View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Repositorio Universidad de Zaragoza

La Gaceta de la RSME, Vol. 18 (2015), Núm. 2, Págs. 301–318

Métodos de divisor y su relación con los principales procedimientos de distribución de escaños

por

Paz Jiménez-Seral y Manuel Vázquez

Resumen. Durante más de 200 años, políticos y politólogos, en colaboración con matemáticos, han experimentado diversos métodos para el reparto de los puestos de representación a las circunscripciones y parlamentos en función del tamaño de las poblaciones o de los votos obtenidos por los partidos, con criterios de proporcionalidad.

De entre las varias facetas que rodean el estudio de dichos métodos nos fijamos en el detalle de los procedimientos para su efectiva realización. Así, en unos países se prefieren métodos basados en el número de votos para conseguir un escaño, mientras que en otros el procedimiento consiste en acudir a series de números, o a otras formas diferentes como el centrar la atención en las partes entera y decimal de un reparto proporcional puro. Se analizan y comparan estos métodos, y se observa que, en unos casos, descripciones diferentes dan lugar a los mismos resultados y que, en otros, se trata de métodos esencialmente diferentes.

1. Introducción

El método D'Hont es bien conocido en España por ser el procedimiento de reparto proporcional que se utiliza para transformar votos en escaños en las elecciones generales, autonómicas y municipales. Este método, tal y como se describe en la Ley del Régimen Electoral General ([5, artículo 163]), consiste en «dividir el número de votos obtenidos por cada candidatura por 1, 2, 3, etcétera, hasta un número igual al de escaños correspondientes a la circunscripción; los escaños se atribuyen a las candidaturas que obtengan los cocientes mayores, atendiendo a un orden decreciente. Cuando en la relación de cocientes coincidan dos correspondientes a distintas candidaturas, el escaño se atribuirá a la que mayor número total de votos hubiese obtenido. Si hubiera dos candidaturas con igual número total de votos, el primer empate se resolverá por sorteo y los sucesivos de forma alternativa.»

La citada ley contempla otro procedimiento de distribución proporcional: el que se aplica para distribuir doscientos cuarenta y ocho escaños entre las provincias. La descripción de este segundo método (artículo 162) es como sigue: «Se obtiene una cuota de reparto resultante de dividir por doscientos cuarenta y ocho la cifra total de la población de derecho de las provincias. Se adjudican a cada provincia tantos diputados como resulten, en números enteros, de dividir la población de derecho provincial por la cuota de reparto. Los diputados restantes se distribuyen asignando uno a cada una de las provincias cuyo cociente, obtenido conforme al apartado anterior, tenga una fracción decimal mayor.» Este procedimiento se suele designar con la denominación de método Häre, método Niemeyer, método de Hamilton o de restos mayores.

Ambos procedimientos de distribución han sido objeto de discusión en foros políticos y periodísticos sobre su carácter de mayor o menor proporcionalidad y su consiguiente efecto de favorecer más a unos partidos, o provincias, que a otros.

Curiosamente, estos dos métodos, el de D'Hont y el de Hamilton, fueron los que primero se propusieron para resolver una distribución proporcional de escaños en un proceso electoral. Esto ocurrió en Estados Unidos, en 1792, para solucionar el problema de asignar puestos de representación a cada uno de los 15 estados que conformaban el país, proporcionalmente a su población, para constituir el primer Congreso norteamericano tras aprobar la Constitución estadounidense. Por supuesto, ambos métodos fueron también objeto de profundas discusiones, especialmente de carácter político y partidista. En EEUU cada uno de estos métodos se conoció con el nombre de quien lo propuso, Jefferson y Hamilton, respectivamente; en la literatura especializada, precisamente estas dos son sus denominaciones más frecuentes ([2, pág. 10 y ss.], [3, pág. 427]).

Una ligera diferencia de estos dos métodos utilizados en EEUU con respecto a los señalados para España residía en la manera de aplicarlos. En España se trataba, y se trata, de repartir un número fijo de escaños entre partidos y provincias, mientras que en EEUU los escaños se asignaban a cada estado de manera que se respetase, en lo posible, la proporción de un escaño por cada 30 000 habitantes, por lo que el número de escaños a repartir no estaba fijado al inicio, dependía del censo electoral que se elaboraba cada 10 años. Esta manera de distribuir escaños en la Cámara americana propició una definición del método de Jefferson, y de otros similares, aparentemente distinta de la que años más tarde utilizó D'Hont para definir el método que lleva su nombre, y que es la que aparece en nuestro reglamento electoral.

La abundante literatura sobre esta cuestión, la de los repartos de escaños en los variados sistemas electorales, ha tratado fundamentalmente de estudiar la mayor o menor proporcionalidad de los métodos de reparto, mientras que no ha sido apenas considerada una presentación formal de los mismos, de sus generalizaciones y de las relaciones de igualdad entre ellos. El libro de Balinski y Young ([2, pág. 95 y ss.]) proporciona una acertada aproximación a la formalización de los procedimientos de distribución en sistemas electorales, sin embargo la cuestión que importa en esa publicación es la de encontrar un método justo para determinar las distribuciones y no tanto un análisis de la igualdad o no de los distintos sistemas de reparto.

El objetivo del presente trabajo es, por una parte, definir los infinitos métodos de reparto siguiendo el tipo de descripción utilizado por el Congreso norteamericano y analizar las diferencias entre ellos, y, por otra, compararlos con la descripción que usualmente se utiliza en Europa, finalizando con la relación de los mismos con el método de restos mayores.

En la reciente publicación de F. Pukelsheim ([6]) se contempla de forma exhaustiva el problema de la distribución de escaños, con una orientación más formal que en publicaciones anteriores, en la línea del presente artículo, coincidiendo en algunos de sus resultados (ver proposiciones 3 y 9).

2. Métodos de divisor

El procedimiento más usual para el reparto proporcional es el de la «regla de tres». Si las cantidades asignadas a cada parte deben ser enteras, entonces se deben redondear, siendo muy usado el llamado «redondeo del euro» o redondeo estándar.

2.1. Los procedimientos de distribución asociados a funciones de redondeo

Definiciones. Una *función de redondeo* es una aplicación $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que cumple

$$n \leq \alpha(n) \leq n+1 \quad \text{y} \quad \alpha(n) \neq \alpha(n+1)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. En adelante, con α representaremos siempre una función de redondeo. (Véanse [2, appendix A] y [6, chapter 3].)

Dado b un número real no negativo, se dice que un *α-redondeo* de b es $n \in \mathbb{N}$, o que se redondea a n con respecto a α, si $n \leq b \leq \alpha(n)$, o si $n > 0$ y $\alpha(n-1) \leq b \leq n$.

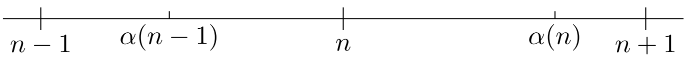

Figura 1: Función de redondeo.

Ejemplos. Las siguientes funciones α y β son de redondeo:

$$\alpha(n) = n+1, \quad \beta(n) = n+0.5.$$

El número 3.7 se redondea a 3 con respecto a α y a 4 con respecto a β.

Ayudándose del esquema de la figura 1 resultan elementales las siguientes propiedades de los α-redondeos.

Proposición 1. *Se verifica:*

(a) *Un α-redondeo de b es $n > 0$ si y solo si $\alpha(n-1) \leq b \leq \alpha(n)$.*

(b) *Un α-redondeo de b es 0 si y solo si $b \leq \alpha(0)$.*

(c) *Un número b se redondea a un único número n o bien a n y a $n+1$. Este último caso ocurre si y solo si $b = \alpha(n)$.*

(d) *Si $a < b$, entonces un α-redondeo de a es menor o igual que cualquiera de b.*

(e) *Si $b < \alpha(n)$ (respectivamente, $b > \alpha(n)$), entonces el redondeo de b es a lo más n (respectivamente, al menos $n+1$).*

En la definición de α-redondeo hemos impuesto la condición $\alpha(n) \neq \alpha(n+1)$. Ello se justifica puesto que si se permitiese la igualdad se tendría $n+1 = \alpha(n) = \alpha(n+1)$ y entonces $n+1$ se podría redondear a n, a $n+1$ y a $n+2$, lo cual resultaría poco natural y además afectaría a resultados posteriores.

DEFINICIONES. Sean $e \in \mathbb{N}$ y $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_s) \in \mathbb{Q}^s$, con $s, v_i \neq 0$. Se dice que $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{N}^s$ es una *α-distribución* (o *α-reparto*) de e según $\bar{v}$ si existe $0 \neq d \in \mathbb{Q}$ tal que n_i es un α-redondeo de v_i/d y $\sum n_i = e$. A un tal d se le denomina *divisor adecuado* para esos parámetros (*feasible divisor* en [6]). Al procedimiento que asigna a $(\alpha, \bar{v}, e)$ la tupla $\bar{n}$ se le denomina *método de divisor*. Si se sobreentiende α simplemente hablaremos de redondeos, distribuciones y repartos.

En el lenguaje electoral cada v_i puede representar los votos que obtiene el partido i, y e los escaños o puestos a repartir en función de los votos. También v_i puede representar la población de la circunscripción i, y en este caso e representaría los escaños a repartir entre las distintas circunscripciones según su población. Al vector $\bar{v}$ lo denominaremos como *vector o tupla de votos* y a e un número de *escaños*. También diremos que n_i es el número de escaños asignado al partido i. En esta interpretación, el divisor d representa el promedio en votos para conseguir un escaño.

Se supone que v_i es un número racional para que esta misma definición sirva cuando el reparto se realiza en función de las cuotas (ver más adelante).

Notar que también podríamos haber optado por esta otra definición equivalente: $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{N}^s$ es una *α-distribución* de e según $\bar{v}$ si existe $f \in \mathbb{Q}$ tal que n_i es una α-redondeo de fv_i y $\sum n_i = e$. Se dice que f es un *factor adecuado* para esos parámetros.

EJEMPLOS. (a) Sea $\alpha(n) = n+1$; la correspondiente α-distribución se conoce con el nombre de método Jefferson (1792). En otras palabras, este método de distribución consiste en «redondear hacia abajo». Más adelante se demostrará que coincide con el método D'Hont (1878).

(b) La función $\alpha(n) = n + 0.5$ se suele denominar «redondeo estándar». La correspondiente distribución se conoce con el nombre de método Webster (1832). El método Schepers (1980), usado actualmente en el sistema electoral alemán, tiene su misma descripción. Más adelante se demostrará que ambos métodos coinciden con el de Sainte-Laguë (1912).

(c) Sea $\alpha(n) = n$; la α-distribución se conoce con el nombre de método Adams (1828). Así pues, este método de distribución consiste en «redondear hacia arriba».

(d) Sea

$$\alpha(n) = \frac{n(n+1)}{n+0.5};$$

la α-distribución asociada se conoce con el nombre de método Dean (1832).

(e) Sea

$$\alpha(n) = \sqrt{n(n+1)};$$

la α-distribución se conoce con el nombre de método Hill (1911), que es el que actualmente se utiliza en EEUU ([3]) para la distribución de los escaños del Congreso entre los distintos estados.

Proposición 2. *Si $\bar{n}$ es una α-distribución de e según $\bar{v}$, entonces $\bar{n}$ es también una distribución de e según $t\bar{v}$, para cualquier $0 \neq t \in \mathbb{Q}$.*

Demostración. Basta tener en cuenta que si d es divisor adecuado para el reparto de e según $\bar{v}$, entonces td es divisor adecuado para el reparto de e según $t\bar{v}$. □

Con la notación anterior, llamando

$$q_i = \frac{ev_i}{\sum v_i},$$

a las tuplas $(v_1, \ldots, v_s)$ y $(q_1, \ldots, q_s)$ les corresponde, por la proposición 2, idéntica distribución de los e escaños. Notar que $e = \sum q_i$. A q_i se le dice cuota del partido i. Se dice *tupla de cuotas* para el reparto de e escaños a una tupla $(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$ cumpliendo $\sum q_i = e$. Claramente, dada una tupla de cuotas existe una tupla de números naturales que tiene la misma distribución de los e escaños. En la sección 5 utilizaremos tuplas de cuotas para la presentación de ejemplos.

En la práctica, la aplicación de un método de divisor se puede realizar mediante aproximaciones sucesivas para encontrar ese divisor. Para ello se divide el número total de votos por el número de escaños a repartir, obteniéndose un primer divisor. Con la notación utilizada, este primer divisor sería

$$d_1 = \frac{\sum v_i}{e}.$$

A continuación se dividen los números de votos de cada partido por ese primer divisor d_1. Los números resultantes se redondean conforme a la función de redondeo utilizada. Si la suma de todos ellos coincide con el número de escaños a repartir, esos números son los escaños de cada partido. Si no se da la coincidencia citada, se vuelve a repetir ese paso pero con un divisor mayor o menor, según corresponda, hasta que la suma de los cocientes redondeados coincida con el de escaños a repartir. Esta es precisamente la descripción que, básicamente, figura en la ley electoral para las elecciones al Parlamento alemán ([4] y [8]).

En la figura 2, utilizando una hoja Excel, y mediante el método de Webster, se ha calculado el reparto de 5 escaños tomando como datos los correspondientes al estado de Bremen en las elecciones al Parlamento alemán celebradas en 2013. Se aprecia que 65 000 ha resultado ser un divisor adecuado (véase [8]).

2.2. Existencia y unicidad

Una función de redondeo no proporciona siempre una única distribución. Por ejemplo, el método Webster para repartir 2 escaños según $(15, 5)$ proporciona las distribuciones $(2, 0)$ y $(1, 1)$, siendo 10 un divisor adecuado para ambas distribuciones. Incluso puede que no exista ninguna distribución, es el caso del método Adams para la distribución de un número de escaños menor que el número de partidos. La siguiente proposición prueba cuáles son las condiciones para la existencia de distribuciones.

partidos	votos	cociente 1	redondeo	cociente 2	redondeo
CDU	96 459	1.68	2	1.48	1
SPD	117 204	2.04	2	1.80	2
LINKE	33 284	0.58	1	0.51	1
GRÜNE	40 014	0.70	1	0.62	1
total	286 961		6		5
		d_1		d_2	
divisores		57 392		65 000	

Figura 2: Distribución de 5 escaños en Bremen (2013).

PROPOSICIÓN 3 (Véase [6, pág. 59]). *Dada una s-tupla $\bar{v}$ de números racionales, $e \in \mathbb{N}$ y α una función de redondeo, se verifica:*

(a) *Si $\alpha(0) \neq 0$ o $s \leq e$, existe una α-distribución de e según $\bar{v}$.*

(b) *Si existe una α-distribución de e según $\bar{v}$, entonces $\alpha(0) \neq 0$ o $s \leq e$.*

DEMOSTRACIÓN. (a) Sea $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_s)$. Supongamos primero que $\alpha(0) \neq 0$. Procederemos por inducción sobre e. Para el caso $e = 0$ podemos tomar $d \in \mathbb{R}$ tal que $d > v_i/\alpha(0)$, para todo índice i. Se tiene

$$0 < \frac{v_i}{d} < \alpha(0) \quad \text{para cada } i,$$

luego, por la proposición 1 (b), $(0, 0, \ldots, 0)$ es una α-distribución de $e = 0$ según $\bar{v}$.

Supongamos ahora que exista una α-distribución, $(n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{N}^s$ de e según $\bar{v}$, y consideremos el caso del reparto de $e + 1$ escaños. Sea d divisor adecuado correspondiente a esa distribución. Como $\alpha(n_j) \neq 0$ para cada j, existe un índice i tal que para todo j se verifica

$$\frac{v_i}{\alpha(n_i)} \geq \frac{v_j}{\alpha(n_j)}.$$

Por la proposición 1 (c), $n_i + 1$ es uno de los redondeos de v_i/d', donde $d' = v_i/\alpha(n_i)$. Se tiene que $d' \leq d$, puesto que si fuese $d' > d$ se tendría

$$\frac{v_i}{d} > \frac{v_i}{d'} = \alpha(n_i)$$

y entonces n_i no sería un α-redondeo de v_i/d, que contradice que d sea divisor adecuado para la distribución $(n_1, \ldots, n_s)$.

Por hipótesis de inducción, por ser $d' \leq d$ y por la elección de d', para todo $j \neq i$ se tiene

$$\alpha(n_j - 1) \leq \frac{v_j}{d} \leq \frac{v_j}{d'} = \frac{v_j \alpha(n_i)}{v_i} \leq \frac{v_j \alpha(n_j)}{v_j} = \alpha(n_j),$$

por lo que n_j es un redondeo de v_j/d'. En definitiva,

$$(n_1, \ldots, n_{i-1}, n_i + 1, \ldots, n_s)$$

es una distribución de $e + 1$ según $\bar{v}$.

Consideremos ahora el caso $s \leq e$. Por lo anterior podemos suponer que $\alpha(0) = 0$. Demostraremos por inducción sobre $\{e \in \mathbb{N} \mid e \geq s\}$ que existe una distribución de e según $\bar{v}$ con todas sus componentes no nulas. Para $e = s$, tomando d tal que $d > v_i$ para todo i, se obtiene la distribución $(1, 1, \ldots, 1)$, puesto que d es un divisor adecuado.

Supongamos a continuación que $(n_1, \ldots, n_s)$, con $n_i \neq 0$, es una distribución de e escaños según $\bar{v}$ con $e \geq s$ y consideremos el reparto de $e + 1$ escaños. Puesto que $n_i \neq 0$ se tiene $\alpha(n_i) \neq 0$, por lo que el argumento visto en el proceso de inducción anterior para el caso del reparto de $e + 1$ escaños también se puede aplicar aquí, así que existe una distribución de la forma $(n_1, \ldots, n_i + 1, \ldots, n_s)$, para un cierto i.

(b) Sea $(n_1, \ldots, n_s)$ una α-distribución de e escaños según $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_s)$. Sea d un divisor adecuado para esa distribución. Supongamos que $\alpha(0) = 0$; entonces, para todo i se tiene

$$0 = \alpha(0) < \frac{v_i}{d},$$

y por la proposición 1 (e) es $n_i \geq 1$ para cada i. Así pues,

$$e = \sum n_i \geq s. \qquad \square$$

En el caso $b = n = \alpha(n)$, en la proposición 1 (c) hemos indicado que b se puede redondear tanto a n como a $n + 1$. En la definición de redondeo podíamos haber supuesto que, en este caso, b se redondeara a n, pues es más natural. Sin embargo, si fuese así, el apartado (a) de la proposición no sería cierto, como prueba el siguiente ejemplo:

Sea la situación $\bar{v} = (2, 3)$ para repartir 6 escaños respecto del redondeo $\alpha(2) = 2$ y $\alpha(3) = 3$. Tomando un divisor $d > 1$, se tiene $2/d < 2$ y $3/d < 3$, luego los redondeos son a lo más 2 y 3, respectivamente, que no corresponde a un reparto de 6 escaños. Si consideráramos $d < 1$, se tendría $2/d > 2 = \alpha(2)$ y $3/d > 3 = \alpha(3)$, luego los redondeos son como poco $(3, 4)$, que tampoco sirve para repartir 6 escaños. Finalmente para $d = 1$, y supuesto que 2 y 3 se redondeasen a 2 y 3, tampoco se obtendría una solución para un reparto de 6 escaños.

Proposición 4. *Sean una s-tupla $\bar{v}$ de números racionales, $e \in \mathbb{N}$ y α una función de redondeo. Si $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_s)$ y $\bar{n}' = (n'_1, \ldots, n'_s)$ son dos α-distribuciones distintas de e según $\bar{v}$, entonces:*

(a) *Para cada distribución existe un único divisor adecuado y además ambos divisores coinciden.*

(b) *Para cada k se tiene $|n_k - n'_k| \leq 1$.*

(c) *Para el índice i que verifique $n_i - n'_i = 1$ se tiene que $v_i/\alpha(n_i - 1) = v_j/\alpha(n_j)$, para aquellos índices j tales que $n'_j - n_j = 1$.*

Demostración. En primer lugar, puesto que $\bar{n} \neq \bar{n}'$ y $\sum n_k = \sum n'_k = e$, existen i, j tales que

$$n_i > n'_i \quad \text{y} \quad n_j < n'_j.$$

(a) Sean d y d' divisores adecuados correspondientes a las distribuciones $\bar{n}$ y $\bar{n}'$, respectivamente. Si fuese $d' < d$, para cada k se tendría $v_k/d' > v_k/d$ y, por la proposición 1 (d), $n'_k \geq n_k$. Análogamente, si $d' > d$ se tendría $n'_k \leq n_k$. Pero cualquiera de estos dos supuestos contradice lo anterior, por tanto debe ser $d = d'$.

(b) Puesto que solo existe un divisor adecuado, la única posibilidad de que aparezca más de una distribución es que para algún índice exista más de un redondeo, y por la proposición 1 (c) los dos redondeos posibles se diferenciarían en una unidad.

(c) Como n_i y $n'_i = n_i - 1$ son dos asignaciones del índice i, entonces v_i/d tiene como redondeos n_i y $n_i - 1$, luego, por la proposición 1 (c), $v_i/d = \alpha(n_i - 1)$. Por la misma razón se tendría $v_j/d = \alpha(n_j)$, para aquellos j tales que $n'_j - n_j = 1$. Es decir,

$$d = \frac{v_i}{\alpha(n_i - 1)} = \frac{v_j}{\alpha(n_j)}. \qquad \square$$

La siguiente proposición es, en cierta manera, recíproca de la anterior.

PROPOSICIÓN 5. *Sean una s-tupla $\bar{v}$ de números racionales, $e \in \mathbb{N}$ y α una función de redondeo.*

(a) *Si $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_j, \ldots, n_s)$ es una α-distribución de e según $\bar{v}$, y para los índices i y j se verifica $v_i/\alpha(n_i - 1) = v_j/\alpha(n_j)$, entonces*

$$(n_1, \ldots, n_i - 1, \ldots, n_j + 1, \ldots, n_s)$$

es otra distribución.

(b) *Si para una distribución existe un único divisor adecuado, entonces existen al menos dos distribuciones distintas.*

DEMOSTRACIÓN. (a) Sea d divisor adecuado para la distribución $\bar{n}$. Como v_i/d y v_j/d se redondean, respectivamente, a n_i y n_j, de la proposición 1 (a) se sigue

$$\frac{v_i}{\alpha(n_i - 1)} \geq d \geq \frac{v_i}{\alpha(n_i)}, \quad \frac{v_j}{\alpha(n_j - 1)} \geq d \geq \frac{v_j}{\alpha(n_j)}.$$

Aplicando la hipótesis se tiene

$$d = \frac{v_i}{\alpha(n_i - 1)} = \frac{v_j}{\alpha(n_j)}.$$

Por la proposición 1 (c), v_i/d se redondea a $n_i - 1$ y a n_i. Análogamente, v_j/d se redondea a n_j y a $n_j + 1$, por lo que d es también divisor adecuado para la distribución

$$(\ldots, n_i - 1, \ldots, n_j + 1, \ldots).$$

(b) Sea d ese divisor y n_i el redondeo de v_i/d, para cada i. Por la proposición 1 (a) es $\alpha(n_i - 1) \leq v_i/d \leq \alpha(n_i)$. Supongamos que $v_i/d < \alpha(n_i)$ para todo i, es decir, $d > v_i/\alpha(n_i)$. Entonces podemos tomar d' tal que $d > d' > v_i/\alpha(n_i)$, y por tanto

$$\frac{v_i}{d} < \frac{v_i}{d'} < \alpha(n_i),$$

luego d' sería también divisor adecuado. De la hipótesis se sigue ahora que necesariamente $v_j/d = \alpha(n_j)$ para algún j. Análogo razonamiento demuestra que existe i tal que $v_i/\alpha(n_i - 1) = d$. Finalmente basta aplicar el apartado (a) de esta proposición. $\square$

Dada una función de redondeo α, supuesto que la tupla $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_s)$ sea de números enteros, es claro que ella misma es una α-distribución de $\sum v_i$ según $\bar{v}$, tomando 1 como divisor adecuado. Pero pudiera ocurrir que hubiese otras distribuciones igualmente válidas, ocasionando una cierta anomalía.

La manera de evitarla consiste en imponer la condición de que no existan n y m verificando $\alpha(n) = n$ y $\alpha(m) = m + 1$. En efecto, continuando con el supuesto y notación anteriores, si, para $\bar{v}$, además de ella misma existiera otra distribución, $\bar{v}'$, por la proposición 4 ambas distribuciones tendrían un único divisor adecuado, el 1, y existirían i, j tales que $v'_i = v_i - 1$ y $v'_j = v_j + 1$, por lo que v_i se redondearía a v_i y a $v_i - 1$, y v_j se redondearía a v_j y a $v_j + 1$, es decir, $v_i = \alpha(v_i - 1)$ y $v_j = \alpha(v_j)$, que contradiría la condición dada para α. Es más, también es cierto el recíproco porque si existieran tales n, m, claramente la tupla $(n, m + 1)$ tendría dos distribuciones de $n + m + 1$ escaños, a saber, $(n, m + 1)$ y $(n + 1, m)$.

Actualmente, en la literatura suele imponerse a las funciones de redondeo dicha condición en la propia definición ([1, pág. 40], [6, pág. 57]). En general, un método de distribución se dice *exacto* si en el caso en el que la tupla $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_s)$ sea de números enteros, ella misma es la única distribución de $\sum v_i$ según $\bar{v}$.

En la práctica se debe prever algún criterio que permita elegir una de entre las distribuciones posibles. La manera usual de resolver esa elección es acudir al sorteo o bien establecer previamente una ordenación de los índices y elegir la distribución que «favorezca» a los partidos según esa ordenación.

Los métodos de reparto proporcional, como los de divisor, han sido estudiados desde diversos puntos de vista, analizando sus propiedades, en especial las relativas a la proporcionalidad, por ejemplo en [2] y [1]. Por su relación con la sección 5 y con la posibilidad de empates, nos fijaremos aquí en la propiedad de monotonía respecto del aumento del número de escaños. Concretamente, la propiedad consistente en que el aumento del número de escaños a repartir no suponga una disminución en el número de escaños asignados a un partido. El incumplimiento de esta propiedad se conoce como paradoja de Alabama (véase la sección 5). La siguiente proposición, que con una ligera diferencia también está enunciada en [2, proposition 3.2], demuestra que los métodos de divisor evitan la paradoja de Alabama, si bien se necesita un criterio de desempate cuando exista más de una solución.

Proposición 6. *Sean $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_s)$ una α-distribución de e y $\bar{n}' = (n'_1, \ldots, n'_s)$ de e' según según $\bar{v} \in \mathbb{Q}^s$, con $e < e'$. Además, y si fuese el caso, se supone que ambas distribuciones han sido elegidas conforme a un criterio de desempate mediante una misma ordenación de índices. Entonces $n_i \leq n'_i$, para cada i.*

Demostración. Sean d y d' divisores adecuados para e y e', respectivamente. Así pues, para cada i se tiene que n_i y n'_i son los redondeos de v_i/d y v_i/d' en las respectivas distribuciones. Si fuese $d' < d$, se tendría

$$\frac{v_i}{d} < \frac{v_i}{d'}$$

para todo i, y por la proposición 1 (d) es $n_i \leq n'_i$, como queríamos demostrar.

Si fuese $d < d'$, análogamente al caso anterior se ve que $n'_i \leq n_i$, pero entonces se tendría

$$e' = \sum n'_i \leq \sum n_i = e,$$

lo cual contradice que $e < e'$.

Queda por considerar la posibilidad $d = d'$. En este caso $v_i/d = v_i/d'$ se redondea a n_i y n'_i. Como $e < e'$, existe j tal que $n_j < n'_j$, por la proposición 1 (c) es $n'_j = n_j + 1$ y $v_j/d = \alpha(n_j)$.

Ahora bien, si existiera k tal que $n'_k < n_k$, por un razonamiento análogo al anterior se tendría $n_k = n'_k + 1$ y $v_k/d = \alpha(n'_k) = \alpha(n_k - 1)$. En definitiva,

$$d = \frac{v_j}{\alpha(n_j)} = \frac{v_k}{\alpha(n_k - 1)}.$$

De la proposición 5 (a) se deduce que

$$(n_1, \ldots, n_k, \ldots, n_j, \ldots, n_s) \quad \text{y} \quad (n_1, \ldots, n_k - 1, \ldots, n_j + 1, \ldots, n_s)$$

son dos distribuciones de e escaños. Por la hipótesis referida al criterio de desempate, es claro que el índice k es preferido al índice j.

Por otra parte, de lo anterior también se sigue que

$$d = \frac{v_k}{\alpha(n'_k)} = \frac{v_j}{\alpha(n'_j - 1)},$$

y de nuevo por la proposición 5 (a) se tiene que

$$(n'_1, \ldots, n'_k, \ldots, n'_j, \ldots, n'_s) \quad \text{y} \quad (n'_1, \ldots, n'_k + 1, \ldots, n'_j - 1, \ldots, n'_s)$$

son dos distribuciones de e' escaños, y puesto que se ha elegido la primera de ellas, es el índice j el que prevalece sobre el k en el criterio de desempate, que es lo contrario de lo visto anteriormente. Por ello no existe un tal k. □

Nótese que, en la proposición anterior, un empate en el reparto de e escaños no implica que existan empates en el reparto de e' escaños, y viceversa.

EJEMPLO. Supongamos que se reparten 12 escaños y 13 escaños según la tupla de votos $(15, 25, 35, 45)$ utilizando el método de Webster. Para la resolución de empates se utilizará la preferencia indicada por el orden expuesto. Nótese que 10 es divisor adecuado tanto para la distribución de 12 escaños como para la de 13. La solución para el reparto de 12 escaños es $(2, 3, 3, 4)$ y para el de 13 es $(2, 3, 4, 4)$. Si no hubiéramos fijado un orden de preferencia, para el reparto de 13 escaños habría sido igualmente válida la distribución $(1, 3, 4, 5)$, que sufre la paradoja de Alabama.

En este sentido cabe hacer notar que, cuando el criterio de desempate es por sorteo, un método de divisor podría dar lugar a la paradoja de Alabama.

Para completar características relativas a la unicidad sobre funciones de redondeo se enuncia a continuación una proposición, cuya demostración se pospone a la siguiente sección.

PROPOSICIÓN 7. *Si α y α' son funciones de redondeo distintas, entonces existen una s-tupla $\bar{v}$ y $e \in \mathbb{N}$ que proporcionan distintas distribuciones.*

3. Métodos de sucesión de divisores

Definiciones. Sean β una sucesión $d_0, d_1, \ldots$ estrictamente creciente de números reales positivos y $\bar{v} \in \mathbb{Q}^s$ y $e \in \mathbb{N}$ como antes. Una tal β se dice *sucesión de divisores*. Sea

$$S = \{q_{ij} = v_i/d_j \mid i = 1, \ldots, s;\ j = 0, \ldots, e-1\};$$

supuestos ordenados los q_{ij} en orden decreciente, sea T subconjunto de S formado por los e primeros q_{ij} de acuerdo con la ordenación anterior y designemos

$$n_i = |\{j \mid q_{ij} \in T\}|.$$

La s-tupla $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_s)$ se dice que es una *distribución respecto de la sucesión de divisores* β de e según $\bar{v}$. Si $e = 0$ supondremos que $\bar{n} = (0, \ldots, 0)$. Notar que T puede no ser único, y por consiguiente puede haber más de una distribución.

Ejemplos. (a) *Método D'Hont:* Tomar la sucesión $1, 2, 3, 4, \ldots$

(b) *Método Sainte-Laguë:* Considerar $1, 3, 5, 7, \ldots$

(c) *Método Sainte-Laguë modificado:* Considerar $1.4, 3, 5, 7, \ldots$

(d) *Método imperiali:* Considerar $2, 3, 4, 5, \ldots$

(e) *Método danés:* Considerar $1, 4, 7, 10, \ldots$

Proposición 8. *Sea β la sucesión de divisores $d_0, d_1, \ldots$ y β' la $d'_0, d'_1, \ldots$ Entonces las distribuciones respecto de β y β' coinciden si y solo si existe un número real positivo r tal que $rd_i = d'_i$ para todo i.*

Demostración. Si existe un tal r, directamente de la definición de distribución respecto de una sucesión de divisores se sigue que las distribuciones respecto de β y β' coinciden.

Recíprocamente, supongamos que no existe un tal r; entonces existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $d_m/d'_m \neq d_n/d'_n$ y podemos suponer que

$$\frac{d_m}{d_n} > \frac{d'_m}{d'_n}.$$

Sean $a, b \in \mathbb{N}$ tales que

$$\frac{d_m}{d_n} > \frac{a}{b} > \frac{d'_m}{d'_n}.$$

Consideremos la tupla $\bar{v} = (a, b)$ para el reparto de $e = m + n + 1$ escaños según β y β'. Respecto de β, si al partido con a votos le correspondieran más de m escaños, entonces al partido con b votos se le asignarían más de n escaños puesto que $a/d_m < b/d_n$, lo cual no puede ser pues el número de escaños a repartir es $e = m + n + 1$. Así pues, al primer partido le corresponderían a lo más m escaños y, al segundo, al menos $n + 1$.

Respecto de la sucesión β', como

$$b/d'_n < a/d'_m,$$

por un argumento similar se tendría que al partido correspondiente a a se le asignarían al menos $m + 1$ escaños y, al otro, a lo más m. En definitiva, las distribuciones correspondientes a β y β' no coincidirían. $\square$

4. Métodos de divisor y de sucesión de divisores

Los métodos de sucesión de divisores son bastante utilizados en Europa, pero en Alemania en las dos últimas elecciones generales se ha usado el sistema denominado Sainte-Laguë/Schepers ([4]), descrito como método de divisor, exactamente el de Webster. En [8] damos una demostración de que ese método es realmente el de Sainte-Laguë. En la siguiente proposición se generaliza esa propiedad a cualquier método de divisor.

PROPOSICIÓN 9 (Véase [6, pág. 60]). *Sea α una función de redondeo con $\alpha(0) \neq 0$. Entonces, para cualesquiera e y $\bar{v}$, las α-distribuciones coinciden con las distribuciones respecto de la sucesión de divisores* $\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \ldots$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\bar{n} = (n_1, \ldots, n_s)$ una α-distribución de e según $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_s)$. Para la aplicación del método de sucesión de divisores, se deben tener en cuenta la lista de los cocientes

$$\frac{v_i}{\alpha(0)}, \frac{v_i}{\alpha(1)}, \ldots, \frac{v_i}{\alpha(e-1)}, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Por ser α una función creciente, para el mismo i cada cociente es mayor o igual que el siguiente. Por otra parte, si d es divisor adecuado para $\bar{n}$, aplicando la proposición 1 (a) para los índices i tales que $n_i \neq 0$ y para cualquier j, se tiene que

$$\alpha(n_i - 1) \leq v_i/d \leq \alpha(n_i) \quad \text{y} \quad v_j/d \leq \alpha(n_j),$$

luego

$$v_i/\alpha(n_i) \leq d \leq v_i/\alpha(n_i - 1) \quad \text{y} \quad v_j/\alpha(n_j) \leq d.$$

En definitiva se cumple

$$\frac{v_i}{\alpha(n_i - 1)} \geq \frac{v_j}{\alpha(n_j)}.$$

Por tanto, los mayores cocientes de la lista anterior son

$$\frac{v_1}{\alpha(0)}, \ldots, \frac{v_1}{\alpha(n_1 - 1)}, \ldots, \frac{v_s}{\alpha(0)}, \ldots, \frac{v_s}{\alpha(n_s - 1)};$$

en total hay $n_1 + \cdots + n_s = e$ cocientes, de los que n_i corresponden al índice i, es decir, $\bar{n}$ es también una distribución para la sucesión de divisores $\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \ldots$

Sea ahora una distribución, $\bar{n}$, de e escaños respecto de la sucesión de divisores $\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \ldots$, por lo que que $n_1 + \cdots + n_s = e$. Siguiendo el inverso del razonamiento anterior se prueba que $\bar{n}$ es también una distribución respecto de la función de redondeo α. □

EJEMPLOS. Entre los métodos citados anteriormente se dan las siguientes coincidencias:

(a) El método D'Hont coincide con el de Jefferson.

(b) El método de Webster/Schepers coincide con el de Sainte-Laguë. (Tener en cuenta la proposición 8.)

(c) El método danés coincide con el correspondiente a la función de redondeo α dada por
$$\alpha(n) = n + 1/3.$$

Ahora podemos dar una demostración de la proposición 7.

Demostración de la proposición 7. Teniendo en cuenta las proposiciones 8 y 9, bastará ver que si α y α' son funciones de redondeo distintas, entonces las sucesiones
$$\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \ldots \quad \text{y} \quad \alpha'(0), \alpha'(1), \alpha'(2), \ldots$$
no son proporcionales. Para ello, consideremos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(n) < \alpha'(n)$, con lo cual existe $m \in \mathbb{N}$ tal que
$$\frac{m+1}{m} = 1 + \frac{1}{m} > \frac{\alpha'(n)}{\alpha(n)}.$$
Ahora bien, por definición de función de redondeo, el primer término de la expresión anterior es mayor o igual que $\alpha'(m)/\alpha(m)$. En definitiva,
$$\frac{\alpha'(m)}{\alpha(m)} < \frac{\alpha'(n)}{\alpha(n)},$$
que prueba que ambas sucesiones no son proporcionales. □

Puesto que a una sucesión de divisores solo se le ha exigido que fuese estrictamente creciente, no siempre una distribución por el método de sucesión de divisores coincide con otra por el método de divisor. Sin embargo, se puede probar una condición necesaria y suficiente para que se dé esa coincidencia, como se muestra en la proposición 11.

El siguiente lema previo es una consecuencia de la propiedad de completitud de los números reales.

Lema 10. *Sean f y g dos sucesiones de números reales que verifican $f(i) \leq g(j)$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Entonces existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $f(i) \leq r \leq g(j)$ para todo $i, j \in \mathbb{N}$.*

Proposición 11. *Sea una sucesión $d_0, d_1, \ldots$ de números reales estrictamente creciente. Entonces existe una función de redondeo α tal que coinciden las respectivas distribuciones si y solo si para todo $i \in \mathbb{N}$ y para todo $0 \neq j \in \mathbb{N}$ se verifica*
$$\frac{d_i}{i+1} \leq \frac{d_j}{j}.$$

Demostración. Supongamos que α es una función de redondeo tal que cualquier distribución coincide con la de la serie de divisores $d_0, d_1, \ldots$ Por las proposiciones 8 y 9 se sigue que existe r número real positivo tal que $\alpha(i) = rd_i$ para todo i, y como $i \leq \alpha(i) \leq i+1$, se tiene $i \leq rd_i \leq i+1$, y por tanto $1/r \leq d_j/j$ para todo $j \neq 0$ y $d_i/(i+1) \leq 1/r$ para todo i, de donde se deduce que
$$\frac{d_i}{i+1} \leq \frac{d_j}{j}.$$

Recíprocamente, supongamos que se verifica la desigualdad anterior para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Por el lema anterior, existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{d_i}{i+1} \leq r \leq \frac{d_j}{j}.$$

Observar que por ser los d_i positivos no nulos, $r \neq 0$. Sea ahora la función α definida mediante $\alpha(i) = d_i/r$. Se tiene que

$$\alpha(i) \leq i+1 \quad \text{y} \quad j \leq \alpha(j);$$

en particular,

$$i \leq \alpha(i) \leq i+1$$

para todo i, luego α es una función de redondeo y, por la construcción de α y la proposición 8, se sigue que las respectivas distribuciones coinciden. □

El método Sainte-Laguë modificado, que corresponde a la sucesión de divisores $1.4, 3, 5, \ldots$, se ve que es de divisor aplicando la proposición 11.

El método imperiali corresponde a la sucesión de divisores $\{d_i = 2 + i \mid i = 0, 1, \ldots\}$. Como este método no cumple la desigualdad de la proposición anterior (basta comprobarlo para el caso $i = 1, j = 5$), se sigue que el método imperiali no es de divisor.

Los métodos de sucesión de divisores que no son de divisor, como el imperiali, no son exactos, es decir, sufren de la anomalía descrita a continuación de la proposición 4. En efecto, sea $d_0, d_1, \ldots$ la correspondiente sucesión de divisores; por la proposición 11 existen i, j tales que $d_i/(i+1) > d_j/j$, es decir, $(i+1)/d_i < j/d_j$. Considerando la tupla $(i+1, j)$ para el reparto de $i+j+1$ escaños, de la desigualdad anterior se sigue que si el primer partido recibe al menos $i+1$ escaños, el segundo recibiría al menos $j+1$ escaños, lo cual implica que el método no es exacto.

5. El método de Hamilton

Recordemos que el *método de Hamilton*, o el de restos mayores, para la distribución de e escaños según $\bar{v}$ consiste en asociar a cada i la parte entera de las correspondientes cuotas. El resto de elementos hasta completar e se asigna a los índices i cuyas cuotas tengan mayor parte decimal. En el caso de iguales partes decimales el escaño o escaños que correspondan se asignan al partido o partidos favorecidos por un criterio de desempate, por ejemplo según una ordenación de índices previamente establecida.

La literatura aporta suficientes ejemplos para apreciar que el método de Hamilton no coincide con ninguno de los ejemplos de métodos de divisor mencionados anteriormente. Incluso en las publicaciones especializadas se afirma que el de Hamilton no es un método de divisor; sin embargo, no se indica ninguna prueba, al menos directa, de esa afirmación, que por otra parte se trata de una afirmación intuitiva. A continuación presentamos tres demostraciones de esta afirmación, de naturalezas esencialmente distintas.

La siguiente propiedad de los números racionales, que no necesita demostración, es útil para probar la citada afirmación.

Lema 12. (a) *Sean* $q_0, q_1 \in \mathbb{Q}$ *verificando* $1/2 \geq q_0 > q_1 > 0$. *Entonces existen* $1 < n \in \mathbb{N}$ *y* $q_2, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ *tales que*

$$q_0 > q_1 > q_2 > \cdots > q_n \quad y \quad q_0 + q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1.$$

(b) *Sean* $m \in \mathbb{N}$ *y* $s, r \in \mathbb{Q}$ *tales que* $s < m$ *y* $0 < r < 1$. *Entonces existen* $n \in \mathbb{N}$ *y* $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ *verificando*

$$r > q_1 > q_2 > \cdots > q_n > 0 \quad y \quad s + q_1 + q_2 + \cdots + q_n = m.$$

Proposición 13. *El método de Hamilton no es un método de divisor, es decir, no existe ninguna función de redondeo que cumpla que, para cualquier tupla, ninguna distribución obtenida por el método de Hamilton coincida con alguna de las distribuciones obtenida con el método correspondiente de divisor.*

Demostración. Supongamos que el método de Hamilton es coincidente con uno de divisor cuya función de redondeo sea α. Denotaremos $\alpha(i) = i + r_i$.

(a) Se verifica que $r_0 \neq 0$. En efecto, pues, en caso contrario, considerando el caso de la tupla de cuotas $\bar{c} = (1.6, 0.4)$ para distribuir 2 escaños, se ve que Hamilton realizaría la única distribución $(2, 0)$, mientras que con un tal α y con un divisor mayor que 1.6 se obtendría la distribución $(1, 1)$, que también sería única. Luego $\alpha(0) = r_0 \neq 0$.

(b) En segundo lugar se probará que $r_1 > r_0$. Como $r_0 > 0$ podemos tomar $q_0, q_1 \in \mathbb{Q}$, verificando

$$r_0 > q_0 > q_1 > 0, \quad \frac{1}{2} \geq q_0 \quad \text{y} \quad q_1 > q_0 - \frac{r_0 - q_0}{r_0}.$$

Formemos el siguiente ejemplo de cuotas para el reparto de 2 escaños,

$$\bar{c} = (1 + q_1, q_0, q_2, \ldots, q_n),$$

con las condiciones $q_0 > q_1 > q_2 > \cdots > q_n$ y $q_0 + q_1 + \cdots + q_n = 1$. La existencia de tales $q_2, \ldots, q_n$ está garantizada puesto que $1/2 \geq q_0 > q_1$ y por aplicación del lema 12 (a).

En este ejemplo, Hamilton proporciona la distribución $(1, 1, 0, 0, \ldots, 0)$. Para que se obtenga esa misma distribución con la función de redondeo α, un divisor adecuado d debe verificar

$$\frac{q_0}{r_0} \geq d \geq \frac{1 + q_1}{1 + r_1}.$$

Teniendo en cuenta estas desigualdades y las condiciones para q_1, se verifica

$$1 + r_1 \geq \frac{r_0}{q_0}(1 + q_1) > \frac{r_0}{q_0}\left(1 + q_0 - \frac{r_0 - q_0}{r_0}\right) = \frac{r_0}{q_0}\left(q_0 + \frac{q_0}{r_0}\right) = 1 + r_0,$$

es decir, $r_1 > r_0$.

(c) Finalmente probaremos que no existe una tal α. Por los apartados anteriores sabemos que

$$1 \geq r_1 > r_0 > 0.$$

Podemos tomar $m \in \mathbb{N}$ y $q_0, q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{Q}$ tales que

$$r_1 > q_0 > q_1 > \cdots > q_m > r_0 \quad \text{y} \quad m > \frac{q_0}{1 - q_0}.$$

De la elección de m se sigue $m(1 - q_0) > q_0$, luego $m > q_0(1 + m)$. En consecuencia,

$$q_0 + q_1 + \cdots + q_m < (m + 1)q_0 < m.$$

Por el lema 12 (b) podemos construir el siguiente escenario para el reparto de $m + 1$ escaños:

$$\bar{c} = (1 + q_0, q_1, q_2, \ldots, q_m, q_{m+1}, \ldots, q_n)$$

con las condiciones $r_0 > q_{m+1} > \cdots > q_n > 0$ y $q_0 + q_1 + \cdots + q_m + \cdots + q_n = m$.

Puesto que $q_0, q_1, \ldots, q_{m-1} > q_m > \cdots > q_n$, Hamilton proporciona la distribución

$$(2, \overbrace{1, \ldots, 1}^{m-1}, 0, \ldots 0).$$

Aplicando a la tupla de cuotas el α-redondeo con 1 como divisor, se tiene que $1 + q_0$ se redondea a 1 puesto que $\alpha(1) = 1 + r_1 > 1 + q_0$. Para $i = 1, \ldots, m$, el redondeo de q_i es 1 porque $q_i > r_0 = \alpha(0)$, y los redondeos de q_j, para $j = m + 1, \ldots, n$, son 0 puesto que $r_0 > q_j$. Luego 1 es divisor adecuado y la única distribución es

$$(1, \overbrace{1, \ldots, 1}^{m}, 0, \ldots 0),$$

así que el de Hamilton no es un método de divisor. □

En 1881, la Oficina del Censo de EEUU recibió el encargo de realizar la simulación de aplicar diversos procedimientos de distribución de escaños (Jefferson, Webster, Hamilton) para las siguientes elecciones al Congreso tomando como datos iniciales los del censo electoral de 1880 de los 38 estados que en aquella época componían la Unión, y variando el número de escaños a repartir. La citada oficina observó que, utilizando el método de Hamilton para 299 escaños, el estado de Alabama recibía 8, mientras que, si se simulaba el reparto de 300 escaños, Alabama recibía solamente 7. Esta es la razón histórica por la que se conoce con el nombre de paradoja de Alabama al no cumplimiento de la propiedad de monotonía por aumento del número de escaños a repartir, propiedad que para el caso de los métodos de divisor se ha expresado en la proposición 6.

La descripción completa del caso de Alabama es claramente compleja, pues involucra a una tupla de longitud 38 (una descripción parcial se encuentra en [2, pág. 39]). Pero existen ejemplos más sencillos, como el que se muestra en [7, pág. 602], el presentado en [3, pág. 436], o el que aparece en la siguiente proposición.

Proposición 14. *El método de Hamilton sufre la paradoja de Alabama.*

Demostración. Basta considerar la tupla $(50, 40, 3, 2, 2, 2, 1)$ para el reparto de 10 y de 11 escaños. En el primer caso la distribución es $(5, 4, 1, 0, 0, 0, 0)$, y para el reparto de 11 escaños la distribución es $(6, 5, 0, 0, 0, 0, 0)$. Así pues, un aumento de un escaño ha supuesto la disminución de uno para el tercer partido. □

En consecuencia tenemos una segunda demostración, indirecta y no formal, de que el método de Hamilton no es uno de divisor, pues estos métodos verifican, con alguna condición relativa a desempates, la propiedad de monotonía descrita en la proposición 6.

Por otra parte, el ejemplo anterior nos sugiere otra demostración de la proposición 13 de naturaleza diferente a las dos expuestas anteriormente. Para ello, consideremos de nuevo la tupla $(50, 40, 3, 2, 2, 2, 1)$ para el reparto de 10 y de 11 escaños. Supuesto que el de Hamilton coincide con un método de divisor respecto de la función de redondeo α, no es difícil probar que entonces se tendría

$$\frac{\alpha(4)}{\alpha(5)} = \frac{4}{5}.$$

Por otra parte, considerando la tupla $(51, 41)$ para el reparto de 10 escaños, igualmente es fácil ver que

$$\frac{\alpha(4)}{\alpha(5)} \geq \frac{41}{51},$$

que contradice la anterior igualdad.

Agradecimientos. Los autores agradecen al profesor Antonio Palomares Bautista, de la Universidad de Granada, sus comentarios y sugerencias al presente trabajo.

Referencias

[1] M. Balinski y V. Ramírez, Parametric vs. divisor methods of apportionment, *Ann. Oper. Res.* **215** (2014), 39–48.

[2] M. L. Balinski y H. P. Young, *Fair Representation. Meeting the Ideal of One Man, One Vote*, Yale University Press, New Haven, 1982.

[3] S. Brams, B. Conrad, W. Lucas y A. Taylor, La elección social y la toma de decisiones, *Las matemáticas en la vida cotidiana*, Cap. 14, 427–460, Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 2006.

[4] *Elections to the German Bundestag 2013*, `http://www.bundeswahlleiter.de/en/glossar/texte/Saint_Lague_Schepers.html`

[5] *Ley del Régimen Electoral General*, `https://www.boe.es/buscar/pdf/1985/BOE-A-1985-11672-consolidado.pdf`

[6] F. Pukelsheim, *Proportional Representation. Apportionment Methods and Their Applications*, Springer, 2014.

[7] V. Ramírez González y A. Palomares Bautista, Aspectos Matemáticos en las elecciones a Claustro Universitario de acuerdo con la LOU, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **5** (2002), 589–619.

[8] M. Vázquez y P. Jiménez Seral, El nuevo modelo de reparto de escaños en el sistema electoral alemán, *Cuadernos Manuel Giménez Abad* **7** (2014), 108–125. Disponible en `http://www.fundacionmgimenezabad.es`

Paz Jiménez-Seral, Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza
Correo electrónico: `paz@unizar.es`

Manuel Vázquez, Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza
Correo electrónico: `vazquez@unizar.es`