Transformadas de Fourier holomorfas

Pablo Palacios Herrero
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Prólogo

A principios del siglo XX, durante el primer tercio del mismo, se fundamenta el estudio conjunto de las propiedades algebraicas, topológico-geométricas y de convergencia de clases de funciones, más bien que de las funciones individuales, que acaban por constituir los espacios de funciones. Las relaciones entre éstos serán tan importantes como el estudio intrínseco de los mismos.

Entre otros ejemplos concretos, se encuentran diversos problemas de convergencia de series de Fourier en los que resulta de utilidad la clarificación de las correspondencias entre espacios de funciones integrables y de funciones holomorfas, asociados respectivamente a la circunferencia unidad y círculo unidad. A saber, sea $\mathbb{D}$ el disco unidad, es decir, el conjunto de números complejos de módulo menor que 1. Sea asimismo $\mathbb{T}$ la circunferencia unidad, o sea, el conjunto de números complejos exactamente igual a 1. Se definen

$$L^2(\mathbb{T}) := \{f : \mathbb{T} \to \mathbb{C} \text{ medible } : \Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2 dt\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty\}$$

y

$$l^2(\mathbb{Z}) := \{c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C} : \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c(n)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty\}.$$

Entonces el espacio $L^2(\mathbb{T})$ es isométricamente isomorfo, como espacio de Hilbert, a $l^2(\mathbb{Z})$ mediante la aplicación

$$\begin{aligned} \mathscr{F} :& L^2(\mathbb{T}) \to l^2(\mathbb{Z}) \\ & f \mapsto c(n) := \widehat{f}(n), \end{aligned}$$

siendo $\widehat{f}(n)$ el coeficiente $n-$ésimo de Fourier de f.

De la misma forma, el espacio $H^2(\mathbb{T})$ de funciones de $L^2(\mathbb{T})$ con coeficientes $n-$ésimos de Fourier nulos, para n negativo, es isomorfo al espacio $l^2(\mathbb{N}_0)$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. De hecho, $H^2(\mathbb{T})$ coincide con el espacio de las funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ cuyos coeficientes en el desarrollo de Taylor están en $l^2(\mathbb{N}_0)$.

Por otra parte, el espacio $H^2(\mathbb{D})$ definido como

$$H^2(\mathbb{D}) := \{F \text{ holomorfa en } \mathbb{D} : \sup_{0<r<1}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(re^{i\theta})|^2 d\theta\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty\},$$

es de gran importancia e interés en el análisis matemático real y complejo (así como lo son sus versiones multivariables y para $0 < p < \infty$ en lugar de $p = 2$). Pues bien, un teorema central para estos espacios enuncia que $\exists \tilde{F}(\theta) := \lim_{r\to 1} F(re^{i\theta}) \forall \theta$ c.t.p. en $[-\pi, \pi)$, y que $\tilde{F} \in L^2(\mathbb{T})$. Más aún, $H^2(\mathbb{D})$ es isométricamente isomorfo a $H^2(\mathbb{T})$, luego a $l^2(\mathbb{N}_0)$.

Este resultado, $H^2(\mathbb{D}) \cong H^2(\mathbb{T}) \cong l^2(\mathbb{N}_0)$ es de gran importancia puesto que conecta las funciones de variable real y las de variable compleja vía las series de Fourier y los desarrollos de Taylor.

En el medio continuo, en el que la serie de Fourier se sustituye por la transformada de Fourier, las relaciones análogas a las anteriores son considerablemente más difíciles de establecer.

En este trabajo nos centramos en cuatro teoremas fundamentales de Paley-Wiener, por los que se considera la transformada de Fourier como canal de transmisión de las funciones de variable real a las funciones de variable compleja. El contenido del trabajo se divide en cuatro capítulos:

El primer capítulo reúne un conjunto de resultados básicos sobre variable compleja, teoría de la integración y análisis de Fourier vistos en su mayoría en el grado y que se utilizarán a lo largo de la memoria.

El segundo capítulo está dedicado a la teoría de distribuciones de Laurent Schwartz que generaliza el concepto de función. Se define la derivada en el sentido de distribuciones y la multiplicación por funciones, así como el producto de convolución de distribuciones con funciones y la transformada de Fourier de una distribución.

En el tercer capítulo, utilizando transformada de Fourier compleja, se prueba el análogo del resultado $H^2(\mathbb{D}) \cong l^2(\mathbb{N}_0)$ en el caso continuo. De este modo la transformada de Fourier compleja asocia a funciones de cuadrado integrable funciones holormorfas en el semiplano superior Π^+, cuyas restricciones a las rectas horizontales de Π^+ constituirán un conjunto acotado en L^2. Otra versión de la generalización de lo que ocurre sobre la circunferencia unidad nos proporcionará funciones enteras de tipo exponencial, obtenidas como transformadas de Fourier de funciones que se anulan fuera de un compacto.

El cuarto capítulo recoge dos teoremas de Paley-Wiener para distribuciones de soporte compacto en varias variables. El primero de ellos trata sobre funciones y es la base en la que nos apoyamos para demostrar el segundo, sobre distribuciones en general.

Los teoremas tipo Paley-Wiener son de gran importancia pues enlazan los métodos analíticos del análisis de Fourier con la teoría de funciones complejas. Tienen aplicaciones a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales, así como en teoría de la señal. También, el teorema de Paley-Wiener es una piedra angular de la teoría de muestreo (sampling), en particular en métodos de integrales de contorno. Las razones anteriores son las que han hecho que hayamos elegido este tema como trabajo fin de grado.

Por último, no me gustaría terminar estas lineas introductorias sin dar las gracias a mi tutor, el catedrático José E. Galé de la Universidad de Zaragoza, por su ayuda, que ha permitido la elaboración de este trabajo.

Summary.

0.1. Previous results.

First, we set several basic results in mathematical analysis which will be applied along this work. Namely the Morera's and Cauchy's local theorems and the analytical continuation principle in complex variable. Fubini's theorem and dominated convergence theorem and the Holder inequality in integration theory. Also looking at Fourier analysis we define the space of rapidly decreasing functions

$$\mathscr{S}_n := \{\phi \in \mathscr{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n) : p_{m,N}(\phi) := \sup_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|)^N |(D^\alpha f)(x)| < \infty\},$$

with the topology induced by the seminorms $p_{m,N}$.

Then, we introduce the Fourier transform of a function $f \in \mathscr{S}_n$, as the function $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ given by

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-ix\cdot t} dm_n(t) \tag{1}$$

so that $\widehat{f} \in \mathscr{S}_n$. In fact, the operator

$$\begin{aligned} \mathscr{F} :&\mathscr{S}_n \to \mathscr{S}_n \\ &f \mapsto \widehat{f} \end{aligned}$$

is a lineal, continuous and bijective map, whose inverse is also continuous.

Finally we recall how the Fourier transform extends to L^1 directly and to L^2, this time using the Plancherel theorem.

0.2. Distributions.

Let Ω open non empty subset of $\mathbb{R}^n$. We will define the topology of $\mathscr{C}^m(\Omega)$, $0 \leq m \leq \infty$, and the one of $\mathscr{D}(\Omega)$, infinitely derivable functions with compact support, that makes them to be locally convex spaces and complete. This topology can be described, in both cases, by a family of seminorms. This spaces are very important in distribution theory.

Definition. A distribution Λ in Ω is a complex, linear and continuous functional in $\mathscr{D}(\Omega)$. The space of all distributions is denoted as $\mathscr{D}'(\Omega)$, since it is the dual space of $\mathscr{D}(\Omega)$.

Given α,a multi-index and Λ a distribution in Ω we can compute the $\alpha-$th derivative of Λ using, by definition, the formula

$$(D^\alpha \Lambda)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \phi), \quad \phi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

and also the multiplication of Λ and a function $f \in \mathbb{C}^{(\infty)}(\Omega)$, by

$$(f\Lambda)(\phi) = \Lambda(f\phi), \quad \phi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

After that, we define the support of a distribution, which plays an important role in this theory due to the properties of this distribution. For example, the set of all distribution with compact support in Ω is exactly the dual space of $\mathscr{C}^{(\infty)}(\Omega)$.

Another important space of distributions is $\mathscr{S}_n'$, the space of tempered distributions, i.e., distributions $u : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ that can be extended continuously to $\mathscr{S}_n$, assuming that $\mathscr{S}_n$ is endowed with its usual topology. For tempered distributions u we define the Fourier transform $\widehat{u}$ as the distribution given by $\widehat{u}(\phi) = u(\widehat{\phi})$, $\phi \in \mathscr{S}_n$, which is also a tempered distribution. In fact, the operator

$$\begin{aligned} \mathscr{F} : &\mathscr{S}_n' \to \mathscr{S}_n' \\ &u \mapsto \widehat{u} \end{aligned}$$

is a continuous, linear, one to one mapping of $\mathscr{S}_n'$ onto $\mathscr{S}_n'$, whose inverse is also continuous.

Finally, we define the convolution of a distribution and a test function ϕ as well as the convolution of a distribution with compact support and a $\mathscr{C}^{(\infty)}$ function, by the formula

$$(u * \phi)(x) = u(\tau_x \check{\phi}), \quad \text{being } u \text{ a distribution and } \phi \in \mathscr{C}^{(\infty)},$$

where $\tau_x \phi(y) = \phi(y - x)$ and $\check{\phi}(y) = \phi(-y)$, $y \in \mathbb{R}^n$.

0.3. Paley-Wiener theorems in L^2.

Let Π^+ be the upper half plane in the complex plane, i.e., $\Pi^+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$. Let $H^2(\Pi^+)$ denote the Hardy space, which is formed by the holomorphic functions on Π^+ such that $\sup_{y>0} \|f_y\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$, being f_y the function given by $f_y(x) = f(x + iy)$, $x \in \mathbb{R}, y > 0$.

Definition. Given $F : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ we define (formally) the complex Fourier transform of F as the function

$$\mathscr{F}_{\mathbb{C}}(F)(z) := \int_0^\infty F(t) e^{itz} dt, \quad z \in \Pi^+.$$

Since the kernel e^{itz} is an entire function in z there might be conditions on F that make $\mathscr{F}_{\mathbb{C}}(F)$ be a holomorphic function. In fact, that is part of what Paley-Wiener theorem establishes.

Theorem 0.3.1. *Given $F \in L^2(0, \infty)$, the function $f : \Pi^+ \to \mathbb{C}$ defined by*

$$f(z) = \int_0^\infty F(t) e^{itz} dt, \quad z \in \Pi^+$$

is holomorphic. Furthermore, the restriction of f to the horizontal lines of Π^+ are a bounded set on $L^2(-\infty, \infty)$.

Conversely, for every holomorphic function on Π^+ such that

$$\sup_{y>0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |f(x + iy)|^2 dx = C < +\infty,$$

there exists $F \in L^2(0, \infty)$ such that $f(z) = \int_0^\infty F(t) e^{itz} dt \, (z \in \Pi^+)$ and $\int_0^\infty |F(t)|^2 dt = C$.

Thus, the complex Fourier transform is an isometric isomorphism of Hilbert spaces between $L^2(0, \infty)$ and $H^2(\Pi^+)$, i.e., we have the analogous result, in continuos variable, of $l^2(\mathbb{N}_0) \cong H^2(\mathbb{D})$.

Now we give a similar result for entire function verifying a very important growth condition.

Definition. An entire function f is said to be of exponential type if there are $0 \le A, C < \infty$ constants such that $|f(z)| \le C e^{A|z|}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Theorem 0.3.2. *An entire function whose restriction to the real axis is on $L^2(\mathbb{R})$ is of exponential type if and only if it is the complex Fourier transform of a $L^2(\mathbb{R})$ function with compact support.*

0.4. Paley-Wiener theorems for distributions with compact support.

First, we define holomorphic functions in several variables and we show an extension of the analytical continuation principle to entire functions of many variables, that will be of usage in the proof of the Paley-Wiener theorem.

Theorem 0.4.1. *A function $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ is entire and satisfies the condition*

$$|f(z)| \leq \gamma_N \big(1+|z|\big)^{-N} e^{r|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \gamma_N < \infty, N = 0,1,\ldots,$$

if and only if there exists $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ whose support lies on $rB = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$ such that

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t) e^{-iz\cdot t} dm_n(t), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Finally, we will use the convolution and Fourier transform's properties of distributions to prove the Paley-Wiener theorem for distributions with compact support.

Theorem 0.4.2. *If $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ has its support in $rB = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$, has order N and if $f(z) = u(e_{-z})$, $z \in \mathbb{C}^n$, then f is entire, the restriction of f to $\mathbb{R}^n$ is the Fourier transform of u, and there is a constant $\gamma < \infty$ such that*

$$|f(z)| \leq \gamma (1+|z|)^N e^{r|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{2}$$

Conversely, if f is an entire function in $\mathbb{C}^n$ which satisfies (2) for some N and some γ, then there exists $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, with support in rB, such that $f(z) = u(e_{-z})$.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares.

Comenzamos enunciando algunos resultados de variable compleja, teoría de la integración y análisis de Fourier básicos, que se han estudiado a lo largo del grado en matemáticas.

En primer lugar, introducimos algunas notaciones que utilizaremos a lo largo de todo el trabajo. Los puntos de $\mathbb{C}^n$ se denotan $z = (z_1, \ldots, z_n)$ donde $z_k \in \mathbb{C}$, $1 \leq k \leq n$. Si $z_k = x_k + iy_k$, con $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, escribiremos $z = x + iy$ y los vectores $\operatorname{Re} z := x$, $\operatorname{Im} z := y$ en $\mathbb{R}^n$ se llamarán, respectivamente, parte real e imaginaria de z. Identificaremos por tanto $\mathbb{R}^n$ con el conjunto de todos los $z \in \mathbb{C}^n$ tales que $\operatorname{Im} z = 0$.

Un multi-índice α es una $n-$tupla ordenada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de enteros no negativos α_j, $1 \leq j \leq n$. A un multi-índice α podemos asociarle el operador diferencial D^α dado por $D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$ cuyo orden es $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Si $|\alpha| = 0$, $D^\alpha f = f$.

Asimismo, si $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{R}^n$ y α es un multi-índice, usaremos las siguientes notaciones:

$$|z| = \left(|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2\right)^{1/2}.$$

$$|\operatorname{Im} z| = (y_1^2 + \ldots + y_n^2)^{1/2}.$$

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}.$$

$$t \cdot z = z \cdot t = z_1 t_1 + \ldots + z_n t_n.$$

$$e_t(z) = e^{it \cdot z}.$$

Además, para simplificar nuestros enunciados, utilizaremos la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ normalizada, que es la medida m_n dada por $dm_n(x) = (2\pi)^{-n/2} dx$, donde dx es la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$.

1.1. Variable compleja.

Empezamos recordando la siguiente definición.

Definición 1.1.1. Dado Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega$ se dice que la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es derivable (compleja) en z_0 si existe $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C}$, y entonces se dice que f es holomorfa en Ω si f es derivable en z, $\forall z \in \Omega$. En el caso $\Omega = \mathbb{C}$, una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa se llama entera.

Más adelante definiremos función holomorfa en varias variables.

Teorema 1.1.2. ***(Principio de prolongación analítica.)***
Sea Ω un abierto y conexo de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω. Entonces son equivalentes:

a) f es idénticamente nula en Ω.

b) Existe $a \in \Omega$ tal que $f^{(n)}(a) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

c) f es nula en algún subconjunto de Ω con puntos de acumulación en Ω.

Definición 1.1.3. Un camino en $\mathbb{C}$ es una aplicación $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $(a,b \in \mathbb{R},\, a \leq b)$ continua y $\mathscr{C}^{(1)}$ a trozos. Su soporte, $sop\,\gamma = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$, es compacto y conexo en $\mathbb{C}$.

Decimos que γ es un camino cerrado si $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definición 1.1.4. Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino y $f : sop\,\gamma \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función continua. Entonces

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Definición 1.1.5. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ se dice estrellado si existe un punto $a \in A$, llamado centro, tal que el segmento $[a,z] \subseteq A$, $\forall z \in A$.

Teorema 1.1.6. ***(Cauchy.)*** *Sea Ω un abierto estrellado no vacío de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en Ω. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

para todo γ camino cerrado tal que $sop\,\gamma \subseteq \Omega$.

Teorema 1.1.7. ***(Morera.)*** *Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua en Ω tal que, para todo triangulo cerrado $\Delta \subseteq \Omega$, $\int_{\partial\Delta} f = 0$, donde $\partial\Delta$ denota la frontera de Δ. Entonces f es holomorfa en Ω.*

Los resultados anteriores pueden verse en [3] o [8].

1.2. Teoría de la integración.

Sea dx la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Para $1 \leq p < \infty$, se definen los espacios

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ medibles c.t.p } : \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx < \infty\}.$$

Estos espacios son espacios de Banach con la norma dada por $\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$. Si $p = 2$ entonces son espacios de Hilbert.

Para $p = \infty$, se define

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ medibles c.t.p. } : \exists M > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq M \text{ c.t.p. }\}$$

y, en tal caso, se define

$$\|f\|_\infty := \begin{cases} \text{ínf}\{M > 0 : |f(x)| \leq M \text{ en casi todo punto}\}, \\ +\infty, \quad \text{si no existe tal } M. \end{cases}$$

Teorema 1.2.1. ***(Desigualdad de Hölder.)*** *Sean $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ funciones medibles y $1 \leq p, p' \leq \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (entendiendo $\frac{1}{\infty} = 0$). Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |fg| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} = \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Destacamos el caso $p = 2$, para el que $L^2(\mathbb{R}^n)$ es espacio de Hilbert con el producto escalar dado por $(f|g) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx$ y la desigualdad de Hölder se traduce en la desigualdad de Cauchy-Schwartz: $\int_{\mathbb{R}^n} |fg| dx \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.

Teorema 1.2.2. ***(De la convergencia dominada.)*** *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de funciones medibles $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tal que existe $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que existe $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ verificando $|f_n| \leq g$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^n$. Entonces*

$$f_n, f \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ y } \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{n\to\infty} f_n dx = \int_{\mathbb{R}^n} f dx.$$

Teorema 1.2.3. ***(Fubini.)*** *Sea $f : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ medible e integrable (en $\mathbb{R}^n$, con $n = m+k$) y sea dm_l la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^l$. Entonces:*

a) $f_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *dada por* $f_x(y) = f(x,y)$ *es integrable en* $\mathbb{R}^k$*, para casi todo x;* $f^y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *dada por* $f^y(x) = f(x,y)$ *es integrable en* $\mathbb{R}^m$*, para casi todo y.*

b) $\varphi(x) := \int_{\mathbb{R}^k} f_x dm_k(x)$ *está definida en casi todo punto* $x \in \mathbb{R}^m$ *y* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^m)$.
De la misma forma, $\psi(y) := \int_{\mathbb{R}^m} f^y dm_m(x)$ *está definida en casi todo punto* $y \in \mathbb{R}^k$ *y* $\psi \in L^1(\mathbb{R}^k)$.

c) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y) dm_n(x,y) = \int_{\mathbb{R}^m} \big(\int_{\mathbb{R}^k} f(x,y) dm_k(y)\big) dm_m(x) = \int_{\mathbb{R}^k} \big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y) dm_m(x)\big) dm_k(y).$

Necesitamos considerar otros espacios de funciones. El espacio

$$\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ continua } : \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\},$$

es un espacio de Banach con la norma $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}$. Recordemos que el soporte ($sop\, f$) de una función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se define como la clausura del conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algún $1 \leq p < \infty$, el soporte de f es el menor subconjunto cerrado $X \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $f = 0$ en casi todo punto de $\mathbb{R}^n \setminus X$. Notemos que para el representante continuo de una clase de funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$, ambas definiciones coinciden.

Además, diremos que f es una función de soporte compacto si el conjunto $sop\, f$ es compacto, o equivalentemente, si existe un compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $sop\, f \subseteq K$.

Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0,\infty\}$, definimos los espacios

$$\mathscr{C}_c^k(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \text{ de clase } \mathscr{C}^{(k} \text{ con soporte compacto}\}.$$

Sin embargo, si Ω es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$, el conjunto de funciones $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ con soporte compacto se denota $\mathscr{D}(\Omega)$ debido a la importancia de este espacio en la teoría de distribuciones. Por lo tanto

$$\mathscr{D}(\Omega) = \{\phi \in \mathscr{C}^{(\infty)}(\Omega) : \exists K \text{ compacto}, sop\, \phi \subseteq K \subseteq \Omega\}.$$

Los resultados citados se encuentran, por ejemplo, en [8], [9].

1.3. Transformada de Fourier.

Definición 1.3.1. La convolución de dos funciones $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, denotada por $f * g$, se define como

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, c.t.p.,$$

de modo que por el teorema de Fubini se prueba que está definida en y cumple $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definición 1.3.2. La clase de Schwartz, también llamada espacio de funciones de decrecimiento rápido y denotado por $\mathscr{S}_n = \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, es el espacio vectorial de funciones $\mathscr{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ que verifican, para cualquier par de multi-índices α, β, la condición $|x^\beta D^\alpha f(x)| \leq C_{\alpha,\beta}$, donde $C_{\alpha,\beta}$ es una constante. Esta condición es equivalente a pedir que $P(x) D^\alpha f(x)$ esté acotada, para cualquier polinomio $P(x)$, y también equivale a pedir

$$q_{m,N}(f) := \sup_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^N |(D^\alpha f)(x)| < \infty,$$

para $N = 0,1,2,\ldots$. El espacio $\mathscr{S}_n$ es un espacio de Fréchet, reflexivo nuclear para la topología definida por la familia de seminormas $q_{m,N}$, $m, N \in \mathbb{N}_0$. Véase [9].

Es claro que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}_n$ y que $\mathscr{S}_n \subset L^p(\mathbb{R}^n), \forall 1 \leq p < \infty$, y por lo tanto, $\mathscr{S}_n$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n), \forall 1 \leq p < \infty$, por serlo $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

El espacio $\mathscr{S}_n$ juega un papel fundamental tanto en el análisis de Fourier como en la teoría de distribuciones. Las siguientes propiedades de este espacio son sencillas de probar.

Lema 1.3.3. *a) Si $f, g \in \mathscr{S}_n$, entonces $f \cdot g \in \mathscr{S}_n$.*

b) Si $f \in \mathscr{S}_n$ y P es un polinomio, $Pf \in \mathscr{S}_n$.

c) Si $f \in \mathscr{S}_n$, entonces $D^\alpha f \in \mathscr{S}_n$ para cualquier multi-índice α.

Definición 1.3.4. Dada $f \in \mathscr{S}_n$, la transformada de Fourier de f es la función $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ dada por

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f e_{-t} dm_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-it\cdot x} dm_n(t), \quad t, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

También usaremos el término *transformada de Fourier* para referirnos a la aplicación que lleva f a $\widehat{f}$.

Notemos que, como $\mathscr{S}_n \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{f}$ está bien definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$. De hecho, podemos definir la transformada de Fourier de una función integrable mediante la fórmula (1.1) Además, el operador

$$\mathscr{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \widehat{f}$$

es un operador lineal y continuo tal que $\|\mathscr{F}\| \leq 1$.

Como ya hemos comentado, el espacio $\mathscr{S}_n$ es central en el análisis de Fourier y ello es debido al siguiente teorema, entre otras razones.

Teorema 1.3.5. *La transformada de Fourier es una aplicación lineal, continua y biyectiva de $\mathscr{S}_n$ en $\mathscr{S}_n$ con inversa continua. Además, si $g \in \mathscr{S}_n$ entonces $(\widehat{g})^\wedge = \check{g}$, donde $\check{g}(x) = g(-x)$.*

Las siguientes propiedades de la transformada de Fourier son una aplicación directa de los teoremas de Fubini y de la convergencia dominada:

Proposicion 1.3.6. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n), x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$ y denotemos $\tau_x f(y) = f(y - x)$. Se tiene:*

a) $(\tau_x f)^\wedge = e_{-x}\widehat{f}$.

b) $(e_x f)^\wedge = \tau_x \widehat{f}$.

c) Sea $h(x) = f(x/\lambda)$, entonces $\widehat{h}(t) = \lambda^n \widehat{f}(\lambda t)$.

d) $(f * g)^\wedge = \widehat{f}\widehat{g}$.

e) Fórmula de multiplicación: $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) g(x) dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widehat{g}(x) dm_n(x)$.

A menudo no podemos resolver ciertos problemas para la función f pero sí podemos resolverlos para su transformada de Fourier. Esto es realmente útil si, a partir de la función $\widehat{f}$ podemos recuperar la función f, lo cual es posible bajo algunas hipótesis, por ejemplo si $f \in \mathscr{S}_n$. El siguiente teorema proporciona una hipótesis más débil.

Teorema 1.3.7. ***(Inversión de la transformada de Fourier)****. Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos la función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ dada por $g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(t) e^{ix\cdot t} dm_n(t)$. Entonces $f(x) = g(x)$ para casi todo punto $x \in \mathbb{R}^n$.*

Hemos definido la transformada de Fourier en $\mathscr{S}_n$ y extendido este concepto a $L^1(\mathbb{R}^n)$. Queremos definirla también para funciones de cuadrado integrable, pero como $L^2(\mathbb{R}^n)$ no es un subconjunto de $L^1(\mathbb{R}^n)$, la definición de transformada de Fourier dada en (1.1) no puede aplicarse a las funciones de $L^2(\mathbb{R})$. Sin embargo, si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces sí que se puede aplicar y ocurre que $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$. Esto permite extender la definición de transformada de Fourier a todo $L^2(\mathbb{R}^n)$, por densidad de $L^1 \cap L^2$ en L^2.

Teorema 1.3.8. ***(Plancherel).*** *A cada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se le puede asociar una función $\widehat{f}$ tal que se verifican las siguientes propiedades:*

a) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-ix\cdot t}dm_n(t), \quad x \in \mathbb{R}^n$.

b) Para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.

c) La aplicación $\mathscr{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ que a cada f le asocia $\widehat{f}$ es un isomorfismo isométrico de espacios de Hilbert.

d) Existe una relación simétrica entre f y $\widehat{f}$. Sea $A > 0$, si

$$\varphi_A(x) = \int_{-A}^{A} f(t)e^{-ix\cdot t}dm_n(t) \quad y \quad \psi_A(t) = \int_{-A}^{A} \widehat{f}(x)e^{ix\cdot t}dm_n(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

entonces $\|\varphi_A - \widehat{f}\|_2 \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $\|\psi_A - f\|_2 \underset{A\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Hemos definido la transformada de Fourier de una función f en $\mathbb{R}^n$ como una función en $\mathbb{R}^n$. Frecuentemente puede extenderse $\widehat{f}$ como función holomorfa en alguna región de $\mathbb{C}^n$. Por ejemplo, la transformada de Fourier de $f(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$ es $\widehat{f}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$, función racional que podemos extender a $\mathbb{C}$ como una función racional compleja con polos en $-i, i$. Esto no debería sorprendernos, ya que el núcleo e^{itz} es una función entera de z y por tanto cabe esperar propiedades de f bajo las cuales $\widehat{f}$ sea holomorfa. Éste es el objeto de estudio de este trabajo.

Estos resultados pueden verse en [8] y [9].

Capítulo 2

Teoría de distribuciones.

La teoría de distribuciones surge a finales de la década de 1940 de manos de Laurent Schwartz, quien formalizó y dio rigor a toda una teoría que extiende el cálculo diferencial a unos objetos matemáticos que generalizan el concepto de función. Estos objetos estaban apareciendo, cada vez con más frecuencia, en el análisis de Fourier y en las soluciones a ecuaciones en derivadas parciales, así como en algunas ramas de la física. El trabajo de L. Schwartz fue tan importante que le valió la medalla Fields en 1950.

2.1. Teoría de distribuciones.

Hemos presentado en los preliminares el espacio de Schwartz $\mathscr{S}_n$ y su topología natural. Otros espacios de funciones importantes en teoría de distribuciones son los espacios $\mathscr{C}^m(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto no vacío y $0 \leq m \leq \infty$. Recordamos que estos espacios son localmente convexos, metrizables y completos para la topología definida por la siguiente familia de seminormas:

$$p_{N,K}(\varphi) := \text{máx}\{|D^\alpha \varphi(x)| : x \in K, |\alpha| \leq N, \text{ con } K \text{ compacto en } \Omega \text{ y } N \in \mathbb{N}_0\}.$$

A continuación introducimos el espacio central básico a partir del cuál se establece toda la teoría de distribuciones. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío, se define el espacio de funciones test,

$$\mathscr{D}(\Omega) = \{\varphi \in \mathscr{C}^{(\infty)}(\Omega) | \exists K \subset \Omega, K \text{ compacto}, sop\, \varphi \subseteq K\}.$$

Las normas $\|\varphi\|_N = \text{máx}\{|D^\alpha \varphi(x)| : x \in \Omega, |\alpha| \leq N\}$ hacen de $\mathscr{D}(\Omega)$ un espacio metrizable localmente convexo, pero no completo. Sin embargo, podemos definir una topología en $\mathscr{D}(\Omega)$ de manera que sea un espacio completo:

Denotemos por $\mathscr{D}_K$ al espacio de funciones $\mathscr{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^N)$ cuyo soporte está en K, subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.1.1. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$.

a) Para cada compacto $K \subset \Omega$, τ_K denota la topología del espacio $\mathscr{D}_K$, inducida por las seminormas p_N en $\mathscr{C}^{(\infty)}(\Omega)$, $N = 1, 2, \ldots$, dadas por

$$p_N(\varphi) = \text{máx}\{|D^\alpha \varphi(x)| : x \in K, |\alpha| \leq N\}$$

que hacen de $\mathscr{D}_K$ un espacio metrizable y completo.

b) Notemos que $\mathscr{D}(\Omega) = \cup_{K \subset \Omega} \mathscr{D}_K$. Entonces se define la topología τ sobre $\mathscr{D}(\Omega)$ de modo que

$$\varphi_j \underset{j}{\overset{\tau}{\rightarrow}} \varphi \Leftrightarrow \exists K \subset \Omega, K \text{ compacto tal que } \varphi_j, \varphi \in \mathscr{D}_K \text{ y } \varphi_j \underset{j}{\rightarrow} \varphi \text{ en } \tau_K.$$

En otras palabras, τ es la topología del límite inductivo dada por los espacios $\mathscr{D}_K$, que admite una definición más formal que no damos aquí. En particular τ hace de $\mathscr{D}(\Omega)$ un espacio localmente convexo y completo. Véase [1] y [5].

Definición 2.1.2. Una distribución en Ω es un funcional complejo lineal y continuo en $\mathscr{D}(\Omega)$ (respecto a la topología τ).

El espacio de todas las distribuciones es por tanto el dual topológico del espacio de funciones test y se denota por $\mathscr{D}'(\Omega)$. Es decir, $\mathscr{D}'(\Omega) = \{\Lambda : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C} | \Lambda \text{ lineal y continua}\}$.

Teorema 2.1.3. *Si Λ es un funcional lineal en $\mathscr{D}(\Omega)$, son equivalentes:*

a) $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

b) A cada compacto $K \subset \Omega$ le corresponde un entero no negativo N y una constante $C < \infty$ tal que, para todo $\phi \in \mathscr{D}_K$ se tiene:

$$|\Lambda\phi| \leq C\|\phi\|_N,$$

donde $\|\phi\|_N = \text{máx}\{|D^\alpha \phi(x)| : x \in \Omega, |\alpha| \leq N\}$.

Definición 2.1.4. Si $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ es tal que un $N \in \mathbb{N}_0$ como en el teorema anterior sirve para todo subconjunto $K \subset \Omega$, K compacto, (aunque no necesariamente con la misma C), entonces el N más pequeño verificando esa propiedad se llama orden de Λ. Si no existe tal N para todo K, diremos que Λ tiene orden infinito.

Ejemplo 1.

a) Cada $x \in \Omega$ determina una distribución δ_x en $\mathscr{D}(\Omega)$, dada por $\delta_x(\phi) = \phi(x)$, de orden 0. Si $x = 0 \in \mathbb{R}^n$, la distribución δ_0 se llama medida de Dirac en $\mathbb{R}^n$.

b) Si f es localmente integrable en Ω, esto es, f es medible (respecto a la medida de Lebesgue dx) y, para todo K compacto contenido en Ω, se tiene, $\int_K |f(x)|dx < \infty$; entonces, para todo $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\Lambda_f(\phi) := \int_\Omega \phi(x) f(x) dx$ define una distribución en Ω de orden 0, pues $|\Lambda_f(\phi)| \leq \left(\int_K |f|\right) \|\phi\|_0$, con $\phi \in \mathscr{D}_K$. A menudo identificaremos la distribución Λ_f con la función f.

c) De manera similar, si μ es una medida de Borel positiva en Ω con $\mu(K) < \infty$ para todo compacto $K \subset \Omega$, entonces $\Lambda_\mu(\phi) := \int_\Omega \phi \, d\mu$, $\big(\phi \in \mathscr{D}(\Omega)\big)$ es una distribución en Ω, que se identifica con μ.

Hemos visto que toda función localmente integrable define una distribución, por lo tanto debemos definir la derivada de una distribución y el producto de una distribución por una función de manera que generalicen las definiciones usuales de derivada y producto de funciones.

Definición 2.1.5. Si α es un multi-índice y $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$, la fórmula

$$(D^\alpha \Lambda)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \phi) \quad (\phi \in \mathscr{D}(\Omega)) \tag{2.1}$$

define un funcional lineal $D^\alpha \Lambda$ en $\mathscr{D}(\Omega)$, y si $|\Lambda\phi| \leq C\|\phi\|_N$, $\forall \phi \in \mathscr{D}_K$, entonces

$$|(D^\alpha \Lambda)(\phi)| \leq C\|D^\alpha \phi\|_N \leq C\|\phi\|_{N+|\alpha|}$$

y por lo tanto $D^\alpha \Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$, es decir, D^α es de nuevo una distribución.

La definición dada para la derivada de una distribución coincide, para funciones localmente integrables, con su derivada clásica siempre que las derivadas parciales de f hasta orden N sean continuas, pues en tal caso podemos integrar por partes para llegar a (2.1).

Definición 2.1.6. Si $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ y $f \in \mathscr{C}^{(\infty)}(\Omega)$, el producto $f\Lambda$ es una distribución en Ω dada por

$$(f\Lambda)(\phi) := \Lambda(f\phi), \forall \phi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{2.2}$$

Veamos que en efecto $f\Lambda$ es una distribución. Notemos en primer lugar que la parte de la derecha de la igualdad anterior, esto es, $\Lambda(f\phi)$ tiene sentido ya que $f\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ y $f \in \mathscr{C}^{(\infty)}$. Por lo tanto, (2.2) define un funcional lineal $f\Lambda$ en $\mathscr{D}(\Omega)$. Para ver que $f\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tengamos en cuenta que, para cada compacto $K \subset \Omega$, existen constantes C y N tales que $|\Lambda\phi| \leq C\|\phi\|_N, \forall\phi \in \mathscr{D}_K$ y también existe una constante C', que depende de f, K y N, tal que $\|f\phi\|_N \leq C'\|\phi\|_N, \forall\phi \in \mathscr{D}_K$. Entonces, aplicando la fórmula de Leibniz

$$D^\alpha(f\Lambda) = \sum_{\beta\leq\alpha} c_{\alpha\beta}(D^{\alpha-\beta}f)(D^\beta g),$$

donde $c_{\alpha\beta}$ son constantes positivas cuyo valor exacto es irrelevante, se tiene que

$$|(f\Lambda)(\phi)| \leq \tilde{C}\|\phi\|_N, \forall\phi \in \mathscr{D}_K,$$

siendo $\tilde{C}$ una constante, y por el teorema 2.1.3 se deduce que $f\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$.

Definición 2.1.7. Sea $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ y sea ω un subconjunto abierto de Ω tal que $\Lambda\phi = 0$, $\forall\phi \in \mathscr{D}(\omega)$. Decimos entonces que Λ se anula en ω. Sea W la unión de todos los conjuntos abiertos $\omega \subset \Omega$ en los que Λ se anula. Llamamos soporte de Λ al complementario de W respecto de Ω. Notemos que para funciones localmente integrables la definición de soporte aquí dada, en el sentido de distribuciones, coincide con la dada en el capítulo anterior para funciones.

Lema 2.1.8. *Sea $\Lambda \in \mathscr{D}'(\Omega)$ y S_Λ el soporte de Λ.*

a) Si el soporte de $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$ no interseca S_Λ, entonces $\Lambda\phi = 0$.

b) Si S_Λ es vacío, entonces $\Lambda = 0$.

c) Si $\psi \in \mathscr{C}^{(\infty)}(\Omega)$ y $\psi = 1$ en algún conjunto abierto V que contiene a S_Λ, entonces $\psi\Lambda = \Lambda$.

Demostración. a) y b) son triviales. Para c), tomar $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Entonces $sop(\phi - \psi\phi) \cap S_\Lambda = \emptyset$, y por a) se tiene $\Lambda(\phi) = \Lambda(\psi\phi) = \psi\Lambda(\phi)$, esto es, $\Lambda = \psi\Lambda$. □

Teorema 2.1.9. *El espacio dual de $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ consiste exactamente de todas las distribuciones sobre Ω de soporte compacto.*

2.1.1. Distribuciones temperadas o moderadas.

Sabemos que $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}_n$, pero se tiene más: El espacio de funciones test $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en el espacio de funciones de decrecimiento rápido $\mathscr{S}_n$. Además, la aplicación inclusión $j : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}_n$ es una aplicación continua. Por lo tanto, si L es un funcional lineal y continuo en $\mathscr{S}_n$ podemos tomar $u_L = L \circ j$ y, debido a la continuidad de j, se tiene que $u_L \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Asimismo, la densidad de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathscr{S}_n$ implica que dos tales aplicaciones L distintas no pueden dar lugar a la misma u y por lo tanto hemos definido un isomorfismo entre, por un lado, el dual $\mathscr{S}_n'$ de $\mathscr{S}_n$ y, por otro lado, cierto espacio de distribuciones, incluido en $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Definición 2.1.10. Las distribuciones temperadas o moderadas en $\mathbb{R}^n$ son las distribuciones $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ $u : \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ que tienen extensión continua a $\mathscr{S}_n$. Si identificamos u_L con L, tenemos que las distribuciones temperadas son los elementos del dual de $\mathscr{S}_n$ y por lo tanto, el conjunto de distribuciones temperadas lo denotaremos por $\mathscr{S}_n'$.

Veamos algunos ejemplos importantes de distribuciones temperadas.

Ejemplo 2. a) Toda distribución con soporte compacto es temperada.

Demostración. En efecto, sea $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ con soporte K compacto y fijemos $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi = 1$ en algún abierto que contenga a K. Definimos $\tilde{u}(f) = u(\psi f)$, $(f \in \mathscr{S}_n)$, entonces, por el lema 2.1.8(c), $\tilde{u}(\phi) = u(\phi), \forall\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, esto es, $\tilde{u}$ extiende a u. Además, si $f_i \to 0$ en $\mathscr{S}_n$, entonces $D^\alpha f_i \to 0$ uniformemente en $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto $D^\alpha(\psi f_i) \to 0$ uniformemente en $\mathbb{R}^n$ y así $\psi f_i \to 0$ en $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Hemos probado que $\tilde{u}$ es una extensión continua de u en $\mathscr{S}_n$, y por lo tanto $u \in \mathscr{S}_n'$. □

b) Sean $1 \leq p < \infty, N > 0$ y g una función medible en $\mathbb{R}^n$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} |(1+|x|^2)^{-N} g(x)|^p dm_n(x) = C < \infty$. Entonces $g \equiv \Lambda_g$ es una distribución temperada, actuando como $\Lambda_g(f) = \int_{\mathbb{R}^n} fg dm_n$, $f \in \mathscr{S}_n$.

Demostración. Sea $f \in \mathscr{S}_n$ y supongamos que $p > 1$. Sea q el exponente conjugado de p, esto es, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Aplicando la desigualdad de Hölder, tenemos

$$|\Lambda_g f| \leq C^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |(1+|x|^2)^N f(x)|^q dm_n(x) \Big)^{\frac{1}{q}} \leq C^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1+|x|^2)^M f(x)| < \infty \tag{2.3}$$

pues $f \in \mathscr{S}_n$ y M se toma lo suficientemente grande para que $B = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{(N-M)q} dm_n(x)$ sea finito. La desigualdad (2.3) muestra que Λ_g es continuo en $\mathscr{S}_n$ y por lo tanto g induce una distribución temperada, si $p > 1$.
Falta el caso $p = 1$. De nuevo, para cada $f \in \mathscr{S}_n$ definimos $\Lambda f = \int_{\mathbb{R}^n} fg dm_n$. Entonces

$$|\Lambda f| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \Big((1+|x|^2)^N f(x) \Big) \int_{\mathbb{R}^n} |(1+|x|^2)^{-N} g(x)| dm_n(x) = C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \Big((1+|x|^2)^N f(x) \Big) < \infty.$$

Así, g es una distribución temperada. □

c) En particular, del punto anterior se sigue que si $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \leq p \leq \infty)$, entonces g es una distribución temperada. También, todo polinomio es una distribución temperada y en consecuencia también son distribuciones temperadas las funciones medibles cuyo valor absoluto está mayorado por algún polinomio.

2.1.2. Convolución y transformada de Fourier de distribuciones.

La convolución de dos funciones f y g integrables se define como $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$, $x \in \mathbb{R}^n$. Vamos a definir la convolución de una distribución y una función test y también definiremos la convolución en $\mathscr{S}_n$. Para ello, será útil introducir algunas notaciones. Sea f una función en $\mathbb{R}^n$ y $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces se define la función transladada de f, $\tau_x f$, por $(\tau_x f)(y) := f(y-x)$, y la función $\check{f}$ es la función definida mediante $\check{f}(x) := f(-x)$. Combinando ambas definiciones, podemos escribir $f(x-y) = (\tau_x \check{f})(y)$.

Definición 2.1.11. Si $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$ se llama convolución de u con ϕ y se denota $u * \phi$ a la función $(u * \phi)(x) = u(\tau_x \check{\phi})$. Es claro que, por el comentario anterior, esta definición coincide con la definición de convolución de funciones cuando u es una función localmente integrable.

Además, la propiedad $f * g = g * f$, que se verifica para funciones, hace natural definir la translación $\tau_x u$ de una distribución u, mediante la regla $(\tau_x u)(\phi) = u(\tau_{-x} \phi)$, para cualquier $\phi \in \mathscr{D}(\Omega), x \in \mathbb{R}^n$).

La convolución de distribuciones por funciones así definida verifica algunas propiedades que se cumplen para funciones, como prueba el siguiente lema.

Lema 2.1.12. *Sea $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $\phi \in \mathscr{D}(\Omega)$, siendo Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Entonces:*

a) $\tau_x(u * \phi) = (\tau_x u) * \phi = u * (\tau_x \phi)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

b) $u * \phi \in \mathscr{C}^{(\infty)}$ *y, para cualquier multi-índice α se cumple*

$$D^\alpha(u * \phi) = (D^\alpha u) * \phi = u * (D^\alpha \phi).$$

Demostración. *a)* Para cualquier $y \in \mathbb{R}^n$, tenemos:
Por un lado, $(\tau_x(u * \phi))(y) = (u * \phi)(y-x) = u(\tau_{y-x} \check{\phi})$.
Por otro lado, $((\tau_x u) * \phi)(y) = (\tau_x u)(\tau_y \check{\phi}) = u(\tau_{y-x} \check{\phi})$.
Y, por otro, tenemos, $(u * (\tau_x \phi))(y) = u(\tau_y (\tau_x \phi)\check{}\,) = u(\tau_{y-x} \check{\phi})$, que prueba $a)$.

b) Tomemos la igualdad $\tau_x((D^\alpha\phi)\check{}) = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha(\tau_x\check{\phi})$ y apliquemos u a ambos lados. Obtenemos:

$$(u*(D^\alpha\phi))(x) = ((D^\alpha u)*\phi)(x),$$

que es parte de b). Para probar el resto, tomemos un vector unitario $e \in \mathbb{R}^n$ y denotemos por D_e la derivada direccional en la dirección del vector e. Para cada $r > 0$, denotemos por $\eta_r = r^{-1}(\tau_0 - \tau_{re})$. Entonces, por a), tenemos que

$$\eta_r(u*\phi) = u*(\eta_r\phi). \tag{2.4}$$

Además, cuando $r \to 0$, $\eta_r \to D_e\phi$ en $\mathscr{D}(\Omega)$ ya que

$$\eta_r\phi = \frac{\phi(x)-\phi(x-re)}{r} = \frac{\phi(x+\rho e)-\phi(x)}{\rho}, \quad \text{con } \rho = -r.$$

Como $\eta_r\phi \underset{r\to 0}{\to} D_e\phi$ y las aplicaciones $\check{}$ y τ_x son continuas, es claro que

$$\tau_x((\eta_r\phi)\check{}) \underset{r\to 0}{\to} \tau_x(D_e\phi)\check{} \quad \text{en } \mathscr{D}(\Omega), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Tomando límites cuando $r \to 0$, se obtiene que

$$\lim_{r\to 0}(u*(\eta_r\phi))(x) = (u*(D_e\phi))(x)$$

y, usando (2.4) se tiene que $D_e(u*\phi) = u*(D_e\phi)$. Iterando esta última igualdad se tiene b).

□

Definición 2.1.13. Si $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tiene soporte compacto, se define la convolución de u y cualquier $\phi \in \mathscr{C}^{(\infty)}$ como $(u*\phi)(x) = u(\tau_x\check{\phi})$, $(x \in \mathbb{R}^n)$.

Lema 2.1.14. *Supongamos que $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tiene soporte compacto y $\phi \in \mathscr{C}^{(\infty)}$. Entonces, $u*\phi \in \mathscr{C}^{(\infty)}$ y $D^\alpha(u*\phi) = (D^\alpha u)*\phi = u*(D^\alpha\phi)$ para cualquier multi-índice α.*

Demostración. La prueba es análoga a la realizada en el lema 2.1.12. □

Definición 2.1.15. Dada una distribución temperada u, definimos la transformada de Fourier de u, denotada por $\widehat{u}$, como la distribución $\widehat{u}(\phi) := u(\widehat{\phi})$, $\phi \in \mathscr{S}_n$. Como la transformada de Fourier es un isomorfismo en $\mathscr{S}_n$ y u es continua, se sigue que $\widehat{u} \in \mathscr{S}_n'$. Podemos así asociar, a cada distribución temperada u su transformada de Fourier $\widehat{u}$ que es de nuevo una distribución temperada.

Veamos que está definición no está en conflicto con la definición dada para funciones integrables. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y consideramos su distribución asociada u_f. Tenemos

$$(u_f)\widehat{}(\phi) = u_f(\widehat{\phi}) = \int f\widehat{\phi} = \int \widehat{f}\phi = (u_{\widehat{f}})(\phi), \forall\phi \in \mathscr{S}_n.$$

La tercera de las igualdades es la fórmula de multiplicación y el resto son definiciones.

Teorema 2.1.16. *La transformada de Fourier es una aplicación lineal, continua y biyectiva de $\mathscr{S}_n'$ en $\mathscr{S}_n'$ con inversa continua. Además, si $u \in \mathscr{S}_n'$, entonces $(\widehat{u})\widehat{} = \check{u}$, donde $\check{u}$ se define como $\check{u}(\phi) = u(\check{\phi})$, para cualquier $\phi \in \mathscr{S}_n$.*

Definición 2.1.17. Si $u \in \mathscr{S}_n'$ y $\phi \in \mathscr{S}_n$ se define su producto de convolución $(u*\phi)(x) := u(\tau_x\check{\phi})$, $(x \in \mathbb{R}^n)$, que está bien definido ya que $\tau_x\check{\phi} \in \mathscr{S}_n$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Lema 2.1.18. *Sean $\phi \in \mathscr{S}_n$ y u una distribución temperada. Entonces:*

a) $u*\phi \in \mathscr{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$.

b) $u*\phi$ *tiene crecimiento polinómico y es, por lo tanto, una distribución temperada.*

c) $(u*\phi)\widehat{\ } = \widehat{\phi}\widehat{u}$.

d) $\widehat{u}*\widehat{\phi} = (\phi u)\widehat{\ }$.

Demostración. a) Se prueba de manera análoga a como hacíamos en el lema 2.1.12.

b) Para cada $f \in \mathscr{S}_n$ consideramos la familia de seminormas $\{p_N(f)\}_{N\in\mathbb{N}_0}$ dada por

$$p_N(f) := \sup_{|\alpha|\le N} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^N |(D_\alpha f)(x)|.$$

Para cada $x,y \in \mathbb{R}^n$, la desigualdad $1+|x+y|^2 \le 2(1+|x|^2)(1+|y|^2)$ muestra que

$$p_N(\tau_x f) \le 2^N (1+|x|^2)^N p_N(f), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, f \in \mathscr{S}_n. \tag{2.5}$$

Como u es un funcional continuo en $\mathscr{S}_n$ y las seminormas p_N determinan la topología de $\mathscr{S}_n$, existe un N y una constante $C<\infty$ tal que $|u(f)| \le Cp_N(f)$, $f \in \mathscr{S}_n$. Esta última desigualdad y (2.5) muestra que $|(u*\phi)(x)| = |u(\tau_x\check{\phi})| \le 2^N C p_N(\phi)(1+|x|^2)^N$, que prueba *b*).

c) Por *b*), $u*\phi$ tiene transformada de Fourier en $\mathscr{S}'_n$. Si $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte en K, entonces:

$$(u*\phi)\widehat{\ }(\widehat{\psi}) = (u*\phi)(\check{\psi}) = \int_{\mathbb{R}^n} (u*\phi)(x)\psi(-x)dm_n(x) = \int_{-K} u\big(\psi(-x)\tau_x\check{\phi}\big)dm_n(x) =$$
$$= u\int_{-K} \psi(-x)\tau_x\check{\phi}\,dm_n(x) = u((\phi*\psi)\check{\ }) = \widehat{u}((\phi*\psi)\widehat{\ }) = \widehat{u}(\widehat{\phi}\widehat{\psi}).$$

Y así,

$$(u*\phi)\widehat{\ }(\widehat{\psi}) = (\widehat{\phi}\widehat{u})(\widehat{\psi}). \tag{2.6}$$

Esta última igualdad ha sido probada para $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ y, como $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathscr{S}_n$, la transformada de Fourier de elementos de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ son también densos en $\mathscr{S}_n$, ya que la transformada de Fourier en $\mathscr{S}_n$ es un isomorfismo. Así, (2.6) se cumple para todo $\widehat{\psi} \in \mathscr{S}_n$ y en consecuencia las distribuciones $(u*\phi)\widehat{\ }$ y $\widehat{\phi}\widehat{u}$ son iguales.

d) Finalmente, por *c*), se tiene que $(\widehat{u}*\widehat{\phi})\widehat{\ } = \check{\phi}\check{u} = (\phi u)\check{\ }$, que prueba *d*) ya que $(\phi u)\check{\ } = ((\phi u)\widehat{\ })\widehat{\ }$.

$\square$

Capítulo 3

Teoremas de Paley-Wiener para funciones de cuadrado integrable.

3.1. El espacio $H^p(\Pi^+)$.

Definición 3.1.1. Denotamos por Π^+ el semiplano superior complejo, esto es,

$$\Pi^+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}.$$

Definición 3.1.2. Dada $F \in L^1(0,\infty)$ se define la transformada de Fourier compleja de F como la función

$$\mathscr{F}_{\mathbb{C}}(F)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} F(t)e^{itz}dt, \quad z \in \Pi^+.$$

Notemos la diferencia con la transformada de Fourier usual, donde aparece el núcleo e^{-itz} en lugar de e^{itz}. El uso de e^{itz} en la transformada compleja se debe a que $\mathscr{F}_{\mathbb{C}}(F)$ está definida en Π^+, donde se ha trabajado clásicamente. Destacamos entonces que si $z = x \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{F}_{\mathbb{C}}F(x) = \int_0^{\infty} F(t)e^{itx}dt = \widehat{f}(-x) = \check{f}(x),$$

es la transformada inversa de Fourier, lo cual no debería causarnos confusión.

Definición 3.1.3. Sea Π^+ el semiplano superior complejo y $1 \leq p < \infty$. Se define

$$H^p(\Pi^+) = \{f : \Pi^+ \to \mathbb{C} | f \text{ holomorfa en } \Pi^+, f_y(x) = f(x+iy) \in L^p(\mathbb{R}), \forall y > 0, \text{ y } \sup_{y>0}\|f_y\|_{L^p} < \infty\}.$$

Para cada $1 \leq p < \infty$, estos espacios de funciones complejas se llaman espacios de Hardy en el semiplano superior y son espacios de Banach con la norma dada por

$$\|f\|_{H^p(\Pi^+)} := \sup_{y>0}\|f_y\|_{L^p}.$$

Estos espacios son de gran importancia en el análisis matemático y poseen propiedades de mucho interés, entre las que destacamos el comportamiento en la frontera, como ilustración.

Teorema 3.1.4. *Sea $f \in H^p(\Pi^+), 1 \leq p < \infty$. Entonces la función frontera definida mediante*

$$\tilde{f}(x) = \lim_{y\to 0} f(x+iy)$$

existe en casi todo punto y además $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R})$.

Una vez que sabemos que f tiene extensión a la frontera, resulta que f se puede recuperar a partir de tal extensión, mediante el núcleo de Poisson.

Teorema 3.1.5. *Si $f \in H^p(\Pi^+)$, $1 \leq p < \infty$, entonces*

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\tilde{f}(t)dt, \quad z = x+iy.$$

Recíprocamente, si $g \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ y

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2+y^2} g(t)dt$$

es analítica en Π^+, entonces $f \in H^p(\Pi^+)$ y en la frontera, $f(x) = g(x)$ c.t.p.

Estos espacios satisfacen asimismo importantes propiedades de factorización, pero su estudio no es objeto de este trabajo. De hecho, nosotros solo necesitaremos considerar $H^2(\Pi^+)$. Se puede encontrar más información sobre estos espacios en [4] y en [6].

3.2. Teorema de Paley-Wiener para funciones en $L^2(0,\infty)$.

Antes de enunciar el teorema de Paley-Wiener de esta sección daremos un lema útil para su demostración.

Lema 3.2.1. *Sea $h \in L^1(\mathbb{R})$ verificando la condición $h(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*
Entonces existe una sucesión $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\alpha_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ y $\left[h(\alpha_j)+h(-\alpha_j)\right] \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Demostración. Definimos la función $\varphi(x) = h(x)+h(-x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Sea $L = \varliminf\limits_{|y|\to\infty} \varphi(y)$. Distinguimos dos casos:

a) $L = 0$. Esto es, $0 = \varliminf\limits_{|y|\to\infty} \varphi(y) = \sup\limits_{n\nearrow\infty}\left(\inf\limits_{|y|>n}\{\varphi(y)\}\right) \Rightarrow \inf\limits_{|y|>n}\{\varphi(y)\} = 0 \quad \forall n.$
Así, $\exists y_1 \in \mathbb{R}$ tal que $|y_1| > 1$ y $\varphi(y_1) < 1$. Como $\inf_{|y|>|y_1|}\varphi(y) = 0$ se tiene que

$$\inf_{|y|>\max\{|y_1|,2\}} \varphi(y) = 0,$$

luego $\exists y_2 \in \mathbb{R}$ tal que $|y_2| > \max\{|y_1|,2\}$, con $\varphi(y_2) < \frac{1}{2}$. Por recurrencia podemos construir una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $|y_1| < |y_2| < \ldots < |y_n| < \ldots$, con $|y_n| > n$ y $\varphi(y_n) < \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Es decir, $|y_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ y $\varphi(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Basta entonces tomar $\alpha_j = |y_j|$.

b) $L > 0$. Esto es, $0 < L = \varliminf\limits_{|y|\to\infty} \varphi(y) = \sup\limits_{n\nearrow\infty}\left(\inf\limits_{|y|>n}\{\varphi(y)\}\right) \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\inf\limits_{|y|>n_0}\{\varphi(y)\} > \dfrac{L}{2}$.
Por hipótesis, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(x)dx < \infty$ y $\varphi(x) = h(x)+h(-x)$ luego $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx < \infty$.
Por lo tanto

$$\begin{aligned}\infty > \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)dy &= \int_{|y|<n_0}\varphi(y)dy + \int_{|y|\leq n_0}\varphi(y)dy > \\ &> \int_{|y|<n_0}\varphi(y)dy + \int_{|y|>n_0}\frac{L}{2}dy = C + \frac{L}{2}\int_{|y|>n_0}dx = \infty,\end{aligned}$$

donde $0 \leq C < \infty$ y por lo tanto llegamos a una contradicción.

En consecuencia, el caso $L > 0$ no es posible y sólo puede ocurrir el caso $L = 0$, que implica la tesis del lema. $\square$

El siguiente lema sienta las bases para la presentación y demostración del teorema de Paley-Wiener.

Lema 3.2.2. *Si $F \in L^2(\mathbb{R})$ es tal que se anula en $(-\infty, 0)$ entonces la transformada de Fourier compleja de F, esto es, la función $f : \Pi^+ \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \int_0^\infty F(t)e^{itz}dt$, con $z \in \Pi^+$, es holomorfa en $\Pi^+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$.*

Demostración. En primer lugar, veamos que f está bien definida. Sea $z \in \Pi^+$. Escribiendo $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene $|e^{itz}| = |e^{it(x+iy)}| = e^{-ty}$.

Entonces

$$|f(z)| = \left|\int_0^\infty F(t)e^{itz}dt\right| \leq \int_0^\infty |F(t)e^{itz}|dt = \int_0^\infty |F(t)|e^{-ty}dt \leq$$

$$\overset{C-Sch}{\leq} \left(\int_0^\infty |F(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty e^{-2ty}dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2y}}\|F\|_2 < \infty,$$

puesto que $F \in L^2(0,\infty)$ y $z \in \Pi^+ \Rightarrow Im(z) = y > 0$. Por lo tanto la integral existe como integral de Lebesgue y en consecuencia f está bien definida.

Veamos que f es continua. Para ello, tomemos una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Pi^+$ tal que $z_n \underset{n\to\infty}{\to} z \in \Pi^+$.

$$|f(z) - f(z_n)| \leq \int_0^\infty |F(t)||e^{itz} - e^{itz_n}|dt \overset{C-Sch}{\leq} \|F\|_2 \|e^{itz} - e^{itz_n}\|_2 \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

En efecto:

Si $\mathrm{Im}(z) = y > \delta > 0$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Im}(z_n) = y_n > \delta$, $\forall n \geq n_0$, y por lo tanto se tiene

$$|e^{itz} - e^{itz_n}|^2 \leq \left(|e^{itz}| + |e^{itz_n}|\right)^2 = \left(e^{-ty} + e^{-ty_n}\right)^2 \leq \left(e^{-t\delta} + e^{-t\delta}\right)^2 = 4e^{-2t\delta} \in L^1(0,\infty).$$

Entonces, haciendo uso del teorema de la convergencia dominada,

$$\lim_{n\to\infty} \|e^{itz} - e^{itz_n}\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty |e^{itz} - e^{itz_n}|^2 dt \overset{TCD}{=} \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} |e^{itz} - e^{itz_n}|^2 dt = 0.$$

En consecuencia f es continua en Π^+. Veamos ahora que es holomorfa en Π^+.

Para cualquier camino cerrado γ en Π^+,

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \int_0^\infty F(t)e^{itz}dt\,dz \overset{Fubini}{=} \int_0^\infty \int_\gamma F(t)e^{itz}\,dz\,dt = \int_0^\infty F(t) \int_\gamma e^{itz}\,dz\,dt \overset{Cauchy}{=} 0.$$

Notemos que se puede aplicar el teorema de Fubini porque $|F(t)e^{itz}| \in L^1(0,\infty)$ y el soporte $sop\,\gamma$ de γ es compacto. La integral final es cero puesto que la función exponencial es holomorfa en Π^+ y γ es un camino cerrado en el abierto Π^+. Ahora bien, el hecho de que $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para cualquier camino cerrado $\gamma \subset \Pi^+$ y f continua en Π^+ nos permite concluir, haciendo uso del Teorema de Morera, que la función f es holomorfa en Π^+. □

Teorema 3.2.3. ***(Paley-Wiener.)*** *Dada una función F de $L^2(0,\infty)$, la función $f : \Pi^+ \to \mathbb{C}$ definida por*

$$f(z) = \int_0^\infty F(t)\,e^{itz}\,dt$$

es una función holomorfa. Además, sus restricciones a las rectas horizontales de Π^+ constituyen un conjunto acotado en $L^2(-\infty,\infty)$, es decir, $\sup_{0<y<\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty |f(x+iy)|^2 dx < \infty$.

Recíprocamente, para toda función holomorfa en Π^+ que verifica la condición

$$\sup_{0<y<\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty |f(x+iy)|^2\,dx = C < +\infty$$

existe una $F \in L^2(0,\infty)$ tal que

$$f(z) = \int_0^\infty F(t)\,e^{itz}\,dt \quad (z \in \Pi^+) \quad y \quad \int_0^\infty |F(t)|^2\,dt = C.$$

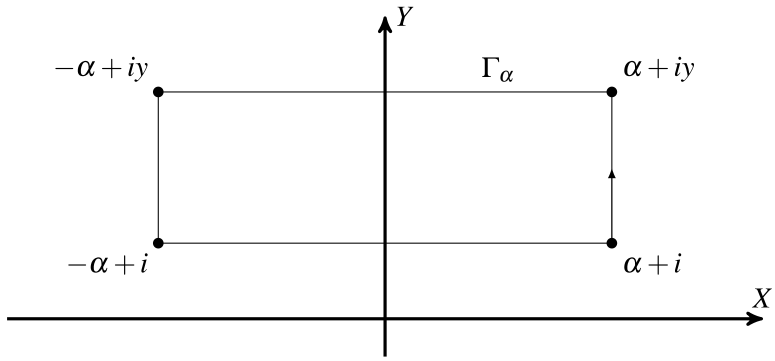
Demostración. Por el lema 3.2.2 la función f definida por $f(z)=\int_0^\infty F(t)\,e^{itz}\,dt$, $(z\in\Pi^+)$ es holomorfa en Π^+. Veamos que sus restricciones a las rectas horizontales de Π^+ constituyen un conjunto acotado en $L^2(-\infty,\infty)$:

Sea $y>0$ fijo, y escribamos $f_y(x)=f(x+iy)=\int_0^\infty F(t)\,e^{-ty}\,e^{itx}\,dt$. Se tiene por lo tanto que la función f es la antitransformada de Fourier de la función $F(t)e^{-yt}$. Podemos aplicar el teorema de Plancherel para deducir que, para todo $y>0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2dx=\|f_y\|_2^2=\|F(t)e^{-yt}\|_2^2=\int_0^{\infty}|F(t)e^{-ty}|^2dt=\int_0^{\infty}|F(t)|^2e^{-2ty}dt\le\int_0^{\infty}|F(t)|^2dt.$$

Es decir, $\sup_{y>0}\|f_y\|_2\le\|F\|_{L^2(0,\infty)}<\infty$. Hemos probado así la primera parte del teorema.

Recíprocamente, sea f holomorfa en Π^+ verificando la condición del enunciado. Fijemos de nuevo $y>0$ y consideremos, para cada $\alpha>0$, el camino rectangular cerrado Γ_α de vértices $\pm\alpha+i$ y $\pm\alpha+iy$, orientado positivamente (en la figura, $y>1$).



Haciendo uso del teorema de Cauchy, tenemos $\int_{\Gamma_\alpha}f(z)\,e^{-itz}\,dz=0,\quad\forall t\in\mathbb{R}$.

Sea $\beta\in\mathbb{R}$ un número cualquiera y consideramos el segmento comprendido entre $\beta+i$ y $\beta+iy$. Pongamos $I=[y,1]$ si $y<1$; ó $I=[1,y]$ si $y>1$.

Sea $\Phi(\beta)=\int_I f(z)e^{-itz}du$, donde $z=\beta+iu$. Entonces:

$$|\Phi(\beta)|^2=|\int_I f(\beta+iu)e^{-it(\beta+iu)}du|^2\overset{C-Sch}{\le}\int_I|f(\beta+iu)|^2du\int_I|e^{-it(\beta+iu)}|^2du=\Lambda(\beta)\int_I e^{2tu}du,\quad(3.1)$$

donde

$$\Lambda(\beta)=\int_I|f(\beta+iu)|^2du\ge0.$$

Por otra parte:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(\beta)d\beta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_I|f(\beta+iu)|^2du\right)d\beta\overset{Fubini}{\underset{\ge0}{=}}\frac{1}{2\pi}\int_I\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(\beta+iu)|^2d\beta\right)du=$$
$$\int_I\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(\beta+iu)|^2d\beta\right)du\le\int_I Cdu=Cm(I),$$

siendo m la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$, y puesto que, por hipótesis, $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(\beta+iu)|^2d\beta$ está acotado por C, independiente de u.

De $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda(\beta)d\beta\le Cm(I)$ se deduce, aplicando el lema 3.2.1, que existe una sucesión $\{\alpha_j\}$ tal que $\alpha_j\to\infty$ y $\big(\Lambda(\alpha_j)+\Lambda(-\alpha_j)\big)\to0$ cuando $j\to\infty$. Teniendo en cuenta que $\Lambda(\beta)\ge0$ se deduce que $\Lambda(\alpha_j)\underset{j\to\infty}{\to}0$ y $\Lambda(-\alpha_j)\underset{j\to\infty}{\to}0$. En consecuencia, por (3.1) se tiene:

$$\Phi(\alpha_j)\underset{j\to\infty}{\to}0\quad\text{y}\quad\Phi(-\alpha_j)\underset{j\to\infty}{\to}0.$$

Destacamos que esto se cumple para todo t real, puesto que la sucesión $\{\alpha_j\}$ no depende de t. Definamos ahora la función

$$g_j(y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} f(x+iy)e^{-itx}dx$$

Se tiene

$$\lim_{j\to\infty}\left(e^{ty}g_j(y,t) - e^t g_j(1,t)\right) = 0, \quad \forall y \tag{3.2}$$

puesto que

$$\begin{aligned}
0 &\overset{Cauchy}{=} \int_{\Gamma_{\alpha_j}} f(z)e^{-itz}dz = \\
&= i\int_I f(\alpha_j+iu)e^{-it(\alpha_j+iu)}du - i\int_I f(-\alpha_j+iu)e^{-it(-\alpha_j+iu)}du + \int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} f(x+i)e^{-it(x+i)}dx - \\
&- \int_{-\alpha_j}^{\alpha_j} f(x+iy)e^{-it(x+iy)}dx = i\Phi(\alpha_j) - i\Phi(-\alpha_j) + 2\pi e^t g_j(1,t) - 2\pi e^{ty}g_j(y,t)
\end{aligned}$$

y al tomar límites cuando $j\to\infty$ se tiene (3.2), puesto que $\Phi(\alpha_j)$ y $\Phi(-\alpha_j)$ tiende a cero.

Escribimos $f_y(x) = f(x+iy)$. Por hipótesis, $f_y \in L^2(-\infty,\infty)$ y por el teorema de Plancherel tenemos

$$\lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f_y}(t) - g_j(y,t)|^2dt = 0,$$

siendo $\widehat{f_y}$ la transformada de Fourier de f_y. En particular, existe una subsucesión de $\{g_j(y,t)\}$ que converge puntualmente a $\widehat{f_y}(t)$ para casi todo t.

Sea $F(t) = e^t\widehat{f_1}(t)$. Por (3.2), $F(t) = e^{ty}\widehat{f_y}(t), \forall y \in (0,\infty)$, en casi todo $t\in\mathbb{R}$, fijado y. Aplicando el teorema de Plancherel, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ty}|F(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f_y}(t)|^2dt \overset{Plancherel}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f_y(x)|^2dx \le C. \tag{3.3}$$

Tomando límites cuando $y\to\infty$ y aplicando el teorema de la convergencia dominada, se tiene

$$\begin{aligned}
C &\ge \lim_{y\to\infty}\int_{-\infty}^{0} e^{-2ty}|F(t)|^2dt + \lim_{y\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-2ty}|F(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{0}\lim_{y\to\infty} e^{-2ty}|F(t)|^2dt + \int_0^{\infty}\lim_{y\to\infty} e^{-2ty}|F(t)|^2dt \\
&= \int_{-\infty}^{0}\lim_{y\to\infty} e^{-2ty}|F(t)|^2dt.
\end{aligned}$$

Esta última integral diverge, lo cuál es una contradicción, a no ser que $|F(t)|^2 = 0$ en casi todo $t\in(-\infty,0)$ y por lo tanto $F(t) = 0$ en casi todo $t\in(-\infty,0)$. Por otro lado, tomando límites en (3.3) cuando $y\to 0$ y haciendo de nuevo uso del teorema de la convergencia dominada, tenemos

$$C \ge \lim_{y\to 0}\int_0^{\infty} e^{-2ty}|F(t)|^2dt = \int_0^{\infty}\lim_{y\to 0} e^{-2ty}|F(t)|^2dt = \int_0^{\infty}|F(t)|^2dt.$$

Se sigue que, si $y>0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{f_y}(t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty}|e^{-ty}F(t)|dt = \int_0^{\infty} e^{-ty}|F(t)|dt \overset{C-Sch}{\le} \|F(t)\|_2\|e^{-ty}\|_2 < \infty.$$

Por lo tanto, $\widehat{f_y}\in L^1$ siempre que $y>0$. Luego podemos aplicar el teorema de inversión de la transformada de Fourier para obtener $f_y(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f_y}(t)e^{itx}dt$. Y de aquí:

$$f(z) = \int_0^{\infty} F(t)e^{-yt}e^{itx}dt = \int_0^{\infty} F(t)e^{itz}dt \qquad (z\in\Pi^+).$$

□

Corolario. La transformada de Fourier compleja es un isomorfismo isométrico entre los espacios $L^2(0,\infty)$ y $H^2(\Pi^+)$. En particular obtenemos que $H^2(\Pi^+)$ es un espacio de Hilbert.

Demostración. El teorema (3.2.3) establece, por un lado, que si $F \in L^2(0,\infty)$ entonces $f : \Pi^+ \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \int_0^\infty F(t)e^{itz}dt$, $z \in \Pi^+$ es holomorfa en Π^+ y $\sup_{y>0} \frac{1}{2\pi}\|f_y\|_2 \leq \|F\|_{L^2(0,\infty)}$; y por otro lado, que para toda $f \in H^2(\Pi^+)$ (f holormofa tal que $\sup_{y>0} \frac{1}{2\pi}\|f_y\|_2 = C < \infty$) existe $F \in L^2(0,\infty)$ tal que $f(z) = \int_0^\infty F(t)e^{itz}dt$, $z \in \Pi^+$ y $\|F\|_2 := \int_0^\infty |F(t)|^2 dt \leq C$.
Es decir, $\|f\|_{H^2(\Pi^+)} = \sup_{y>0} \frac{1}{2\pi}\|f_y\|_2 = \|F\|_{L^2(0,\infty)}$ y por lo tanto la transformada de Fourier es un isomorfismo isométrico entre $L^2(0,\infty)$ y $H^2(\Pi^+)$. □

3.3. Teorema de Paley-Wiener para funciones enteras de tipo exponencial.

En el teorema 3.2.3 anterior hemos establecido la identificación del espacio $L^2(0,\infty)$ con el espacio $H^2(\Pi^+)$, de funciones holomorfas en Π^+, en analogía con la correspondencia existente entre $l^2(\mathbb{N}_0)$ y el espacio $H^2(\mathbb{D})$, subespacio de funciones holomorfas en $\mathbb{D}$.

A continuación vamos a demostrar un resultado análogo al anterior, para funciones de $L^2(\mathbb{R})$ con soporte en intervalos acotados. Caracterizaremos las imágenes de la transformada de Fourier (compleja) de tales funciones como las funciones enteras de tipo exponencial.

Definición 3.3.1. Se dice que una función f entera en $\mathbb{C}$ es de tipo exponencial si existen constantes $A, C < \infty$ tales que $|f(z)| \leq Ce^{A|z|}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Lema 3.3.2. *Dada f entera de tipo exponencial con constantes $A, C > 0$ tales que $|f(z)| \leq Ce^{A|z|}$, definimos, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, la semirrecta $\Gamma_\alpha = se^{i\alpha}$, $(0 \leq s < \infty)$, el conjunto $\Pi_\alpha = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(we^{i\alpha}) > A\}$, y la función $\Phi_\alpha(w) = \int_{\Gamma_\alpha} f(z)e^{-wz}dz$ $(w \in \Pi_\alpha)$. Entonces, dos cualesquiera de las funciones Φ_α coinciden en la intersección de sus dominios de definición.*

Demostración. Sean $f, A, \alpha, \Gamma_\alpha, \Pi_\alpha$ y Φ_α como en el enunciado. Para cada $w \in \Pi_\alpha$ podemos reescribir

$$\Phi_\alpha(w) = \int_{\Gamma_\alpha} f(z)e^{-wz}dz = e^{i\alpha}\int_0^\infty f(se^{i\alpha})\exp(-wse^{i\alpha})ds.$$

Notando que

$$|f(se^{i\alpha})\exp(-wse^{i\alpha})| \leq Ce^{A|se^{i\alpha}|}|\exp(-wse^{i\alpha})| = Ce^{As}e^{s\mathrm{Re}(-we^{i\alpha})} = Ce^{-s\left(\mathrm{Re}(we^{i\alpha})-A\right)},$$

se prueba, de manera análoga a como hacíamos en el lema 3.2.2 que Φ_α es holomorfa en el abierto Π_α.

Veamos que $\Phi_\alpha = \Phi_\beta$ en la intersección de sus dominios de definición. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $0 < \beta - \alpha < \pi$. Denotemos

$$\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \eta = \cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) > 0.$$

Para $w = |w|e^{-i\gamma}$, se tiene

$$\mathrm{Re}(we^{i\alpha}) = \mathrm{Re}(|w|e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}) = |w|\eta = \mathrm{Re}(|w|e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}) = \mathrm{Re}(we^{i\beta}),$$

de modo que $w \in Dom(\Phi_\alpha) \cap Dom(\Phi_\beta) = \Pi_\alpha \cap \Pi_\beta$ si $|w| > \frac{A}{\eta}$.

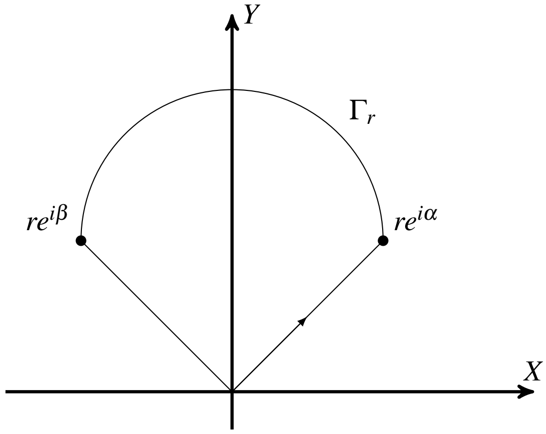
Consideramos ahora la integral

$$\int_{\Gamma_r} f(z)e^{-wz}dz,$$

siendo Γ_r el arco circular dado por $\Gamma_r(t) = re^{it}$, $\alpha \leq t \leq \beta$, $r > 0$. Entonces, para todo $z = re^{it} \in \Gamma_r$,

$$\mathrm{Re}(-wz) = -|w|r\cos(t-\gamma) \leq -|w|r\eta,$$

ya que $\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \leq t-\gamma \leq \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$ se sigue que el valor del integrando está acotado sobre Γ_r por $Ce^{(A-|w|\eta)r}$. Por lo tanto, si $|w| > \frac{A}{\eta}$ se tiene que $\int_{\Gamma_r} f(z)e^{-wz}dz \to 0$ cuando $r \to \infty$.



Aplicando el teorema de Cauchy, se tiene que

$$\int_{\Gamma_r} f(z)e^{-wz}dz + \int_{[0,re^{i\alpha}]} f(z)e^{-wz}dz - \int_{[0,re^{i\beta}]} f(z)e^{-wz}dz = 0.$$

Como la primera integral tiende a 0 cuando r tiende a ∞, concluimos que $\Phi_\alpha(w) = \Phi_\beta(w)$ siempre que $w = |w|e^{-i\gamma}$ y $|w| > \frac{A}{\eta}$. Teniendo en cuenta que $Dom(\Phi_\alpha) \cap Dom(\Phi_\beta) = \{w \in \mathbb{C} : |w| > \frac{A}{\eta}\}$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{C}$, se sigue, aplicando el principio de prolongación analítica que $\Phi_\alpha = \Phi_\beta$ en la intersección de sus dominios de definición. $\square$

Lema 3.3.3. *Dada f entera de tipo exponencial con constantes C y A, definimos $f_\varepsilon(x) = f(x)e^{-\varepsilon|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Entonces*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x)e^{-itx}dx = 0, \quad |t| > A.$$

Demostración. Definimos Π_α, Φ_α como en el lema 3.3.2, esto es,

$$\Phi_\alpha(w) = e^{i\alpha} \int_0^\infty f(se^{i\alpha}) \exp(-wse^{i\alpha})ds, \quad w \in \Pi^\alpha.$$

Destacamos los casos $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$:

$$\Phi_0(w) = \int_0^\infty f(x)e^{-wx}dx \qquad (\text{Re } w > 0).$$

$$\Phi_\pi(w) = -\int_{-\infty}^0 f(x)e^{-wx}dx \qquad (\text{Re } w < 0),$$

son holomorfas en Re $w > 0$ y Re $w < 0$ respectivamente ya que $\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 dx < \infty$.

Tenemos, para todo $\varepsilon > 0$,

$$\Phi_0(\varepsilon+it) - \Phi_\pi(-\varepsilon+it) = \int_0^\infty f(x)e^{-\varepsilon x}e^{-itx}dx + \int_{-\infty}^0 f(x)e^{\varepsilon x}e^{-itx}dx$$
$$= \int_0^\infty f(x)e^{-\varepsilon|x|}e^{-itx}dx + \int_{-\infty}^0 f(x)e^{-\varepsilon|x|}e^{-itx}dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-\varepsilon|x|}e^{-itx}dx = \int_{-\infty}^\infty f_\varepsilon(x)e^{-itx}dx.$$

Queríamos ver que $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^\infty f_\varepsilon(x)e^{-itx}dx = 0 \quad (t \in \mathbb{R}, |t| > A)$. Vamos a probar por lo tanto que $\lim_{\varepsilon\to 0} \Phi_0(\varepsilon+it) - \Phi_\pi(-\varepsilon+it) = 0$, si $|t| > A$.

Ahora bien, aplicando el lema 3.3.2, sabemos que dos cualesquiera de estas funciones Φ_α coinciden en la intersección de sus dominios de definición.

Como $\Pi_0 \cap \Pi_{\pi/2} = \{w \in \mathbb{C} | Re(w) > A \text{ y } \mathrm{Im}(w) < -A\}$ se tiene que $\Phi_0(\varepsilon + it) = \Phi_{\pi/2}(\varepsilon + it)$ siempre que $t < -A$; y también $\Pi_\pi \cap \Pi_{-\pi/2} = \{w \in \mathbb{C} | Re(w) < -A \text{ y } \mathrm{Im}(w) > A\}$, luego $\Phi_\pi(-\varepsilon + it) = \Phi_{-\pi/2}(-\varepsilon + it)$ si $t > A$. Así, podemos cambiar Φ_0 por $\Phi_{\pi/2}$ si $t < -A$ y Φ_π por $\Phi_{-\pi/2}$ si $t > A$ y entonces es obvio que la diferencia tiende a cero cuando $\varepsilon \to 0$. □

Teorema 3.3.4. ***(Paley-Wiener).*** *Una función entera cuya restricción al eje real está en $L^2(\mathbb{R})$ es de tipo exponencial si y solo si es la transformada de Fourier de una función de $L^2(\mathbb{R})$ con soporte compacto. En este caso, si $F \in L^2(\mathbb{R})$ y $f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{itz}$, $z \in \mathbb{C}$, es una función entera tal que su restricción al eje real está en $L^2(\mathbb{R})$, entonces existen constantes $A, C < \infty$ tales que $|f(z)| \leq Ce^{A|z|}$, $\forall z \in \mathbb{C}$ si y solo si $sop F \subseteq [-A, A]$.*

Demostración. Sean $0 < A < \infty$, $F \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $sop F \subseteq [-A, A]$ y $f(z) = \int_{-A}^{A} F(t)\, e^{itz}\, dt$. Usando el mismo razonamiento que en el lema 3.2.2 se obtiene que f es entera. Además,

$$|f(z)| \leq \int_{-A}^{A} |F(t)| e^{-ty} dt \leq e^{A|y|} \int_{-A}^{A} |F(t)| dt, z \in \mathbb{C}.$$

Sea C esta última integral, que es finita ya que

$$\int_{-A}^{A} |F(t)| dt \overset{C-Sch}{\leq} \|F\|_2 \int_{-A}^{A} dt = 2A \|F\|_2 < +\infty.$$

Así, se deduce que

$$|f(z)| \leq Ce^{A|z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Esto es, f es de tipo exponencial.

Recíprocamente, dada f de tipo exponencial con constantes A, C como antes, definimos $f_\varepsilon(x) = f(x) e^{-\varepsilon |x|}$, $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Por el lema 3.3.3 tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x) e^{-itx} dx = 0, \quad |t| > A. \tag{3.4}$$

Ahora, por el teorema de la convergencia dominada se sigue que $\|f_\varepsilon - f\|_2 \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$. En efecto:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f_\varepsilon - f\|_2^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(x) - f(x)|^2 dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 |1 - e^{-\varepsilon |x|}|^2 dx.$$

Como $\varepsilon > 0$, se deduce que $e^{-\varepsilon |x|} < 1$, luego $|1 - e^{-\varepsilon |x|}| < 1$ y por tanto $|f(x)|^2 |1 - e^{-\varepsilon |x|}|^2 < |f(x)|^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Ahora bien, como la restricción de f a $\mathbb{R}$ está en $L^2(\mathbb{R})$, se tiene que $|f(x)|^2 \in L^1(\mathbb{R})$ y en consecuencia se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada para deducir:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|f_\varepsilon - f\|_2 = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon \to 0} |f(x)|^2 |1 - e^{-\varepsilon |x|}|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\varepsilon \to 0} |f(x)|^2 (1 - e^{-\varepsilon |x|})^2 dx = 0$$

Por ello, en virtud del teorema de Plancherel, las transformadas de Fourier de f_ε convergen en L^2 a la restricción al eje real de la transformada de Fourier de f, que llamaremos F. Por lo tanto, (3.4) implica que F se anula fuera de $[-A, A]$ y $F \in L^2(\mathbb{R})$. Por el teorema de inversión de la transformada de Fourier, la igualdad

$$f(z) = \int_0^{\infty} F(t) e^{-yt} e^{itx} dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{itz} dt = \int_{-A}^{A} F(t) e^{itz} dt$$

se verifica para casi todo $z \in \mathbb{C}$. Como $f(z)$ y $\int_{-A}^{A} F(t) e^{itz} dt$ son funciones enteras, aplicando el principio de prolongación analítica, se deduce que

$$f(z) = \int_{-A}^{A} F(t)\, e^{itz}\, dt \quad (\forall z \in \mathbb{C}),$$

que es la tesis del teorema. □

Capítulo 4

Teorema de Paley-Wiener para distribuciones de soporte compacto.

Hemos visto el teorema clásico de Paley-Wiener que caracteriza las funciones enteras de tipo exponencial (de una variable compleja), cuyas restricciones al eje real están en L^2, como las transformadas de Fourier de funciones en L^2 con soporte compacto. Vamos a mostrar dos teoremas análogos a éste, pero en varias variables, uno para funciones $\mathscr{C}^{(\infty)}$ con soporte compacto y otro para distribuciones con soporte compacto. Notemos que las funciones $\mathscr{C}^{(\infty)}$ son caso particular de las distribuciones.

4.1. Teorema de Paley-Wiener para funciones $\mathscr{C}^{(\infty)}$ de soporte compacto.

Lema 4.1.1. *Sea γ una constante real. Entonces,*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{e^{i\gamma x}-1}{\gamma x}\right| < \infty.$$

Demostración. Sabemos, por equivalencias de límites que $\text{lím}_{a\to 0}\frac{e^{ia}-1}{ia} = 1$. Esto quiere decir, por definición de límite, que dado $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que si $|a| \leq \delta$ entonces $\left|\frac{e^{ia}-1}{ia}\right| \leq 1$. Es decir, existe $\delta > 0$ tal que si $|\gamma x| \leq \delta$ entonces $\left|\frac{e^{i\gamma x}-1}{\gamma x}\right| \leq 1$, o equivalentemente, $\left|\frac{e^{i\gamma x}-1}{\gamma x}\right| \leq 1$ siempre que $|x| \leq \frac{\delta}{|\gamma|}$.

Fijado ese δ, si $|x| \geq \frac{\delta}{|\gamma|}$ se tiene que $\frac{1}{|x|} \leq \frac{|\gamma|}{\delta}$ y aplicando la desigualdad triangular tenemos

$$\left|\frac{e^{i\gamma x}-1}{|\gamma| x}\right| \leq \frac{2}{|\gamma||x|} \leq \frac{2}{\delta}.$$

En conclusión, $\left|\frac{e^{i\gamma x}-1}{x\gamma}\right| \leq \text{máx}\{1, \frac{2}{\delta}\}$ □

Lema 4.1.2. *Si $(1+|x|)^N|f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\forall N \in \mathbb{N}$ entonces la transformada de Fourier de f, $\widehat{f}$, es una función $\mathscr{C}^{(\infty)}$ en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sea $t = (t_1,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, $t' = (t_1+\varepsilon, t_2,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^n$. Tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \widehat{f}}{\partial t_1}(t) &:= \text{lím}_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\widehat{f}(t')-\widehat{f}(t)}{\varepsilon}\right) = \text{lím}_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left(\frac{e^{-it'\cdot x}-e^{-it\cdot x}}{\varepsilon}\right) dm_n(x)\\ &= \text{lím}_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} -ix_1 f(x)e^{-it\cdot x}\left(\frac{e^{-i\varepsilon x_1}-1}{-ix_1\varepsilon}\right) dm_n(x).\end{aligned}$$

Ahora bien, aplicando el lema 4.1.1,

$$\left|-ix_1 f(x)e^{-it\cdot x}\left(\frac{e^{-i\varepsilon x_1}-1}{-ix_1\varepsilon}\right)\right| \leq C|x_1 f(x)| \leq C(1+|x|)|f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

siendo C constante, y podemos aplicar entonces el teorema de la convergencia dominada, obteniendo

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial t_1}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} -ix_1 f(x)e^{-it\cdot x} \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{e^{-i\varepsilon x_1}-1}{-ix_1\varepsilon}\right) dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} -ix_1 f(x)e^{-it\cdot x} dm_n(x).$$

Es claro que este razonamiento es válido para cualquier otra componente de $\widehat{f}$ y así podemos derivar $\widehat{f}$ respecto cualquier componente. Asimismo, puede reiterarse el proceso indefinidamente, hallando las derivadas de $\widehat{f}$ de cualquier orden, concluyendo pues que $\widehat{f} \in \mathscr{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$. □

Existe toda una teoría de funciones holomorfas en varias variables complejas, el lector puede consultar [7] o [2]. Pero para este trabajo es suficiente considerar la siguiente definición.

Definición 4.1.3. Si Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$ y f es una función compleja continua en Ω, decimos que f es holomorfa en Ω si lo es en cada una de sus componentes, es decir, si $(a_1,\ldots,a_n)\in\Omega$, cada una de las funciones $g_1,\ldots,g_n$ dadas por $g_i(\lambda) = f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+\lambda,a_{i+1},\ldots,a_n)$, es holomorfa en algún entorno de $0\in\mathbb{C}$. Notemos que g_i está definida en algún entorno de 0 por la continuidad de f. Como en el caso $n=1$, diremos que una función es entera si es holomorfa en $\mathbb{C}^n$.

Lema 4.1.4. *Si f es entera (en $\mathbb{C}^n$) y se anula en $\mathbb{R}^n$, entonces f es idénticamente cero.*

Demostración. El caso $n=1$ se sigue del principio de prolongación analítica. Para el caso general n, llamemos P_k a la siguiente propiedad de f: si $z\in\mathbb{C}^n$ tiene al menos k coordenadas reales consecutivas, entonces $f(z)=0$. Queremos probar P_0, para ello, procedamos por inducción sobre k:

P_n es trivial, ya que, por hipótesis, f se anula en $\mathbb{R}^n$. Sea $1\le k\le n$ y supongamos cierto P_k. Tomamos $a_1,\ldots,a_k$ reales. Entonces la función $g_k(\lambda) = f(a_1,\ldots,a_{k-1},a_k+\lambda,a_{k+1},\ldots,a_n)$, $\lambda\in\mathbb{C}$, es cero en el eje real. Aplicando el caso $n=1$ a esta función, concluimos que $g_k(\lambda)=0$, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$. Esto prueba la propiedad P_{k-1} y así hemos probado el lema. □

Teorema 4.1.5. ***(Paley-Wiener).***

a) Si $\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte en $rB=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|\le r\}$ y

$$f(z) := \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t)e^{-iz\cdot t} dm_n(t), \quad z\in\mathbb{C}^n, \tag{4.1}$$

entonces f es entera y existe $\gamma_N<\infty$ tal que

$$|f(z)| \le \gamma_N(1+|z|)^{-N}e^{r|\mathrm{Im}\, z|}, \quad (z\in\mathbb{C}^n, N=0,1,\ldots). \tag{4.2}$$

b) Recíprocamente, si f es entera satisfaciendo (4.2), entonces existe $\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ con soporte en rB tal que se cumple (4.1).

Demostración. *a*) Si $t\in rB$ se tiene $|e^{-iz\cdot t}| = |e^{-i(x+iy)\cdot t}| = e^{y\cdot t}\le e^{|y||t|}\le e^{r|\mathrm{Im}\, z|}$, donde hemos usado que $y\cdot t\le |y\cdot t| \overset{C-Sch}{\le} |y||t|$. Con esto, deducimos que

$$\begin{aligned}|f(z)| &\le \int_{\mathbb{R}} |\phi(t)e^{-iz\cdot t}|dm_n(t) \le \int_{rB}|\phi(t)|e^{r|\mathrm{Im}\, z|}dm_n(t) \le e^{r|\mathrm{Im}\, z|}\sup_{t\in sop\,\phi}|\phi(t)|\int_{rB}dm_n(t)\\ &= m_n(rB)\,\|\phi\|_\infty e^{r|\mathrm{Im}\, z|}<\infty.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Por consiguiente $\phi(t)e^{-iz\cdot t}$ es integrable y $f(z)$ está bien definida para todo $z\in\mathbb{C}^n$.

Ahora, aplicando un razonamiento análogo al realizado en la demostración del lema 3.2.2 se deduce que f es continua y, aplicando el teorema de Morera a cada una de sus variables, se obtiene que f es entera. Además, aplicando integración por partes en varias variables, variable a variable, en $f(z) = \int_{\mathbb{R}^n}\phi(t)e^{-iz\cdot t}dm_n(t)$ y puesto que ϕ tiene soporte compacto, se tiene, para cada multi-índice α, que

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha\phi(t)\frac{1}{i^{|\alpha|}z^\alpha}e^{-iz\cdot t}dm_n(t), \quad \forall z\in\mathbb{C}^n.$$

Por lo tanto

$$|z^\alpha f(z)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |(D^\alpha \phi)(t)| e^{r|\mathrm{Im}\, z|} dm_n(t) = e^{r|\mathrm{Im}\, z|} \|D^\alpha \phi\|_1, \quad \forall z \in \mathbb{C}^n. \tag{4.4}$$

Ahora, como $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\big(1+|z|\big)^N}{1+|z|^N} = 1$ y también $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\big(1+|z|\big)^N}{1+|z|^N} = 1$ se tiene que $\big(1+|z|\big)^N$ y $1+|z|^N$ son equivalentes. Por lo tanto, para cada $N \in \mathbb{N}$, tomando α de orden N y utilizando (4.3) y (4.4) deducimos que

$$(1+|z|)^N |f(z)| \approx (1+|z^\alpha|)|f(z)| \le \big(m_n(rB)\|\phi\|_\infty + \|D^\alpha \phi\|_1\big) e^{r|\mathrm{Im}\, z|}.$$

De donde se sigue que

$$|f(z)| \le \frac{\gamma_N}{(1+|z|)^N} e^{r|\mathrm{Im}\, z|},$$

con $\gamma_N = \big(m_n(rB)\|\phi\|_\infty + \|D^\alpha\phi\|_1\big) = \left(\dfrac{r^n}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\|\phi\|_\infty + \|D^\alpha\phi\|_1\right) < \infty$, donde Γ denota la función Γ de Euler.

b) Supongamos que f es entera tal que $|f(z)| \le \gamma_N(1+|z|)^{-N} e^{r|\mathrm{Im}\, z|}$, $z \in \mathbb{C}^n$. De aquí se deduce, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todo N entero no negativo, que $(1+|x|)^N |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n), \forall N \in \mathbb{N}_0$, puesto que

$$(1+|x|)^N |f(x)| \le \frac{\gamma_{N+n+1}}{(1+|x|)^{n+1}} \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

En particular, para $N = 0$, se tiene que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

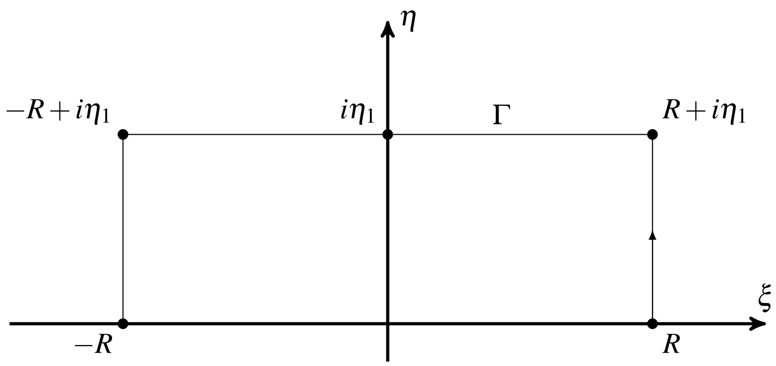
Definimos $\phi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{it\cdot x} dm_n(x)$, $(t \in \mathbb{R}^n)$. Podemos aplicar el lema 4.1.2 para deducir que $\phi(-t) \in \mathscr{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$ y por lo tanto también $\phi(t)$ tiene esta propiedad.

Para ver que ϕ tiene soporte compacto, planteamos la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi + i\eta, z_2, \dots, z_n) e^{i[t_1(\xi+i\eta)+t_2 z_2+\dots+t_n z_n]} d\xi, \qquad \xi, \eta, t_i \in \mathbb{R}, z_i \in \mathbb{C}, \forall i. \tag{4.5}$$

y afirmamos que es independiente de η.

Sea Γ el camino rectangular en el plano $(\xi + i\eta)$, orientado positivamente, con aristas horizontales en el eje real y en $\eta = \eta_1$.



Por el teorema de Cauchy

$$0 = \int_\Gamma f(z_1, \dots, z_n) e^{i[t_1 z_1 + \dots + t_n z_n]} dz_1 =$$

$$\int_{-R}^{R} f(\xi, z_2, \dots, z_n) e^{i(t_1\xi + t_2 z_2 + \dots + t_n z_n)} d\xi + i\int_0^{\eta_1} f(R+is, z_2, \dots, z_n) e^{i(t_1(R+is)+t_2z_2+\dots+t_nz_n)} ds -$$

$$\int_{-R}^{R} f(\xi + i\eta_1, z_2, \dots, z_n) e^{i(t_1(\xi+i\eta_1)+t_2z_2+\dots+t_nz_n)} d\xi - i\int_0^{\eta_1} f(-R+is, z_2, \dots, z_n) e^{i(t_1(-R+is)+t_2z_2+\dots+t_nz_n)} ds.$$

Tomando límites cuando R tiende a infinito, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, z_2, \ldots, z_n) e^{i(t_1\xi + t_2z_2 + \ldots + t_nz_n)} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi + i\eta_1, z_2, \ldots, z_n) e^{i(t_1(\xi + i\eta_1) + t_2z_2 + \ldots + t_nz_n)} d\xi$$

puesto que las otras dos integrales tienden a 0, ya que

$$\begin{aligned}
&|f(R+is, z_2, \ldots, z_n) e^{i(t_1(R+is)+t_2z_2+\ldots+t_nz_n)}| \leq \gamma_N (1 + |(R+is, z_2, \ldots, z_n)|)^{-N} e^{(r-t)|\operatorname{Im} z|} = \\
&= \gamma_N \left(1 + (R^2 + s^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{\frac{1}{2}}\right)^{-N} e^{(r-t)|\operatorname{Im} z|} \leq \\
&\leq \gamma_N \left(1 + (R^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2)^{\frac{1}{2}}\right)^{-N} e^{(r-t)|\operatorname{Im} z|} \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

y lo mismo sucede si cambiamos R por $-R$.

Así, hemos probado que (4.5) es independiente de η. Esto mismo puede realizarse en el resto de coordenadas y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{it\cdot x} dm_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1 + i\eta_1, \ldots, x_n + i\eta_n) e^{i[t_1(x_1+i\eta_1)+\ldots+t_n(x_n+i\eta_n)]} dm_n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x+iy) e^{it\cdot(x+iy)} dm_n(x), \forall y \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Ahora, dado $t \in \mathbb{R}^n$, $t \neq 0$, elegimos $y = \frac{\lambda t}{|t|}$, con $\lambda > 0$, entonces $|y| = \lambda$. Por tanto

$$\left| f(x+iy) e^{it(x+iy)} \right| \leq \gamma_N (1 + |x+iy|)^{-N} e^{r\lambda} e^{-ty} \leq \gamma_N (1 + |x+iy|)^{-N} e^{(r-|t|)\lambda}.$$

De aquí, se deduce

$$|\phi(t)| \leq \gamma_N e^{(r-|t|)\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x+iy|)^{-N} dm_n(x),$$

que es finito si N es suficientemente grande. Haciendo λ tender a infinito, se tiene que $|\phi(t)| = 0$ si $|t| > r$, es decir, $\phi = 0$ si $|t| > r$, o, equivalentemente, $sop\,\phi \subseteq rB$.

Ya hemos visto que la condición (4.2) implica que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. También $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ puesto que $\phi \in \mathscr{C}^{(\infty)}$ y tiene soporte compacto.

Por lo tanto podemos aplicar el teorema de inversión para concluir

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t) e^{-it\cdot x} dm_n(t), \quad \text{en casi todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Ahora bien, tanto f como $z \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t) e^{-it\cdot z} dm_n(t)$, $z \in \mathbb{C}^n$ son funciones enteras que coinciden en $\mathbb{R}^n$, aplicando el lema 4.1.4 se deduce $f(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(t) e^{-it\cdot z} dm_n(t)$, $\quad \forall z \in \mathbb{C}^n$. □

4.2. Teorema de Paley-Wiener para distribuciones de soporte compacto.

Nuestro objetivo en esta sección es establecer un teorema tipo Paley-Wiener para distribuciones de soporte compacto generales, para lo que necesitaremos varios resultados básicos sobre convolución y transformada de Fourier de distribuciones, vistos en el capítulo 2.

Lema 4.2.1. *Si $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ la función $f(z) = u(e_{-z})$, $z \in \mathbb{C}^n$, es entera.*

Demostración. Para ver que f es entera, veamos que lo es la aplicación $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $g(\lambda) = u(e_{-a-\lambda b})$, para cada $a, b \in \mathbb{C}^n$. Para ello, apliquemos la definición. Tenemos

$$\frac{g(\lambda) - g(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = u\left(\frac{e_{-a-\lambda b} - e_{-a-\lambda_0 b}}{\lambda - \lambda_0}\right),$$

puesto que u es un funcional lineal. Notemos que $\left(\frac{e_{-a-\lambda b} - e_{-a-\lambda_0 b}}{\lambda - \lambda_0}\right) \in \mathscr{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora, $\forall t \in \mathbb{R}^n$, tenemos

$$e_{-a-\lambda b}(t) - e_{-a-\lambda_0 b}(t) = e^{-it\cdot(a+\lambda b)} - e^{-it\cdot(a+\lambda_0 b)} = e^{-it\cdot(a+\lambda_0 b)}\Big(e^{i(t-b)(\lambda_0-\lambda)} - 1\Big)$$

Aplicando la definición de derivada y la regla de la cadena, tenemos

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{e^{i(t-b)(\lambda_0-\lambda)}-1}{\lambda-\lambda_0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{e^{-i(b\cdot t)\varepsilon}-1}{\varepsilon} \overset{(*)}{=} -i(b\cdot t)e^{-i(b\cdot t)\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = -i(b\cdot t).$$

Así:

$$\frac{g(\lambda)-g(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} \underset{\lambda\to\lambda_0}{\to} e^{-i(\bullet)\cdot(a+\lambda_0 b)}u(-ib\cdot(\bullet)) = u\big(-ib\cdot(\bullet)e^{-i(a+\lambda_0 b)\cdot(\bullet)}\big),$$

donde $h(\bullet)$ es notación punto para referirnos a la aplicación $t\mapsto h(t)$, para cada $t\in\mathbb{R}^n$. Falta justificar el paso $(*)$ pues el límite es en la topología de $\mathscr{C}^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$; esto es, hay que ver que tanto la aplicación

$$t\in\mathbb{R}^n \mapsto \frac{e^{-i\varepsilon(b\cdot t)}-1}{\varepsilon} + i(b\cdot t)$$

como todas sus derivadas convergen uniformemente en compactos de $\mathbb{R}^n$ cuando $\varepsilon\to 0$.

Para ello, apliquemos el desarrollo en serie de Taylor

$$\frac{e^{-\varepsilon(b\cdot t)}-1+i(b\cdot t)\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-i)^k\varepsilon^k(b\cdot t)^k}{k!} = \varepsilon\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-i)^k\varepsilon^{k-2}(b\cdot t)^k}{k!}.$$

Fijado K compacto en $\mathbb{R}^n$, $\forall t\in K$, tenemos:

$$\varepsilon\Big|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-i)^k\varepsilon^{k-2}(b\cdot t)^k}{k!}\Big| \le \varepsilon\sum_{k=2}^{\infty}\frac{M^k}{k!} \le \varepsilon e^M,$$

pues podemos tomar $0<\varepsilon<1$ y $M = \max_{t\in K}|b\cdot t|$.

Así, la aplicación $t\mapsto \frac{e^{-i\varepsilon(b\cdot t)}-1}{\varepsilon} + i(b\cdot t)$ converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}^n$. Veamos que lo mismo ocurre con sus derivadas.

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\Big(\frac{e^{-i\varepsilon(b\cdot t)}-1+i\varepsilon(b\cdot t)}{\varepsilon}\Big) = \frac{-i\varepsilon b_1 e^{-i\varepsilon(b\cdot t)}+i\varepsilon b_1}{\varepsilon} = ib_1(1-e^{-i\varepsilon(b\cdot t)}).$$

De nuevo, desarrollando por Taylor de manera análoga tenemos, para todo $t\in K$, con K compacto de $\mathbb{R}^n$

$$\Big|\frac{\partial}{\partial t_1}\Big(\frac{e^{-i\varepsilon(b\cdot)}-1+i\varepsilon(b\cdot t)}{\varepsilon}\Big)\Big| = \big|-ib_1(e^{-i\varepsilon(b\cdot t)}-1)\big| \le b_1\varepsilon\sum_{k=2}^{\infty}\Big|\frac{\varepsilon^{k-2}(b\cdot t)^k}{k!}\Big| \le |b_1|\varepsilon e^M.$$

Y así tenemos también convergencia uniforme sobre compactos para la derivada respecto a t_1. Es claro que podemos reiterar el proceso para cualquier derivada y concluir que hay convergencia uniforme sobre compactos tanto para la función $t\in\mathbb{R}^n\mapsto \frac{e^{-i\varepsilon(b\cdot t)}-1}{\varepsilon}+i(b\cdot t)$ como para sus derivadas de todos los órdenes. Así queda demostrado $(*)$ y por lo tanto el lema. □

Teorema 4.2.2. ***(Paley-Wiener.)***

a) Si $u\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte en $rB = \{x\in\mathbb{R}^n : |x|\le r\}$, u tiene orden N_0 y

$$f(z) = u(e_{-z}), \tag{4.6}$$

con $z\in\mathbb{C}^n$, entonces f es entera, su restricción a $\mathbb{R}^n$ es la transforamda de Fourier de u y existe una constante $\gamma<\infty$ tal que

$$|f(z)| \le \gamma(1+|z|)^{N_0}e^{r|\mathrm{Im}\,z|}. \tag{4.7}$$

b) Si f es una función entera en $\mathbb{C}^n$ que satisface (4.7) *para algún N y alguna constante γ, entonces existe $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ con soporte en rB tal que se cumple* (4.6).

Demostración. a) Sea $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ con soporte en rB. Tomemos $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi = 1$ en un conjunto que contenga a rB, por ejemplo $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r+1\}$. Por el lema 2.1.8(c), $u = \psi u$ y el lema 2.1.18 implica que $\widehat{u} = (\psi u)^\frown = \widehat{u} * \widehat{\psi}$ y $\widehat{u} \in \mathscr{C}^{(\infty)}$.

Sea $\phi \in \mathscr{S}_n$ tal que $\widehat{\phi} = \psi$, lo cual se puede hacer ya que $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}_n$ y la transformada de Fourier es una isometría en $\mathscr{S}_n$. Entonces $\widehat{\psi} = \check{\phi}$. Con esto, tenemos

$$\widehat{u}(x) = (\widehat{u} * \widehat{\psi})(x) = (\widehat{u} * \check{\phi})(x) = \widehat{u}(\tau_x \phi) = u\big((\tau_x \phi)^\frown\big) = u(e_{-x}\widehat{\phi}) = u(\psi e_{-x}) = u(e_{-x}),$$

en donde hemos usado las definiciones de convolución, transformada de Fourier de una distribución, algunas propiedades de la transformada de Fourier y, en la última igualdad, que $u = \psi u$. Así, hemos probado que $\widehat{u}(x) = u(e_{-x})$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Por el lema 4.2.1, $f(z)$ es entera y así tenemos la primera parte de (a). Veamos que f satisface (4.7). Para ello, tomemos una función auxiliar h indefinidamente derivable tal que $h(s) = 1$ si $s < 1$ y $h(s) = 0$ si $s > 2$. A cada $z \in \mathbb{C}^n$, $(z \neq 0)$, le asociamos la función

$$\phi_z(t) = e^{-iz\cdot t} h(|t||z| - r|z|), \quad (t \in \mathbb{R}^n). \tag{4.8}$$

Como el soporte de u está en rB y $h(|t||z| - r|z|) = 1$ si $|t| \le |z|^{-1} + r$, es claro que $\phi_z \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ y comparando (4.6) y (4.8) se deduce que $f(z) = u(\phi_z)$. Como u tiene orden N_0, existe una constante $\gamma_0 < \infty$ tal que $|u(\phi)| \le \gamma_0 \|\phi\|_{N_0}$, $\forall \phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Así, tenemos que $|f(z)| \le \gamma_0 \|\phi_z\|_{N_0}$. Y como en el soporte de ϕ_z $|t| \le r + \frac{2}{|z|}$, se deduce que $|e^{-iz\cdot t}| = e^{y\cdot t} \le e^{2 + r|\mathrm{Im}\, z|}$. Aplicando la fórmula de Leibniz en (4.8) y usando las últimas acotaciones, se tiene (4.7).

b) Como f verifica (4.7), tenemos, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $|f(x)| \le \gamma(1+|x|)^N$, para algún N entero no negativo y alguna constante $\gamma < \infty$. Por lo tanto, la restricción de f a $\mathbb{R}^n$ tiene crecimiento polinómico y es, por tanto, una distribución temperada. Además, como la transformada de Fourier es una biyección en $\mathscr{S}'_n$, se tiene que la restricción de f a $\mathbb{R}^n$ es la transformada de Fourier de alguna distribución temperada u.

Tomemos ahora una función $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ con soporte en $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le 1\}$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} g(t)dt = 1$. Definimos $g_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-n} g(\frac{t}{\varepsilon})$, con $\varepsilon > 0$. Llamemos $\widehat{g_\varepsilon}$ a la función entera cuya restricción a $\mathbb{R}^n$ es la transformada de Fourier de g_ε. Pongamos $f_\varepsilon(z) = f(z)\widehat{g_\varepsilon}(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$.

Es claro que el soporte de g_ε está en εB y que g_ε verifica la parte (a) del teorema 4.1.5 (cambiando r por ε), por lo tanto, para cada N entero no negativo, existen constantes γ_N tales que

$$|\widehat{g_\varepsilon}(z)| \le \gamma_N (1+|z|)^{-N} e^{\varepsilon|\mathrm{Im}\, z|}$$

y por lo tanto, f_ε verifica

$$|f_\varepsilon(z)| = |f(z)\widehat{g_\varepsilon}(z)| \le \gamma(1+|z|)^{N_0} e^{r|\mathrm{Im}\, z|} \gamma_N (1+|z|)^{-N} e^{\varepsilon|\mathrm{Im}\, z|} = \tilde{\gamma}_N (1+|z|)^{N_0 - N} e^{(r+\varepsilon)|\mathrm{Im}\, z|}.$$

Así, eligiendo $N > N_0$, f_ε verifica la parte (b) del teorema 4.1.5 (cambiando r por $r+\varepsilon$). En consecuencia, $f_\varepsilon = \widehat{\phi_\varepsilon}$ para algún $\phi_\varepsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ con soporte en $(r+\varepsilon)B$.

Sea ahora $\psi \in \mathscr{S}_n$ tal que el soporte de $\widehat{\psi}$ no interseca rB. Entonces $\widehat{\psi}\phi_\varepsilon = 0$ para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Como $\widehat{g_\varepsilon}(x) = \widehat{g}(\varepsilon x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(t) e^{-i\varepsilon t\cdot x} dt$. Tomando limites cuando $\varepsilon \to 0$ se tiene que $\lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{g_\varepsilon}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} g(t) e^{-i\varepsilon t\cdot x} dt = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon\to 0} g(t) e^{-i\varepsilon t\cdot x} dt = \int_{\mathbb{R}^n} g(t)dt = 1$, donde hemos usado el teorema de la convergencia dominada para intercambiar el límite con la integral, ya que $|g(t)e^{-i\varepsilon t\cdot x}| = |g(t)| \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pues g es una función $\mathscr{C}^{(\infty)}$ de soporte compacto.

Además, $f\psi \in L^(\mathbb{R}^n)$ ya que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\psi(x)| dx \le \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(1+|x|)^N |\psi(x)| dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{N+n+1} |\psi(x)| \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} dx \le$$
$$\le C\gamma \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|)^{n+1}} dx < \infty,$$

donde C es una constante positiva.

Ahora, tomando limites cuando $\varepsilon \to 0$ se tiene que $\lim_{\varepsilon \to 0} \widehat{g_\varepsilon}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} g(t)e^{-i\varepsilon t\cdot x}dt = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon \to 0} g(t)e^{-i\varepsilon t\cdot x}dt = \int_{\mathbb{R}^n} g(t)dt = 1$. Así, tenemos

$$u(\widehat{\psi}) = \widehat{u}(\psi) = \int f\psi dm_n = \int \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon \psi dm_n = \lim_{\varepsilon \to 0} \int f_\varepsilon \psi dm_n = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \widehat{\phi_\varepsilon} \psi dm_n = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \widehat{\psi} \phi_\varepsilon dm_n = 0,$$

y por consiguinte u tiene soporte en rB.

Finalmente, como $z \mapsto u(e_{-z})$ es una función entera y (4.6) se verifica para todo $z \in \mathbb{R}^n$ (pues así hemos tomado u) se sigue, por el lema 4.1.4 que (4.7) se verifica en todo $\mathbb{C}^n$, lo cual concluye la demostración.

$\square$

Bibliografía

[1] J. BARROS-NETO, *An introduction to the theory of distributions*, Marcel Dekker, Nueva York, 1973.

[2] J.BRUNA - J. CUFÍ, *Métodos actuales de la teoría de funciones holomorfas en varias variables*, Sección Matemáticas de la Universidad de Extremadura, 1983.

[3] J. CONWAY *Functions of one complex variable*, Springer-Verlag, 1978.

[4] P. DUREN, *Theory of* H^p *spaces*, Academic Press, Nueva York y Londres, 1970.

[5] J. HORVÁTH, *Topological vector spaces and distributions*, Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

[6] P. KOOSIS, *Introduction to* H_p *spaces*, Cambridge University Press, 1998.

[7] L. NACHBIN, *Holomorphic functions, domains of holomorphy and local properties*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1970.

[8] W. RUDIN, *Análisis real y complejo*, McGraw-Hill, Madrid, 1979.

[9] W. RUDIN, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1973.