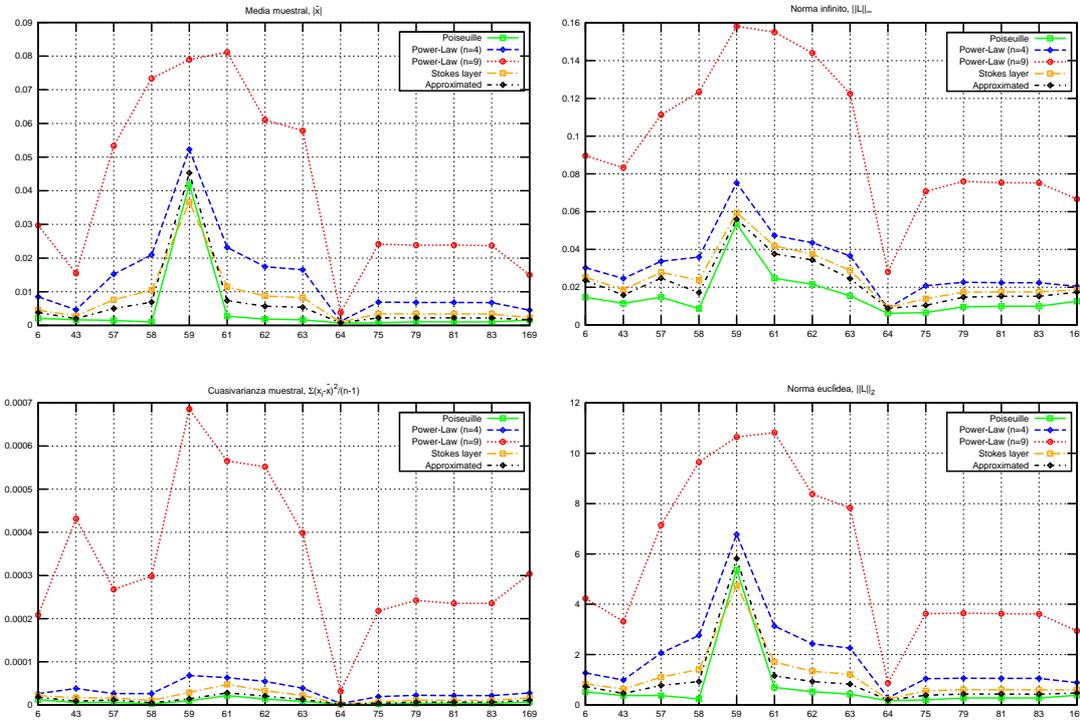


Figura 6.2: Grupo II: Análisis diferencial del error para el término de fricción usando Womersley como referencia. Error medio, cuasivarianza, norma euclídea y norma infito.



(a) Error analysis for the left-side.



(b) Error analysis for the right-side.

Figura 6.3: Grupo III: Análisis diferencial del error para el término de fricción usando Womersley como referencia. Error medio, cuasivarianza, norma euclídea y norma infito.

6.3. Análisis del término convectivo

6.3.1. Coeficientes κ

No todos los coeficientes κ asociados a los distintos perfiles de velocidad son constantes para todo el rango de vasos. Para perfil plano, poiseuille y ley de potencia, tenemos que $\kappa = 1$, $\kappa = \frac{4}{3}$ y $\kappa = \frac{n+2}{n+1}$, donde n depende de la elección del programador de la simulación. Veanse algunos de los valores característicos que toma κ en la Tabla 6.1

Tipo de Perfil	Value of κ
Poiseuille ($n = 2$)	4/3
Potencial ($n = 4$)	1,2
Potencial ($n = 9$)	1,1
Plano	1

Cuadro 6.1: Characteristic kappa values.

En cuanto a los coeficientes asociados a los perfiles de capa viscosa de Stokes, Aproximado y Womersley, son variables según la geometría y las condiciones del ciclo cardiaco a través de la frecuencia. El coeficiente κ de Stokes depende del espesor de capa viscosa como se muestra en la Figura 4.3, y lo mismo sucede con el perfil aproximado, a través de las funciones delta y que se muestra en la Figura 4.6. Pero este perfil muestra dependencia también de la ratio entre el gradiente de presión y la velocidad promedio en la sección. El coeficiente de Womersley es una aproximación para el primer armónico o frecuencia del ciclo cardiaco. Depende directamente del número de Womersley, así como el perfil Aproximado o el de Stokes depende indirectamente a través de δ_s .

Valores de κ para un perfil de capa de Stokes

El coeficiente κ derivado del perfil de capa de Stokes asumía un valor de capa viscosa, $\delta = 1\text{mm}$ en [8]. Para realizar la misma suposición que para el perfil aproximado, se toma δ_s espesor adimensional y dependiente de la frecuencia y el radio de la sección a través del número de Womersley, α .

$$\kappa = \frac{3(6 - 8\delta_s + 3\delta_s^2)}{2(3 - 3\delta_s + \delta_s^2)^2}. \quad (6.3)$$

Evaluando la expresión, se obtiene que $Im_\kappa \in (1, \frac{3}{2})$. En la Figura 6.4 se muestra los valores del coeficiente κ en todos los vasos arteriales contemplados.

Valores de κ para un perfil Aproximado

El perfil aproximado asume una capa viscosa localizada en $y = y_c$, donde $y \in [0, 1]$ y $0 \leq y_c \leq 1$. La fórmula derivada de κ se encuentra en función de $\zeta_c = y_c^2$, la velocidad promedio, \bar{v} , y el gradiente de presión, $p_x = -\partial_x P$, a través del término v_p .

$$\kappa = \delta_1(\zeta_c) + \delta_2(\zeta_c) \frac{v_p}{\bar{v}} + \delta_3(\zeta_c) \left(\frac{v_p}{\bar{v}} \right)^2. \quad (6.4)$$

Visto de otro modo, el coeficiente κ es una función cuadrática de la la ratio $\frac{v_p}{\bar{v}}$. Cuando esta ratio siga la relación de Poiseuille, entonces κ tendrá valores acotados entre $Im_\kappa \in (1, \frac{4}{3})$. Lo normal es que el flujo no siga una relación de Poiseuille como sucede en los vasos del modelo [23, 24] y que se observa en la gráfica 6.5. Respecto a la otra dependencia de este coeficiente, la localización de y_c es función del número de Womersley. Los valores de las funciones δ_i donde $i = 1, 2, 3$ crecen conforme disminuye y_c , o, desde otras

perspectiva, conforme aumenta la capa viscosa. En la Figura 6.5 se muestra los valores del coeficiente κ en todos los vasos arteriales contemplados.

Valores de κ para un perfil de Womersley

El coeficiente κ obtenido en §4.7 resulta para un sólo armónico. Si calculamos κ con la frecuencia del ciclo periódico, se tiene una aproximación al valor del coeficiente,

$$\kappa = \frac{2}{M_{10}} \cos \epsilon_{10} - \left(\frac{\alpha h_{10}}{2 M_{10}} \right)^2 \sin (2\delta_{10} + 2\epsilon_{10}). \quad (6.5)$$

Para la obtención del coeficiente, sin tener en cuenta aproximaciones, se puede calcular mediante integración numérica. En §G.2 se encuentra el programa generado para el cálculo del coeficiente en cada instante para un vaso. Si se sistematiza, como se ha realizado, se encuentran los valores teniendo en cuenta todas las componentes armónicas del caudal. En la Figura 6.6 se muestra los valores del coeficiente aproximado de κ en todos los vasos arteriales contemplados y en la Figura 6.7, los valores del coeficiente calculado por integración numérica con el método del Trapecio.

Gráficas de los coeficientes κ variables

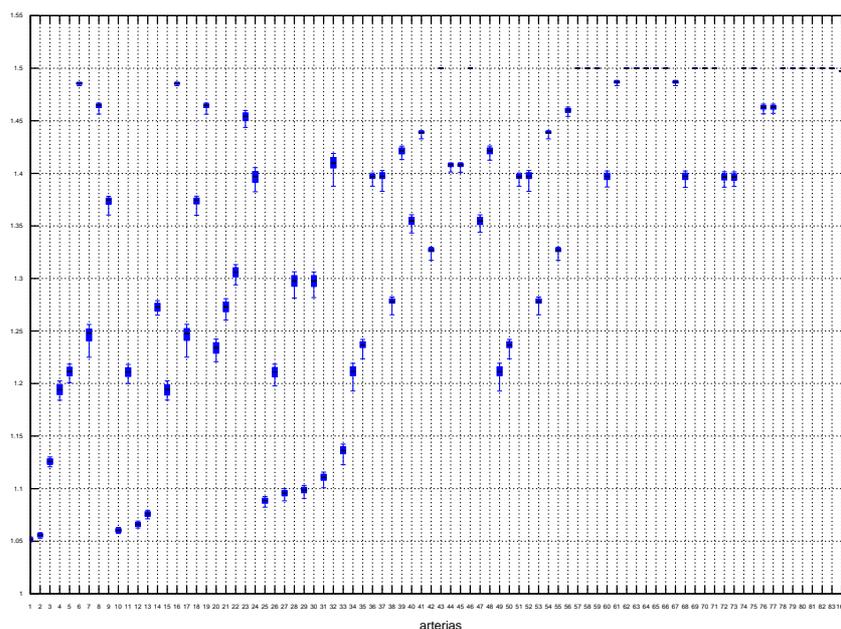
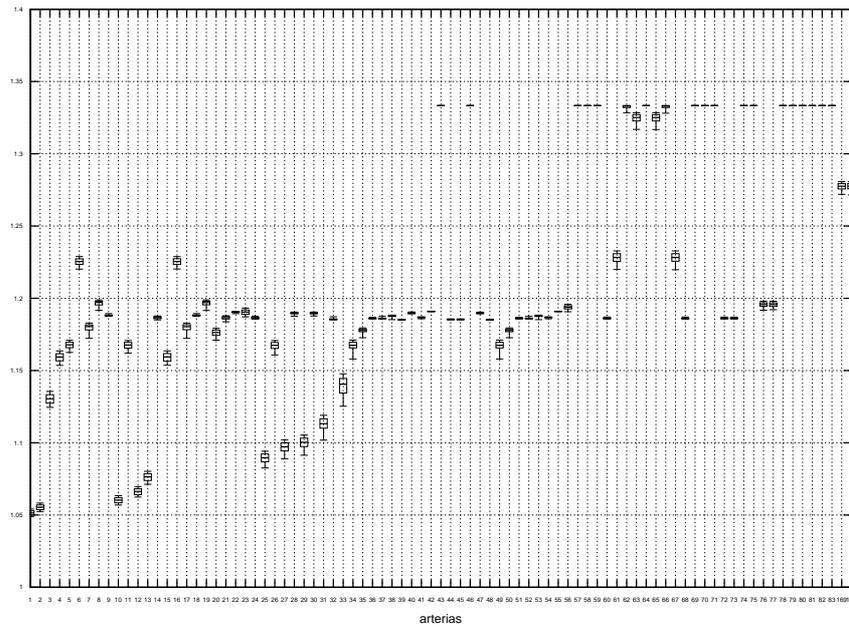


Figura 6.4: Stokes: coeficiente convectivo, κ . Distribución de valores para todos los vasos.

(a) Coeficiente κ cuando se asume una relación de Poiseuille entre el gradiente de presión, $\partial_x P$, y la velocidad promedio en la sección, \bar{v} .



(b) Coeficiente κ cuando se asume el gradiente real de presión.

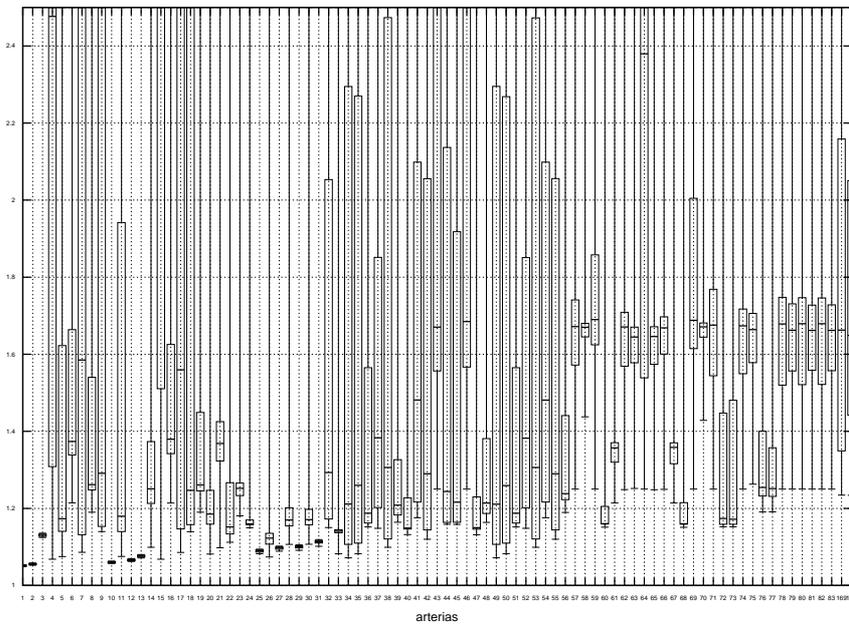


Figura 6.5: Aproximado: coeficiente convectivo, κ . Distribución de valores para todos los vasos.

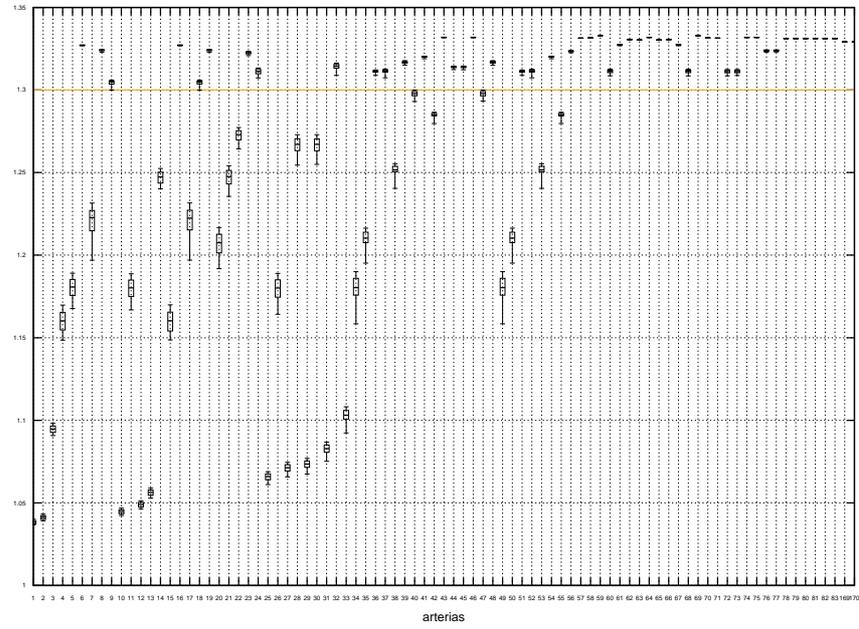


Figura 6.6: Womersley: aproximación del coeficiente convectivo, κ .

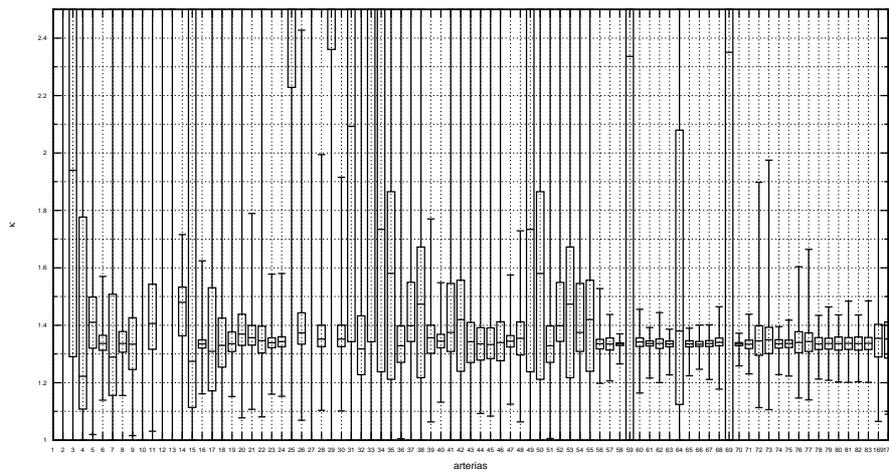


Figura 6.7: Womersley: integración numérica del coeficiente convectivo, κ .

6.3.2. Grupo I:

Por defecto, la simulación calcula el término convectivo, γ , con el valor de $\kappa = 1$, es por ello que se muestran los valores distribuidos para un ciclo cardiaco para cada vaso perteneciente al Grupo I en la Figura 6.8. Se aprecian valores descendientes conforme se aleja el flujo del corazón. Existe diferencias de hasta 7 veces en los valores máximos en la gráfica.

El análisis del error se muestran en la Figura 6.11. Se observa como el coeficiente κ derivado de Poiseuille resulta la peor opción y como, los perfiles que mejor adaptan su forma a una de tipo plano, tienen el menor error.

6.3.3. Grupo II

Para los vasos arteriales del Grupo II, los valores de γ cuando se asume perfil plano muestran en la Figura 6.9. Hay disparidad de valores en esta gráfica, aunque ya no tan acusados como en el grupo anterior. Destacan los valores de los vasos 15, 34, 35, 49 y 50. Resultan ser de las principales bifurcaciones de la Aorta

Las gráficas con el análisis del error se muestran en la Figura 6.12. Mientras para el Grupo I, la aproximada tenía el menor error con respecto a Womersley, aquí sucede lo contrario. El parámetro de la varianza muestra valores altos y para algunos vasos, extremadamente altos. El perfil de capa viscosa parece dar buen resultado.

6.3.4. Grupo III

Para los vasos arteriales del Grupo III, los valores de γ cuando se asume perfil plano muestran en la Figura 6.10. El rango de valores disminuye por diez comparando con los vasos del Grupo II. Estos vasos se ramifican desde el cuello a la cabeza, por ello disminuye conforme se ramifica el árbol arterial. Destacan los vasos 61 y 67, las denominadas arterias cerebrales, irrigando el cerebro hacia el círculo de Willis.

Las gráficas con el análisis del error se muestran en la Figura 6.13. Se aprecia como Poiseuille ofrece el cálculo de la mejor aproximación a Womersley., seguido por el perfil potencial con parámetro $n=4$.

6.3.5. Gráficas de cuantificación del error

A continuación se muestran las gráficas de los términos no convectivos Q^2/A asumiendo perfil plano y posteriormente, el análisis comparativo del error, teniendo en cuenta el coeficiente corrector para cada tipo de perfil.

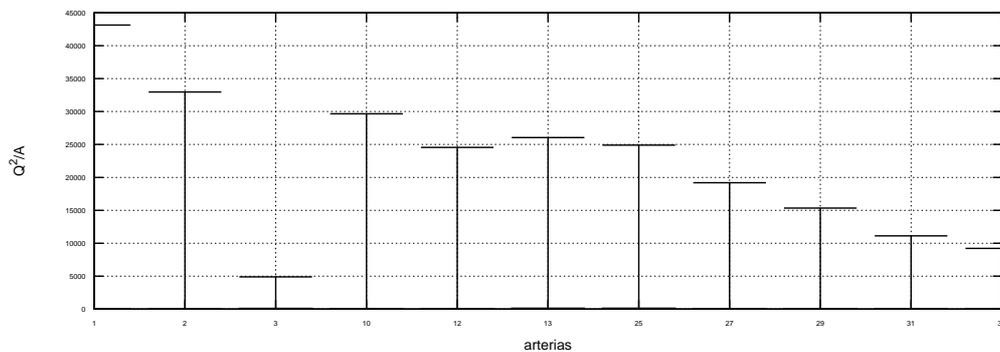


Figura 6.8: Grupo I: Distribución de valores para el término convectivo no lineal Q^2/A .

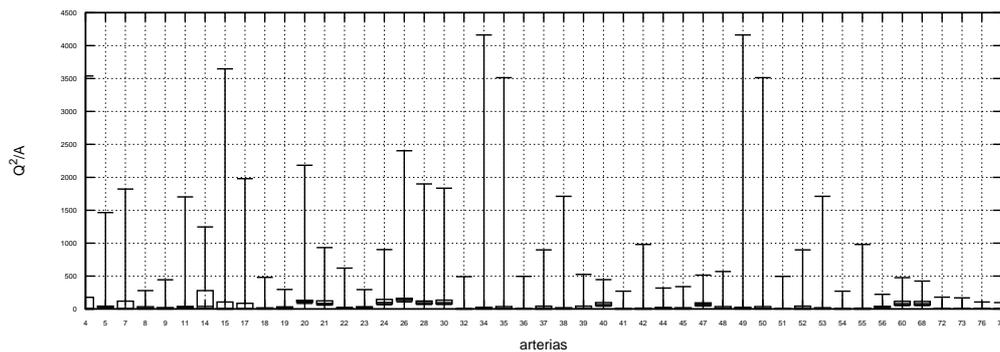


Figura 6.9: Grupo II: Distribución de valores para el término convectivo no lineal Q^2/A .

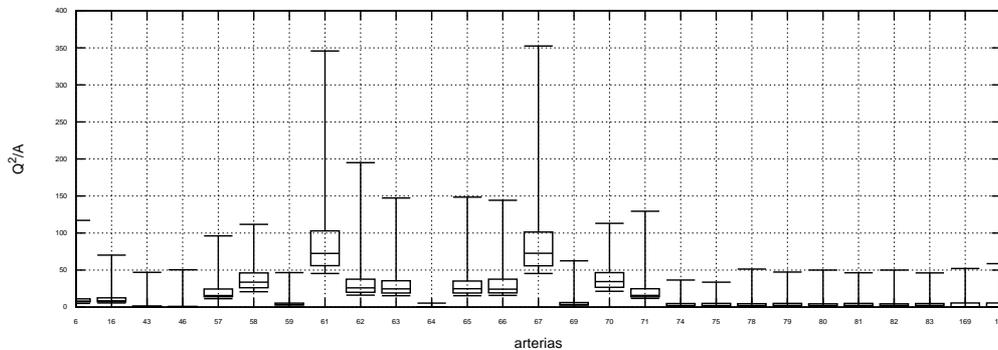


Figura 6.10: Grupo III: Distribución de valores para el término convectivo no lineal Q^2/A .

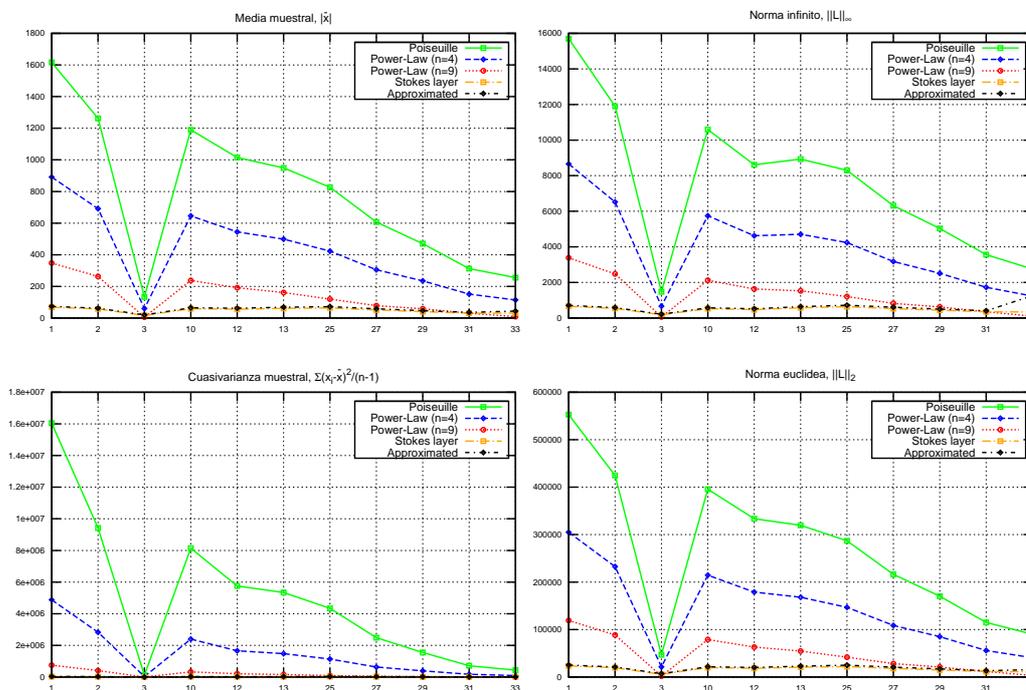


Figura 6.11: Grupo I: Análisis diferencial del error para el término convectivo no lineal, $\kappa \frac{Q^2}{A}$, usando Womersley como referencia. Error medio, cuasivarianza, norma euclídea y norma infito.

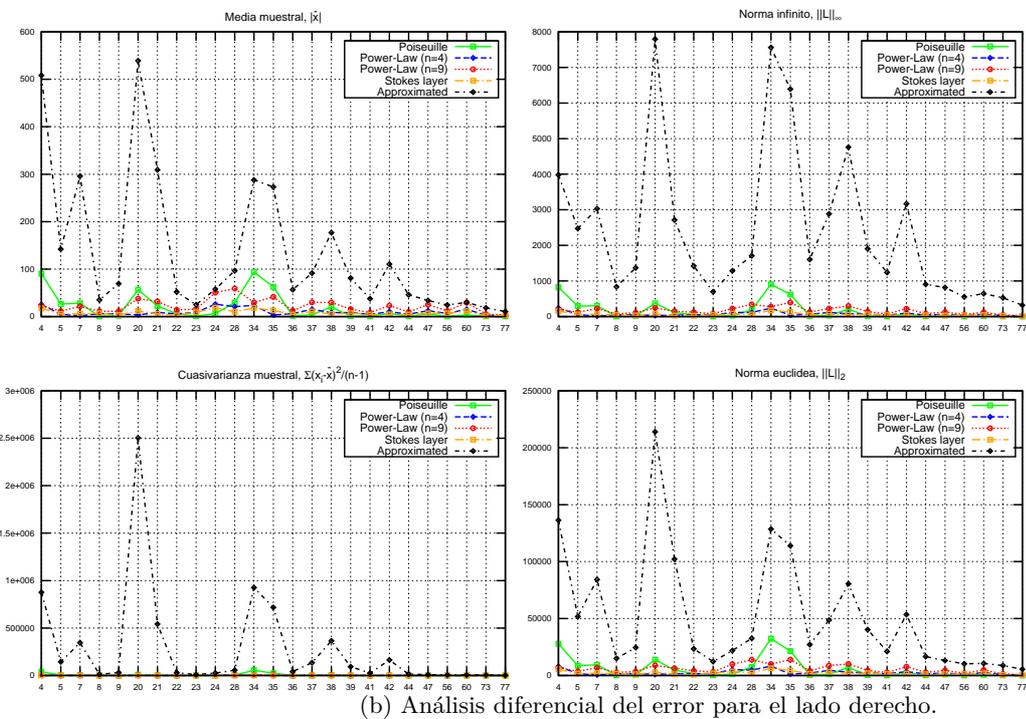
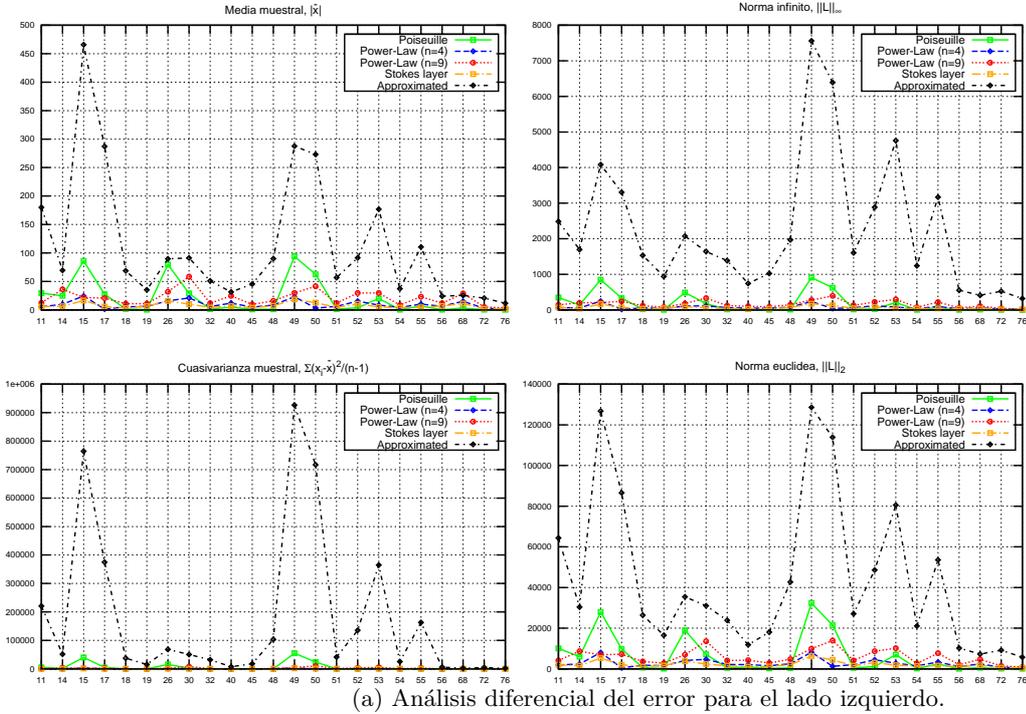
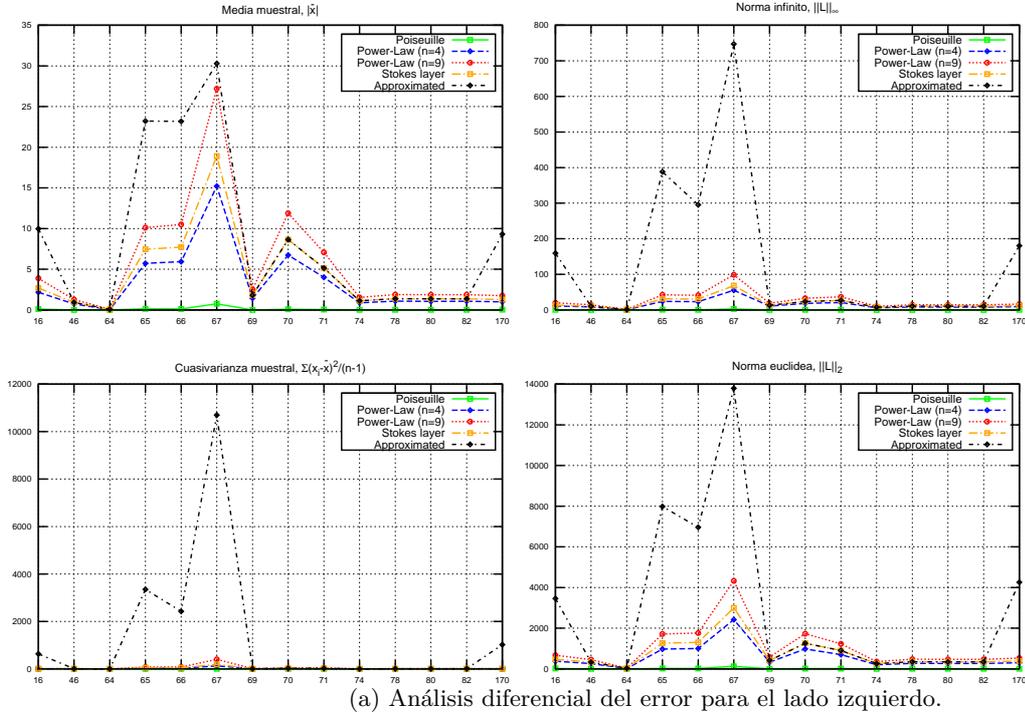
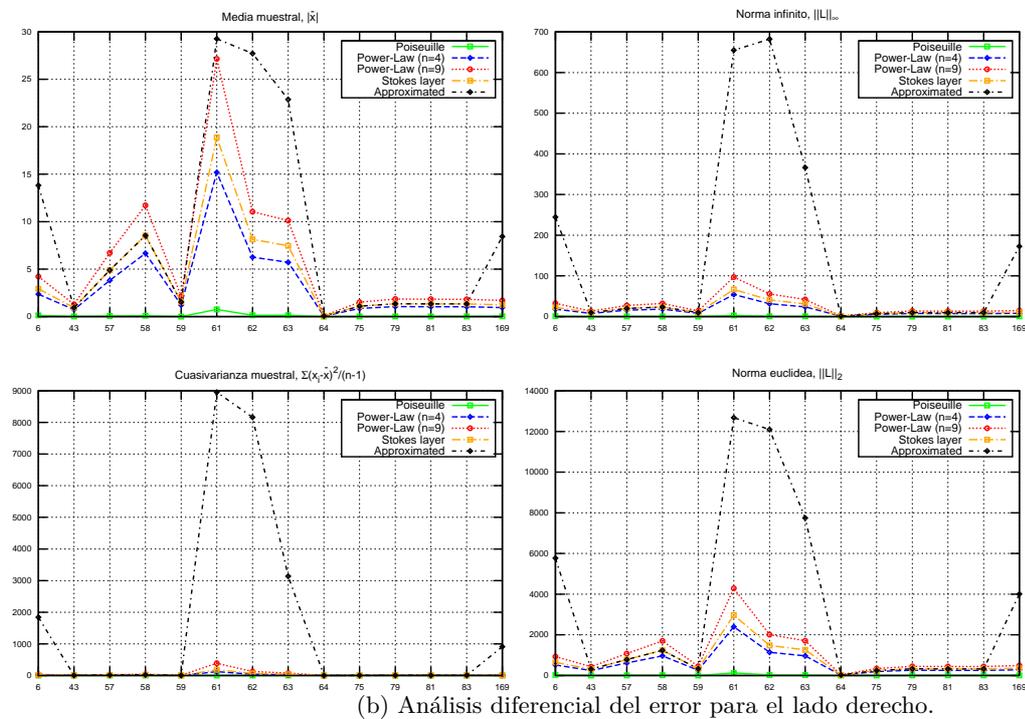


Figura 6.12: Grupo II: Análisis diferencial del error para el término convectivo no lineal, $\kappa \frac{Q^2}{A}$, usando Womersley como referencia. Error medio, cuasivarianza, norma euclídea y norma infito.



(a) Análisis diferencial del error para el lado izquierdo.



(b) Análisis diferencial del error para el lado derecho.

Figura 6.13: Grupo III: Análisis diferencial del error para el término convectivo no lineal, $\kappa \frac{Q^2}{A}$, usando Womersley como referencia. Error medio, cuasivarianza, norma euclídea y norma infito.

6.4. Resumen

En este capítulo se ha calculado la fricción y el término convectivo no lineal asociado a los distintos perfiles de velocidad con los datos provistos por la simulación numérica [24], utilizando por defecto los valores de $\kappa = 1$ y $f = -8\mu\pi\bar{v}$. Para la fricción, se ha calculado sistemáticamente el error para términos de fricción asociado a cada perfil en cada vaso usando como referencia la fricción de Womersley. Para la fricción de Womersley se ha hecho el cálculo sintetizando una fórmula con los cuarenta primeros armónicos del caudal. Para la convección se ha realizado la misma operación con el error para términos de convección. Para el cálculo de la convección de Womersley, se ha realizado una aproximación del coeficiente κ para la frecuencia del ciclo cardiaco o primer armónico. Posteriormente, se han graficado los parámetros con los que se analiza el error.

Sobre el análisis del cálculo de los términos de fricción, para el Grupo I, las gráficas revelan que no hay grandes diferencias en el resultado del cálculo de la fricción derivada de los perfiles aproximado, capa de Stokes o perfil potencial para $n = 9$. Para los vasos arteriales del Grupo II, el cálculo de la fricción derivada de los perfiles Aproximado, Poiseuille y capa de Stokes dan errores similares. Para el grupo III si se encuentra claramente que calcular la fricción con la fórmula derivada de Poiseuille es la opción que da un valor más cercano a Womersley.

Respecto a las gráficas de ley de potencia aplicadas al cálculo de la fricción, de acuerdo con el capítulo §4, se menciona Poiseuille como perfil potencial para $n = 2$. El rendimiento observado de cada una de los tres perfiles, y, para con sí mismo, la fricción del perfil potencial para $n = 9$ da su mejor rendimiento para los vasos del Grupo I; la fricción del perfil potencial para $n = 4$ responde mejor para los vasos del Grupo II; la fricción del perfil potencial para $n = 2$ o Poiseuille responde cuando mejor para los vasos del Grupo III. Independientemente de esto, Poiseuille, en los vasos del Grupo II, da resultados mejores que para $n = 4$ y sólo es la peor opción para los vasos del Grupo I.

Respecto al cálculo de la convección, el término Q^2/A es común, cualesquiera sea el perfil de velocidad utilizado. El cálculo del coeficiente corrector, κ tiene una influencia decisiva. En las gráficas se ha dado cuenta de la variabilidad de valores y cómo incluso superando el rango esperado. Las funciones κ para Womersley y para capa de Stokes están acotadas en unos valores. Debido a los valores que toma el gradiente de presión, el coeficiente κ del perfil aproximado supera ampliamente el valor asociado a Poiseuille de $\frac{4}{3}$.

Teniendo en cuenta los valores de los coeficiente κ , se observa en las gráficas de la convección mayor separación entre los cálculos que unos perfiles proveen respecto de otros. Para el Grupo I son los perfiles de capa de Stokes y Aproximado los que dan un mejor cálculo de la convección. Para el Grupo II, el perfil potencial para $n=4$ y el perfil de capa de Stokes dan un mejor valor del término de convección con respecto a Womersley. Para el Grupo III, Poiseuille da la mejor aproximación. Así en el Grupo I predominan los perfiles que mejor tratan la aproximación a perfil plano. En el Grupo II no se observa preponderancia clara. En el Grupo III, se observa el perfil de Poiseuille como indiscutible.

Aglutinando en una conclusión tanto fricción como convección, en el Grupo I, los cálculos asociados a capa de Stokes y a perfil aproximado dan un resultado aceptable en comparación con el resto y teniendo en cuenta tanto fricción y convección. Para el Grupo II, es donde más variabilidad se ha visto. Sin embargo el perfil aproximado da el que peores datos para convección, no así en fricción. Para el Grupo III, es el perfil de Poiseuille el que mejor rendimiento ha mostrado tanto en fricción como en convección.

Capítulo 7

Análisis diferencial de metodologías de cálculo

7.1. Introducción

En el capítulo §5 se caracterizan los vasos arteriales según los datos obtenidos por la simulación numérica [24] asumiendo que, por defecto,

$$f = -8\mu\pi\bar{v}, \quad \kappa = \frac{4}{3}.$$

Con los mismos datos de la simulación numéricas empleados para la caracterización, se realiza, en §6.2 y §6.3, un análisis diferencial sobre la aplicación de los distintos perfiles en el cálculo de la fricción y de la convección comparándolo con la misma operación respecto del perfil de Womersley. Tras este análisis y sus posteriores conclusiones, se propone en este capítulo implementar una metodología de cálculo en la que no se dé por defecto la utilización de la fricción de Poiseuille y el coeficiente corrector para perfil plano. A este caso, tendrá la denominación de Caso Inicial, para distinguirlo del resto de propuestas.

7.2. Metodologías de cálculo para fricción y convección

En las conclusiones del §6.2 se afirma que para los vasos del Grupo I hay una terna de perfiles que dan unos resultados parejos. En el resto de Grupos, el perfil de Poiseuille tiene unos resultados aceptables en el Grupo II y es la mejor opción para el Grupo III. Las conclusiones de §6.3 son parecidas. Debido a la variabilidad del coeficiente κ del perfil aproximado para los Grupos II y III, restringimos la aplicación al Grupo I. Grupos II y III aplicaremos las fórmulas derivadas de Poiseuille o la fórmula de Womersley, la cual, al ser una aproximación, no requiere de un análisis armónico previo del ciclo cardiaco anterior.

Metodología I

Se hace una propuesta que contempla los perfiles Aproximado y Poiseuille; y se concreta la forma,

- Grupo I. Se utilizan las fórmulas derivadas del perfil Aproximado.

$$f = \bar{v} \left\{ \frac{4\pi\mu}{y_c^2 - 1} \right\} + p_x \left\{ \frac{\pi R^2}{2} (y_c^2 - 1) \right\}, \quad \kappa = \delta_1 = \frac{2 - 2\zeta_c (1 - \ln \zeta_c)}{(1 - \zeta_c)^2}$$

donde $y_c \in (0,8, 1)$ and $\zeta_c = y_c^2$.

- Grupo II. Se utilizan las fórmulas derivadas del perfil de Poiseuille:

$$f = -8\mu\pi\bar{v}, \quad \kappa = \frac{4}{3}.$$

- Grupo III. Se utilizan las fórmulas derivadas del perfil de Poiseuille.

$$f = -8\mu\pi\bar{v}, \quad \kappa = \frac{4}{3}.$$

Metodología II

Se hace una propuesta que contempla los perfiles de capa de Stokes y Poiseuille; y se concreta la forma,

- Group I. Se utilizan las fórmulas derivadas del perfil de capa de Stokes.

$$f = -\frac{6\pi\mu}{(3 - 3\delta_s + \delta_s^2)\delta_s}\bar{v}, \quad \kappa = \frac{3(6 - 8\delta_s + 3\delta_s^2)}{2(3 - 3\delta_s + \delta_s^2)^2}$$

donde δ_s es el espesor de la capa viscosa

- Grupo II. Se utiliza la fórmulas derivadas del perfil de capa de Stokes para el coeficiente corrector y la fórmula derivada de Poiseuille para la fricción.

$$f = -8\mu\pi\bar{v}, \quad \kappa = \frac{3(6 - 8\delta_s + 3\delta_s^2)}{2(3 - 3\delta_s + \delta_s^2)^2}$$

- Grupo III. Se utiliza la fórmulas derivadas del perfil de capa de Stokes para el coeficiente corrector y la fórmula derivada de Poiseuille para la fricción.

$$f = -8\mu\pi\bar{v}, \quad \kappa = \frac{3(6 - 8\delta_s + 3\delta_s^2)}{2(3 - 3\delta_s + \delta_s^2)^2}$$

Metodología III

Se hace una propuesta que contempla los perfiles de Womersley, capa de Stokes y Poiseuille; y se concreta la forma,

- Grupo I. Se utiliza la fórmula derivada del perfil de Womersley para el coeficiente corrector y la fórmula derivada del perfil de capa de Stokes para la fricción.

$$f = -\frac{6\pi\mu}{(3 - 3\delta_s + \delta_s^2)\delta_s}\bar{v}, \quad \kappa = \frac{2}{M_{10}} \cos \epsilon_{10} - \left(\frac{\alpha h_{10}}{2 M_{10}}\right)^2 \sin(2\delta_{10} + 2\epsilon_{10}).$$

- Grupo II. Se utiliza la fórmula derivada del perfil de Womersley para el coeficiente corrector y la fórmula derivada del perfil de Poiseuille para la fricción.

$$f = -8\mu\pi\bar{v}, \quad \kappa = \frac{2}{M_{10}} \cos \epsilon_{10} - \left(\frac{\alpha h_{10}}{2 M_{10}}\right)^2 \sin(2\delta_{10} + 2\epsilon_{10}).$$

- Grupo III. Se utiliza la fórmula derivada del perfil de Womersley para el coeficiente corrector y la fórmula derivada del perfil de Poiseuille para la fricción.

$$f = -8\mu\pi\bar{v}, \quad \kappa = \frac{2}{M_{10}} \cos \epsilon_{10} - \left(\frac{\alpha h_{10}}{2 M_{10}}\right)^2 \sin(2\delta_{10} + 2\epsilon_{10}).$$

7.3. Comparativa entre metodologías de cálculo para la fricción

Una a una, se han implementado las distintas metodologías y tras pasar por el proceso de la simulación numérica, se han obtenido una serie de resultados que se han analizado como en los capítulos §6.2 y §6.3. La comparación de resultados se ha realizado a través de la norma infinito, L_∞ , para todas las metodologías y siguiendo la clasificación por grupos de los vasos arteriales. Se incluye en la comparación el Caso Inicial, aunque sea repetir una gráfica de otra sección.

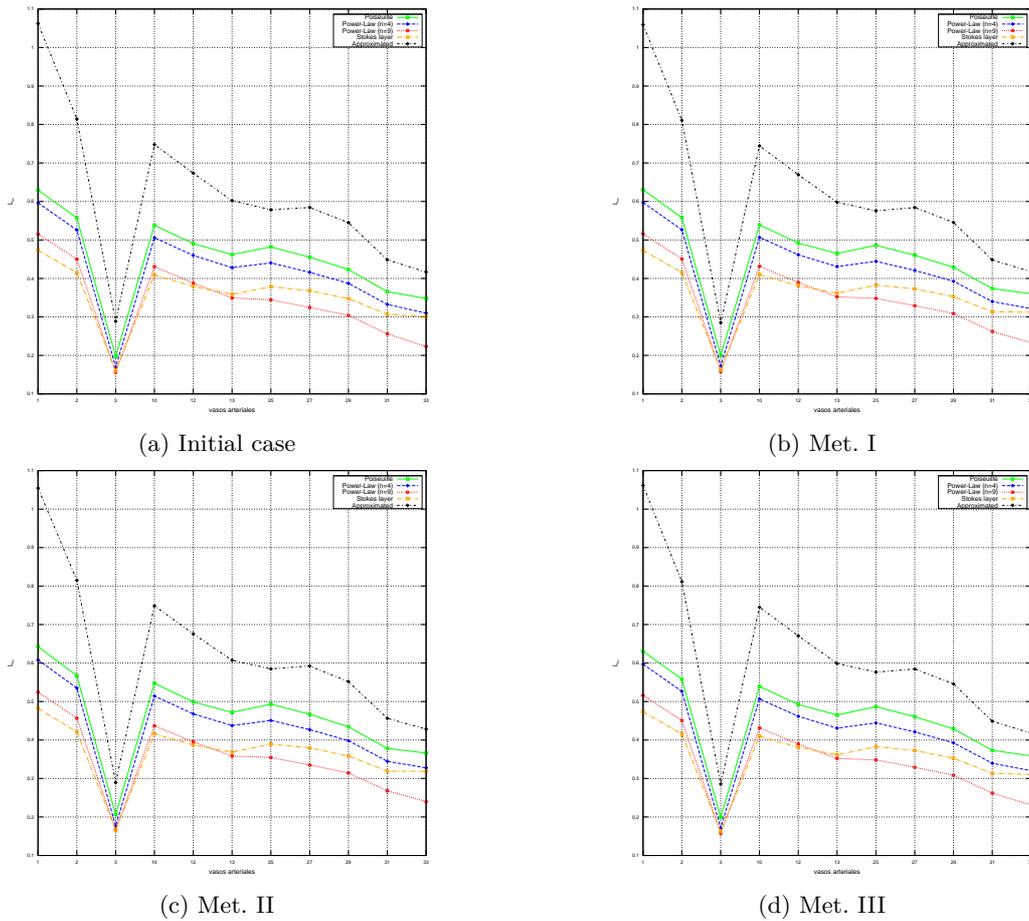
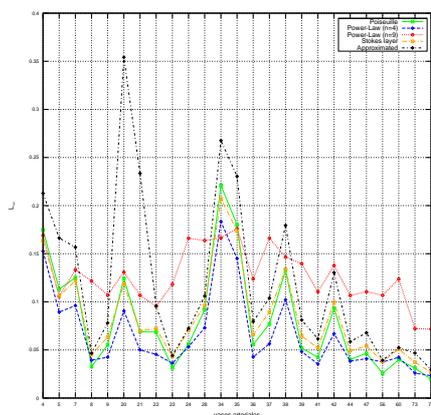
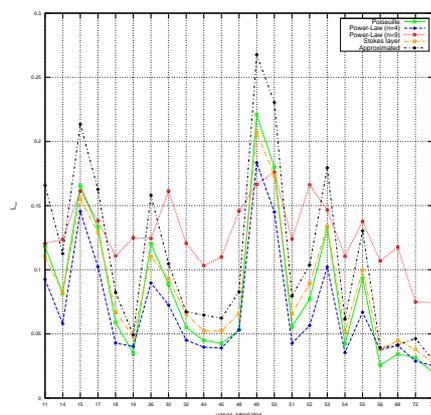


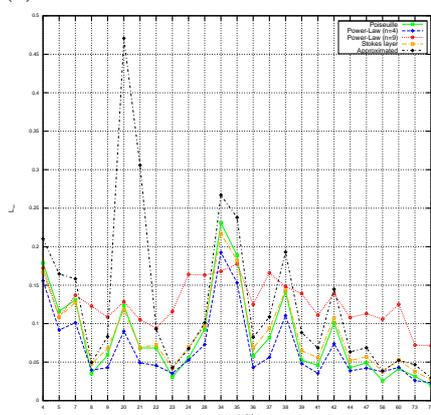
Figura 7.1: Grupo I: Comparación de L_∞ para todas las metodologías del término de fricción usando Womersley como referencia.



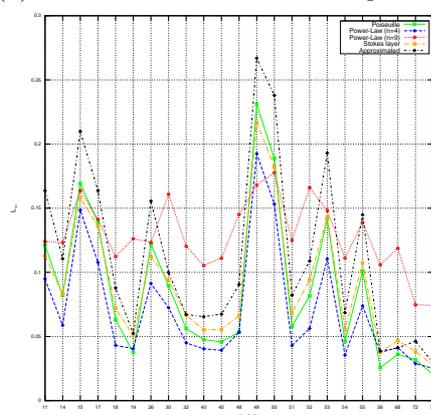
(a) Caso Inicial. Vasos del lado derecho.



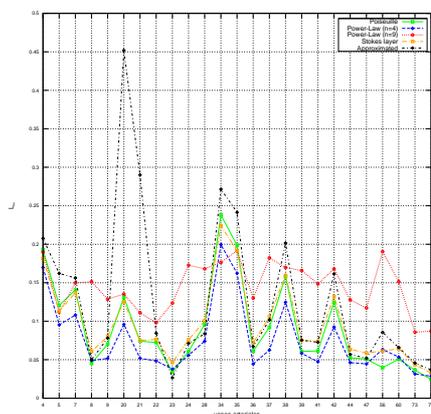
(b) Caso Inicial. Vasos del lado izquierdo.



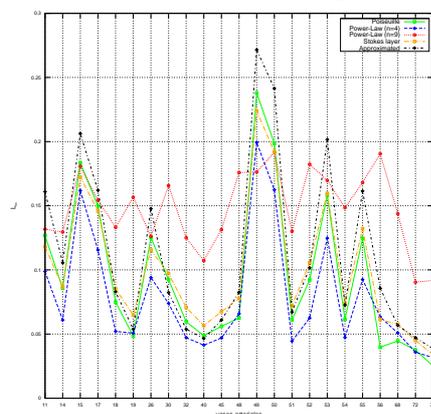
(c) Met. I. Vasos del lado derecho.



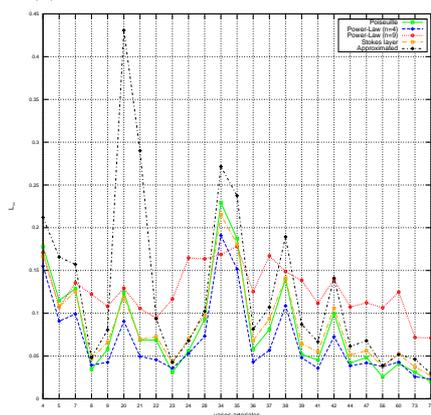
(d) Met. I. Vasos del lado izquierdo.



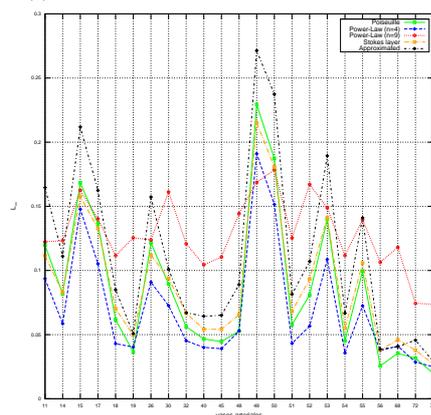
(e) Met. II. Vasos del lado derecho.



(f) Met. II. Vasos del lado izquierdo.

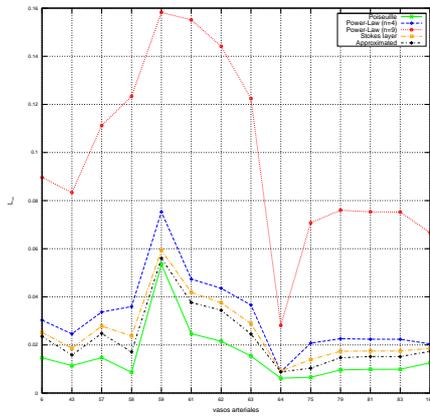


(g) Met. III. Vasos del lado derecho.

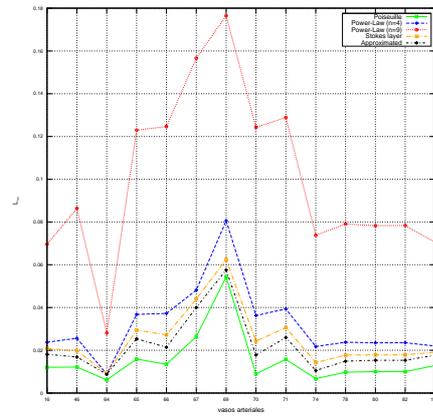


(h) Met. III. Vasos del lado izquierdo.

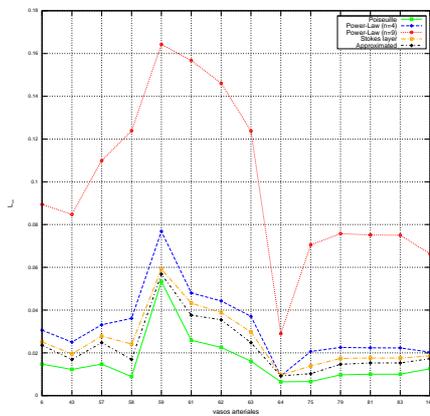
Figura 7.2: Grupo II: Comparación de L_∞ para todas las metodologías del término de fricción usando Womersley como referencia.



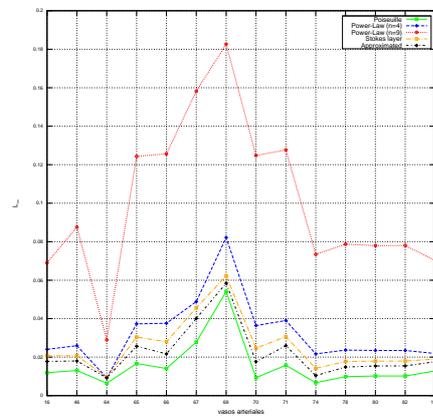
(a) Caso Inicial. Vasos del lado derecho.



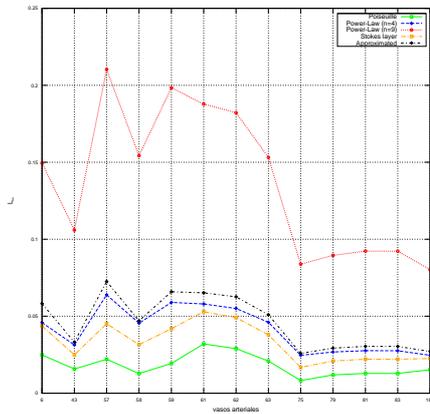
(b) Caso Inicial. Vasos del lado izquierdo.



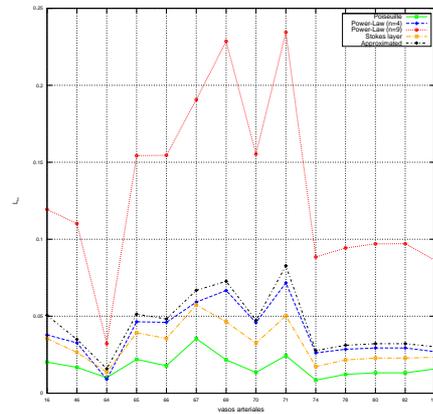
(c) Met. I. Vasos del lado derecho.



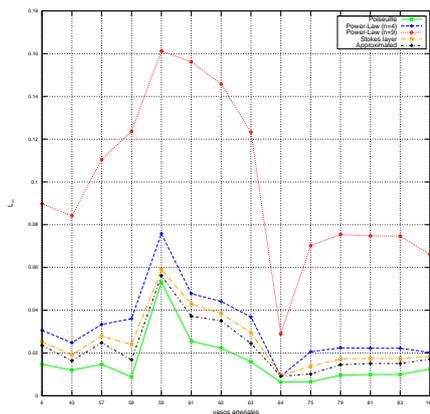
(d) Met. I. Vasos del lado izquierdo.



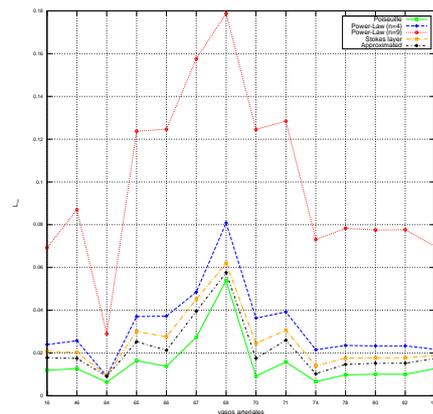
(e) Met. II. Vasos del lado derecho.



(f) Met. II. Vasos del lado izquierdo.



(g) Met. III. Vasos del lado derecho.



(h) Met. III. Vasos del lado izquierdo.

Figura 7.3: Grupo I: Comparación de L_∞ para todas las metodologías del término de fricción usando Womersley como referencia.

7.4. Comparativa entre metodologías de cálculo para la convección

Una a una, se han implementado las distintas metodologías y tras pasar por el proceso de la simulación numérica, se han obtenido una serie de resultados que se han analizado como en los capítulos §6.2 y §6.3. La comparación de resultados se ha realizado a través de la norma infinito, L_∞ , para todas las metodologías y siguiendo la clasificación por grupos de los vasos arteriales. Se incluye en la comparación el Caso Inicial, aunque sea repetir una gráfica de otra sección.

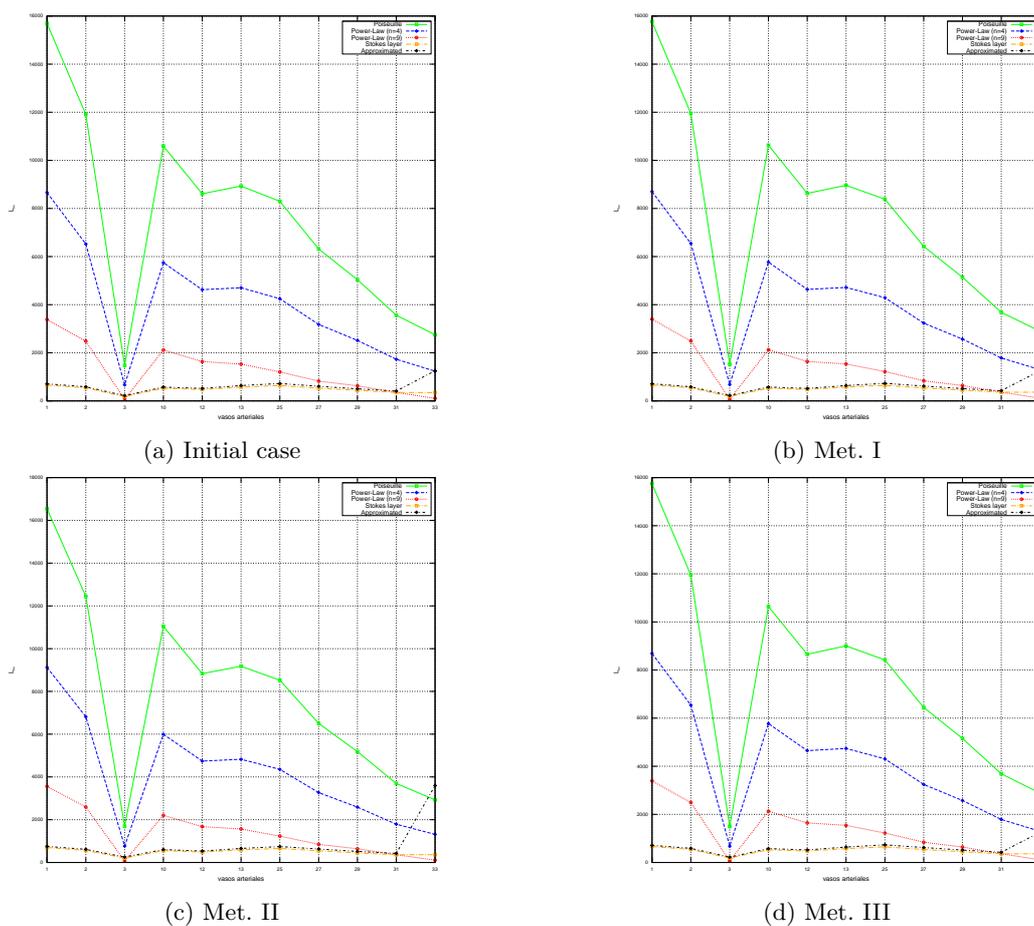
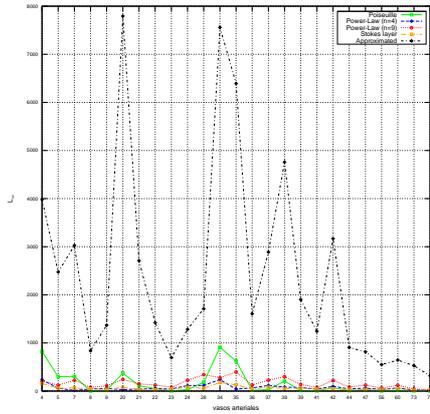
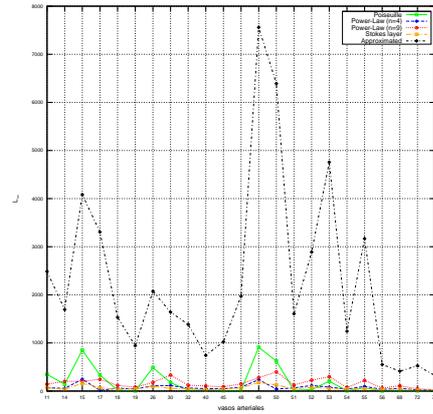


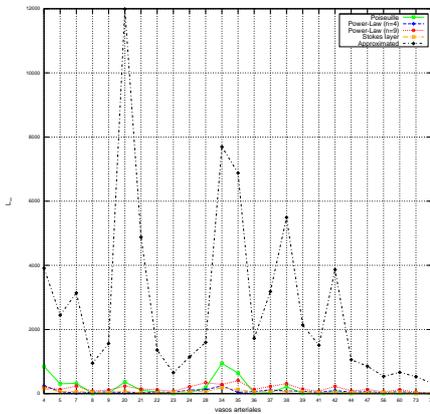
Figura 7.4: Grupo I: Comparación de L_∞ para todas las metodologías del término de convección usando Womersley como referencia.



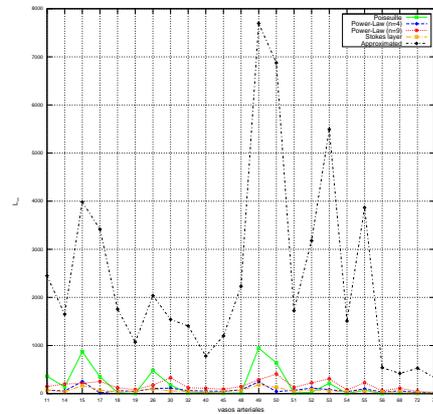
(a) Caso Inicial. Vasos del lado derecho.



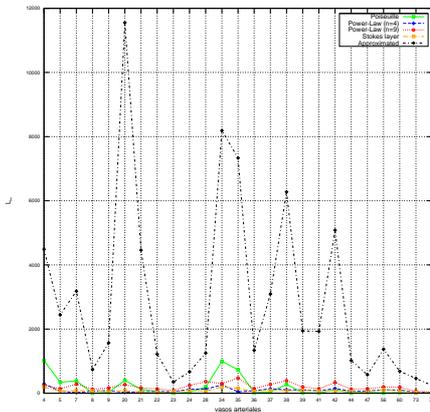
(b) Caso Inicial. Vasos del lado izquierdo.



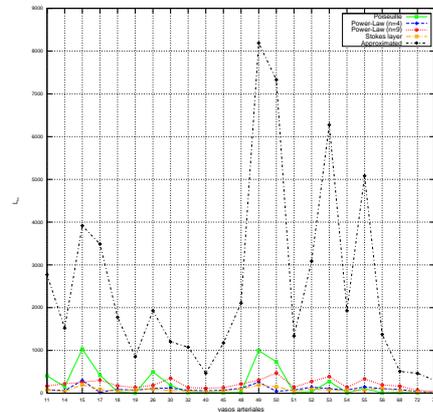
(c) Met. I. Vasos del lado derecho.



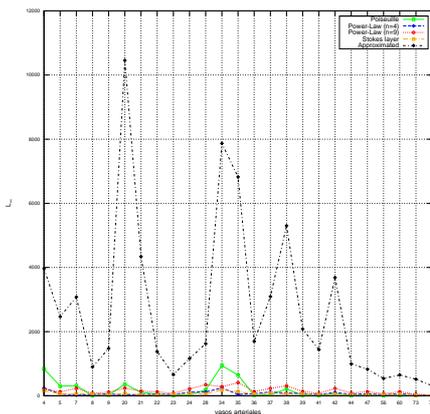
(d) Met. I. Vasos del lado izquierdo.



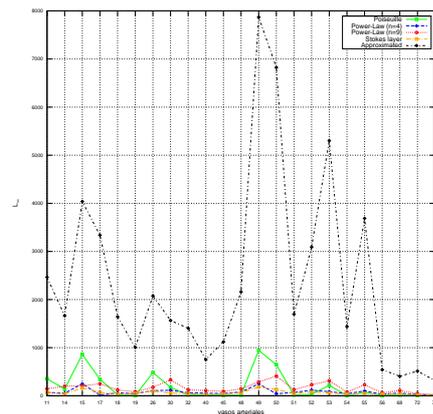
(e) Met. II. Vasos del lado derecho.



(f) Met. II. Vasos del lado izquierdo.

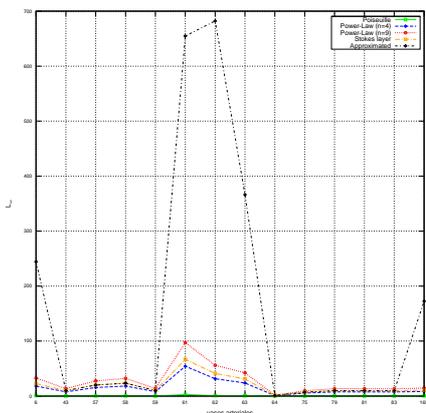


(g) Met. III. Vasos del lado derecho.

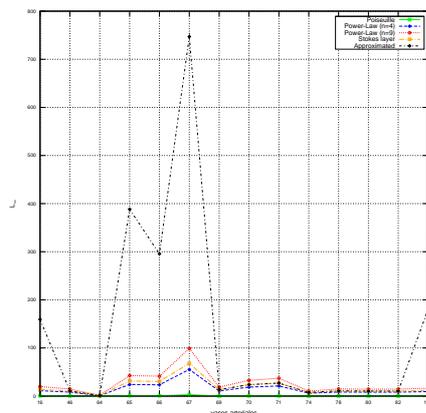


(h) Met. III. Vasos del lado izquierdo.

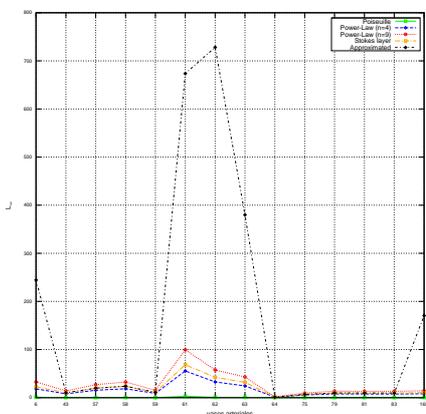
Figura 7.5: Grupo II: Comparación de L_∞ para todas las metodologías del término de convección usando Womersley como referencia.



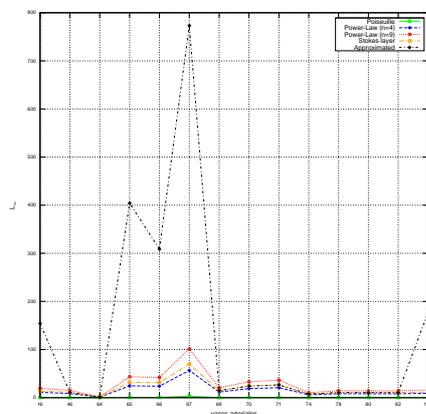
(a) Caso Inicial. Vasos del lado derecho.



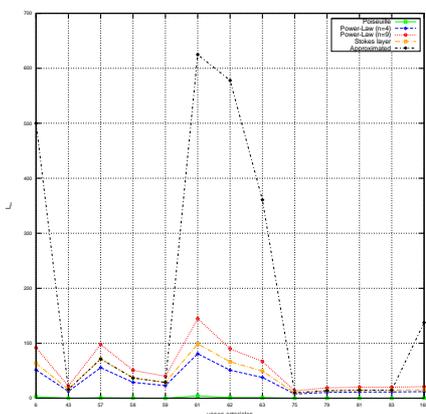
(b) Caso Inicial. Vasos del lado izquierdo.



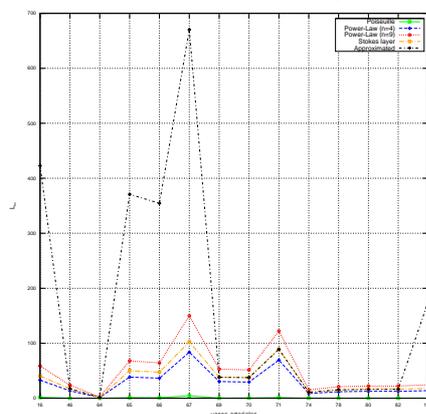
(c) Met. I. Vasos del lado derecho.



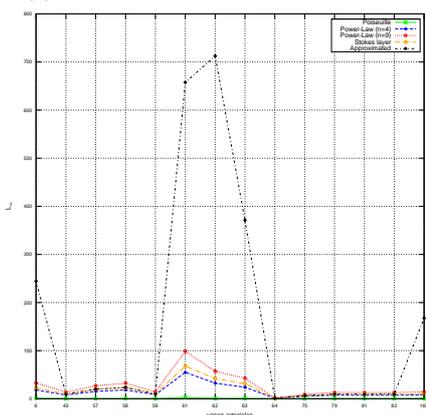
(d) Met. I. Vasos del lado izquierdo.



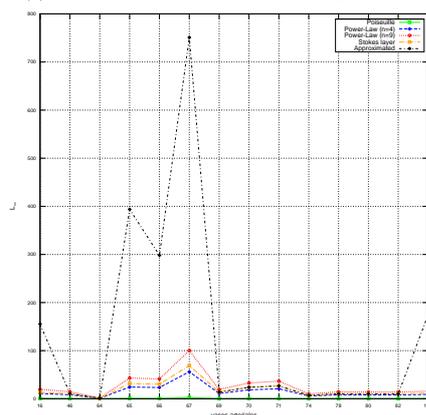
(e) Met. II. Vasos del lado derecho.



(f) Met. II. Vasos del lado izquierdo.



(g) Met. III. Vasos del lado derecho.



(h) Met. III. Vasos del lado izquierdo.

Figura 7.6: Grupo III: Comparación de L_∞ para todas las metodologías del término de convección usando Womersley como referencia.

7.5. Resumen

En los anteriores capítulos se había calculado la fricción y la convección para cada perfil usando los datos de una simulación numérica bajo la configuración del Caso Inicial, fricción de Poiseuille y coeficiente corrector para perfil plano. Posteriormente se había realizado un análisis diferencial entre perfiles de velocidad respecto al perfil de Womersley para el cálculo de los términos fricción y convección.

A partir de las conclusiones del análisis comparativo, se han planteado una serie de metodologías de cálculo que cambian la configuración de cálculo del Caso Inicial. Debido al, en general, buen comportamiento de cálculo asociado al perfil de Poiseuille, se ha establecido como perfil complementario en las metodologías propuestas. Para la Metodología I, se ha pensado el uso del perfil Aproximado. En [10], Bessems sólo hacía uso de su κ para grandes arterias y los resultados gráficos aconsejaba su uso para los vasos del Grupo I. Además el coeficiente corrector κ del aproximado, sólo es estable en el primer grupo. Para la Metodología II, se ha pensado en el perfil de capa de Stokes. En general se ha visto un buen comportamiento para los tres grupos, seguramente, debido a una variabilidad en el rango de vasos arteriales sin estridencias, debido a su simple expresión. Pero la fricción se ha preferido calcularla con la fricción de Poiseuille para los grupos II y III. Para la metodología III se ha pensado en el perfil de Womersley. Debido a la complejidad de operar con armónicos, se ha dejado el cálculo de fricción a la expresión de Poiseuille, y el cálculo del coeficiente corrector κ a Womersley. En nuestro caso, esta expresión depende sólo de la frecuencia del ciclo cardiaco, de la geometría instantánea de la sección y del caudal. Por tanto no requería guardar los datos armónicos de un ciclo previo.

Una vez se han generado las simulaciones numéricas, una por cada metodología propuesta, se ha procedido al análisis de los datos con una única función de error, la norma infinito. La razón, reducir la complejidad en el análisis para abarcar todas las metodologías y evitar una saturación gráfica. La conclusión del análisis ha sido la siguiente: tras la implementación de todas las metodologías el cambio percibido en los datos obtenidos ha sido nulo o casi nulo. Sólo la metodología II produce algún cambio en algunos vasos del Grupo III y no se puede afirmar que haya sido a mejor, ni tampoco lo contrario.

Se colige de lo anterior que, para la simulación numérica en su configuración actual, ésta converge a unos resultados que no varían de manera significativa si se procede después a cambiar los modos del cálculos de fricción y convección siguiendo las metodologías aquí presentadas. A la luz de los resultados, la configuración del Caso Inicial parece la idónea ya que requiere el mínimo coste computacional.

Capítulo 8

Conclusiones

Ha sido el interés principal de este trabajo desarrollar todas las herramientas matemáticas que permiten analizar el flujo circulante por los vasos arteriales pertenecientes a la circulación sistémica y evaluar después la influencia sobre los resultados numéricos de suponer un perfil de velocidad u otro.

En este trabajo se han desarrollado las ecuaciones unidimensionales que permiten modelar el flujo a través de los vasos arteriales. Para el supuesto de pared rígida, se ha obtenido la que aquí se denomina como ecuación de Womersley, que es el caso de flujo oscilante en vaso de pared rígida. Para el supuesto de pared elástica, a través de la forma integral de la ecuación de conservación de masa y de la de momento, y añadiendo la ecuación constitutiva, se ha obtenido el sistema de ecuaciones unidimensional e hiperbólico que modeliza matemáticamente. En este sistema de ecuaciones, aparecen los términos fricción y coeficiente corrector del término convectivo, o de manera reducida, f y κ .

En el apartado teórico se han recopilado todos los perfiles de velocidad de relevantes, para analizar sus expresiones y derivar los términos f y κ . Para los perfiles Aproximado y de capa de Stokes, los cuales tienen semejanza en el planteamiento de capa viscosa, se ha unificado el criterio del espesor de esta, δ_s , al tomar la aproximación propuesta por Bessems [10]. Se ha constatado también la existencia de cada uno de los perfiles como una solución entre perfil plano y perfil Poiseuille, salvo los aludidos que ya lo son, al incluir entre sus configuraciones los valores para perfil plano o Poiseuille. También sucede con el perfil de Womersley.

Se ha propuesto un criterio para clasificar los vasos arteriales. Extendiendo la idea de espesor de capa viscosa, δ_s , sirve como parámetro para clasificar los vasos arteriales. Así se generaliza el concepto y se consigue realizar la clasificación con un criterio que contempla la influencia de la frecuencia y la geometría.

Respecto al perfil de Womersley y a la teoría sobre la que se sustenta, se ha resuelto la ecuación y detallado todo el proceso hasta la consecución de una expresión en el dominio de la frecuencia. Es precisamente en la resolución donde aparecen las dos grandes complejidades de esta solución que propone Womersley. La primera, la aparición de funciones Bessel con argumento complejo. La otra, el ser una solución en el dominio de la frecuencia.

Para tratar con las funciones Bessel de argumento complejo ha sido necesario involucrar en el trabajo la teoría sobre estas funciones y el modo de luego implementarlas. Para ello se ha hecho un trabajo intermedio de conocimiento, uso y algoritmo. Todo ese trabajo ha quedado reflejado en los anexos en , donde se ha desentrañado las series de potencias tras una notación tan simple y en C, donde se escriben los algoritmos de la teoría sobre funciones Bessel necesarios para nuestro trabajo. En el caso que ocupa al trabajo, son las funciones Kelvin las que permiten tratar las funciones Bessel como un número complejo en notación cartesiana.

Para tratar con el dominio de la frecuencia, ha sido necesario involucrar la teoría de Fourier para variable discreta. Así pues, se ha visto necesario buscar en librerías externas un algoritmo FFT que nos permita un análisis armónico de la variable de interés. Este algoritmo se encuentra en los anexos §G.4 y en la bibliografía [34]. Para la síntesis de la señal y conseguir una función interpolatoria, se ha generado

un código en §G.3.2 para obtener los coeficientes armónicos de la señal, en este caso el caudal. Todo el soporte teórico se ha compilado y llevado a anexos §B.

Es importante señalar que se ha buscado una expresión del perfil de Womersley en función del caudal, pues ésta es una variable conservada, no así el gradiente de presión. Una vez el perfil se encontraba en función del caudal, era posible abordar la derivación de f y κ . El término fricción se ha derivado usando propiedades de las funciones kelvin [32] y se ha formulado en función de los armónicos que tuviera la señal. El término integral ha sido más complejo. Para llegar a él ha sido preciso también de propiedades de las funciones Kelvin y de un desarrollo más elaborado. Pero se ha formulado la expresión para un sólo armónico. Si no es por aproximación, el otro modo de calcular κ es por integración numérica. En la Figura 6.7 se muestra un coeficiente calculado para todos los vasos integrando mediante la regla del trapecio. El rango tan grande de valores y la dificultad para implementar un algoritmo que calculase de manera cíclica este coeficiente, hace que se la aproximación de κ mejor opción.

Además de derivar los términos f y κ , en este trabajo se ha implementado un algoritmo que insertado dentro del modelo matemático, calculase estos términos de manera cíclica. Toda la explicación teórica y el planteamiento se han llevado a anexos en §C.

El análisis comparativo entre perfiles se ha llevado a cabo definiendo una serie de funciones de error para poder cuantificar la diferencia entre los cálculos de f y κ con un perfil y el perfil de Womersley, el cuál ha sido utilizado como referencia. En base a este análisis se ha podido elaborar unas propuestas de metodología de cálculo de f y κ involucrando a algunos de los perfiles analizados en este trabajo, que era uno de los objetivos principales.

Una vez establecidas distintas metodologías de cálculo, sustentadas por las conclusiones del análisis comparativo entre perfiles, hacemos una análisis diferencial entre éstas. Se incorpora también la opción por defecto. El resultado es, que la variabilidad entre metodologías es imperceptible en casi todas. Sólo la Metodología II produce cambios visibles.

Como con el resto de perfiles, para la solución de Womersley se ha derivado una expresión para la fricción y otra para el coeficiente corrector. Pero mientras la obtención de la expresión de la fricción supone una operación lineal, derivando cada término del caudal, el coeficiente corrector implica una integral de área de la expresión al cuadrado del perfil de velocidad $\int_0^1 v^2 y dy$. Teniendo presente que la expresión del perfil será una serie de tantos términos como se haya considerado necesarios, se ha hecho necesario resolverlo con una aproximación. Se ha propuesto para el coeficiente corrector la expresión obtenida para la señal de un armónico, caracterizada para la frecuencia del ciclo cardiaco.

La conclusión sobre el objetivo detallado de analizar la influencia, es que no ha habido tal influencia, y, ante la evidencia, la mejor opción de cálculo es la que se viene utilizando, por ser la de mínimo coste.

Bibliografía

- [1] Joseph P. Archie, Jr, PhD, MD, Raleigh, NC. Presidential address: A brief history of arterial blood flow—from Harvey and Newton to computational analysis.
- [2] Poiseuille, J.L.M. Le mouvement des liquides dans les tubes de petits diamètres, 1847.
- [3] K. Witzig. Uber erzwungene wellenbewegungen zaber, inkompressibler Flussigkeiten in elastishen Rohren, Disertación Inaugural, 1914, Universidad de Berna.
- [4] Lambossy, Paul. Oscillations forcées d'un liquide incompressible et visqueux dans un tube rigide et horizontal: calcul de la force de frottement. *Helvetica Physica Acta* 25, 371–386, 1952.
- [5] D. A. McDonald. The relation of pulsatile pressure to flow in arteries. *J. Physiol.* 127, 533–552, 1952.
- [6] Womersley, J.R.. Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. *J.Physiol.* 127, 553-563. 1955.
- [7] J. R. Womersley. An elastic tube theory of pulse transmission and oscillatory flow in mammalian arteries. Tech. Rep. WADC-TR-56-614, 1957, Wright Air Dev. Center, Dayton, OH.
- [8] Mette S. Olufsen et al. Numerical Simulation and Experimental Validation of Blood Flow in Arteries with Structured-Tree Outflow Conditions. *Annals of Biomedical Engineering*, Vol. 28, pp. 1281–1299, 2000.
- [9] Frans N. van de Vosse and M.E.H van Dongen. *Cardiovascular Fluid Mechanics. Lecture Notes.* 1998.
- [10] David Bessems. On the propagation of pressure and flow waves through the patient-specific arterial system. PhD thesis. Eindhoven Univ. Technol. 2007.
- [11] Frans N. Van de Vosse. Nikos Stergiopulos. *Pulse Wave Propagation in the Arterial Tree.* *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2011, 43:467-99.
- [12] Philippe Reymond et al. Validation of a one-dimensional model of the systemic arterial tree. *Am J. Physiol. Heart Circ. Physiol.* 297: H208–H222, 2009.
- [13] Thomas J. R. Hughes and J. Lubliner. On the One-Dimensional Theory of Blood Flow in the Larger Vessels. *Mathematical Biosciences*, 1973, 18, 161–170.
- [14] Wan J, Steele B, Spicer SA, Strohsband S, Feijoo GR, et al.. A one-dimensional finite element method for simulation-based medical planning for cardiovascular disease. *Comput. Methods Biomech. Biomed. Eng.*5:195–206, 2002.
- [15] Omer San and Anne E. Staples. An improved model for Reduced-order physiological fluid flows 2002. *J. Mech. Med Biol*, 2012, 12, 1250052.
- [16] M. J. Lighthill. *Introduction to Fourier analysis and generalised functions.* Cambridge University Press, 2003.
- [17] William L. Briggs. Van Emden Henson. *The DFT: an Owner's Manual for the Discrete Fourier Transform.* SIAM, 1995.

- [18] Elbert Oran Brigham. The fast Fourier Transform. Prentice-Hall.
- [19] Ronald N. Bracewell. The Fourier Transform and its applications. MacGraw-Hill Series in Electrical and computer engineering. 3rd edition.
- [20] Carl M. Bender and Steven A. Orszag. Advanced mathematical methods for scientists and engineers. McGraw-Hill, 1978.
- [21] George Finlay Simmons. Ecuaciones diferenciales: con aplicaciones y notas históricas. McGraw-Hill, D.L. 1986.
- [22] A. Kiseliöv, M. Krasnov & G. Makarenko: Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Ed. Mir, Moscú, 1973.
- [23] Lucas Omar Mueller. Mathematical modelling and simulation of the human circulation with emphasis on the venous system: application to the CCSVI condition. PhD, 2014.
- [24] J. Murillo, and P. García-Navarro. A Roe type energy balanced solver for 1D arterial blood flow and transport. Computer and Fluids, 2015 , 149–167.
- [25] Catherine Loudon and Antoinette Tordesillas. he Use of Dimensionless Womersley Number to Characterize the Unsteady Nature of Internal Flow. J.theor.biol. 191, 63–78, 1998.
- [26] J. Happel and H. Brenner. Low Reynolds Hydrodynamics. Prentice-Hall. 1965.
- [27] N. Stergiopoulos. Computer simulation of arterial blood flow. PhD, Iowa State University, 1990.
- [28] Sherwin et al.. Computational modelling of 1D blood flow with variable mechanical properties and its application to the simulation of wave propagation in the human arterial system. Int. J. Numer. Meth. Fluids 2003; 43:673–700
- [29] Jordi Alastruey. Numerical modelling of pulse wave propagation in the cardiovascular system: development, validation and clinical applications. PhD, Imperial College of London. 2006.
- [30] Xiaofei Wang. 1D modeling of blood flow in networks: numerical computing and applications. Thèse de doctorat. 2014, Oct 17, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI.
- [31] Fredrik Eikeland Fossan. Comparison of numerical schemes for nonlinear 1-D arterial blood flow modeling. Master Thesis. NTNU-Trondheim.
- [32] F. W. J. Olver, L. C. Maximon. Chapter 10 Bessel Functions, <http://dlmf.nist.gov/10>. NIST Digital Library of Mathematical Functions.
- [33] John Burkardt. https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/f77_src/special_functions/mklvna.for The Departmen of Scientific Computing, Florida State University.
- [34] William H. Press. et al.. Numerical recipes in Fortran 77 : the art of scientific computing. 1992.
- [35] John E. Hall and Arthur C. Guyton. Textbook of Medical Physiology.

Índice de figuras

4.1. Perfil potencial: relación de forma para distintos valores del parámetro n . Casos para $n=2$ (poiseuille), $n=4$ y $n=9$	33
4.2. Perfil de Stokes: evolución para distintos espesores de capa viscosa, δ_s	35
4.3. Perfil de Stokes: evolución del coeficiente κ para todo el rango de valores de δ_s	36
4.4. Perfil Aproximado: radio adimensional y localización de la frontera con la capa viscosa para un vaso arbitrario.	37
4.5. Perfil Aproximado: evolución para distintos espesores de capa viscosa, δ_s	37
4.6. Perfil aproximado: funciones delta del coeficiente corrector del término convectivo. Imagen extraída de [10].	39
4.7. Perfil de Womersley: funciones geométricas del perfil. En el lado izquierdo, M_p , y en el lado derecho, ϵ_p	41
4.8. Perfil de Womersley: funciones geométricas de caudal. Arriba en la imagen, h_{10} y δ_{10} y abajo, M_{10} y ϵ_{10}	42
4.9. Perfil de Womersley: Coeficiente κ . A la izquierda, componente real de coeficiente; a la izquierda, la imaginaria.	45
5.1. Presión esperada para las distintas componentes de la función circulatoria. Imagen extraída del Tratado de Fisiología Médica de Guyton y Hall [35].	48
5.2. Circulación sanguínea: sistema global empleado en la simulación. Imagen extraída de [23].	48
5.3. Espesor adimensional de capa viscosa, δ_s . Valores para cada vaso obtenidos a lo largo de un ciclo cardiaco.	49
5.4. Grupos de vasos. Tipos de perfiles esperados en un vaso de acuerdo a la asignación de grupo.	50
5.5. Red de vasos arteriales de la circulación sistémica. 85 vasos arteriales forman parte del estudio para la influencia del perfil de velocidad. Imagen editada por el autor de este texto extraída de [23].	50
5.6. Vasos arteriales. Diagrama de dispersión de L/D frente a D . Los rombos azules hacen referencia al Grupo I; los círculos morados al Grupo II; los círculos blancos al Grupo III. .	51
5.7. Número de Reynolds, Re . Distribución por cuartiles de los valores de Re para cada vaso a lo largo de un ciclo cardiaco simulado.	52
5.8. Número de Womersley, α . Distribución por cuartiles de los valores de α para cada vaso a lo largo de un ciclo cardiaco simulado.	53
5.9. Grupo I: análisis del error armónico. Comparación entre la variable caudal, $Q(n)$ para un instante dado y un caudal sintetizado para un ciclo cardiaco completo.	54
5.10. Grupo II: análisis del error armónico. Comparación entre la variable caudal, $Q(n)$ para un instante dado y un caudal sintetizado para un ciclo cardiaco completo.	55
5.11. Grupo III: análisis del error armónico. Comparación entre la variable caudal, $Q(n)$ para un instante dado y un caudal sintetizado para un ciclo cardiaco completo.	55

5.12. Grupo I: perfiles de velocidad para el vaso 1.	56
5.13. Grupo I: perfiles de velocidad para el vaso 3.	57
5.14. Grupo I: perfiles de velocidad para el vaso 27.	57
5.15. Grupo I: perfiles de velocidad para el vaso 29.	58
5.16. Grupo II: perfiles de velocidad para el vaso 15.	59
5.17. Grupo II: perfiles de velocidad para el vaso 49.	60
5.18. Grupo II: perfiles de velocidad para el vaso 20.	60
5.19. Grupo II: perfiles de velocidad para el vaso 34.	61
5.20. Grupo II: perfiles de velocidad para el vaso 56.	61
5.21. Grupo II: perfiles de velocidad para el vaso 60.	62
5.22. Grupo III: perfiles de velocidad para el vaso 59.	63
5.23. Grupo III: perfiles de velocidad para el vaso 64.	64
5.24. Grupo III: perfiles de velocidad para el vaso 67.	64
5.25. Grupo III: perfiles de velocidad para el vaso 69.	65
5.26. Grupo III: perfiles de velocidad para el vaso 6.	65
5.27. Grupo III: perfiles de velocidad para el vaso 46.	66
6.1. Grupo I: Análisis diferencial del error para el término de fricción usando Womersley como referencia. Error medio, cuasivarianza, norma euclídea y norma infito.	72
6.2. Grupo II: Análisis diferencial del error para el término de fricción usando Womersley como referencia. Error medio, cuasivarianza, norma euclídea y norma infito.	73
6.3. Grupo III: Análisis diferencial del error para el término de fricción usando Womersley como referencia. Error medio, cuasivarianza, norma euclídea y norma infito.	74
6.4. Stokes: coeficiente convectivo, κ . Distribución de valores para todos los vasos.	76
6.5. Aproximado: coeficiente convectivo, κ . Distribución de valores para todos los vasos.	77
6.6. Womersley: aproximación del coeficiente convectivo, κ	78
6.7. Womersley: integración numérica del coeficiente convectivo, κ	78
6.8. Grupo I: Distribución de valores para el término convectivo no lineal Q^2/A	80
6.9. Grupo II: Distribución de valores para el término convectivo no lineal Q^2/A	80
6.10. Grupo III: Distribución de valores para el término convectivo no lineal Q^2/A	81
6.11. Grupo I: Análisis diferencial del error para el término convectivo no lineal, $\kappa \frac{Q^2}{A}$, usando Womersley como referencia. Error medio, cuasivarianza, norma euclídea y norma infito.	81
6.12. Grupo II: Análisis diferencial del error para el término convectivo no lineal, $\kappa \frac{Q^2}{A}$, usando Womersley como referencia. Error medio, cuasivarianza, norma euclídea y norma infito.	82
6.13. Grupo III: Análisis diferencial del error para el término convectivo no lineal, $\kappa \frac{Q^2}{A}$, usando Womersley como referencia. Error medio, cuasivarianza, norma euclídea y norma infito.	83
7.1. Grupo I: Comparación de L_∞ para todas las metodologías del término de fricción usando Womersley como referencia.	87
7.2. Grupo II: Comparación de L_∞ para todas las metodologías del término de fricción usando Womersley como referencia.	88
7.3. Grupo I: Comparación de L_∞ para todas las metodologías del término de fricción usando Womersley como referencia.	89
7.4. Grupo I: Comparación de L_∞ para todas las metodologías del término de convección usando Womersley como referencia.	90

7.5. Grupo II: Comparación de L_∞ para todas las metodologías del término de convección usando Womersley como referencia.	91
7.6. Grupo III: Comparación de L_∞ para todas las metodologías del término de convección usando Womersley como referencia.	92
C.1. Algorithm ???. Geometrical functions.	119
C.2. Algorithm ???. Calculation of the harmonic coefficients.	120
C.3. Algorithm 9. Cross-sectional calculations.	121
E.1. Arterial section development along a pulse-heart cycle.	129
E.2. Cross-sectional discharge along a period of pulse-heart cycle.	130
E.3. Distribution by quartiles of the pressure gradient along a pulse-heart cycle.	130
E.4. Grupo I: gradiente de presión. Distribución de valores.	131
E.5. Grupo II: gradiente de presión. Distribución de valores.	131
E.6. Grupo III: gradiente de presión. Distribución de valores.	131
F.1. Vaso 1. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco. .	133
F.2. Vaso 3. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco. .	133
F.3. Vaso 27. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco. .	134
F.4. Vaso 29. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco. .	134
F.5. Vaso 15. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco. .	134
F.6. Vaso 49. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco. .	135
F.7. Vaso 20. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco. .	135
F.8. Vaso 34. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco. .	135
F.9. Vaso 56. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco. .	136
F.10. Vaso 60. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco. .	136
F.11. Vaso 59. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco. .	136
F.12. Vaso 64. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco. .	137
F.13. Vaso 67. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco. .	137
F.14. Vaso 6. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco. .	137
F.15. Vaso 46. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco. .	138
F.16. Vaso 69. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco. .	138

Índice de cuadros

6.1. Characteristic kappa values.	75
-------------------------------------------	----

Apéndice A

Funciones Kelvin

A.1. Introducción

La ecuación de Bessel es una ecuación ordinaria diferencial (ODE) de segundo orden, la cual se resuelve a través del Teorema de Frobenius. La solución es una combinación lineal de funciones Bessel. La ecuación general de Bessel es

$$x^2 \ddot{w} + x \dot{w} + (x^2 - \xi^2)w = 0 \quad (\text{A.1})$$

donde x es una variable arbitraria. El orden de la ecuación Bessel depende del valor del parámetro ξ . Cuando $\xi = 0$, la ecuación de Bessel queda tal que

$$x^2 \ddot{w} + x \dot{w} + x^2 w = 0 \quad (\text{A.2})$$

y la solución, es la combinación lineal de dos funciones. Una función Bessel de primer tipo, $J_0(x)$ y otra del segundo tipo, $Y_0(x)$, ambas de orden cero,

$$y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x), \quad (\text{A.3})$$

donde las constantes c_1 y c_2 están determinadas por las condiciones de contorno. Cuando la variable $x \rightarrow 0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y_0 = \infty.$$

Si no queremos $y(x=0) = \infty$, entonces $c_2 = 0$.

William Thomson, más conocido como Lord Kelvin, introdujo la siguiente ecuación de Bessel, variación de la anterior,

$$\ddot{u} + \frac{1}{x} \dot{u} - \left(i + \frac{\xi}{x^2} \right) u = 0 \quad (\text{A.4})$$

Es una ODE, como la de Bessel, de segundo orden, en la que aparece un número complejo. La solución es una función de Bessel, pero, con argumento complejo.

$$y = c_1 J_\xi \left(e^{i\frac{3}{4}\pi} x \right) \quad (\text{A.5})$$

donde ξ es el orden de la ecuación, $i = \sqrt{-1}$ el número imaginario y $i^{3/2} = e^{i\frac{3}{4}\pi}$ en notación cartesiana o polar. Para nuestro caso, hemos considerado $c_2 = 0$. Esta función Bessel da un valor complejo. Thomson estudiaba la distribución de corriente en un cable para describir la resistencia ohmica en éste, cuando

descubrió las funciones que hoy llevan su nombre y que permiten analizar la función de Bessel con argumento complejo.

$$J_{\xi}(e^{i\frac{3}{4}\pi}x) = Ber_{\xi}(x) + iBei_{\xi}(x), \quad (\text{A.6})$$

llamadas funciones Bessel-real y Bessel-imaginaria. Es costumbre, cuando las funciones Kelvin vienen de una ecuación de Bessel de orden cero, usar la siguiente notación,

$$Ber(x) = Ber_0(x) \quad \text{y} \quad Bei(x) = Bei_0(x).$$

A.2. Funciones Kelvin derivativas

Para la siguiente sección, hemos acudido a las fórmulas existentes en la literatura. De entre otras fuentes, Abramovich and Stegun nos da las fórmulas para $\xi = 0$.

A.2.1. Función Bessel-real

La función Bessel-real se define como

$$Ber(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{2m}}{(m)!^2} \right\} \quad (\text{A.7})$$

e inducido por la función coseno, se observa lo siguiente

- a) si $m=1, 3, 5, \dots \Rightarrow \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- b) si $m=0, 4, 8, \dots \Rightarrow \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- c) si $m=2, 6, 10, \dots \Rightarrow \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right) = -1$

Como consecuencia, $a_{2n+1}=0$. Mediante cambio de variables del índice del sumatorio, $m = 2n$, calculamos sólo los términos pares. Esto nos conduce a una redefinición de la función Bessel-real,

$$Ber(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{4n}}{(2n)!^2} \right\} \quad (\text{A.8})$$

donde los valores del coseno vienen dados por $(-1)^n$. Diferenciando la anterior formula, tenemos que

$$Ber'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{2(2n) \frac{x^{4n-1}}{2^{4n}}}{(2n)!^2} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{4n-1}}{(2n)!(2n-1)!} \right\}$$

y sobre esta formula aplicamos cambio de variables en el índice del sumatorio, $n = t+1$, para que el índice empiece en $t = 0$ y renombramos nuevamente el índice t como n , para así manter la misma notación en todos los sumatorios. Por lo tanto, la derivada de una función Bessel-real es,

$$Ber'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^{n+1} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{4n+3}}{(2n+2)!(2n+1)!} \right\}. \quad (\text{A.9})$$

A.2.2. Función Bessel-imaginaria

La fórmula encontrada en literatura es

$$Bei(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sin\left(m\frac{\pi}{2}\right) \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{2m}}{(m)!^2} \right\}, \quad (\text{A.10})$$

donde, inducido por la función seno, se observa que

- a) if $m= 0, 2, 4, \dots \Rightarrow \sin\left(m\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- b) if $m= 1, 5, 9, \dots \Rightarrow \sin\left(m\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- c) if $m= 3, 7, 11, \dots \Rightarrow \sin\left(m\frac{\pi}{2}\right) = -1$

Como consecuencia, $a_{2m=0}$. Mediante cambio de variables del índice del sumatorio, $m = 2n+1$, calculamos sólo los términos impares. Esto nos conduce a una redefinición de la función Bessel-imaginaria,

$$Bei(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{4n+2}}{(2n+1)!^2} \right\}. \quad (\text{A.11})$$

donde los valores del coseno vienen dados por $(-1)^n$. Diferenciando la anterior formula, tenemos que,

$$Bei'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{(2(2n+1)) \frac{x^{4n+1}}{2^{4n+2}}}{(2n+1)!^2} \right\}.$$

Por lo tanto, la derivada de una función Bessel-imaginaria de orden cero es

$$Bei'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4n+1}}{(2n+1)!(2n)!} \right\} \quad (\text{A.12})$$

El interés en calcular funciones kelvin de orden cero y sus derivadas está, en que son a través de ellas que conocemos el perfil de velocidades de Womersley.

A.3. Funciones Kelvin de primer orden

La obtención de expresiones para las funciones Kelvin de primer orden tiene como utilidad la de reescribir el perfil de velocidades de Womersley en función del caudal y no del gradiente de presión. Para ello haremos uso de las distintas funciones Kelvin antes obtenidas y sus derivadas The calculation of the first-order kelvin functions is in the interest due to the calculation of the Womersley profile when is in function of the cross-sectional discharge. The recurrence relations of kelvin functions gives the following expressions

- Función Bessel-real de primer orden

$$Ber_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(Ber'(x) - Bei'(x) \right) \quad (\text{A.13})$$

- Función Bessel-imaginaria de primer orden

$$Bei_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(Ber'(x) + Bei'(x) \right). \quad (\text{A.14})$$

donde $Ber'(x)$ y $Bei'(x)$ han sido definidos en (A.9) y (A.12) respectivamente.

A.4. Funciones módulo y fase

Las funciones módulo y fase permiten escribir en notación polar las funciones Kelvin. Son, simplemente, una conversión de la notación cartesiana a polar. Así, tenemos que, la función $J_\xi(e^{i\frac{3}{4}\pi}x)$, se puede expresar en notación compleja polar,

$$J_\xi(e^{i\frac{3}{4}\pi}x) = M_\xi(x)e^{i\theta(x)} \quad (\text{A.15})$$

donde el módulo se define por la expresión

$$M_\xi(x) = \sqrt{(Ber_\xi(x))^2 + (Bei_\xi(x))^2} \quad (\text{A.16})$$

y la fase viene definida por

$$\theta(x) = \arctan\left(\frac{Bei_\xi(x)}{Ber_\xi(x)}\right). \quad (\text{A.17})$$

Apéndice B

Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier reescribe cualquier función en una suma de funciones sinusoidales y cosinusoidales [16]. Este proceso recibe el nombre de **análisis** porque es obtenido el espectro de la función, o en otras palabras, el análisis de los armónicos de la señal [17]. Esto sucede sólo en caso de funciones periódicas o si queda acotado a un periodo de tiempo. La función continua de la Transformada de Fourier se define

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi sx} dx \quad (\text{B.1})$$

donde $f(x)$ es una función continua en x . El proceso inverso, denominado como la Inversa de la Transformada de Fourier o **síntesis**, es el proceso de ensamblaje de la función a través del espectro de la función [16, 17]. Se define

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi sx} dx \right] e^{i2\pi sx} ds. \quad (\text{B.2})$$

B.1. Transformada Discreta de Fourier

La Transformada Discreta de Fourier —DFT en inglés y TDF en castellano— es el proceso análogo de la Transformada de Fourier para datos discretos. Definamos la Transformada Discreta de Fourier usando una notación cercana a la que aparece en [17]

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{i2\pi kn/N}. \quad (\text{B.3})$$

con x_n un conjunto de datos dado compuesto por muestras igualmente espaciadas. A esta expresión se la denomina la Transformada Discreta de Fourier Directa, en contraposición a la Inversa —IDFT en las siglas en inglés. La IDFT está definida por la siguiente expresión,

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-i2\pi kn/N}. \quad (\text{B.4})$$

Introducimos W^{nk} y W^{-nk} , que son denominados factores de rotación o en inglés, «twiddle factors», donde

$$W = e^{i2\pi/N}. \quad (\text{B.5})$$

Usando esta notación, la ecuación (B.3) se transforma en

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{i2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n (e^{i2\pi/N})^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W^{nk}. \quad (\text{B.6})$$

y en el proceso inverso,

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k W^{-nk}, \quad (\text{B.7})$$

La TDF es evaluada en este trabajo a través de algoritmo FFT, o Transformada Rápida de Fourier. El FFT es un algoritmo que optimiza el cálculo de manera eficiente. Dentro del libro [34] encontramos este algoritmo del modo en el que hacemos uso de él.

B.2. TDF de datos reales

Para un conjunto de datos reales, $x_n = 0 : N - 1$, compuesto por muestras igualmente espaciadas, introduzcamos algunas de las propiedades de la TDF de utilidad en el problema. Considerando que el conjunto de datos, x_n , se repite de manera periódica, la salida de la TDF también se repetirá con periodicidad N [17–19]. Así,

$$X_k = X_{k+N}. \quad (\text{B.8})$$

La salida de datos de la TDF será de datos con números complejos. Para una entrada de datos reales, la salida de la transformada tendrá simetría conjugada [17–19]. Matemáticamente, es

$$\Re\{F_{-k}\} = \Re\{F_k\} \quad \text{y} \quad \Im\{F_{-k}\} = -\Im\{F_k\}. \quad (\text{B.9})$$

La notación que se emplea para la conjugada de cada dato de salida X_k , será

$$X_k^* = X_{-k}. \quad (\text{B.10})$$

Ahora, la TDF inversa puede ser dividida en cuatro componentes [17],

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k W^{-nk} \\ &= \frac{X_0}{N} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} X_k W^{-nk} + \frac{1}{N} \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{N-1} X_k W^{-nk} + \frac{X_{N/2}}{N} \cos(n\pi). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

En el tercer sumatorio de la ec. (B.11), el índice corre de $n = \frac{N}{2} + 1..N - 1$. Usando la propiedad de la periodicidad antes mencionada, se puede comprobar que,

$$\sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{N-1} X_k W^{-nk} = \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{-1} X_k W^{-nk} = \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} X_{-k} W^{nk} \quad (\text{B.12})$$

Como nuestro conjunto de datos de entrada es real, es posible expresar el resultado anterior a través de la conjugado por la propiedad de simetría conjugada de la TDF,

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} X_{-k} W^{nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} X_k^* W^{nk}. \quad (\text{B.13})$$

Por consiguiente, la ec. (B.11) se convierte en

$$x_n = \frac{X_0}{N} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \{X_k W^{-nk} + X_k^* W^{nk}\} + \frac{X_{N/2}}{N} \cos(n\pi). \quad (\text{B.14})$$

Hacemos notar que los factores W^{-nk} y W^{nk} son números complejos. Los coeficientes X_k , al ser el conjunto de datos de entrada reales, son números complejos, tal que $X_k = \Re\{X_k\} + i\Im\{X_k\}$. Desarrollemos el término dentro del sumatorio de la ec. (B.14),

$$\begin{aligned} X_k W^{-nk} + X_k^* W^{nk} &= (\Re\{X_k\} + i\Im\{X_k\}) (\cos(2\pi nk/N) - i \sin(2\pi nk/N)) \\ &\quad + (\Re\{X_k^*\} + i\Im\{X_k^*\}) (\cos(2\pi nk/N) + i \sin(2\pi nk/N)), \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

donde X_k^* es el complejo conjugado. Así pues,

$$\begin{aligned} X_k W^{-nk} + X_k^* W^{nk} &= (\Re\{X_k\} + i\Im\{X_k\}) (\cos(2\pi nk/N) - i \sin(2\pi nk/N)) \\ &\quad + (\Re\{X_k\} - i\Im\{X_k\}) (\cos(2\pi nk/N) + i \sin(2\pi nk/N)) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Una vez desarrollada la ecuación de arriba, el sumatorio queda,

$$\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \{X_k W^{-nk} + X_k^* W^{nk}\} = 2 \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \{\Re\{X_k\} \cos(2\pi nk/N) + \Im\{X_k\} \sin(2\pi nk/N)\}. \quad (\text{B.17})$$

Y la ecuación de síntesis para la DFT para datos reales queda,

$$x_n = \frac{X_0}{N} + \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \{\Re\{X_k\} \cos(2\pi nk/N) + \Im\{X_k\} \sin(2\pi nk/N)\} + \frac{X_{N/2}}{N} \cos(n\pi). \quad (\text{B.18})$$

donde la parte imaginaria se cancela.

B.3. Aproximación trigonométrica usando la TDF

Dado un conjunto de datos reales y representado estos datos una señal arbitraria, existen varias maneras de obtener una función que interpole esos datos. Una de ellas, y la que es de nuestro interés, es la de utilizar la TDF para interpolar este conjunto de datos. En §B.2 aparece la ecuación de síntesis para datos reales, (B.18), la cual funciona como una serie de Fourier para un dominio del tiempo continuo. Los modos armónicos de la señal se calculan a través de la ecuación de síntesis, y la suma de ellos en un punto, retorna el valor original de los datos de entrada. Si reescribimos esta ecuación,

$$x_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} \{a_n \cos(2\pi nk/N) + b_n \sin(2\pi nk/N)\} + \frac{a_{N/2}}{2} \cos(n\pi). \quad (\text{B.19})$$

donde los coeficientes del sumatorio son

$$a_n = \frac{2}{N} \Re\{X_k\}, \quad b_n = \frac{2}{N} \Im\{X_k\} \quad (\text{B.20})$$

siendo a_0 y $a_{N/2}$

$$a_0 = \frac{2}{N}X_0, \quad a_{N/2} = \frac{2}{N}X_{N/2}. \quad (\text{B.21})$$

Usando la definición del coseno de la diferencia de dos ángulos

$$\cos(A - B) = \cos B \cos A + \sin B \sin A,$$

la ecuación en (B.19) adquiere mayor compacidad.

$$x_n = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} c_n \cos(2\pi nk/N - \phi_n) + \frac{c_{N/2}}{2} \cos(n\pi) \quad (\text{B.22})$$

donde los nuevos coeficientes son

$$\begin{aligned} c_n &= (a_n^2 + b_n^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{N} (\Re^2 \{X_k\} + \Im^2 \{X_k\})^{\frac{1}{2}}, \\ \phi_n &= \arctan \frac{b_n}{a_n} = \arctan \frac{\Im \{X_k\}}{\Re \{X_k\}}. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Si deseamos transformar el resultado para cada valor de x_n para (B.22) en una función continua en t , $x(t)$, debemos considerar que, el índice k , cambia discretamente a $k + 1$, teniendo correspondencia ese cambio con el tiempo de muestreo, T_s . Entonces, pasar de una escala de tiempo discreta a cargo del índice n a otra, dependiente del tiempo, t , es cuestión de aplicar un cambio lineal de escala. Por consiguiente,

$$x(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} c_n \cos\left(\frac{2\pi k}{N} \frac{t}{T_s} - \phi_n\right) + \frac{c_{N/2}}{2} \cos\left(\pi \frac{t}{T_s}\right) \quad (\text{B.24})$$

donde las frecuencias angulares armónicas son

$$\omega(k) = \frac{2\pi k}{NT_s}. \quad (\text{B.25})$$

Apéndice C

Womersley: Algoritmos para su implementación

C.1. Introducción

In order to define the algorithms required in the analysis of a Womersley velocity profile and its application to the computation of friction, we define the discrete time variable, \hat{t} ,

$$\hat{t} = 0, T_s, 2T_s, \dots$$

with T_s the sampling time. A «sampling cycle» (SC), $t^{(m)} - t^{(m-1)}$, is defined as

$$t^{(m)} = \{0, T_s, 2T_s, 3T_s \dots (N-1)T_s\} + t^{(m-1)}$$

where $(N-1)T_s$ is the period of a heartbeat with N is the number of samples done in every SC. Each SC is labeled with index m , being $1 \leq m \leq M$ where M is a parameter of the program. Let use $m = 0$ only on those arrays which save a state previous to the first SC.

We have a finite volume representing a section of an arbitrary vessel which is situated in the grid that models a system of one or more vessels by its discrete position \hat{x} . During a generic m SC the variation of the radius is described changing in the discrete time

$$R^{(m)}(\hat{x}, \hat{t}) = [R_0^{(m)} \dots R_{N-1}^{(m)}]$$

In same fashion, vector $q^{(m)}$, defined as

$$q^{(m)}(\hat{x}, \hat{t}) = [q_0^{(m)} \dots q_{N-1}^{(m)}]$$

which is the array that contains the value of the cross-sectional discharge in every sample time in $t^{(m)}$. Computation of both cross-sectional area and discharge during $t^{(m)}$ require the evaluation of the friction f and convective term κ at the same sampling times. That is, we need the following vectors:

$$f^{(m)}(\hat{x}, \hat{t}) = [f_0^{(m)} \dots f_{N-1}^{(m)}] \quad \kappa^{(m)}(\hat{x}, \hat{t}) = [\kappa_0^{(m)} \dots \kappa_{N-1}^{(m)}]$$

It must be considered that the numerical solver used here evolves the solution in time, and vectors $q^{(m)}$ and $R^{(m)}$ can not be completed until the novel SC is finished. The strategy followed here approximates vector $f^{(m)}$ and $\kappa^{(m)}$ using the interpolating coefficients in (B.24), involving the complete set of values for both area and discharge, $q^{(m-1)}$ and $R^{(m-1)}$, stored in the previous SC, approximating

$$f^{(m)} \approx f^{(m-1)}, \quad \kappa^{(m)} \approx \kappa^{(m-1)}.$$

All the commands that allow these calculations are placed in algorithm ???. First step requires the use of algorithm ??. From $q^{(m)}[i]$, with $1 \leq i \leq N$, we will obtain a set of harmonics coefficients provided by the Fourier transform that can be also used to interpolate the original data.

This transformation is done in two steps, first step, converting array $q^{(m)}[i]$ of real data in a new array of double length, $x^{(m)}[j]$, with $1 \leq j \leq 2N$ containing real and imaginary part. The imaginary part is equal to zero,

$$(x[j], x[j + 1]) := (q[i], 0).$$

Applying the fast Fourier transformation (FFT), placed in algorithm ???, over vector $x^{(m)}[j]$, then

$$X^{(m)}[j] = FFT(x^{(m)}[j]),$$

with $1 \leq j \leq 2N$, that contains the spectral coefficients for each frequency. For a paired term corresponding with an arbitrary frequency, $(X^{(m)}[j], X^{(m)}[j + 1])$, the odd term $X^{(m)}[j]$ will be the real compound of the spectral coefficient and the even term $X^{(m)}[j + 1]$ will correspond to the imaginary compound of the spectral coefficient. Taking this into account and supported by the mathematical development in §B.3, we can obtain the Fourier Series coefficients

$$c[k], \phi[k], \omega[k], \quad \text{with } 1 \leq k \leq N/2 + 1$$

that describe the trigonometrical series that interpolates the data set, and can be computed using equations in (B.23). It must be stressed that from the N starting sampling points, the Fourier series obtained has $\frac{N}{2} + 1$ modes.

Womersley numbers, $\alpha[k] = R[i]\sqrt{\omega[k]}/\nu$ where $\omega[k]$ is the harmonic angular frequency, are the argument of the procedure described in algorithm ??. With $c[k]$, $\phi[k]$, $\omega[k]$ and $\alpha[k]$ geometrical functions, functions (4.33) and (4.34) can be calculated for harmonic modes ranging from $k = 1$ to $k = N/2$. The algorithm ??? commands next steps.

Function kelvinmodulus, in algorithm ???, call the Womersley number two times, first time to obtain the zero order kelvin modulus, and the second time to obtain the first order kelvin function. With that numbers, $h_{10}[k]$ can be obtained. In an analog process, $\delta_{10}[k]$ is obtained calling two times function kelvinphase for order 1 and 0 where $\alpha[k]$ is also the argument. It is found in algorithm ??. Geometrical functions $M_{10}[k]$ and $\epsilon_{10}[k]$ are function of $h_{10}[k]$ and $\delta_{10}[k]$.

For each k mode, a friction and kappa term are obtained. The combination of geometrical functions with the harmonic coefficients, allow us to calculate the harmonic terms of κ and f , in equations (4.41) and (4.53), named as κ_k and f_k respectively. Thus,

$$f = \sum_{k=1}^{N/2+1} f_k, \quad \kappa = \sum_{k=1}^{N/2+1} \kappa_k.$$

The constant mode, following the notation in the algorithm, $k = 1$, requires especial attention. In this particular case, friction and convective term are calculated using the Poiseuille model. In section §4.3.2, eq. (4.6) and eq.(4.7) gives the expression used for poiseuille terms within the algorithm. These calculations must be repeated $\frac{N}{2} + 1$ within a loop.

C.2. Kelvin functions

The iterative sequence for the Kelvin function known as Bessel Real function is

$$Ber(\alpha) = \left[\left[\left[\frac{(-1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4}{(2n)^2(2n-1)^2} + 1 \right] \frac{(-1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4}{(2n-2)^2(2n-3)^2} + 1 \right] \cdots \right] \frac{(-1)\left(\frac{\alpha}{2}\right)^4}{2^2 1^2} + 1 \quad (\text{C.1})$$

where n , is the number of iterations done. Therefore, the resulting algorithm is

Calculation of the Bessel Real function for a given argument

```

1: function BER( $\alpha$ )
2:   Ber:=1 ▷ Initialize
3:   for k=20..1 do
4:     Ber := Ber * (-1) * ( $\alpha/2$ )4 / ((2k)2 (2k - 1)2) + 1
5:   end for
6: end function

```

The iterative sequence for the Kelvin function known as Bessel Imaginary function is

$$Bei(\alpha) = \left[\left[\left[\left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \frac{(-1) \left(\frac{\alpha}{2} \right)^4}{(2n+1)^2 (2n)^2} + \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \right] \frac{(-1) \left(\frac{\alpha}{2} \right)^4}{(2n-1)^2 (2n-2)^2} + \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \right] \cdots \right] \frac{(-1) \left(\frac{\alpha}{2} \right)^4}{3^2 2^2} + \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \quad (\text{C.2})$$

where n , the number of iterations done. Therefore, the resulting algorithm is

Calculation of the Bessel Imaginary function for a given argument

```

1: function BEI( $\alpha$ )
2:   Bei := ( $\alpha/2$ )2 ▷ Initialize
3:   for k=20..1 do
4:     Bei:=Bei*(-1) * ( $\alpha/2$ )4 / { (2k+1)2 (2k)2 } + ( $\alpha/2$ )2
5:   end for
6: end function

```

Derivatives of zero-order Bessel functions

The iterative sequence for the derivative of the Bessel-Real function is

$$Ber'(\alpha) = \left[\left[\left[- \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^3 \right\} \left\{ \frac{(-1) \left(\frac{\alpha}{2} \right)^4}{(2n+2)(2n+1)^2(2n)} \right\} - \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^3 \right\} \right] \left\{ \frac{(-1) \left(\frac{\alpha}{2} \right)^4}{(2n)(2n-1)^2(2n-2)} \right\} - \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^3 \right\} \right] \cdots \right] \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \quad (\text{C.3})$$

and the resulting algorithm is

Calculation of the derivative Bessel Real function for a given argument

```

1: function DER_BER( $\alpha$ )
2:   der_ber_inicial := - ( $\alpha/2$ )3 / 2 ▷ Initialize
3:   for k=20..1 do
4:     der_ber := der_ber * (-1) / { (2k+2) (2k+1)2 (2k) } * ( $\alpha/2$ )4 + der_ber_inicial
5:   end for
6: end function

```

The iterative sequence for the derivative of the Bessel-imaginary function is

$$Bei'(\alpha) = \left[\left[\left[\left(\frac{\alpha}{2} \right) \frac{(-1) \left(\frac{\alpha}{2} \right)^4}{(2n+1)^2 (2n)^2 (2n-1)} + \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right] \frac{(-1) \left(\frac{\alpha}{2} \right)^4}{(2n-1)^2 (2n-2)^2 (2n-3)} + \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right] \cdots \right] \frac{(-1) \left(\frac{\alpha}{2} \right)^4}{3 \cdot 2^2 \cdot 1} + \left(\frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{C.4})$$

and the resulting algorithm is

Calculation of the derivative Bessel Imaginary function for a given argument

```

1: function DER_BEI( $\alpha$ )
2:   der_bei_inicial:=( $\alpha/2$ ) ▷ Initialize
3:   for k=20..1 do ▷ k-index has to be end in a pair number
4:     der_bei:=derBei*(-1)/{(2k + 1)(2k)(2k - 1)} * ( $\alpha/2$ )4 + der_bei_inicial
5:   end for
6: end function

```

Modulus and Phase calculations

We need to calculate the Modulus and phase functions of the kelvin functions seen above, which is the way to write them in polar notation of. Algorithms below only allow to calculate zero order, when $p = 0$, and first order modulus and phase functions, when $p = 1$. When we have to calculate a first order kelvin functions, we need to call algorithm ?? and algorithm ?. Thus, the algorithm to calculate the modulus is

Calculation of the modulus for a given Bessel function with complex argument.

```

1: function KELVINMODULUS( $p, \alpha$ )
2:   if  $p=0$  then
3:     a:=KelvinBer( $\alpha$ ) ▷ a, real part
4:     b:=KelvinBei( $\alpha$ ) ▷ b, imaginary part
5:   else if  $p=1$  then
6:     a :=  $\sqrt{2}/2$  (derKelvinBer( $\alpha$ ) - derKelvinBei( $\alpha$ ))
7:     b :=  $\sqrt{2}/2$  (derKelvinBer( $\alpha$ ) + derKelvinBei( $\alpha$ ))
8:   end if
9:   kelvinmodulus := ( $a^2 + b^2$ )1/2
10: end function

```

and the algorithm to calculate the phase

Calculation of the phase for a given Bessel function with complex argument.

```

1: function KELVINPHASE( $p, \alpha$ )
2:   if  $p=0$  then
3:     a:=KelvinBer( $\alpha$ ) ▷ a, real part
4:     b:=KelvinBei( $\alpha$ ) ▷ b, imaginary part
5:   else if  $p=1$  then
6:     a :=  $\sqrt{2}/2$  (derKelvinBer( $\alpha$ ) - derKelvinBei( $\alpha$ ))
7:     b :=  $\sqrt{2}/2$  (derKelvinBer( $\alpha$ ) + derKelvinBei( $\alpha$ ))
8:   end if
9:   kelvinphase:=arctan (b/a);
10: end function

```

C.3. Cross-section calculations

Geometrical functions appear in order to calculate the main function that define the womersley velocity profile. These functions are calculated in the next algorithm

The cross-sectional discharge (q) and the Area of the vessel are the variables of the equations. So $q(n)$ will be a n -dimension array of the value of the cross-sectional discharge in n points. This data must be processed to obtain the distinct compounds than are part of it.

The friction term in an arbitrary section depends on the geometry of the section and the harmonic

Procedure to obtain the Womersley geometrical functions.

```

1: procedure GEOMETRICAL_FUNCTIONS( $\alpha, h_{10}, M_{10}, \delta_{10}, \epsilon_{10}$ )
2:    $h_{10} := (2/\alpha) \cdot \text{kelvinmodulus}(1, \alpha) / \text{kelvinmodulus}(0, \alpha)$ 
3:    $\delta_{10} := 3\pi/4 - \text{kelvinphase}(1, \alpha) + \text{kelvinphase}(0, \alpha)$ 
4:    $M_{10} := (1 + h_{10}^2 - 2 \cdot h_{10} \cdot \cos(\delta_{10}))^{\frac{1}{2}}$ 
5:    $\epsilon_{10} := \arctan(h_{10} \cdot \sin \delta_{10} / (1 - h_{10} \cdot \cos \delta_{10}))$ 
6: end procedure

```

Calculation of the harmonic coefficients.

Require: Length(q) must be a power of 2

```

1: procedure HARMONIC_COEFFICIENTS( $T_s, q[i], N, c[i], \phi[i], \omega[i]$ )
2:    $N := \text{length}(q[i])$  ▷ Number of samples
3:    $j \leftarrow 1$ 
4:   for  $i \leq 2N$  do ▷ Pad with zeros the imaginary part of the number
5:      $x[j] := q[i]$ 
6:      $x[j+1] := 0$ 
7:      $j := j + 2$ 
8:   end for
9:    $X[j] := \text{FFT}(x[j], N)$  ▷ Application of the Fast Fourier Transform algorithm
10:   $j \leftarrow 1$ 
11:  for  $i=1..(N/2+1)$  do
12:     $c[i] := 2 \cdot (X[j]^2 + X[j+1]^2)^{\frac{1}{2}} / N$ 
13:    if  $i = 1$  then
14:       $c[i] := c[i] / 2$ 
15:    end if
16:    if  $i = (N/2 + 1)$  then
17:       $c[i] := c[i] / 2$ 
18:    end if
19:     $\phi[i] := \text{atan2}(X[j+1], X[j])$  ▷ Phase lag of the harmonic wave
20:     $\omega[i] := (2\pi) / (NT_s) \cdot i$  ▷ Harmonic angular frequency
21:     $j := j + 2$ 
22:  end for
23: end procedure

```

frequencies of the circulating flow. Because friction is a force, it can be defined as

$$f = \sum_i f_i \quad (\text{C.5})$$

where i is the harmonic compound of the friction. Analog case is what happens with the calculation of the kappa coefficient, where there as many kappa coefficient as frequencies has the circulating flow. In the algorithm below it is written both cases.

Calculation of the friction term and Kappa value in a specific cross section of the vessel for an harmonic frequency given in a specific cross-section.

```

1: procedure XSECTION_CALCULATION( $R, f, kappa$ )           ▷ calc.  $\alpha$  belonging to its harmonic
2:   harmonic_coefficients( $T_s, q[ ], N, coef[ ], phi[ ], omega[ ]$ )
3:   for  $i=1..(N/2 + 1)$  do
4:     if  $i=1$  then
5:        $f := -(8\mu/R^2) \cdot coef[i]$            ▷ friction term associated to a poiseuille-shape profile
6:        $kappa:=4/3$                              ▷ convective term associated to a poiseuille-shape profile
7:     else
8:        $\alpha := R\sqrt{omega[i]/\nu}$ 
9:       geometrical_functions( $\alpha, h_{10}, M_{10}, \delta_{10}, \epsilon_{10}$ )
10:       $f_k := \mu\alpha^2/R^2 \cdot \{h_{10}/M_{10}\} c[i] \cdot \sin(omega[i] \cdot t - \phi[i] - \delta_{10} - \epsilon_{10})$ 
11:       $f := f + f_k$ 
12:       $\kappa_k :=$ 
13:       $(1 + \cos(3\pi/4)/\alpha - 2 \cdot h_{10} \cdot \cos(\delta_{10}) + (\alpha/4)h_{10}^2 \cdot \cos(3\pi/4 - 2\delta_{10})) \cdot \cos(2\epsilon_{10})/M_{10}^2$ 
14:       $+ (-\sin(3\pi/4)/\alpha + 2 \cdot h_{10} \cdot \sin \delta_{10} + (\alpha/4)h_{10}^2 \sin(3\pi/4 - 2\delta_{10})) \cdot (\sin 2\epsilon_{10}/M_{10}^2)$ 
15:       $\kappa := \kappa + \kappa_k$ 
16:     end if
17:   end for
18: end procedure

```

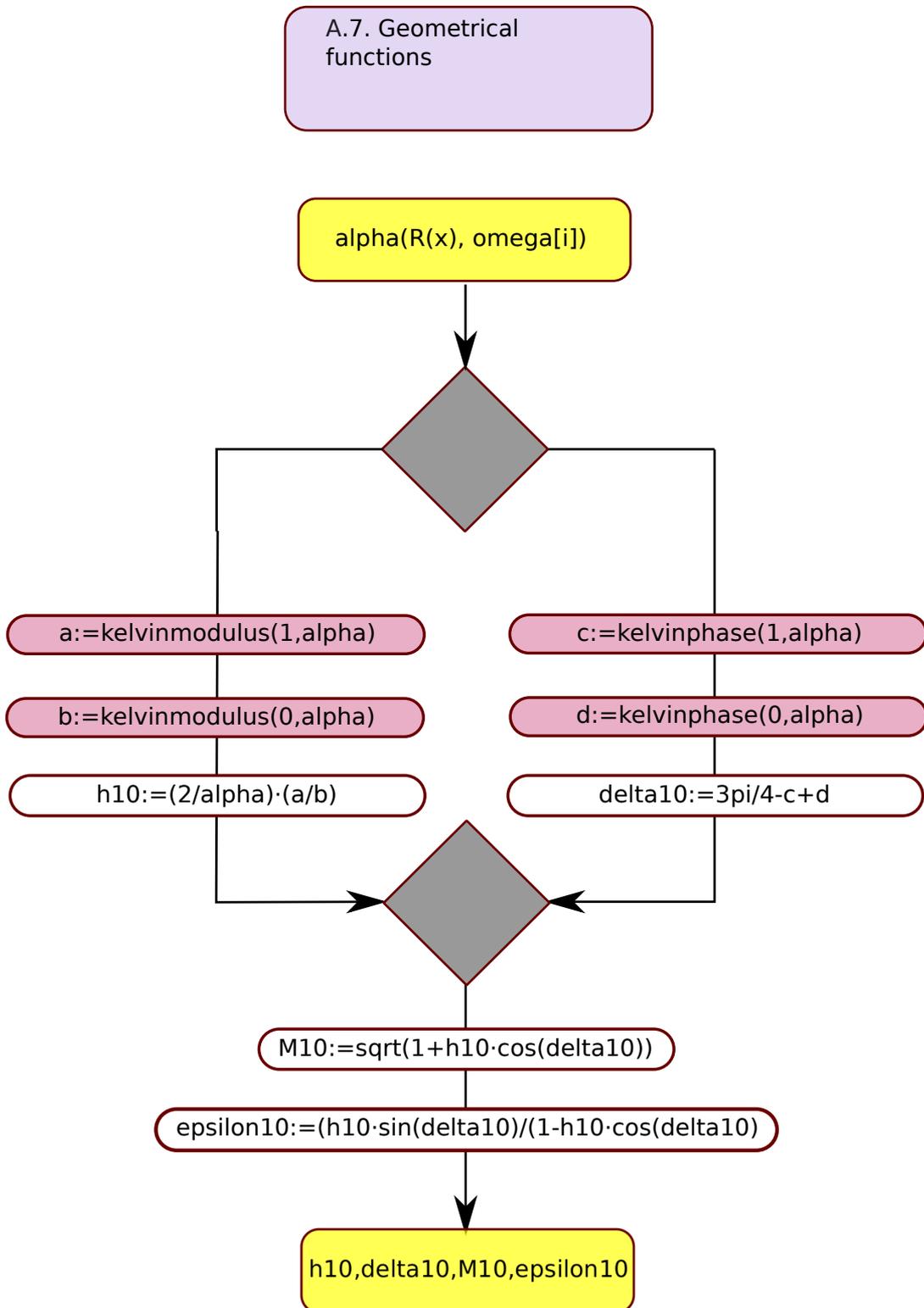


Figura C.1: Algorithm ??. Geometrical functions.

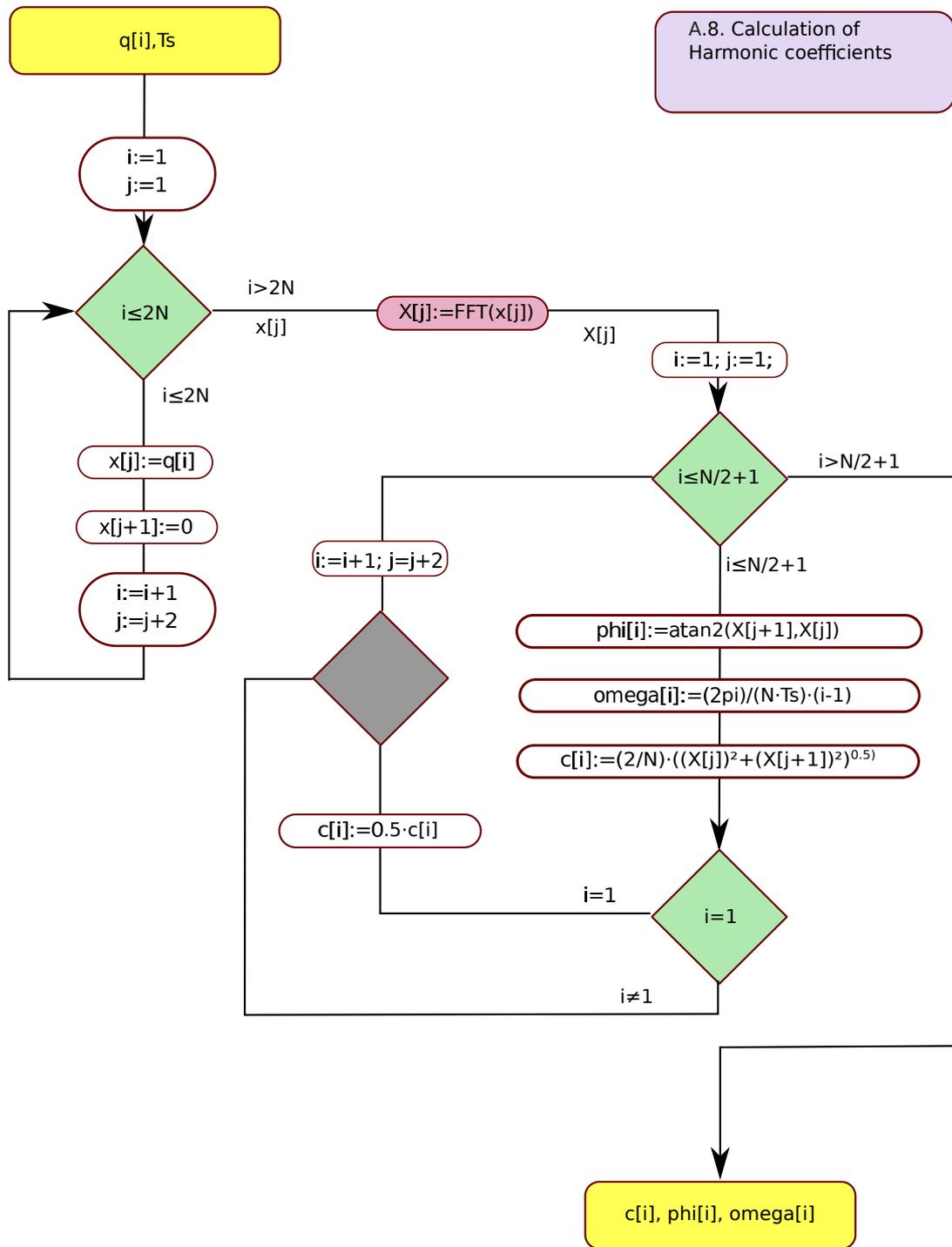


Figura C.2: Algorithm ??. Calculation of the harmonic coefficients.

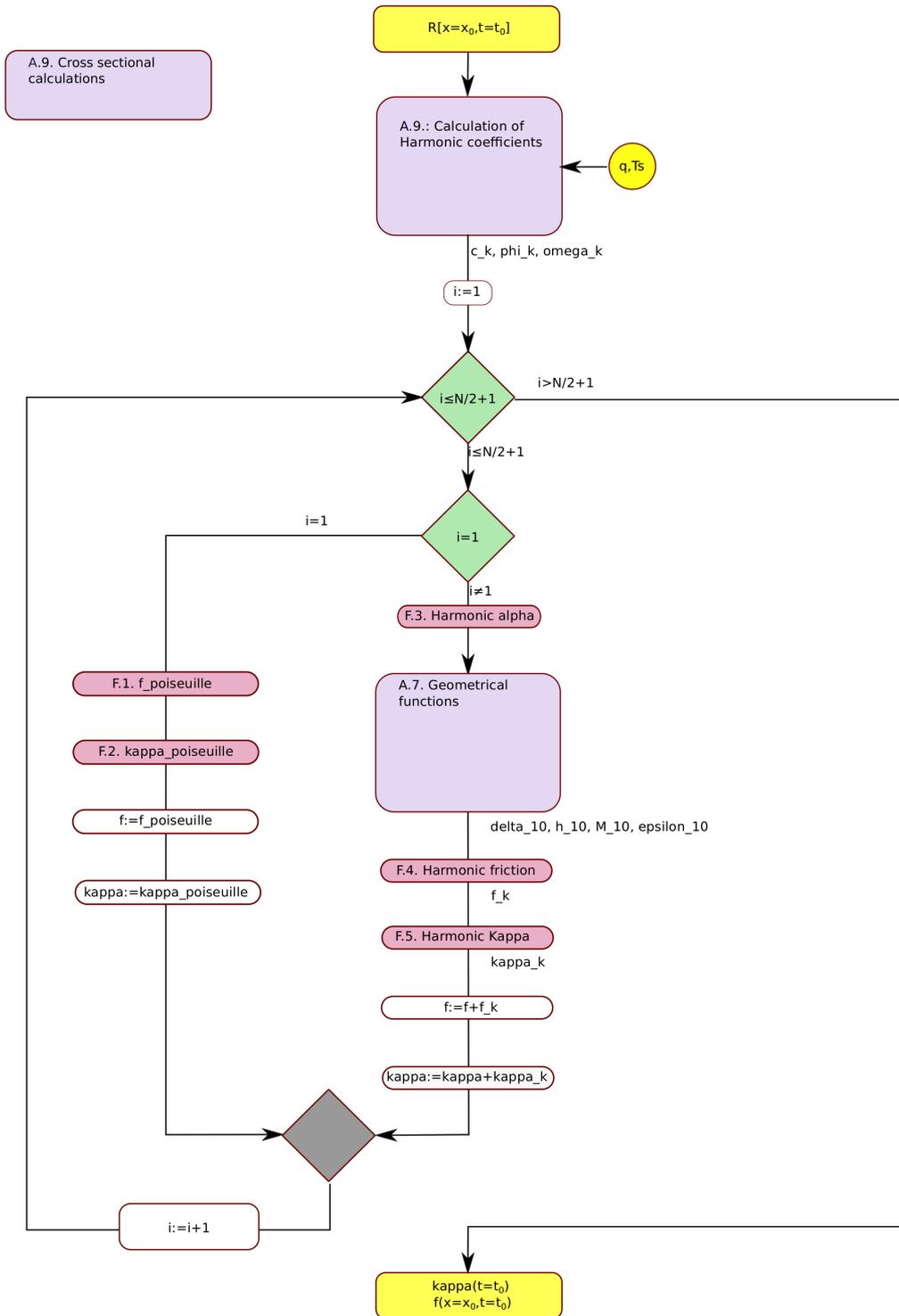


Figura C.3: Algorithm 9. Cross-sectional calculations.

Apéndice D

Cálculos auxiliares para perfiles de velocidad

D.1. Poiseuille: flujo estacionario en vaso de pared rígida

El médico francés J.L.M. Poiseuille in 1840 introdujo la primera aproximación matemática sobre el comportamiento de la circulación sanguínea. Las hipótesis del flujo son, unidireccional, axisimétrico, estacionario e inducido por un gradiente de presión constante. Estas dos últimas condiciones descritas con

$$\frac{\partial \odot}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -p_x.$$

y sujeto a la condición de flujo axisimétrico y de unas condiciones de contorno y geométricas ,

$$\partial v_x / \partial r |_{r=0} = 0, \quad v(r = D/2) = 0$$

asumiendo la condición de no deslizamiento del fluido en la pared. Con esas condiciones, re-escribimos la ec. (2.7):

$$\frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = -p_x \quad (\text{D.1})$$

Integrando (D.1) dos veces y aplicando condiciones de contorno, obtenemos:

$$v_x(r) = \frac{p_x}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad \text{for } r \in (0, R] \quad (\text{D.2})$$

donde R es el radio del perímetro del vaso, o lumen. Por tener velocidad sólo en uno de los ejes, simplificaremos la notación llamando $v_x = v$ e introduciremos el radio adimensional, $y = r/R$. Por lo tanto, el perfil de Poiseuille queda de la siguiente forma

$$v(y) = \frac{p_x}{4\mu} R^2 (1 - y^2) \quad \text{para } y \in (0, 1). \quad (\text{D.3})$$

El cálculo del caudal en la sección transversal del vaso, para radio adimensional y , se realiza con la siguiente expresión,

$$Q = \int_A v dA = \int_A v(r) r d\theta dr = \int \int v(y) R y d\theta R dy \quad (\text{D.4})$$

el cual, para el caso de flujo de Poiseuille, nos da

$$Q = 2\pi R^2 \int \frac{p_x}{4\mu} R^2 (1 - y^2) y dy = \frac{2\pi p_x}{4\mu} R^4 \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi R^4 p_x}{8\mu}. \quad (\text{D.5})$$

El perfil de velocidades de Poiseuille, en función de Q , queda

$$v(y) = \frac{2Q}{\pi R^2} (1 - y^2) \quad \text{para } y \in (0, 1). \quad (\text{D.6})$$

D.2. Stokes: obtención del parámetro ϕ_0

El perfil de capa viscosa de Stokes es un perfil hipotético que formuló Olufsen [8] para grandes y arterias y medianas para conseguir un perfil que se adaptara a la existencia de una capa viscosa en la pared. Supone la aceptación de una región central donde el perfil de velocidad tiene valor constante y una región lateral o lindante con la pared del vaso, con valores decrecientes e una progresión lineal hasta el valor nulo en la pared por la condición de no deslizamiento.

$$v(y, x, t) = \begin{cases} \phi_0 \bar{v} & \text{for } y \leq (1 - \delta_s) \\ \frac{\phi_0}{\delta_s} (1 - y) \bar{v} & \text{for } (1 - \delta_s) < y < 1 \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

donde ϕ_0 , función constante en la sección transversal, \bar{v} , velocidad promedio en la sección transversal y δ_s , espesor adimensional de la capa viscosa. En [11], Van de Vosse clasifica el perfil de capa de Stokes en la categoría de perfil hipotético e introduce la función ϕ_0 . Como declara Olufsen, \bar{u}_x es la velocidad axial en la región central, y usando la notación de Van de Vosse, $\bar{u}_x = \phi_0 \bar{v}$. Cumpliendo el balance de masa, se garantiza un valor de ϕ_0 correcto. Por ellos, se procede a calcular el caudal, Q , mediante la integral de área de la ecuación (D.7).

$$Q = 2\pi R^2 \int_0^{1-\delta_s} \phi_0 \bar{v} y dy + 2\pi R^2 \int_{1-\delta_s}^1 \frac{\phi_0}{\delta_s} (1 - y) \bar{v} y dy \quad (\text{D.8})$$

Por la definición de caudal para sección circular, $Q = \pi R^2 \bar{v}$. Si se utiliza el parámetro $y_c = 1 - \delta_s$, se simplifica las operaciones

$$\int_0^{y_c} \phi_0 \bar{v} y dy + \int_{y_c}^1 \frac{\phi_0}{1 - y_c} (1 - y) \bar{v} y dy = \frac{1}{2} \quad (\text{D.9})$$

donde la integral en la región central

$$\int_0^{y_c} \phi_0 \bar{v} y dy = \phi_0 \frac{y_c^2}{2} \quad (\text{D.10})$$

y la integral en la capa viscosa

$$\int_0^{1-\delta_s} \frac{\phi_0}{\delta_s} (1 - y) \bar{v} y dy = \frac{\phi_0}{1 - y_c} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{y_c}^1 = \frac{\phi_0}{6} [1 + y_c - 2y_c^2] \quad (\text{D.11})$$

Reemplazando el valor de las integrales en la ecuación (D.9)

$$3 = 3\phi_0 y_c^2 + \phi_0 (1 + y_c - 2y_c^2) \quad (\text{D.12})$$

Despejando ϕ_0 en función de y_c ,

$$\phi_0 = \frac{3}{1 + y_c + y_c^2} \quad (\text{D.13})$$

y en función de δ_s

$$\phi_0 = \frac{3}{3 - 3\delta_s + \delta_s^2}, \quad (\text{D.14})$$

con δ_s el espesor de capa viscosa.

D.3. Aproximado: derivación del perfil

El perfil Aproximado fue desarrollado e implementado por Bessems en citebessems2007, donde amplía el trabajo de Hughes and Lubliner [13] y realiza una variación sobre el concepto de perfil hipotético. Ya Olufsen [8] había propuesta un perfil segmentado bajo el la hipótesis de una capa viscosa. Pero su hipótesis impone las condiciones sobre el perfil. Bessems, asume la capa viscosa utilizada por Olufsen e impone las condiciones sobre la ecuación gobernante del flujo. La hipótesis supone dos regiones del flujo, un núcleo central dominado por las fuerza de inercia, y una zona adyacente a la pared del vaso donde domina la fricción. Esta hipótesis induce dos regiones en la sección, con una ecuación gobernante simplificada para cada región. La ecuación que gobierna el flujo, ya calculada en la sección §2, es

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right]$$

Cuando se asume flujo dominado por la inercia es

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

expresión que conlleva un perfil plano en la sección transversal. En el límite cuando $r \rightarrow R$, $\lim_{r \rightarrow R} \partial_t v = 0$, lo que conduce a la siguiente expresión,

$$\frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right] = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{D.15})$$

siendo consistente con la hipótesis previa de flujo dominado por la fricción, y que da como resultado la expresión de la ecuación de flujo Poiseuille, restringida a la región lindante con la pared del vaso. En el límite entre regiones, se supondrá equilibrio de fuerzas,

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} \approx \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right]. \quad (\text{D.16})$$

Realizando un análisis dimensional del equilibrio,

$$[\rho_0 V \omega_0] \rho^* \frac{\partial v^*}{\partial t^*} = \left[\frac{\mu_0}{\delta} \frac{1}{\delta} \frac{\delta V}{\delta^2} \right] \frac{\mu^*}{r^*} \left[\frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} \right) \right] \quad (\text{D.17})$$

donde $\rho = \rho_0 \rho^*$, $\mu = \mu_0 \mu^*$, $t = t^*/\omega$ y $r = r^* \delta$. El parámetro dimensional δ es el espesor de capa viscosa y por tanto, determina la región de aplicación de la ecuación (D.15). El orden de magnitud de los parámetros dimensionales de la ecuación es el mismo, así que,

$$O(\rho_0 V \omega_0) \sim O\left(\frac{V}{\delta^2}\right) \Rightarrow \delta \sim O\left(\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0 \omega_0}}\right). \quad (\text{D.18})$$

Si se considera el espesor de capa viscosa adimensional, $\delta_s = \delta/R$, y se hace uso de la definición de número de Womersley, entonces

$$\delta \sim O(\alpha^{-1}). \quad (\text{D.19})$$

Considérese la obtención de un perfil de velocidad para un dominio dividido en dos regiones. Se define la ecuación adimensional para la región viscosa, $y \in y_c, 1$, donde $y_c = 1 - \delta_s$. Considérese también que $p_x = -\partial_x P$. La ecuación (D.15) queda del siguiente modo

$$\frac{\mu}{Ry} \frac{1}{R} \frac{d}{dy} \left(Ry \frac{1}{R} \frac{dv_x}{dy} \right) = -p_x, \quad \forall y \in [y_c, 1). \quad (\text{D.20})$$

y para la región central, se define directamente un valor constante para el perfil de velocidad, tal que

$$v(y) = v_c \quad \forall y \in [0, y_c).$$

Para obtener el perfil de velocidad completo, se tiene que resolver la ecuación (D.20) y obtener el valor de v_c en función del resto de variables, a través de la ecuación de conservación de la masa. Se inicia el primer paso, integrar una vez la ecuación (D.20),

$$\int d \left(y \frac{dv_x}{dy} \right) = - \int \frac{p_x R^2}{\mu} dy \quad (\text{D.21})$$

lo cual da

$$\left(y \frac{dv_x}{dy} \right) = - \int \frac{p_x R^2}{\mu} y dy = - \frac{p_x R^2}{\mu} \frac{y^2}{2} + C_1. \quad (\text{D.22})$$

Integrando una segunda vez,

$$\int dv_x = \int \left[- \frac{p_x R^2}{\mu} \frac{y}{2} + \frac{C_1}{y} \right] dy \quad (\text{D.23})$$

lo cual da

$$v_x = - \frac{p_x R^2}{\mu} \frac{y^2}{4} + C_1 \ln y + C_2. \quad (\text{D.24})$$

Aplicando condiciones de contorno en la pared del vaso en $y = 1$ y en la frontera entre regiones, en $y = y_c$,

$$v_x(y = 1) = 0 \implies C_2 = \frac{p_x R^2}{4\mu} \quad v_x(y = y_c) = v_c \implies C_1 = \frac{v_c}{\ln y_c} - \frac{p_x R^2}{4\mu} \frac{(1 - y_c^2)}{\ln y_c} \quad (\text{D.25})$$

Sustituyendo los valores de las constante en la ec. (D.24)

$$v_x = \frac{p_x R^2}{4\mu} (1 - y^2) + \left(v_c - \frac{p_x R^2}{4\mu} (1 - y_c^2) \right) \frac{\ln y}{\ln y_c} \quad (\text{D.26})$$

Se calcula el caudal en la sección transversal, Q

$$Q = \underbrace{2\pi R^2 \int_0^{y_c} v_c y dy}_{\text{Integral I}} + \underbrace{2\pi R^2 \int_{y_c}^1 v_x y dy}_{\text{Integral II}} \quad (\text{D.27})$$

La integral I resulta

$$2\pi R^2 \int_0^{y_c} v_c y dy = 2\pi R^2 \left[v_c \frac{y^2}{2} \right]_0^{y_c} = v_c \pi (R y_c)^2; \quad (\text{D.28})$$

La Integral II resulta

$$\begin{aligned}
2\pi R^2 \int_{y_c}^1 v_x y dy &= 2\pi R^2 \underbrace{\int_{y_c}^1 \left[\frac{p_x R^2}{4\mu} \{1 - y^2\} y dy \right]}_{\text{integral II.1}} \\
&+ \underbrace{2\pi R^2 \int_{y_c}^1 \left[v_c \frac{\ln y}{\ln y_c} \right] y dy}_{\text{integral II.2}} - \underbrace{2\pi R^2 \int_{y_c}^1 \left[\frac{p_x R^2 (1 - y_c^2)}{4\mu} \frac{\ln y}{\ln y_c} \right] y dy}_{\text{integral II.3}}
\end{aligned} \tag{D.29}$$

- La Integral II.1 después de reorganizar términos,

$$\begin{aligned}
2\pi R^2 \frac{p_x R^2}{4\mu} \int_{y_c}^1 [\{1 - y^2\} y dy] &= \frac{\pi R^4 p_x}{2\mu} \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_{y_c}^1 \\
&= \frac{\pi R^4 p_x}{8\mu} (1 - y_c^2)^2
\end{aligned} \tag{D.30}$$

- La Integral II.2

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi R^2 v_c}{\ln y_c} \int_{y_c}^1 [y \ln y] dy &= \frac{2\pi R^2 v_c}{\ln y_c} \left[\frac{y^2}{2} \ln y - \int \frac{y^2}{2} \frac{1}{y} dy \right]_{y_c}^1 \\
&= \frac{2\pi R^2 v_c}{\ln y_c} \left[\frac{y^2}{2} \ln y - \frac{y^2}{4} \right]_{y_c}^1 \\
&= \frac{\pi R^2 v_c}{2 \ln y_c} (y_c^2 - 2y_c^2 \ln y_c - 1)
\end{aligned} \tag{D.31}$$

- La Integral II.3

$$\frac{2\pi R^4 p_x (1 - y_c^2)}{4\mu \ln y_c} \int_{y_c}^1 [y \ln y] dy = \frac{\pi R^4 p_x (1 - y_c^2)}{8\mu \ln y_c} \{y_c^2 - 2y_c^2 \ln y_c - 1\} \tag{D.32}$$

Juntado los términos integrales resueltos, se tiene el caudal en la sección transversal, Q , en función de la v_c y de y_c , localización de la frontera entre regiones.

$$Q = v_c \frac{\pi R^2 (y_c^2 - 1)}{2 \ln y_c} + \frac{\pi R^4 p_x (1 - y_c^2)}{8\mu} \frac{\ln y_c (1 + y_c^2) + 1 - y_c^2}{\ln y_c} \tag{D.33}$$

Porque $\bar{v} = Q/A$, velocidad promedio, con $A = \pi R^2$, entonces, v_c , velocidad en el núcleo central o region dominada por la inercia, se tiene en función de la velocidad promedio.

$$v_c = \bar{v} \left\{ \frac{2 \ln y_c}{y_c^2 - 1} \right\} + \frac{p_x R^2}{4\mu} \{ \ln y_c (1 + y_c^2) - (y_c^2 - 1) \}. \tag{D.34}$$

Por tanto, se tiene un perfil de velocidad en función del gradiente de presión y de la velocidad promedio,

$$v_x = \bar{v} \left\{ \frac{2 \ln y}{y_c^2 - 1} \right\} + \frac{p_x R^2}{4\mu} \{ (1 + y_c^2) \ln y + 1 - y^2 \}. \tag{D.35}$$

Apéndice E

Distribución de las variables de cálculo de la simulación

El esquema matemático está formulado sobre un sistema de ecuaciones unidimensional y las variables de este sistema de ecuaciones son variables conservadas, es decir, variables sobre las que se puede aplicar el principio de conservación de la masa o conservación del momento. A continuación, se muestran algunas variables, donde A y Q son variables conservadas, P depende del área, A , a través de la ecuación constitutiva, el gradiente de presión, P_x es una variable derivada de la presión, P , así como V , velocidad promedio en la sección, lo es de Q y A .

- area: $[A] = [cm^2]$
- velocity: $[V] = [cm \cdot s^{-1}]$
- discharge: $[Q] = [cm^3 \cdot s^{-1}]$
- pressure: $[P] = [kg \cdot cm \cdot s^{-2}]$
- pressure gradient: $[P_x] = [kg \cdot s^{-2}]$

Para analizar los datos generados por la simulación, recogemos algunas de las variables significativas para un ciclo cardiaco simulado y realizamos un tratamiento de los datos para conocer la distribución de sus valores. La Figura E.1 muestra los valores del área de la sección para todos los vasos.

The box-and-whisker graphic for cross-sectional area distribution for all the arterial vessels is

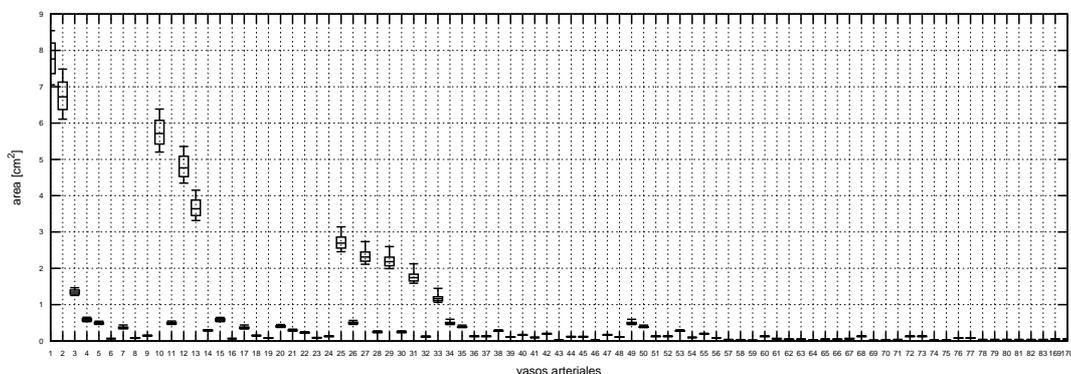


Figura E.1: Arterial section development along a pulse-heart cycle.

Para el caudal se tiene la Figura E.2 mostrando la variabilidad

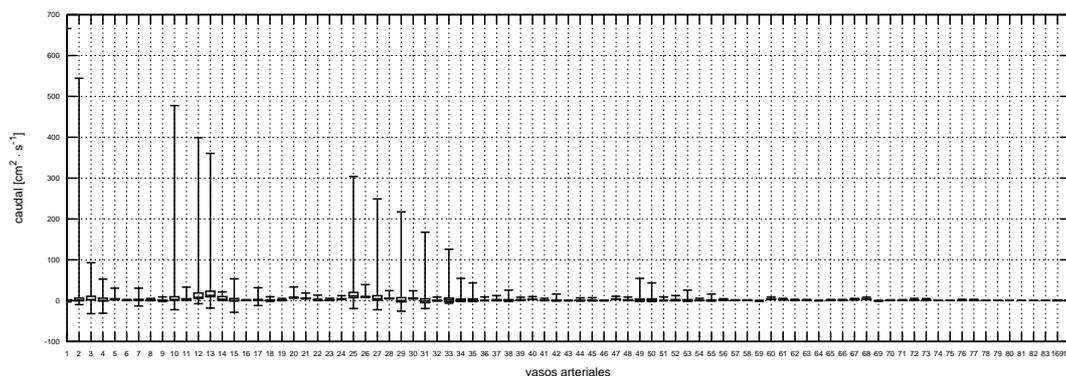


Figura E.2: Cross-sectional discharge along a period of pulse-heart cycle.

Para el gradiente de presión, variable derivada se muestra en la Figura E.3

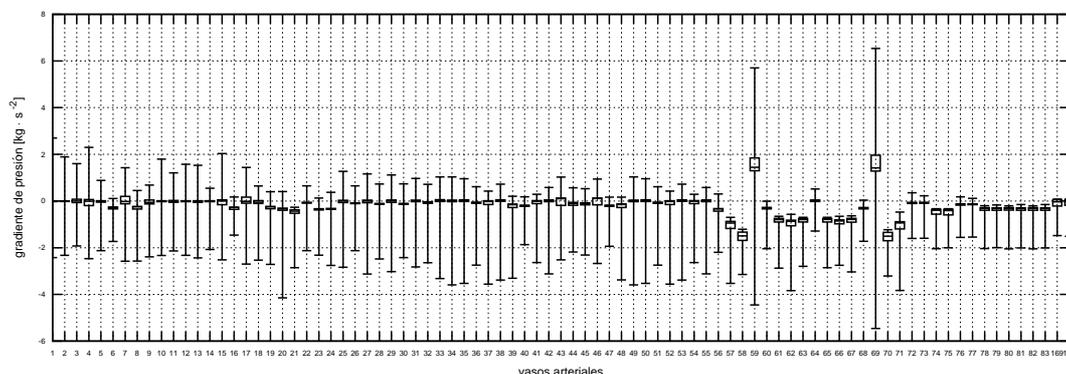


Figura E.3: Distribution by quartiles of the pressure gradient along a pulse-heart cycle.

End.

Sobre el gradiente de presión

Para el cálculo de esta variable derivada, la implementación depende del número de celdas de las que disponga el vaso. Para $n = 2$, realizamos

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{P(2) - P(1)}{\Delta x}$$

donde $P(1)$ y $P(2)$ se refieren a la presión en la entrada y en la salida respectivamente y Δx es la longitud de la celda del mallado. Cuando el vaso está detallado con tres celdas o más, se utiliza la fórmula de derivación numérica de «Diferencias Centrales». Entonces, para $n \geq 3$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{P(i+1) - P(i-1)}{2\Delta x}$$

donde la celda i es una celda centrada en el vaso, y con los valores de las celdas $i - 1$ e $i + 1$ contiguas, se evalúa el valor de la derivada en i .

Si se analiza cómo varía el gradiente de presión según la clasificación propuesta en §5.2, se podrá apreciar si hay cambios relevantes. En las Figuras E.4, y se muestra la evolución de los valores para un ciclo cardiaco.

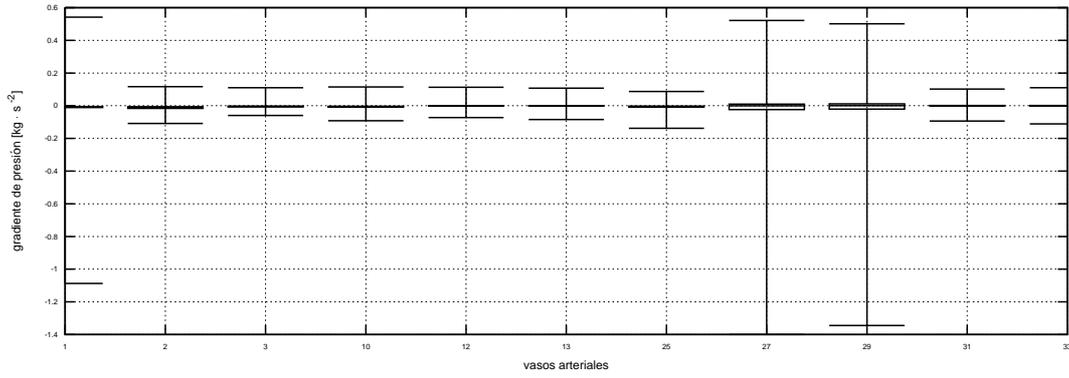


Figura E.4: Grupo I: gradiente de presión. Distribución de valores.

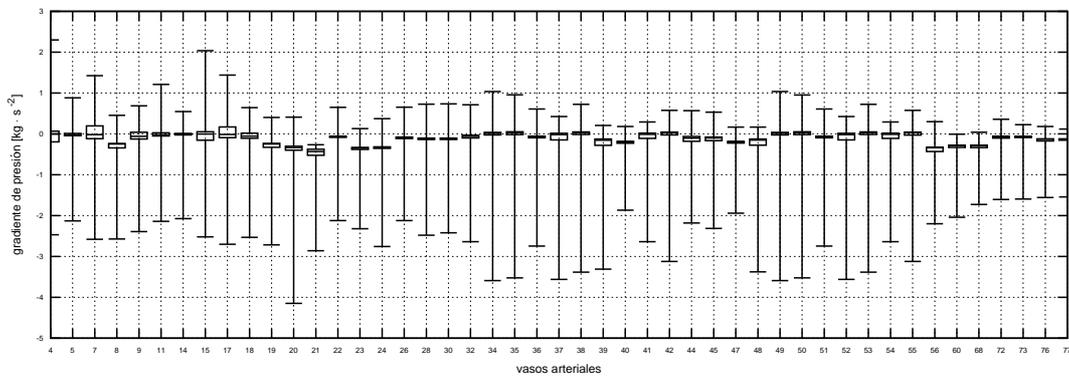


Figura E.5: Grupo II: gradiente de presión. Distribución de valores.

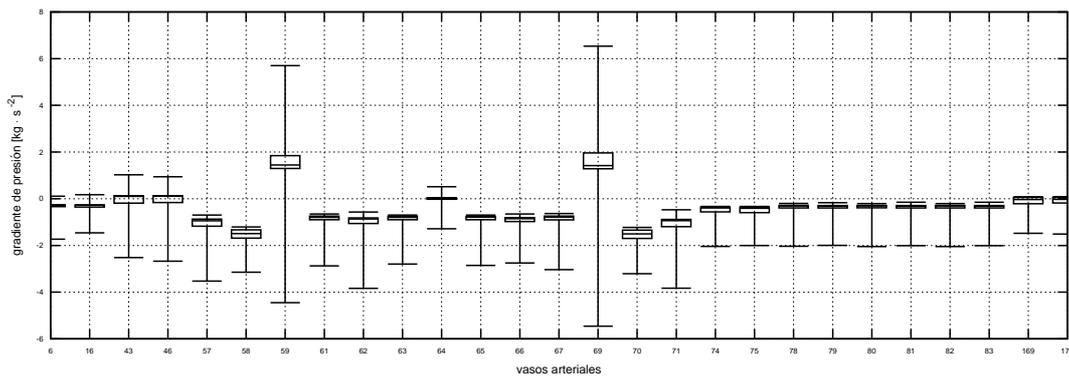


Figura E.6: Grupo III: gradiente de presión. Distribución de valores.

Apéndice F

Evolución temporal a lo largo de un ciclo

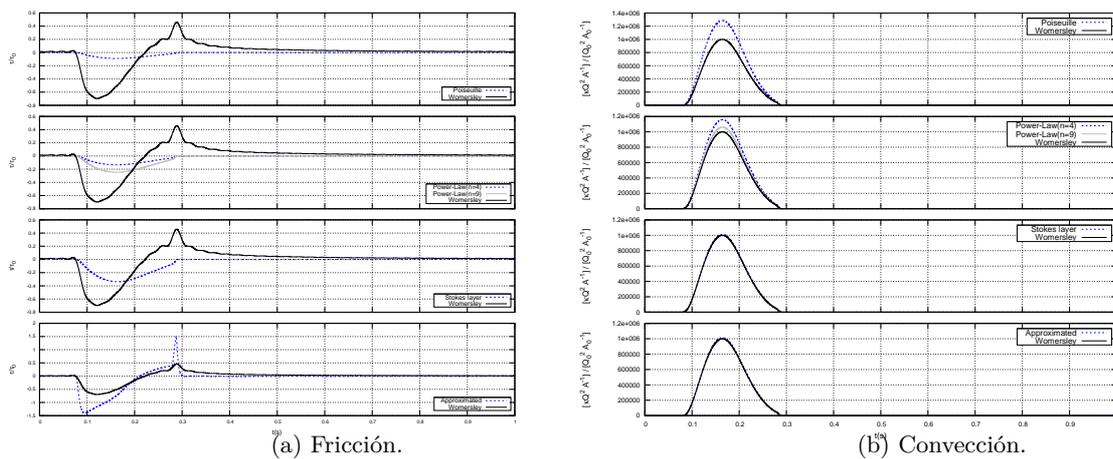


Figura F.1: Vaso 1. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco.

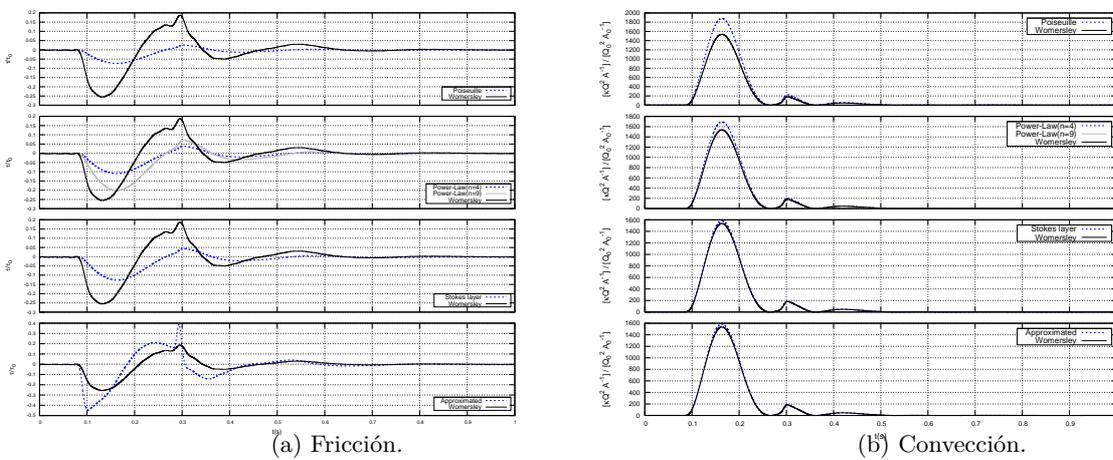


Figura F.2: Vaso 3. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco.

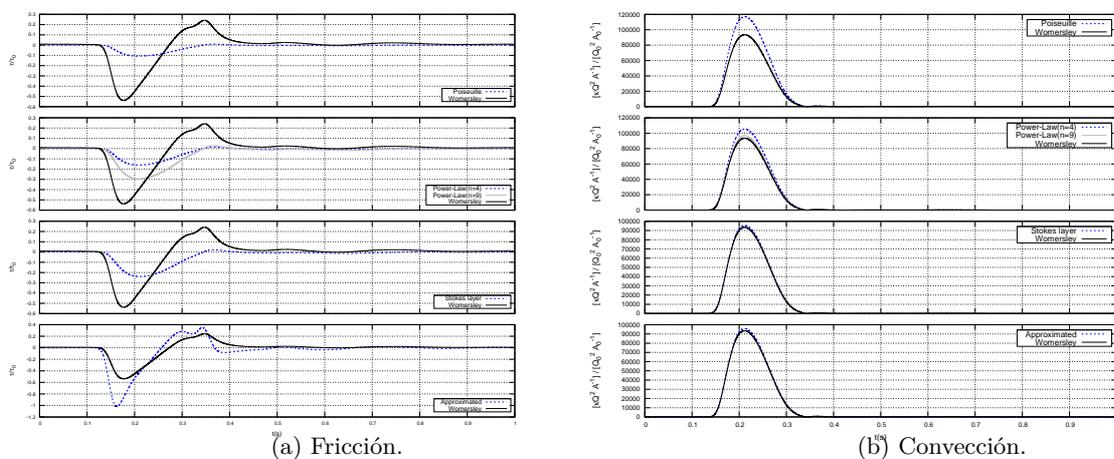


Figura F.3: Vaso 27. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco.

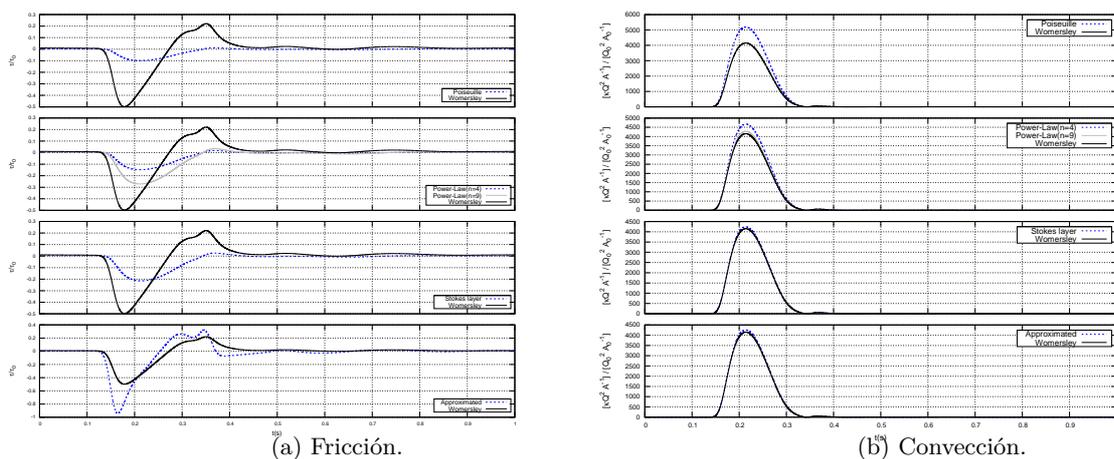


Figura F.4: Vaso 29. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco.

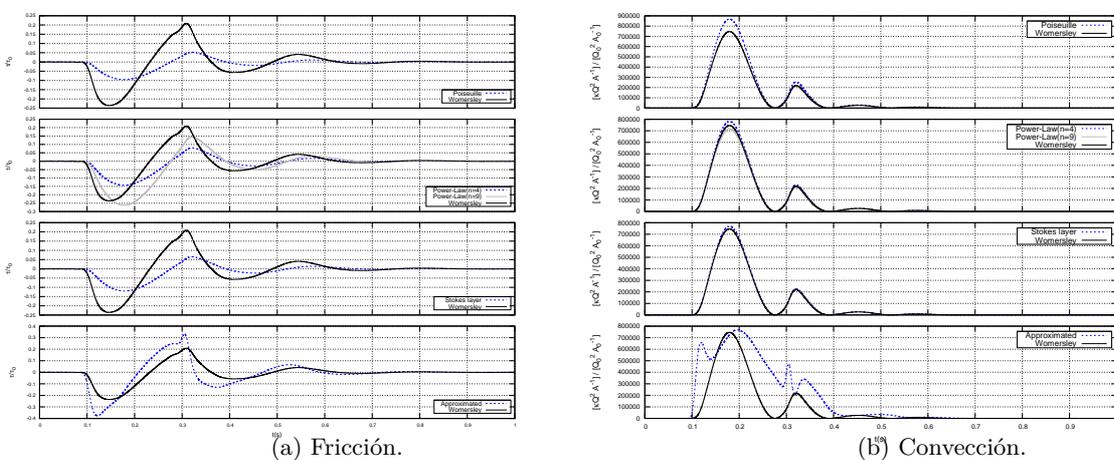


Figura F.5: Vaso 15. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco.

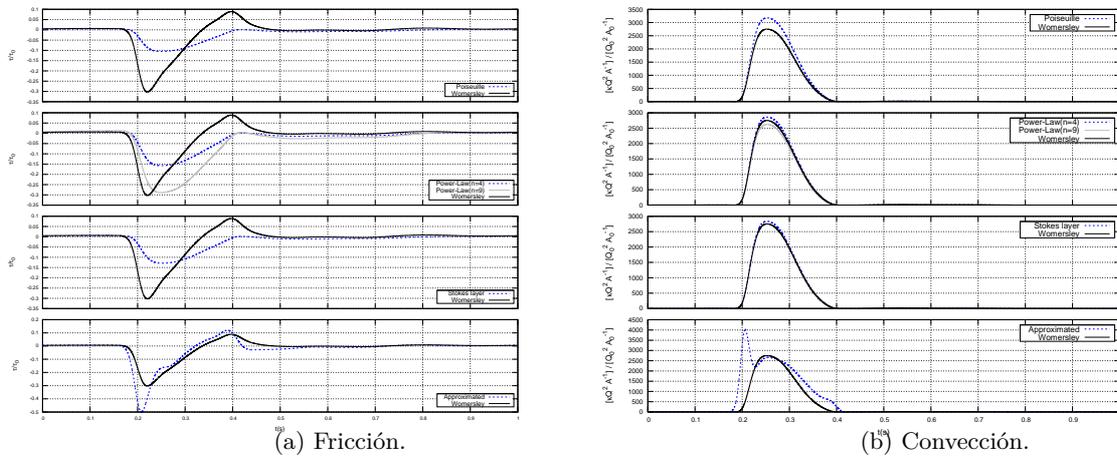


Figura F.6: Vaso 49. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco.

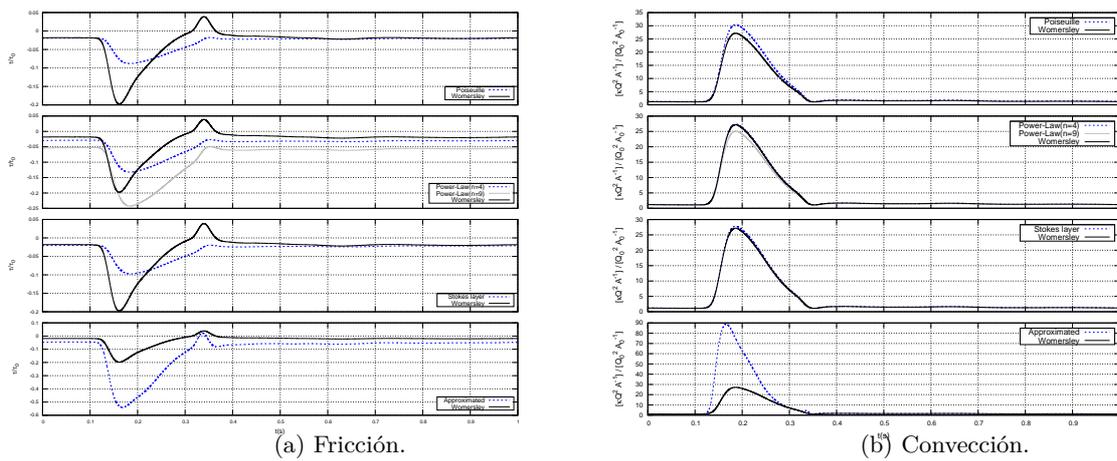


Figura F.7: Vaso 20. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco.

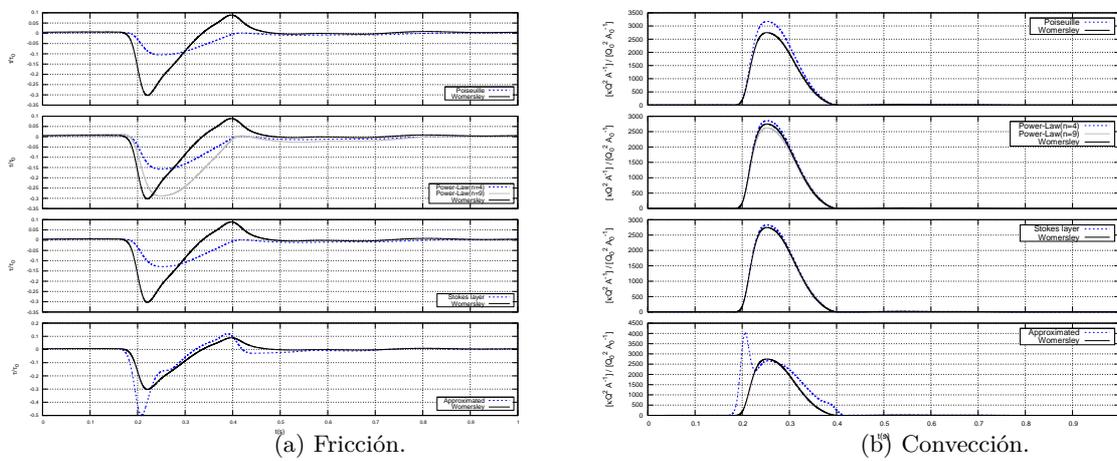


Figura F.8: Vaso 34. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco.

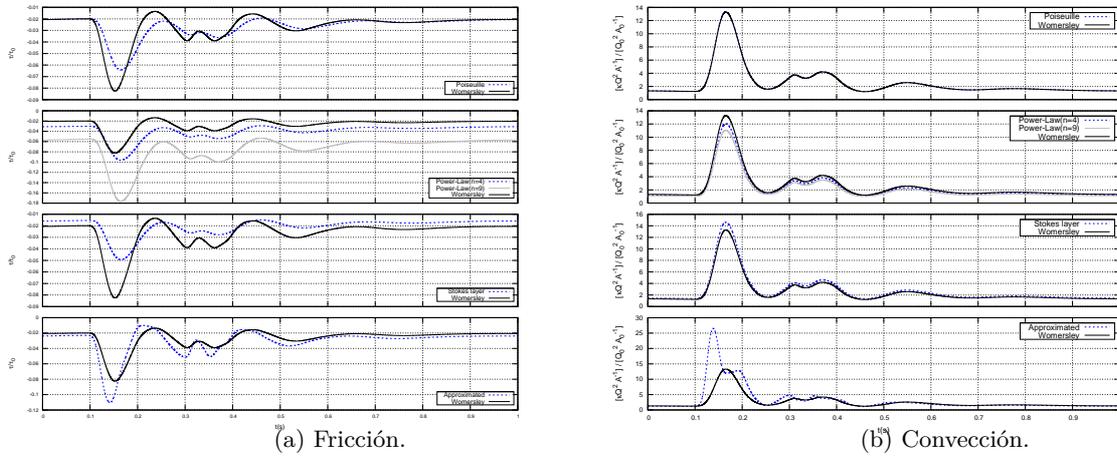


Figura F.9: Vaso 56. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco.

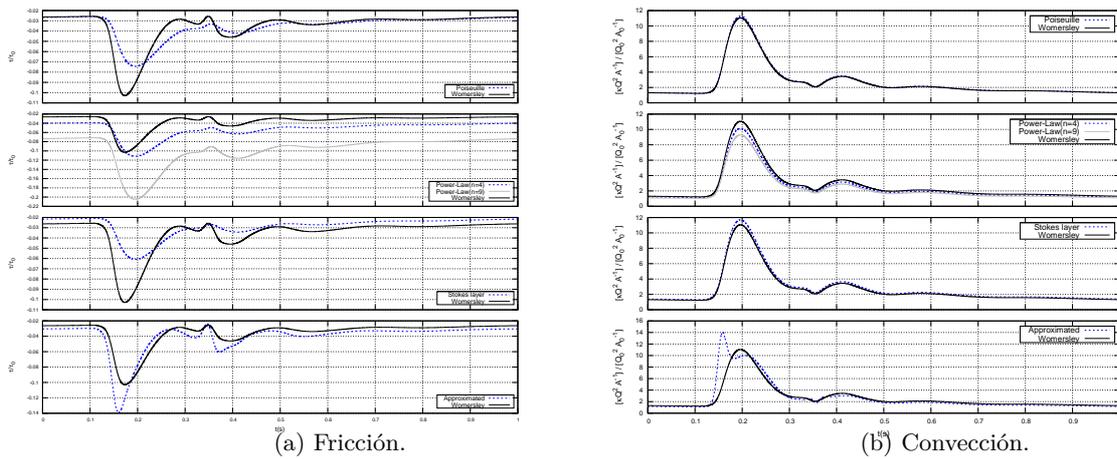


Figura F.10: Vaso 60. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco.

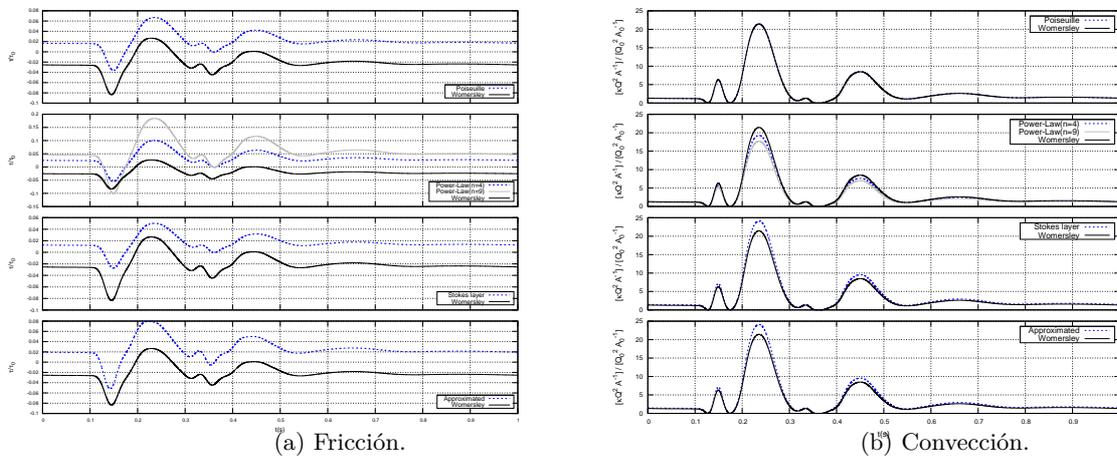


Figura F.11: Vaso 59. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco.

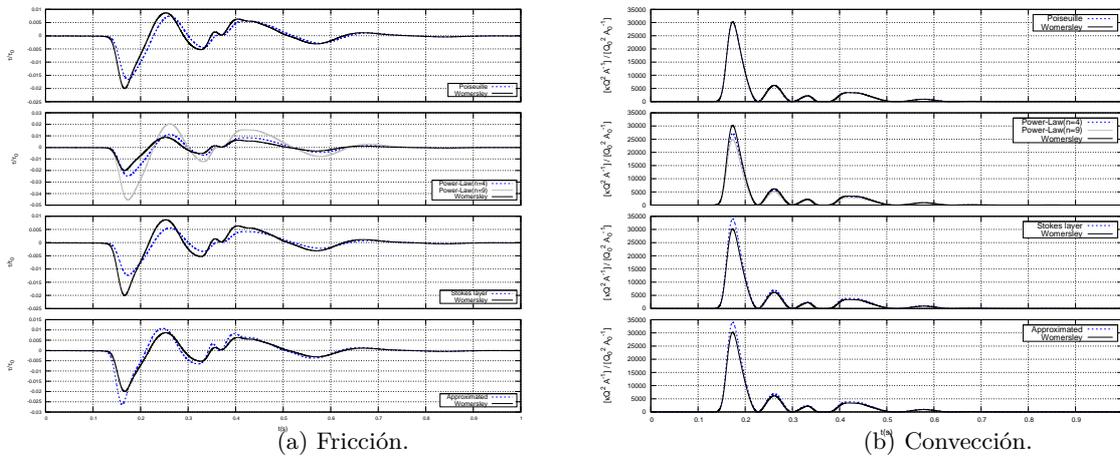


Figura F.12: Vaso 64. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco.

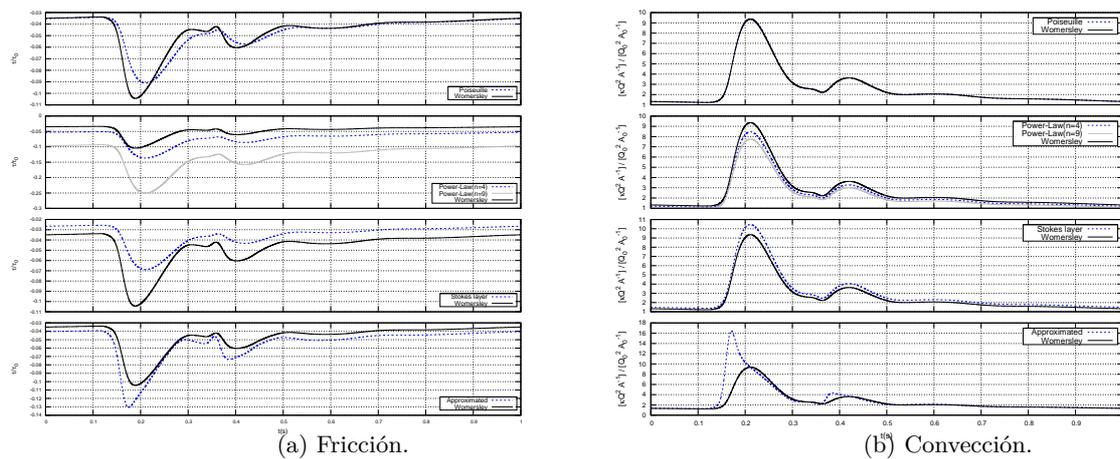


Figura F.13: Vaso 67. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco.

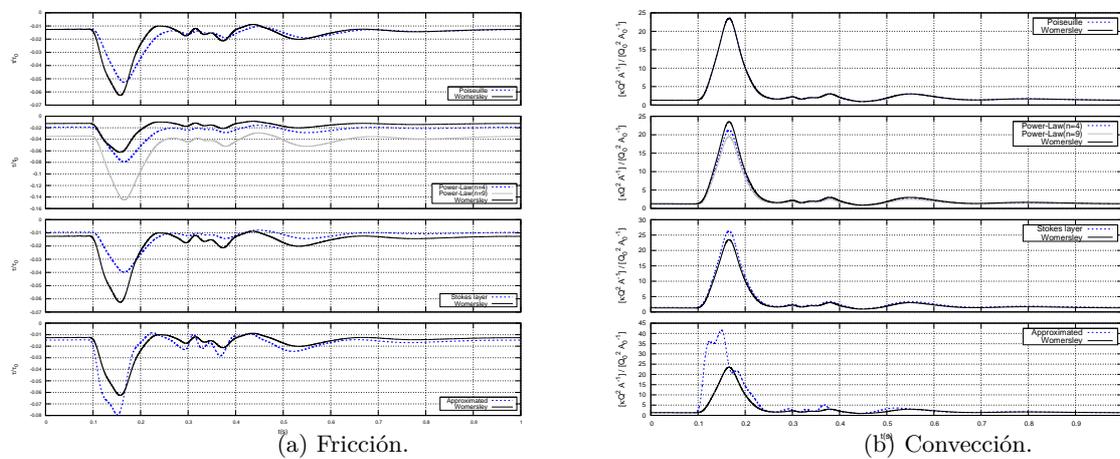


Figura F.14: Vaso 6. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco.

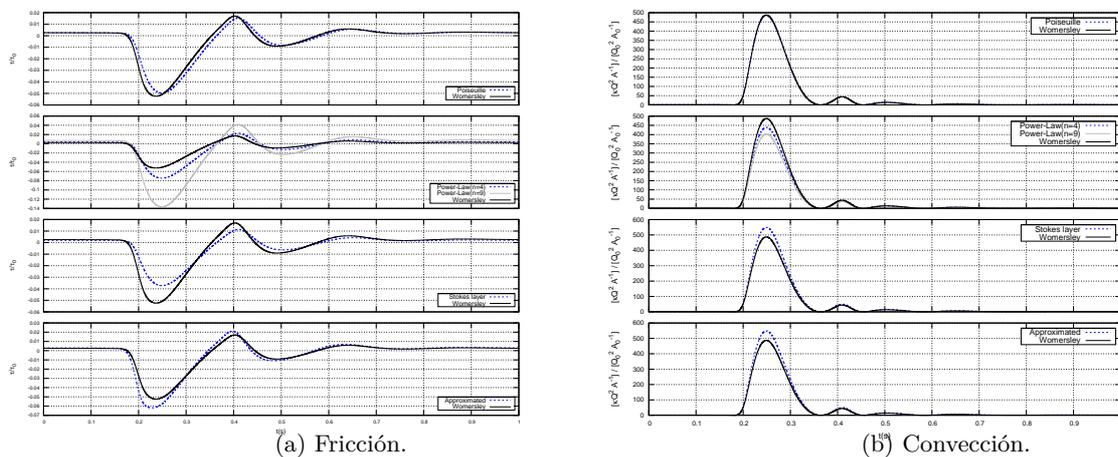


Figura F.15: Vaso 46. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco.

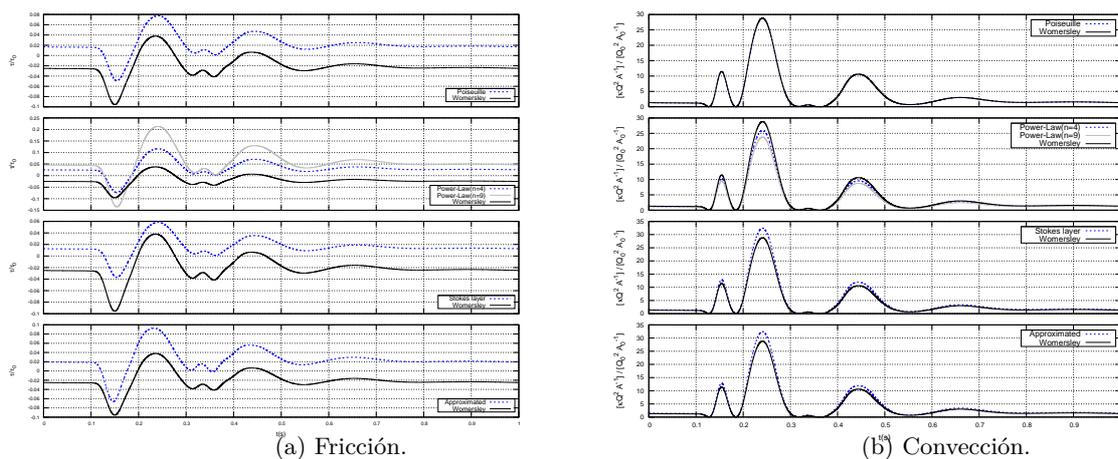


Figura F.16: Vaso 69. Evolución temporal de la fricción y la convección a lo largo de un ciclo cardiaco.

Apéndice G

Programación de los procedimientos de análisis

G.1. Cálculo de la fricción

En esta sección se va a calcular los valores para todos los términos de fricción para un ciclo cardíaco. Las fórmulas empleadas son

$$\begin{array}{ll}
 f = -8\mu\pi\bar{v} & \text{Poiseuille} \\
 f = -2(n+2)\mu\pi\bar{v} & \text{Potencial} \\
 f = -\frac{6\pi\mu}{(3-3\delta_s+\delta_s^2)\delta_s}\bar{v} & \text{Capa de Stokes} \\
 f = \bar{v} \left\{ \frac{4\pi\mu}{y_c^2-1} \right\} + p_x \left\{ \frac{\pi R^2}{2} (y_c^2-1) \right\} & \text{Aproximado} \\
 f_k = \frac{\mu\hat{Q}_k\alpha_k^2}{R^2} \frac{h_{10}}{M_{10}} \sin(\omega_k t - \phi_k - \delta_{10} - \epsilon_{10}). & \text{Womersley}
 \end{array}$$

donde la fricción de Womersley está formulada para un sólo armónico.

```

C      Last change:  hm      09 Feb 2017      09:27 pm
C      DESCRIPCIÓN: Caso calculamos todos los tipos de fricción

PROGRAM EXPLICITO

implicit none

C      GLOBALES

DOUBLE PRECISION U
ALLOCATABLE      U(:)

DOUBLE PRECISION A
ALLOCATABLE      A(:)

DOUBLE PRECISION P
ALLOCATABLE      P(:)

```

```

DOUBLE PRECISION P_X
ALLOCATABLE      P_X(:)

DOUBLE PRECISION Q
ALLOCATABLE      Q(:)

DOUBLE PRECISION FRICTION
ALLOCATABLE      FRICTION(:)
DOUBLE PRECISION F_POIS
ALLOCATABLE      F_POIS(:)
DOUBLE PRECISION F_PL4
ALLOCATABLE      F_PL4(:)
DOUBLE PRECISION F_PL9
ALLOCATABLE      F_PL9(:)
DOUBLE PRECISION F_SL
ALLOCATABLE      F_SL(:)
DOUBLE PRECISION F_APP
ALLOCATABLE      F_APP(:)
DOUBLE PRECISION F_WOM
ALLOCATABLE      F_WOM(:)

DOUBLE PRECISION T
ALLOCATABLE      T(:)

DOUBLE PRECISION DT                !PASO DE TIEMPO
INTEGER          N_SAMPLINGS
DOUBLE PRECISION DELTA              ! DELTA [CM]>> param.input
DOUBLE PRECISION N_PL              !PARÁMETRO POWER-LAW
DOUBLE PRECISION PHI_0              !VALOR FUNCIÓN STOKES LAYER
DOUBLE PRECISION XI_C , Y_C        !ESPESOR CAPA VISCO
DOUBLE PRECISION PHI_1 , PHI_2 , ALPHA , OMEGA  !VALOR FUNCIONES APPROXIMATED
DOUBLE PRECISION RADIO , ADIM      !RADIO DEL

C
DOUBLE PRECISION ERROR_POIS , ERROR_PL4 , ERROR_PL9
DOUBLE PRECISION ERROR_SL , ERROR_APP
ALLOCATABLE      ERROR_POIS(:) , ERROR_PL4(:) , ERROR_PL9(:)
ALLOCATABLE      ERROR_SL(:) , ERROR_APP(:)

C
DOUBLE PRECISION C_K , PHI_K , OMEGA_K                !COEFICIENTES SERIE FOURIER
ALLOCATABLE      C_K(:) , PHI_K(:) , OMEGA_K(:)

C
DOUBLE PRECISION ALPHA_K                !NÚMERO WOMERSLEY ARMÓNICO
DOUBLE PRECISION H_10 , M_10 , EPSILON_10 , DELTA_10  !WOMERSLEY FUNCIONES GEOMETR.
DOUBLE PRECISION FRICTION_K , ARGUMENTO              !WOMERSLEY FRICCIÓN ARMÓNICA
DOUBLE PRECISION MU , RHO , GRAVITY
INTEGER          ADIMENSIONALIZAR                !0 ES NO; 1
DOUBLE PRECISION NORMA_CUADRADO , NORMA_INF
ALLOCATABLE      NORMA_CUADRADO(:) , NORMA_INF(:)
DOUBLE PRECISION MEDIA_MUESTRAL , CUASIVAR_MUESTRAL
ALLOCATABLE      MEDIA_MUESTRAL(:) , CUASIVAR_MUESTRAL(:)

C
C VARIABLES AUXILIARES
INTEGER          N

```

```

    INTEGER          K,MAX_FRECUENCIAS !WOMERSLEY
    DOUBLE PRECISION PI,AUX1,VASO
C  LECTURA PARÁMETROS
    OPEN (UNIT=1,FILE='param.input')
    READ(1,*)MU          !VISCOSIDAD DINÁMICA ,MU
    READ(1,*)RHO
    READ(1,*)GRAVITY
    READ(1,*)N_SAMPLINGS
    READ(1,*)DT
    READ(1,*)ADIMENSIONALIZAR
    CLOSE (1)
C  RESERVA DE ESPACIO DE MEMORIA DE VARIABLES GLOBALES
    ALLOCATE (U          ( 1:N_SAMPLINGS))
    ALLOCATE (A          ( 1:N_SAMPLINGS))
    ALLOCATE (P          ( 1:N_SAMPLINGS))
    ALLOCATE (P_X       ( 1:N_SAMPLINGS))
    ALLOCATE (Q          ( 1:N_SAMPLINGS))
C
    ALLOCATE (FRICTION  ( 1:N_SAMPLINGS))
    ALLOCATE (F_POIS    ( 1:N_SAMPLINGS))
    ALLOCATE (F_PL4     ( 1:N_SAMPLINGS))
    ALLOCATE (F_PL9     ( 1:N_SAMPLINGS))
    ALLOCATE (F_SL      ( 1:N_SAMPLINGS))
    ALLOCATE (F_APP     ( 1:N_SAMPLINGS))
    ALLOCATE (F_WOM     ( 1:N_SAMPLINGS))
    ALLOCATE (T          ( 1:N_SAMPLINGS))
C
    ALLOCATE (ERROR_POIS (1:N_SAMPLINGS))
    ALLOCATE (ERROR_PL4  (1:N_SAMPLINGS))
    ALLOCATE (ERROR_PL9  (1:N_SAMPLINGS))
    ALLOCATE (ERROR_SL   (1:N_SAMPLINGS))
    ALLOCATE (ERROR_APP  (1:N_SAMPLINGS))
C
    ALLOCATE (C_K        (1:N_SAMPLINGS/2+1))
    ALLOCATE (PHI_K      (1:N_SAMPLINGS/2+1))
    ALLOCATE (OMEGA_K    (1:N_SAMPLINGS/2+1))
C
    WRITE(*,*)'PARÁMETROS DEL PROBLEMA: '
    WRITE(*,*)'*****'
    WRITE(*,*)'VISCOSIDAD DINAMICA: ',MU          !VISCOSIDAD DINÁMICA ,MU
    WRITE(*,*)'DENSIDAD: ',RHO
    WRITE(*,*)'GRAVEDAD: ',GRAVITY
    WRITE(*,*)'NÚMERO DE MUESTRAS: ',N_SAMPLINGS
    WRITE(*,*)'PASO DE TIEMPO: ',DT
C  LECTURA DE DATOS DEL VASO SANGUÍNEO
    OPEN (UNIT=1,FILE='data.input')
    DO N=1,N_SAMPLINGS
    READ(1,*)VASO,T(N),A(N),AUX1,AUX1,P(N)
    &      ,AUX1,Q(N),U(N),AUX1,AUX1,AUX1,P_X(N)
c    WRITE(*,*)T(N),A(N),P(N),Q(N),U(N),P_X(N)
    END DO
    CLOSE (1)
    DO N=1,N_SAMPLINGS
        P(N)=P(N)*1.32594D0

```



```

END DO
OPEN (UNIT=1,FILE='norma_infinito.out')
DO N=1,N_SAMPLINGS
NORMA_INF(1)=MAX(NORMA_INF(1),ERROR_POIS(N))
NORMA_INF(2)=MAX(NORMA_INF(2),ERROR_PL4(N))
NORMA_INF(3)=MAX(NORMA_INF(3),ERROR_PL9(N))
NORMA_INF(4)=MAX(NORMA_INF(4),ERROR_SL(N))
NORMA_INF(5)=MAX(NORMA_INF(5),ERROR_APP(N))
END DO
WRITE(1,*)INT(VASO),NORMA_INF
CLOSE (1)
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C  APLICACIÓN DE LA NORMA CUADRADO

ALLOCATE (NORMA_CUADRADO(1:5))
DO N=1,5
    NORMA_CUADRADO(N)=0.DO
END DO
OPEN (UNIT=1,FILE='norma_cuadrado.out')
DO N=1,N_SAMPLINGS
NORMA_CUADRADO(1)=(ERROR_POIS(N))**2 +NORMA_CUADRADO(1)
    NORMA_CUADRADO(2)=(ERROR_PL4(N))**2 +NORMA_CUADRADO(2)
    NORMA_CUADRADO(3)=(ERROR_PL9(N))**2 +NORMA_CUADRADO(3)
NORMA_CUADRADO(4)=(ERROR_SL(N))**2 +NORMA_CUADRADO(4)
NORMA_CUADRADO(5)=(ERROR_APP(N))**2+NORMA_CUADRADO(5)
END DO
DO N=1,5
    NORMA_CUADRADO(N)=SQRT(NORMA_CUADRADO(N))
END DO
WRITE(1,*)INT(VASO),NORMA_CUADRADO
CLOSE (1)
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
C  CÁLCULO ESTADÍSTICOS: media muestral
ALLOCATE (MEDIA_MUESTRAL(1:5))
DO N=1,5
    MEDIA_MUESTRAL(N)=0.DO
END DO
OPEN (UNIT=1,FILE='media_muestral.out')
DO N=1,N_SAMPLINGS
    MEDIA_MUESTRAL(1)=ERROR_POIS(N) +MEDIA_MUESTRAL(1)
    MEDIA_MUESTRAL(2)=ERROR_PL4(N) +MEDIA_MUESTRAL(2)
    MEDIA_MUESTRAL(3)=ERROR_PL9(N) +MEDIA_MUESTRAL(3)
    MEDIA_MUESTRAL(4)=ERROR_SL(N) +MEDIA_MUESTRAL(4)
    MEDIA_MUESTRAL(5)=ERROR_APP(N)+MEDIA_MUESTRAL(5)
END DO
DO N=1,5
    MEDIA_MUESTRAL(N)=MEDIA_MUESTRAL(N)/N_SAMPLINGS
END DO
WRITE(1,*)INT(VASO),MEDIA_MUESTRAL
CLOSE (1)
C  CÁLCULO ESTADÍSTICOS: varianza muestral
ALLOCATE (CUASIVAR_MUESTRAL(1:5))

```



```

DO N=1, N_SAMPLINGS
  CNV(N)=KAPPA*A(N)*U(N)**2.d0
  CT_POIS(N)=CNV(N)
END DO

C POWER-LAW !N_PL=4.DO
N_PL=4.DO
KAPPA=(N_PL+2.DO)/(N_PL+1.DO)
DO N=1, N_SAMPLINGS
  CNV(N)=KAPPA*A(N)*U(N)**2.DO
  CT_PL4(N)=CNV(N)
END DO

C POWER-LAW !N_PL=9.DO
N_PL=9.DO
KAPPA=(N_PL+2.DO)/(N_PL+1.DO)
DO N=1, N_SAMPLINGS
  CNV(N)=KAPPA*A(N)*U(N)**2.DO
  CT_PL9(N)=CNV(N)
END DO

C STOKES LAYER
C Variables exclusivas: DELTA, ALPHA
DO N=1, N_SAMPLINGS
  RADIO=SQRT(A(N)/PI)
  ALPHA=RADIO*SQRT(RHO*OMEGA/MU)
  DELTA=SQRT(2.d0)/ALPHA
  DELTA=MIN(DELTA, 1.DO)
  DELTA=RADIO*DELTA
  KAPPA=1.5D0*RADIO**2*(6.DO*RADIO**2-8.d0*RADIO*DELTA+3*DELTA**2)
  KAPPA=KAPPA/(3.d0*RADIO**2-3.d0*RADIO*DELTA+DELTA**2)**2
  CNV(N)=KAPPA*A(N)*U(N)**2.DO
  CT_SL(N)=CNV(N)
END DO

C APPROXIMATED
C Variables exclusivas: XI_C, ALPHA, PHI_1, PHI_2, P_X
DO N=1, N_SAMPLINGS
  RADIO=SQRT(A(N)/PI)
  OMEGA=2*PI
  ALPHA=RADIO*SQRT(RHO*OMEGA/MU)
  XI_C=1-SQRT(2.d0)/ALPHA
  XI_C=MAX(XI_C, 0.DO)
  ZETA_C=XI_C**2.DO
  IF (XI_C.EQ.0.DO) THEN
    DELTA1=2.DO
  ELSE
    DELTA1=(2.DO-2.DO*ZETA_C*(1.DO-LOG(ZETA_C)))
    / (1.DO-ZETA_C)**2
  IF (XI_C.GE.0.8D0) THEN
    KAPPA=DELTA1
  ELSE
    V_P=(RADIO**2.DO)*P_X(N)/(4*MU)
    IF (XI_C.EQ.0.DO) THEN
      DELTA2=1.d0
      DELTA3=1.d0/3.d0
    ELSE
      DELTA2=1.DO+4*ZETA_C*(1+LOG(ZETA_C))

```

```

&          -ZETA_C**2.d0*(5.D0-2.D0*LOG(ZETA_C))
          DELTA2=DELTA2/(1.D0-ZETA_C)
          DELTA3=ZETA_C*(3.D0+2.D0*LOG(ZETA_C))
          DELTA3=1.d0/3.d0+DELTA3
          AUX3=(3.D0-2.D0*LOG(ZETA_C))
          AUX3=-AUX3*ZETA_C**2.D0
          DELTA3=DELTA3+AUX3
          AUX3=-1.d0/3.d0*ZETA_C**3
          DELTA3=DELTA3+AUX3
          END IF !IF (XI_C.EQ.0.D0) THEN
          AUX1=V_P/U(N)
          KAPPA=DELTA1+(DELTA2+DELTA3*AUX1)*AUX1
          !corregido para Gradiente de presion=-px
          END IF !IF (XI_C.GE.0.8D0) THEN
          END IF !IF (XI_C.EQ.0.D0) THEN
          CNV(N)=KAPPA*A(N)*U(N)**2.D0
          CT_APP(N)=CNV(N)
        END DO
C WOMERSLEY
C   Variables exclusivas: MAX_FRECUENCIAS, H_10, M_10, EPSILON_10, DELTA_10, ALPHA_K,
WRITE(*,*) 'Computando serie equivalente de fourier del caudal...'
CALL SERIEFOURIER(Q, N_SAMPLINGS, DT, C_K, PHI_K, OMEGA_K)
WRITE(*,*) 'Computando los valores de convección...'
DO N=1, N_SAMPLINGS
  RADIO=SQRT(A(N)/PI)
  ALPHA_K=RADIO*SQRT(RHO*OMEGA_K(2)/MU)
  CALL GEOMETRICAL(ALPHA_K, H_10, DELTA_10, M_10, EPSILON_10)
  M=ALPHA_K*H_10/(2.D0*M_10)
  KAPPA=2.D0*COS(EPSILON_10)/M_10
  KAPPA=KAPPA-M**2.D0*SIN(2.D0*DELTA_10+2.D0*EPSILON_10)
  CNV(N)=KAPPA*A(N)*U(N)**2
  CT_WOM(N)=CNV(N)
END DO !DO N=1, N_SAMPLINGS

[...]
```

G.2. Obtención del coeficiente corrector mediante integración numérica

El coeficiente corrector es el término que acompaña al término convectivo en el sistema de ecuaciones 3.36 que modeliza matemáticamente, en este caso, los vasos arteriales. Su fórmula es la siguiente,

$$\kappa = \frac{2}{\bar{v}^2(x, t)} \int_0^1 v^2(y, x, t) y dy.$$

El siguiente programa calcula el coeficiente corrector del término convectivo mediante integración numérica, para aquellos perfiles que no se puedan integrar de manera analítica por su complejidad. En este caso se disponen de todos los perfiles utilizados en el trabajo y mediante un archivo 'param.input', el programa lee la configuración deseada por el usuario.

G.2.1. Programa principal

```

    program OBTENCION_KAPPA

    implicit none

C   variables globales

    double precision x
    allocatable      x(:)

    double precision f_x
    allocatable      f_x(:)

    double precision t
    allocatable      t(:)

    double precision area
    allocatable      area(:)

    double precision q
    allocatable      q(:)

    double precision u
    allocatable      u(:)

    double precision grad_p
    allocatable      grad_p(:)

    double precision kappa
    allocatable      kappa(:)

    double precision c_k
    allocatable      c_k(:)

    double precision phi_k
    allocatable      phi_k(:)

    double precision omega_k
    allocatable      omega_k(:)

c   parametros
    double precision a,b,h
    double precision delta_t
    integer          n_samplings,nmax
    integer          profile,metodo

c   variables auxiliares
    integer          n,m
    double precision aux1
    double precision pi

c   Leemos parámetros exógenos
    write(*,*)'Programa: integracion de una funcion.'
    write(*,*)'Leemos parametros.'
    open(unit=1,FILE='param.input')
    read(1,*)nmax
    read(1,*)a

```

```

read(1,*)b
read(1,*)n_samplings
read(1,*)delta_t
read(1,*)profile
read(1,*)metodo
close(1)

c
allocate      (f_x      (1:nmax))
allocate      (x        (1:nmax))
allocate      (kappa    (1:n_samplings))
allocate      (t        (1:n_samplings))
allocate      (area     (1:n_samplings))
allocate      (q        (1:n_samplings))
allocate      (u        (1:n_samplings))
allocate      (grad_p   (1:n_samplings))
allocate      (c_k      (1:n_samplings/2+1))
allocate      (phi_k    (1:n_samplings/2+1))
allocate      (omega_k  (1:n_samplings/2+1))

cccccc
c   Leemos variables
open(unit=1,FILE='data.input')
do n=1,n_samplings
read(1,*)aux1,t(n),area(n),aux1,aux1,
&      aux1,aux1,q(n),u(n),aux1,
&      aux1,aux1,aux1,grad_p(n)
end do
close(1)
pi=ATAN(1.D0)*4.D0

cccccc
c   armónicos
if (profile.eq.0) then
call SERIEFOURIER(q,n_samplings,delta_t,c_k,phi_k,omega_k)
end if
if (profile.eq.2) then
do n=1,n_samplings
grad_p(n)=grad_p(n)*1.32594d0
end do
end if

cccccc
c   CALCULO KAPPA para cada instante N
do n=1,n_samplings
c   calculamos valores de la funcion para instante N
h=(b-a)/(nmax-1)
if (profile.eq.0) then !perfil womersley
do m=1,nmax
x(m)=a+(m-1)*h
call perfil_wom(f_x(m),x(m),
&      t(n),area(n),n_samplings,
&      c_k,phi_k,omega_k)
end do
end if
if (profile.eq.1) then !perfil poiseuille
do m=1,nmax
x(m)=a+(m-1)*h

```

```

        call perfil_pois(f_x(m),x(m),u(n))
        !if (x(m).eq.1.d0) then
            !write(*,*)x(m),f_x(m)
        !end if
    end do
end if !if (profile.eq.1) then !perfil poiseuille
if (profile.eq.2) then !perfil tipo capa de Stokes
    do m=1,nmax
        x(m)=a+(m-1)*h
        call perfil_stokes(f_x(m),x(m),u(n),area(n))
    end do
end if !if (profile.eq.2) then !perfil tipo capa de stokes
if (profile.eq.3) then !perfil aproximado
    do m=1,nmax
        x(m)=a+(m-1)*h
        call perfil_app(f_x(m),x(m),u(n),area(n),grad_p(n))
    end do
end if !if (profile.eq.3) then !perfil aproximado
!write(*,*)'Comienza el proceso de integracion numerica.',n
call squareintegrand(aux1,f_x,x,nmax,metodo)
kappa(n)=2.d0*aux1/(u(n)**2)
c
end do !do n=1,n_samplings
c
cccccc
c  ESCRITURA DE KAPPA EN ARCHIVO
open(unit=1,FILE='kappa.out')
do n=1,n_samplings
    write(1,*)kappa(n)
end do
close(1)
write(*,*)'FIN del programa'
end program

```

G.2.2. Subrutinas propias

A continuación el algoritmo que realiza la integración numérica. El método con el que ésta se realiza viene determinado por el usuario, que podrá elegirlo a través del archivo 'param.input'

```

    subroutine squareintegrand(squared,y,x,nmax,metodo)
    implicit none
C  Variables globales:
    double precision aux1,aux2
    double precision squared
    integer          metodo
    integer          n,nmax
    double precision x (1:nmax)
    double precision y (1:nmax)

    squared=0.d0
c  TRAPECIO
    if (metodo.eq.0) then
    do n=1,(nmax-1)
        aux1=0.5d0*(x(n+1)-x(n))
        aux1=aux1*(y(n)+y(n+1))
        squared=aux1+squared
    end do
    end if
end subroutine

```

```

        end do!do n=1,(nmax-1)m trapecio
    end if
c    SIMPSON 1/3
    if (metodo.eq.1) then
        do n=1,(nmax-1),2
            aux1=(x(n+2)-x(n))/6.d0
            aux1=aux1*(y(n)+4.d0*y(n+1)+y(n+2))
            squared=aux1+squared
        end do!do n=1,(nmax-1), simpson13
    end if
c    SIMPSON 3/8
    if (metodo.eq.2) then
        do n=1,(nmax-1),3
            aux1=3.D0*(x(n+3)-x(n))/24.d0
            aux1=aux1*(y(n)+3.d0*y(n+1)+3.d0*y(n+2)+y(n+3))
            squared=aux1+squared
        end do!do n=1,(nmax-1), simpson38
    end if
c    BOOLE
    if (metodo.eq.3) then
        do n=1,(nmax-1),4
            aux1=2.d0/(4.d0*45)
            aux1=aux1*(x(n+4)-x(n))
            aux2=7.d0*y(n)+32.d0*y(n+1)+12.d0*y(n+2)
            aux2=aux2+32.d0*y(n+3)+7.d0*y(n+4)
            aux1=aux1*aux2
            squared=aux1+squared
        end do!do n=1,(nmax-1), boole
    end if
end subroutine

```

A continuación, se listan todas las subrutinas que permiten calcular el valor del integrando de la integral de la expresión del coeficiente corrector, v^*v*y .

- Para el perfil potencial

El perfil potencial es la extensión del perfil de Poiseuille. El algoritmo tiene el parámetro n para el cálculo del perfil de Poiseuille.

```

    subroutine perfil_pois(y,x,u)
    implicit none
C    Variables globales:
    double precision x,y,u
    double precision n
    n=2.d0
    y=((n+2.d0)/n)*(1-x**n)*u
    y=y*y*x
    end subroutine

```

- Para un perfil de stokes

```

    subroutine perfil_stokes(y,x,u,area)
    implicit none
C    Variables globales:

```

```

double precision x,y,u,area
c Variables propias del perfil de velocidad
double precision radio,alpha,omega
double precision phi_0,delta
double precision x_c
c Constantes
double precision rho,mu,pi
cccccc
c Determinación del valor de las constantes
pi=ATAN(1.D0)*4.D0
rho=0.00105D0          ! DENSIDAD [KG·CM-3]
mu=0.000045d0         ! VISCOSIDAD DINÁMICA ,MU [KG·CM-1·S-1]
omega=(2*pi)
cccccc
c
radio=SQRT(area/PI)
alpha=radio*SQRT(RHO*OMEGA/MU)
delta=SQRT(2.d0)/alpha !ADIMENSIONAL
delta=MIN(delta,1.D0)
x_c=1-delta !ADIMENSIONAL
phi_0=(3.D0)
phi_0=phi_0/(3.D0-3.D0*delta+delta**2.D0)
IF (x.GT.x_c) THEN
    y=phi_0/delta*(1-x)*u
ELSE
    y=phi_0*u
END IF
y=y*y*x
end subroutine

```

- Para un perfil aproximado

```

subroutine perfil_app(y,x,u,area,grad_p)
implicit none
C Variables globales:
double precision x,y,u          !X=radio adimensional;y=velocidad;u
double precision area,grad_p    !;area=superficie instantanea;grad
double precision radio,alpha,x_c
double precision v_p,phi_1,phi_2 !funciones propias del perfil aproximado
double precision aux1
double precision rho,mu,omega,pi

pi=ATAN(1.D0)*4.D0
rho=0.00105D0          ! DENSIDAD [KG·CM-3]
mu=0.000045d0         ! VISCOSIDAD DINÁMICA ,MU [KG·CM-1·S-1]
omega=(2*pi)

radio=SQRT(area/PI)
alpha=radio*SQRT(RHO*OMEGA/MU)
x_c=1-SQRT(2.d0)/alpha
x_c=MAX(x_c,0.D0)
v_p=grad_p*radio**2.D0/(4.D0*MU)
IF (x.LE.x_c) THEN
    IF (x_c.EQ.1.D0) THEN

```

```

        y=u
        ELSE
        phi_1=LOG(x_c**2.D0)/(x_c**2.D0-1.D0)
        phi_2=1.d0-x_c**2.d0+(1+x_c**2.D0)*LOG(x_c)
        y=phi_1*u-phi_2*v_p !corregido para el signo real de p_x
        END IF
        IF ((x_c+x).EQ.0.D0) THEN
        aux1 =x_c+0.001D0
        phi_1=LOG(aux1**2.D0)
        phi_1=phi_1/(aux1**2.D0-1.D0)
        phi_2=1.d0-aux1**2.d0
        phi_2=phi_2+(1+aux1**2.D0)*LOG(aux1)
        y =phi_1*u-phi_2*v_p !corregido para el signo real de p_x
        END IF
    ELSE
        phi_1=LOG(x**2.D0)/(x_c**2.D0-1.D0)
        phi_2=1.D0-x**2.D0+(1+x_c**2.D0)*LOG(x)
        y=phi_1*u-phi_2*v_p !corregido para el signo real de p_x
    END IF
    y=y*y*x

end subroutine

```

- Para un perfil de Womersley

```

    subroutine perfil_wom(y,x,t,area,n_samplings ,
&          ck,phik,omegak)
    implicit none
C   Variables globales:

    double precision y,x
c   Variables de lectura externa
    double precision area
    double precision t
    integer n_samplings,max_frecuencias
c   Variables derivadas de la lectura interna
    double precision ck      (1:n_samplings/2+1)
    double precision phik    (1:n_samplings/2+1)
    double precision omegak  (1:n_samplings/2+1)
c   Variables propias del perfil de velocidad
    double precision ALPHA,H_10,DELTA_10,M_10,EPSLN_10
    double precision M_PRIMA,EPSILON_0
    double precision y_k,radio,argumento,modulo_vel
c   variables auxiliares
    integer          k
c   Constantes
    double precision rho,mu,pi
c
    max_frecuencias=20
    !max_frecuencias=n_samplings/2+1
    rho=0.00105D0      ! DENSIDAD [KG·CM-3]
    mu=0.000045d0      ! VISCOSIDAD DINÁMICA ,MU [KG·CM-1·S-1]
    pi=ATAN(1.D0)*4.D0
    DO k=1,max_frecuencias

```

```

        radio=SQRT(area/pi)
        if (k.EQ.1) then
            y=ck(1)/area
            y=2.D0*y*(1.D0-(x**2.D0))
        else
            ALPHA=radio*SQRT(rho*omegak(k)/mu)
            call WOM_GEO(ALPHA,H_10,DELTA_10,M_10,EPSLN_10)
            call WOM_PERFIL(ALPHA,x,M_PRIMA,EPSILON_0)
            argumento=omegak(k)*t-phik(k)+EPSILON_0-EPSLN_10
            modulo_vel=ck(k)/area
            modulo_vel=modulo_vel*M_PRIMA/M_10
            y_k=modulo_vel*cos(argumento)
            y=y+y_k
        end if !IF (k.EQ.1) THEN
    END DO !DO k=1,MAX_FRECUENCIAS
y=y*y*x
end subroutine

```

G.3. Librerías generadas

En esta sección se muestran todos los algoritmos utilizados como subrutinas en los programas principales.

G.3.1. Funciones geométricas

Las funciones geométricas son aquellas cuyo origen son las funciones Bessel con argumento complejo presentes en la expresión del perfil de velocidad de Womersley. Las funciones geométricas de perfil son las que dependen del radio adimensional y . Aparecen sólo en la expresión del perfil de Womersley.

$$M_p = (1 + h_0^2 - 2h_0 \cos(\delta_0))^{\frac{1}{2}}, \quad \epsilon_p = \arctan\left(\frac{h_0 \sin \delta_0}{1 - h_{10} \cos \delta_{10}}\right). \quad (\text{G.1})$$

```

SUBROUTINE WOM_PERFIL(ALPHA_K,Y,M_P,EPSILON_P)

C      SUBROUTINA: Perfil de velocidad de Womersley
C      DESCRIPCIÓN: subrutina que calcula el perfil de velocidad
C      según el modelo de Womersley para tubo rígido.
C      AUTOR: Héctor Martínez Salvador
C      FECHA: 9 de Diciembre de 2016
C      ACTUALIZADO: 24 de Mayo de 2017

implicit none

DOUBLE PRECISION ALPHA_K,Y
DOUBLE PRECISION BER,BEI,GER,GEI,DER,DEI,HER,HEI
DOUBLE PRECISION BERY,BEIJ
DOUBLE PRECISION THETA_OO,THETA_OY,DELTA_O,EPSILON_O
DOUBLE PRECISION M_OO,M_OY,H_OY,M_PRIMA
DOUBLE PRECISION NUM,DEN,PI

PI=ATAN(1.D0)*4.D0
cccccc

```

```

CALL KLVNA (ALPHA_K , BER , BEI , GER , GEI , DER , DEI , HER , HEI )
CALL KLVNA (ALPHA_K*Y , BERY , BEIY , GER , GEI , DER , DEI , HER , HEI )
THETA_00  =ATAN2 (BEI , BER)
THETA_0Y  =ATAN2 (BEIY , BERY)
M_00      =SQRT (BER**2+BEI**2)
M_0Y      =SQRT (BERY**2+BEIY**2)
H_0Y      =M_0Y/M_00
DELTA_0   =THETA_00-THETA_0Y
NUM        =H_0Y*SIN (DELTA_0)
DEN        =1.DO-H_0Y*COS (DELTA_0)
EPSILON_P =ATAN2 (NUM,DEN) !cálculo desfase
M_P       =1.DO+(H_0Y**2.d0)-(2.DO*H_0Y)*COS (DELTA_0)
M_P       =SQRT (M_PRIMA)
END SUBROUTINE

```

Las funciones geométricas de caudal son las que dependen exclusivamente del valor del número de Womersley, α y aparecen en las fórmulas derivadas del perfil de velocidad de Womersley, como el término de fricción o la expresión del coeficiente corrector del término convectivo. El perfil utilizado en este trabajo depende de las componentes armónicas del caudal. Para realizar el cambio en la fórmula de un perfil dependiente del gradiente de presión a otro dependiente del caudal, también son requeridas. Se declaran las funciones, h_{10} y δ_{10}

$$h_{10} = \frac{2 M_1}{\alpha M_0}, \delta_{10} = \theta_0 - \theta_1 + \frac{3\pi}{4}$$

y M_{10} , ϵ_{10} .

$$M_{10} = \left(1 + h_{10}^2 - 2h_{10} \cos(\delta_{10})\right)^{\frac{1}{2}}, \epsilon_{10} = \arctan\left(\frac{h_{10} \sin \delta_{10}}{1 - h_{10} \cos \delta_{10}}\right).$$

```

SUBROUTINE WOM_GEO (ALPHA_K , H_10 , DELTA_10 , M_10 , EPSILON_10)

C      SUBROUTINA: Perfil de velocidad de Womersley
C      DESCRIPCIÓN: subrutina que calcula el perfil de velocidad
C      según el modelo de Womersley para tubo rígido.
C      AUTOR: Héctor Martínez Salvador
C      FECHA: 5 de Diciembre de 2016
C      ACTUALIZADO: 9 de Diciembre de 2016

C
C      implicit none
C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)

C      Constantes del problema
DOUBLE PRECISION  ALPHA_K
DOUBLE PRECISION  BER , BEI , GER , GEI , DER , DEI , HER , HEI
DOUBLE PRECISION  THETA_00 , M_00
DOUBLE PRECISION  M_01 , THETA_01
DOUBLE PRECISION  NUM , DEN , PI
DOUBLE PRECISION  H_10 , M_10 , DELTA_10 , EPSILON_10
DOUBLE PRECISION  BER_01 , BEI_01
PI=ATAN (1. DO)*4. DO
C      0.-      Cálculo de la frecuencia angular y del número de Womersley
CALL KLVNA (ALPHA_K , BER , BEI , GER , GEI , DER , DEI , HER , HEI )

```

```

C      1.-      Calculamos FUNCIONES GEOMÉTRICAS, números complejos en forma polar
THETA_00= ATAN2(BEI, BER)
M_00= SQRT(BER**2.DO+BEI**2.DO)
BER_01=(SQRT(2.DO)/2.DO*(DER-DEI))
BEI_01=(SQRT(2.DO)/2.DO*(DER+DEI))
THETA_01=ATAN2(BEI_01, BER_01)
M_01=SQRT(BER_01**2.DO+BEI_01**2.DO)
H_10=(2.DO/ALPHA_K)*M_01/M_00
DELTA_10=3.DO*PI/4.DO-THETA_01+THETA_00
NUM=H_10*SIN(DELTA_10)
DEN=1.DO-H_10*COS(DELTA_10)
EPSILON_10= ATAN2(NUM,DEN) !cálculo desfase
M_10=SQRT(1.DO+H_10**2.DO-2.DO*H_10*COS(DELTA_10))

END SUBROUTINE

```

G.3.2. Serie de Fourier: obtención de los coeficientes armónicos

En §B.3 se declara la función interpolatoria en un ciclo periódico como serie de términos sinusoidales. El siguiente algoritmo, tras realizar una subrutina de una librería externa el análisis de los armónicos de una señal, genera los coeficientes armónicos de la función interpolatoria.

$$x(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} c_n \cos\left(\frac{2\pi}{N} \frac{k}{T_s} t - \phi_n\right) + \frac{c_{N/2}}{2} \cos\left(\pi \frac{t}{T_s}\right) \quad (\text{G.2})$$

donde las frecuencias angulares armónicas son

$$\omega(k) = \frac{2\pi k}{NT_s}. \quad (\text{G.3})$$

```

SUBROUTINE SERIEFOURIER(Q,N_SAMPLINGS,DT,C_K,PHI_K,OMEGA_K)

C      SUBROUTINA:      Serie de Fourier equivalente
C      DESCRIPCIÓN:    Obtención de los coeficientes de la serie
C                      de Fourier equivalente que interpola una
C                      serie de datos discretos.
C      AUTOR:          Héctor Martínez Salvador
C      FECHA:          7 de Octubre de 2016
C      REVISADO:       8 de Diciembre de 2016
implicit none

INTEGER M,N_SAMPLINGS,m_maximo,ind,i,j,K
INTEGER signofft
DOUBLE PRECISION DT,PI
DOUBLE PRECISION C_K      (1:N_SAMPLINGS/2+1)
DOUBLE PRECISION PHI_K   (1:N_SAMPLINGS/2+1)
DOUBLE PRECISION OMEGA_K (1:N_SAMPLINGS/2+1)
DOUBLE PRECISION Q       ( 1:N_SAMPLINGS)

C      1.0-      Entrada

DOUBLE PRECISION datum (1:2*N_SAMPLINGS)

```

```

        PI=ATAN(1.D0)*4.D0

C      2.0-      Aplicación de la FFT
        ! completar con ceros la parte compleja de cada núm.
        do j=1,2*N_SAMPLINGS,2
            i = (j+1)/2
            datum(j)=Q(i)
            datum(j+1)=0.0
        end do
        ! cálculo de la dft, signofft=1; para la inversa, signofft=-1
        CALL four1(datum,N_SAMPLINGS,1)

C      3.0-      dft directa: cálculo coeficientes de polinomio interpolación
        j=1
        DO K=1,N_SAMPLINGS/2+1
            C_K(K)=2.D0*sqrt(datum(j)**2.D0+datum(j+1)**2.D0)
            & /DBLE(N_SAMPLINGS)
            PHI_K(K)=atan2(datum(j+1),datum(j))
            OMEGA_K(K)=2.D0*PI*(K-1)/(N_SAMPLINGS*DT)
            if (K.eq.1) then
                C_K(K)=C_K(K)/2.D0
            end if
            if (K.eq.(N_SAMPLINGS/2+1)) then
                C_K(K)=C_K(K)/2.D0
            end if
            j=j+2
        END DO

        END SUBROUTINE      !SUBROUTINE COEFICIENTESARMONICOS(Q,N_SAMPLINGS,DT)

```

G.3.3. Cuartiles: distribución de los valores de un vector

Para conocer cómo se distribuyen los valores de una variable almacenada en un vector, se puede realizar un tratamiento de los datos, agrupándolos por percentiles. En este caso, se usan cuartiles. Es decir, se ordenan los datos del vector de mayor a menor y se busca el valor que tienen al menos el 25, el 50, el 75 y el 100% de los datos almacenados.

```

        SUBROUTINE CUARTILES(V,N_MUESTRA,Q1,Q2,Q3,V_MAX,V_MIN)

C      SUBROUTINA:      Cuartiles
C      DESCRIPCIÓN:    Cálculo cuartiles de conjunto de datos
C      AUTOR:          Héctor Martínez Salvador
C      FECHA:          10 de Febrero de 2017
C      REVISADO:       11 de Febrero de 2017
C
        implicit none
C
C      VARIABLES GLOBALES
        INTEGER          N_MUESTRA
        DOUBLE PRECISION V          (1:N_MUESTRA)
        DOUBLE PRECISION Q1,Q2,Q3,V_MAX,V_MIN
C      VARIABLES DEL PROBLEMA
        DOUBLE PRECISION W, AUX

```

```

C VARIABLES AUXILIARES
  INTEGER N,M
C CLASIFICACION VECTOR
  DO N=1,N_MUESTRA-1
    W=      V(N)
    AUX= V(N+1)
    M=N
    DO WHILE (W.GT.AUX)
      V(M)=AUX
      V(M+1)=W
      M=M-1
      IF (M.NE.0) THEN
        W=V(M)
      ELSE
        AUX=W
      END IF
    END DO
  END DO
  V_MIN=V(1)
  Q1=V(N_MUESTRA/4)
  Q2=0.5D0*(V(N_MUESTRA/2)+ V(N_MUESTRA/2+1))
  Q3=V(3*N_MUESTRA/4)
  V_MAX=V(N_MUESTRA)

END SUBROUTINE

```

G.4. Librerías externas

Para poder realizar algunos cálculos se ha recurrido a librerías externas. Así ha sido en el caso del algoritmo FFT, ya que, debido a su complejidad, hacía desaconsejable intentar implementarlo. En el libro Numerical Recipes [34], se ha encontrado el algoritmo. Decir, que este algoritmo exige condiciones sobre el número de muestras, debiendo ser potencia de dos, $N_s = 2^n$, donde $n = 1, 2, \dots$

```

SUBROUTINE four1(datum,nn)

implicit none

INTEGER          isign,nn
DOUBLE PRECISION datum(1:2*nn)

c  Replaces datum(1:2*nn) by its discrete Fourier transform, if isign is input as
c  datum(1:2*nn) by nn times its inverse discrete Fourier transform, if isign is
c  datum is a complex array of length nn or, equivalently, a real array of length
c  MUST be an integer power of 2 (this is not checked for!).

INTEGER          i,istep,j,m,mmax,n
DOUBLE PRECISION tempi,tempr

DOUBLE PRECISION theta,wi,wpi,wpr,wr,wtemp
c  Double precision for the trigonometric recurrences.

isign=1 !forward dft by fft means
n=2*nn

```

```

j=1
do i=1,n,2 !This is the bit-reversal section of the routine.
if(j.gt.i)then
tempr=datum(j) !Exchange the two complex numbers.
tempi=datum(j+1)
datum(j)=datum(i)
datum(j+1)=datum(i+1)
datum(i)=tempr
datum(i+1)=tempi
endif
m=n/2
1 if ((m.ge.2).and.(j.gt.m)) then
j=j-m
m=m/2
goto 1
endif
j=j+m

end do

mmax=2 !Here begins the Danielson-Lanczos section of the routine.
2 if (n.gt.mmax) then !Outer loop executed log2 nn times.
istep=2*mmax
theta=6.28318530717959d0/(isign*mmax) !Initialize for the trigonometric recur
wpr=- 2.d0*sin(0.5d0*theta)**2 !rence.
wpi=sin(theta)
wr=1.d0
wi=0.d0
do m=1,mmax,2 !Here are the two nested inner loops.
do i=m,n,istep
j=i+mmax !This is the Danielson-Lanczos formula:
tempr=sngl(wr)*datum(j)-sngl(wi)*datum(j+1)
tempi=sngl(wr)*datum(j+1)+sngl(wi)*datum(j)
datum(j) =datum(i) - tempr
datum(j+1)=datum(i+1) - tempi
datum(i) =datum(i) + tempr
datum(i+1)=datum(i+1) + tempi
end do
wtemp=wr !Trigonometric recurrence.
wr=wr*wpr-wi*wpi+wr
wi=wi*wpr+wtemp*wpi+wi
end do
mmax=istep
goto 2 !Not yet done.
endif !All done.

return
END SUBROUTINE

```

El algoritmo que calcula las funciones Kelvin también ha sido encontrado en librerías externas. El profesor John Burkardt, a través de la página web de la Universidad del Estado de Florida pone a disposición una serie de recursos electrónicos, entre ellas una librería con funciones especiales [33].

SUBROUTINE KLVNA (X, BER, BEI, GER, GEI, DER, DEI, HER, HEI)

```

C      =====
C      Purpose: Compute Kelvin functions ber x, bei x, ker x
C              and kei x, and their derivatives ( x > 0 )
C      Input :  x    --- Argument of Kelvin functions
C      Output:  BER  --- ber x
C              BEI  --- bei x
C              GER  --- ker x
C              GEI  --- kei x
C              DER  --- ber'x
C              DEI  --- bei'x
C              HER  --- ker'x
C              HEI  --- kei'x
C      =====
C
C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C      PI=3.141592653589793D0
C      EL=.5772156649015329D0 !parece un cos30, CONFIRMAR
C      EPS=1.0D-15 !parece que es una tolerancia
C      IF (X.EQ.0.0D0) THEN
C          BER=1.0D0
C          BEI=0.0D0
C          GER=1.0D+300
C          GEI=-0.25D0*PI
C          DER=0.0D0
C          DEI=0.0D0
C          HER=-1.0D+300
C          HEI=0.0D0
C          RETURN
C      END IF
C      X2=0.25D0*X*X
C      X4=X2*X2
C      IF (DABS(X).LT.10.0D0) THEN
C          BER=1.0D0
C          R=1.0D0
C          DO 10 M=1,60
C              R=-0.25D0*R/(M*M)/(2.0D0*M-1.0D0)**2*X4
C              BER=BER+R
C              IF (DABS(R).LT.DABS(BER)*EPS) GO TO 15
10      CONTINUE
15      BEI=X2
C          R=X2
C          DO 20 M=1,60
C              R=-0.25D0*R/(M*M)/(2.0D0*M+1.0D0)**2*X4
C              BEI=BEI+R
C              IF (DABS(R).LT.DABS(BEI)*EPS) GO TO 25
20      CONTINUE
25      GER=- (DLOG(X/2.0D0)+EL)*BER+0.25D0*PI*BEI
C          R=1.0D0
C          GS=0.0D0
C          DO 30 M=1,60
C              R=-0.25D0*R/(M*M)/(2.0D0*M-1.0D0)**2*X4
C              GS=GS+1.0D0/(2.0D0*M-1.0D0)+1.0D0/(2.0D0*M)
C              GER=GER+R*GS
C              IF (DABS(R*GS).LT.DABS(GER)*EPS) GO TO 35
35      CONTINUE

```

```

30      CONTINUE
35      GEI=X2-(DLOG(X/2.0D0)+EL)*BEI-0.25D0*PI*BER
        R=X2
        GS=1.0D0
        DO 40 M=1,60
            R=-0.25D0*R/(M*M)/(2.0D0*M+1.0D0)**2*X4
            GS=GS+1.0D0/(2.0D0*M)+1.0D0/(2.0D0*M+1.0D0)
            GEI=GEI+R*GS
            IF (DABS(R*GS).LT.DABS(GEI)*EPS) GO TO 45
40      CONTINUE
45      DER=-0.25D0*X*X2
        R=DER
        DO 50 M=1,60
            R=-0.25D0*R/M/(M+1.0D0)/(2.0D0*M+1.0D0)**2*X4
            DER=DER+R
            IF (DABS(R).LT.DABS(DER)*EPS) GO TO 55
50      CONTINUE
55      DEI=0.5D0*X
        R=DEI
        DO 60 M=1,60
            R=-0.25D0*R/(M*M)/(2.0D0*M-1.0D0)/(2.0D0*M+1.0D0)*X4
            DEI=DEI+R
            IF (DABS(R).LT.DABS(DEI)*EPS) GO TO 65
60      CONTINUE
65      R=-0.25D0*X*X2
        GS=1.5D0
        HER=1.5D0*R-BER/X-(DLOG(X/2.0D0)+EL)*DER+0.25*PI*DEI
        DO 70 M=1,60
            R=-0.25D0*R/M/(M+1.0D0)/(2.0D0*M+1.0D0)**2*X4
            GS=GS+1.0D0/(2*M+1.0D0)+1.0D0/(2*M+2.0D0)
            HER=HER+R*GS
            IF (DABS(R*GS).LT.DABS(HER)*EPS) GO TO 75
70      CONTINUE
75      R=0.5D0*X
        GS=1.0D0
        HEI=0.5D0*X-BEI/X-(DLOG(X/2.0D0)+EL)*DEI-0.25*PI*DER
        DO 80 M=1,60
            R=-0.25D0*R/(M*M)/(2*M-1.0D0)/(2*M+1.0D0)*X4
            GS=GS+1.0D0/(2.0D0*M)+1.0D0/(2*M+1.0D0)
            HEI=HEI+R*GS
            IF (DABS(R*GS).LT.DABS(HEI)*EPS) RETURN
80      CONTINUE
      ELSE
        PPO=1.0D0
        PNO=1.0D0
        QPO=0.0D0
        QNO=0.0D0
        RO=1.0D0
        KM=18
        IF (DABS(X).GE.40.0) KM=10
        FAC=1.0D0
        DO 85 K=1,KM
            FAC=-FAC
            XT=0.25D0*K*PI-INT(0.125D0*K)*2.0D0*PI

```

```

      CS=COS(XT)
      SS=SIN(XT)
      R0=0.125D0*R0*(2.0D0*K-1.0D0)**2/K/X
      RC=R0*CS
      RS=R0*SS
      PP0=PP0+RC
      PNO=PNO+FAC*RC
      QP0=QP0+RS
85      QN0=QN0+FAC*RS
      XD=X/DSQRT(2.0D0)
      XE1=DEXP(XD)
      XE2=DEXP(-XD)
      XC1=1.0D0/DSQRT(2.0D0*PI*X)
      XC2=DSQRT(.5D0*PI/X)
      CP0=DCOS(XD+0.125D0*PI)
      CN0=DCOS(XD-0.125D0*PI)
      SP0=DSIN(XD+0.125D0*PI)
      SN0=DSIN(XD-0.125D0*PI)
      GER=XC2*XE2*(PNO*CP0-QN0*SP0)
      GEI=XC2*XE2*(-PNO*SP0-QN0*CP0)
      BER=XC1*XE1*(PP0*CN0+QP0*SN0)-GEI/PI
      BEI=XC1*XE1*(PP0*SN0-QP0*CN0)+GER/PI
      PP1=1.0D0
      PN1=1.0D0
      QP1=0.0D0
      QN1=0.0D0
      R1=1.0D0
      FAC=1.0D0
      DO 90 K=1,KM
          FAC=-FAC
          XT=0.25D0*K*PI-INT(0.125D0*K)*2.0D0*PI
          CS=DCOS(XT)
          SS=DSIN(XT)
          R1=0.125D0*R1*(4.0D0-(2.0D0*K-1.0D0)**2)/K/X
          RC=R1*CS
          RS=R1*SS
          PP1=PP1+FAC*RC
          PN1=PN1+RC
          QP1=QP1+FAC*RS
          QN1=QN1+RS
90      CONTINUE
          HER=XC2*XE2*(-PN1*CN0+QN1*SN0)
          HEI=XC2*XE2*(PN1*SN0+QN1*CN0)
          DER=XC1*XE1*(PP1*CP0+QP1*SP0)-HEI/PI
          DEI=XC1*XE1*(PP1*SP0-QP1*CP0)+HER/PI
      ENDIF
      RETURN
END SUBROUTINE

```