Universidad Zaragoza

1542

[Aplicación del lenguaje "R": El modelo de conducta del consumidor]

Directores: Joaquín Andaluz y Gloria Jarne.

Autor: Pablo Puertas Miramón

Grado de Economía

Línea de trabajo: "Herramientas informáticas en la optimización y análisis de datos".

Índice

I. INFORMACIÓN Y RESUMEN.

Autor: Pablo Puertas Miramón

Directores: Joaquín Andaluz y Gloria Jarne.

Línea de trabajo: “Herramientas informáticas en la optimización y análisis de datos”.

Titulación: Grado de Economía.

Resumen

Este trabajo consiste en una defensa de la eficacia del lenguaje de programación “R” para funciones didácticas en el contexto de la optimización aplicado a la teoría del consumidor.

El procedimiento seguirá la estructura de exposición general de la teoría del consumidor, se ejemplificará dicha teoría con funciones de utilidad generales tipo Cobb-Douglas y, en cada fase del desarrollo, se demostrará que se cumplen las condiciones y resultados teóricos que se irán explicando. Para visualizar gráficamente los resultados se darán valores paramétricos concretos a las funciones que intervienen, representándolas a través de “R”. Esta particularización concluirá en la aportación gráfica y matemática de funciones y soluciones finales para el problema planteado.

De esta forma, el lector podrá comprobar que “R” es una buena herramienta para explicar y comprender la teoría del consumidor y en general cualquier modelo económico.

Abstract

This project consists of defending the effectiveness of the "R" programming language for didactic functions in the context of optimization applied to consumer theory.

The procedure for showing it will follow the structure of the general exposition of consumer theory. This will be exemplified with Cobb-Douglas general functions. In each phase, it will be demonstrated that the explained theoretical characteristics are fulfilled, particularizing with specific data through "R". This particularization will conclude in the graphical and mathematical representation of functions and final solutions.

The reader can verify that "R" is a good tool for the explanation and understanding of the consumer theory.

II. INTRODUCCIÓN.

He elegido este lenguaje de programación por varias razones. La primera es que es un **software libre**, es decir, está al alcance de cualquier estudiante o profesional de forma sencilla y gratuita.

Richard Stallman fue el fundador del movimiento software libre en 1983 y lo definía como un "asunto ético del uso de la tecnología". La caracterización de software libre, garantiza cuatro libertades principales: Uso, estudio, distribución y mejora.

Otra de las razones principales es que cuenta con una gran **comunidad de usuarios** que comparten conocimientos, dudas y mejoras. La comunidad está alojada en www.r-project.com y www.r-bloggers.com (ambas de habla inglesa). Este apoyo en línea, lo hace muy atractivo para el aprendizaje autónomo.

Por último, se trata de una implementación de un lenguaje anterior orientándolo al **lenguaje estadístico y gráfico** que lo hace más conveniente para aplicarlo al entorno económico.

En este Trabajo Fin de Grado se trata de mostrar la aplicabilidad de este lenguaje a tareas docentes de microeconomía. En particular, se expondrá el problema de la elección del consumidor. En primer lugar se enumerarán los conceptos teóricos, propiedades y resultados para a continuación ejemplificarse con la función de utilidad de Cobb-Douglas y la ecuación de balance (ecuación presupuestaria).

Para el uso del lenguaje "R" se dará unos valores concretos a los parámetros que aparecen. Las programaciones en "R" que he realizado para cada uno de los problemas que he tenido que resolver los presento al final del Trabajo Fin de Grado en Anexos.

La explicación teórica se basa en los diferentes manuales de la bibliografía como "Lecciones de microeconomia" de Antonio Villar (1999), entre otras. Se expone de una forma general y explicativa ya que el objetivo no es la profundización (que ya ha sido formulada en diversos manuales) sino la aplicación para fines didácticos.

La particularización a funciones con valores paramétricos concretos servirá como ejemplo de la utilidad del lenguaje "R" en la visualización de las características descritas de forma general en los apartados teóricos.La visualización a través de éste programa permitirá que el lector pueda observar fácilmente sus características.

De esta forma, el lector descubrirá la utilidad y eficiencia de esta herramienta para la comprensión y explicación de la teoría del consumidor.

He elegido la teoría del consumidor porque es un buen ejemplo en la aplicación de la programación matemática en la economía. Servirá como ejemplo de aplicación inicial de las herramientas informáticas para la optimización.

III. EL MODELO.

A continuación definiré el modelo de forma resumida para proceder a su aplicación en base al lenguaje “R”.

Los resultados teóricos parten de las competencias microeconómicas que he obtenido en las diversas asignaturas de microeconomia cursadas en el Grado. Estos resultados se pueden seguir de forma rigurosa y detallada en los libros enumerados en la bibliografía.

1. Conceptos preliminares.

1.1 Conjunto de consumo: definición y propiedades.

Se considera un individuo que desea consumir cantidades de un conjunto de n bienes de consumo. A efectos de simplificación y con el fin de utilizar el análisis gráfico, supondremos que el número de bienes de consumo se reduce a dos.

Cada combinación de cantidades de bienes se denomina *plan de consumo o cesta de consumo* y el conjunto de todas las cestas que el consumidor se puede imaginar constituye el conjunto de elección o conjunto de consumo.

Las propiedades mínimas que se imponen en el conjunto de consumo son:

1. Las cantidades de los bienes son no negativas siendo la cesta nula un elemento del conjunto de elección.

2. Se supone que las cantidades son perfectamente divisibles. Es decir, es posible reducir la escala de consumo todo lo que se desee.

3. El conjunto de elección es cerrado, ya que contiene a los elementos de su frontera y es no acotado.

4. El conjunto de elección es convexo. Dadas dos cestas de consumo, el segmento cerrado que las une también pertenece al conjunto de elección.

Con todo ello, podemos identificar al conjunto de elección con el conjunto de las n-tuplas de los números reales no negativos. En el caso de dos bienes, dicho conjunto se representa gráficamente mediante el primer cuadrante.

1.2 Relación de preferencias: definición y propiedades.

Para poder explicar la conducta del consumidor, es necesario definir una *relación de preferencias* que permita ordenar las distintas cestas de consumo que contiene el conjunto de elección. Para ello, se define la relación binaria, "es al menos tan preferida como", denominada la relación de preferencia débil. Mediante dicha relación, el consumidor es capaz de ordenar en términos de satisfacción cualquier par de cestas del conjunto de elección.

La relación de preferencias debe cumplir una serie de propiedades con el fin de asegurar dos objetivos:

Por una parte, debemos garantizar que el comportamiento del consumidor corresponde al de un agente racional. En este sentido, debe ser capaz de ordenar cualquier par de cestas y hacerlo de manera consistente.

Por otra parte, debemos asegurar que el problema de elección individual tenga solución y sea única.

De este modo, se establecen un conjunto de axiomas asociados a la relación de preferencias que se agrupan en dos categorías.

1.2.1 Axiomas de racionalidad: completitud y transitividad.

El **axioma de completitud:** dadas dos cestas, el consumidor siempre será capaz de establecer una comparación entre ellas ya sea de preferencia o indiferencia de una por la otra.

El **axioma de transitividad** explica que las cestas tienen un orden de preferencia establecido por el consumidor. Suponiendo esta vez tres cestas: Si la primera cesta es preferida a la segunda y a su vez, la segunda preferida a la tercera, necesariamente, la primera cesta será preferida a la tercera cesta.

Del cumplimiento de los axiomas de racionalidad podemos identificar, a partir de una cesta cualquiera, dos subconjuntos diferenciados: el *conjunto de contorno superior* o conjunto de no inferioridad y el *conjunto de contorno inferior* o de no superioridad.

El conjunto de contorno superior es aquel conjunto de cestas que son al menos tan preferidas como la cesta elegida. En cambio el conjunto de contorno inferior es el conjunto de cestas tales que la cesta de referencia es, al menos, tan preferida como cualquiera de ellas.

La intersección de ambos conjuntos define a su vez, el *conjunto de indiferencia* o *clase de indiferencia* de una cesta dada, formada por todas aquellas cestas indiferentes entre sí.

No puede haber cestas comunes entre clases de indiferencia y la unión de todas las clases de indiferencia forma el conjunto de consumo. Por tanto, a partir de los axiomas de racionalidad, es posible particionar el conjunto de elección en clases de indiferencia.

1.2.2 Axioma de regularidad: continuidad, monotonía y convexidad estricta.

El **axioma de continuidad** establece que ante un cambio en la cesta que varía su satisfacción, el consumidor es capaz de encontrar una compensación por ese cambio. En términos formales dicho axioma asegura que los conjuntos de contorno superior e inferior (definidos antes) son conjuntos cerrados y por tanto, las clases de indiferencia (definidas antes) son continuas.

El **axioma de monotonía** (en un sentido fuerte), afirma que el consumidor mejora su satisfacción cuando consume unidades de bienes adicionales. Es decir entre dos cestas de consumo, el consumidor prefiere aquella que contenga más cantidad de, al menos, uno de los bienes y no menos cantidad de los restantes.

Por último, el **axioma de convexidad** estricta establece que el consumidor prefiere cestas con combinaciones de cantidades intermedias de bienes a aquellas cestas que tienen combinaciones extremas (es decir, de un bien muchas unidades, pero de otro ninguna o casi ninguna).

2. La restricción presupuestaria.

El consumidor no puede acceder a todas las cestas que desee ya que estas cestas de consumo están compuestas por bienes que tienen un precio y el consumidor dispone de una renta limitada. Este hecho queda reflejado en una *restricción presupuestaria.*

Por tanto, dados unos precios positivos y una renta monetaria finita, al conjunto de cestas al que el consumidor puede acceder lo llamaremos *conjunto presupuestario.*

2.1 Propiedades del conjunto presupuestario.

El conjunto presupuestario es un conjunto compacto (cerrado y acotado) y convexo.

Es un conjunto cerrado ya que contiene sus fronteras, y está acotado, tanto inferior como superiormente.

La convexidad del conjunto presupuestario asegura que dadas dos cestas pertenecientes al conjunto, toda combinación lineal de ambas, también pertenece al conjunto presupuestario.

2.2 Frontera del conjunto presupuestario: la recta de balance.

La *recta de balance* está definida por la suma de los productos de los bienes y sus precios igualada a la renta, es decir, son las combinaciones de bienes mayores a las que el individuo puede aspirar. En ellas, el individuo agota su renta en el consumo de ambos bienes, por tanto esas combinaciones son las más altas a las que el individuo puede aspirar.

2.3 La recta de balance en "R".

La formulación general de la recta de balance es representada como la suma de los productos precio y cantidad de ambos bienes igualada a la renta restringido para cantidades no negativas.

Analíticamente:

$$p_1 * x_1 + p_2 * x_2 = R \qquad (1)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Siendo x_i la cantidad de bienes, p_i el precio de los bienes y R la renta del individuo. Los valores paramétricos p_i y R son valores reales no negativos.

Para representar el conjunto presupuestario tomamos un ejemplo de dos bienes de precios de 3 y 2 unidades monetarias respectivamente y una renta de 20 unidades monetarias. Para los precios de los bienes y la renta disponible, la restricción presupuestaria (recta de balance) queda definida de la siguiente forma:

$$3 * x_1 + 2 * x_2 = 20 \qquad (2)$$

$$x_i \geq 0$$

A continuación se representa la restricción utilizando la programación que he utilizado en "R" y que se puede ver en el ANEXO 1. Para ello despejamos x_2 en función de x_1:

$$x_1 = (20 - 2 * x_2)/3$$

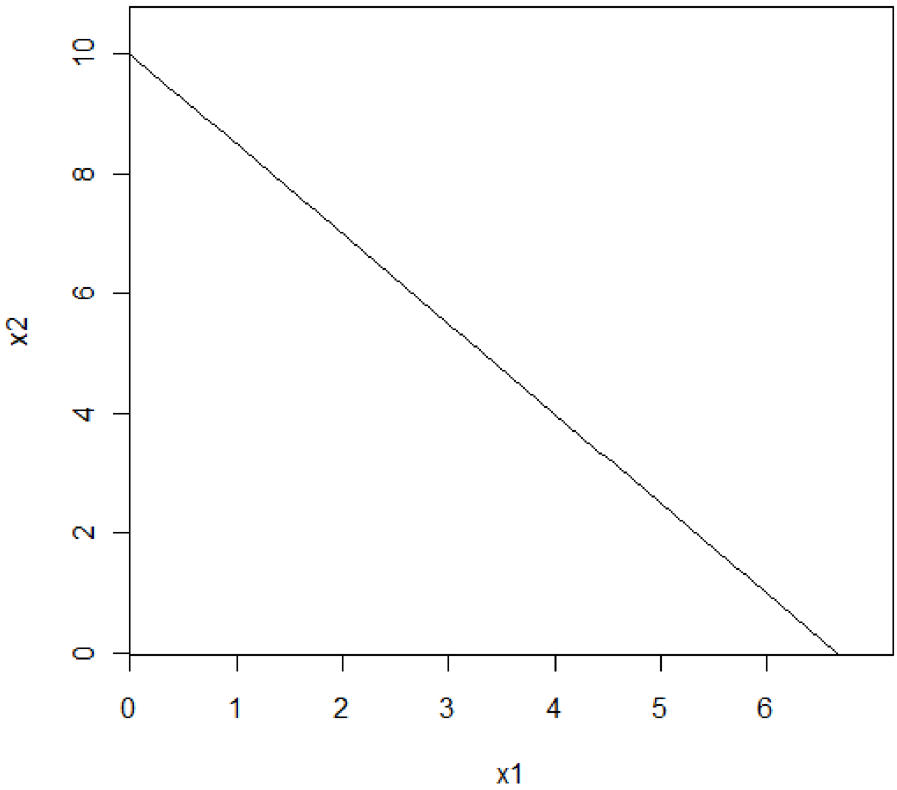

Figura 1. Representacion grafica recta balance.

La recta de balance tiene como pendiente el cociente de precios. La recta corta en los ejes en los siguientes siguientes puntos: $(R/p_1 , 0)$ y $(0, R/p_2)$

3. La función de utilidad.

A efectos de formular y resolver el problema de elección individual, es necesario definir una función que represente las preferencias del consumidor.

Debemos determinar una aplicación del conjunto de elección en el conjunto de los números reales, de modo que a cada cesta de consumo se le asocie un número real. Además, dicha aplicación, debe preservar el orden de preferencias, por lo que, las cestas estrictamente preferidas llevarán asociado un número real mayor, y las combinaciones de cantidades de bienes indiferentes entre sí, llevarán asignado el mismo número real. Toda aplicación que verifique dicho criterio, constituye una *función de utilidad.*

3.1 Existencia de la función de utilidad

La existencia de la función de utilidad viene garantizada por el cumplimiento de los axiomas de racionalidad y de regularidad. En concreto, el teorema de la existencia de la función de utilidad afirma que si la relación de preferencias es una relación completa, transitiva, continua y monótona, existe una función de utilidad continua que la representa.

3.2 Propiedades de la función de utilidad

Las propiedades de la función de utilidad están estrechamente relacionadas con los axiomas asociados a la relación de preferencias. Así, se deducen las siguientes propiedades:

3.2.1 Ordinalidad.

La función de utilidad es ordinal. Esta función preserva el orden de preferencias del consumidor. Para el consumidor habrá cestas más (y menos) preferidas que otras aunque también habrá relación de indiferencia, pero no es posible realizar afirmaciones en términos cardinales sobre la preferencia de una cesta frente a otras.

3.2.2 Monotonía.

Es una función monótona y creciente, conforme vamos aumentando la cantidad consumida de los bienes, la utilidad del consumidor es mayor.

3.2.3 Continuidad.

En el recorrido de la función de utilidad no existen saltos, es decir siempre habrá un valor conforme vayamos aumentando o disminuyendo el consumo de bienes.

3.2.4 Estricta cuasi-concavidad.

La convexidad estricta de las preferencias se traduce en una cuasi-concavidad de la función de utilidad. Una función es cuasi-cóncava si genera conjuntos de contorno superior estrictamente convexos.

Además, a efectos de cálculo, se supone que la función de utilidad es diferenciable de orden dos.

3.2.5 Representación gráfica con "R" de la función de utilidad.

Para ejemplificar la función de utilidad considerare la función Cobb-Douglas que se formula de forma general de la siguiente forma:

$$U(x_1, x_2) = A * x_1^{\alpha} * x_2^{\beta} \qquad (3)$$

donde A es un parámetro mayor que 0 y α y β, parámetros también positivos representan la preferencia relativa por cada uno de los bienes.

Podemos ver la forma de la función de utilidad mediante la representación gráfica de su superficie en 3 dimensiones. Para ello utilizamos el ANEXO 3 (Representación funciones dos variables).

Para la programación en "R" en lo que sigue consideraremos en la función de Cobb-Douglas: A = 1, alfa = ½ y beta = 1/4:

$$U(x_1, x_2) = x_1^{(1/2)} * x_2^{(1/4)} \qquad (4)$$

En lenguaje R, traduciremos la función (4) para introducirla en el ANEXO 3 de la siguiente forma:

U(x1,x2) ← x1^(1/2) * x2^(1/4)

La representación de (4) en el primer cuadrante que se obtiene en la programación es:

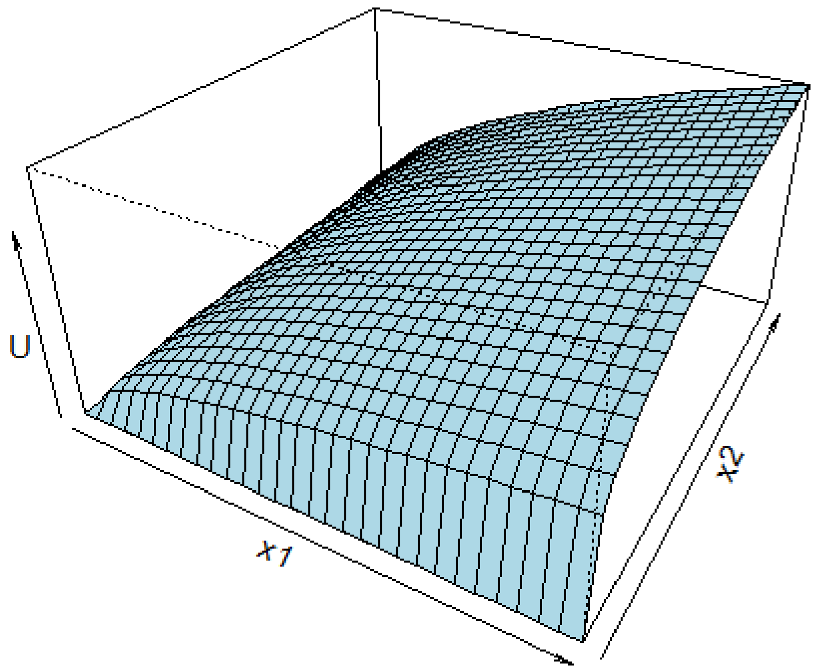

Figura 2: Representación gráfica de una función de Utilidad tipo Cobb-Douglas.

Se observa que es una función continua, creciente respecto a x_1 y x_2 y cóncava, por lo tanto cumple las propiedades teóricas de la función de utilidad.

3.3 Curvas de indiferencia.

3.3.1 Definición.

Las curvas de nivel de la función de utilidad pueden ser ordenadas según la utilidad que le aportan al individuo. La representación de este orden en R^2 viene dada por el *mapa de curvas de indiferencia:*

$$\{(x_1, x_2) \in R^2 | U(x_1, x_2) = C\} \quad para\, C \geq 0 \qquad (5)$$

Las curvas de nivel es el lugar geométrico de las combinaciones de cantidades de bienes que proporcionan un mismo nivel de utilidad.

Considerando la función de utilidad de Cobb-Douglas dada en (3) las curvas de indiferencia son de la siguiente forma:

$$U(x_1, x_2) = A * x_1^{\alpha} * x_2^{\beta} = C \quad \text{para} \quad C \geq 0 \qquad (6)$$

3.3.2. Propiedades.

A la pendiente en un punto de las curvas de indiferencia la llamamos *relación marginal de sustitución* y como veremos a continuación, viene dada por el cociente de las utilidades marginales de cada bien. Veremos que las curvas de indiferencia son estrictamente convexas respecto del origen y decrecientes, representando el decrecimiento de la relación marginal de sustitución entre dos bienes.

El teorema de la función implícita se describe de la siguiente forma:

$$U(x_1, x_2) = C \leftrightarrow A x_1^{\alpha} * x_2^{\beta} = C \qquad (7)$$

Si $\frac{\partial U}{\partial x_2} = A * \beta * x_1^{\alpha} * x_2^{(\beta-1)} \neq 0$, el Teorema de la Función Implícita permite definir una función $x_2 = f(x_1)$ tal que,

$$f'(x_1) = \frac{-\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{-A * \alpha * x_1^{(\alpha-1)} * x_2^{\beta}}{A * \beta * x_1^{\alpha} * x_2^{(\beta-1)}} = \frac{-\frac{\alpha}{\beta} * f(x_1)}{x_1} < 0$$

Por tanto, las curvas de indiferencia son **decrecientes**.

Derivando otra vez y utilizando (7):

$$f''(x_1)=-\frac{\alpha}{\beta}*\frac{f'(x_1)-f(x_1)}{x_1^2}=-\frac{\alpha}{\beta}*\frac{\frac{f(x_1)}{x_1}*\frac{\alpha}{\beta}-f(x_1)}{x_1^2}=\frac{\alpha}{\beta}*f(x_1)*\frac{\frac{\alpha}{\beta}+1}{x_1^2}>0$$

Por tanto, las curvas de indiferencia son cóncavas.

Desde el punto de vista económico, las curvas de indiferencia por el cumplimiento del axioma de monotonía fuerte son decrecientes.

Dos curvas de indiferencia nunca se cortan, debido al cumplimiento conjunto de los axiomas de monotonía fuerte y de transitividad.

Por último, las curvas de indiferencia serán necesariamente convexas respecto al origen. Esto se debe a que el consumidor está dispuesto a renunciar a menos cantidades de un bien conforme vaya teniendo más unidades del otro.

3.3.3 Representación gráfica con "R" de las curvas de indiferencia.

Podemos ver las propiedades de las curvas de indiferencia que acabamos de mencionar mediante su representación gráfica. Para ello tendremos que despejar la cantidad de un bien con respecto al otro dada la utilidad constante.

A partir de (6) se obtiene:

$$x_2=\frac{C}{A*x_1^{\alpha}}^{\frac{1}{\beta}}$$

Y particularizando a los valores paramétricos A=1, $\alpha=\frac{1}{2}$ y $\beta=\frac{1}{4}$ se obtienen $x_2=\frac{C^4}{x_1^2}$

Los niveles de utilidades que utilizaré a continuación son:
$C=2'7, C=2'8, C=2'9, C=3, C=3'1$

En el ANEXO 2 de representación de curvas de nivel, introduciremos las siguientes funciones:

(2.7/(x1^(1/2))^4 , (2.8/(x1^(1/2))^4, (2.9/(x1^(1/2))^4,

(3/(x1^(1/2))^4 y (3.1/(x1^(1/2))^4

Y los nombres "x1" y "x2" para los ejes.

Como resultado, obtenemos la siguiente gráfica:

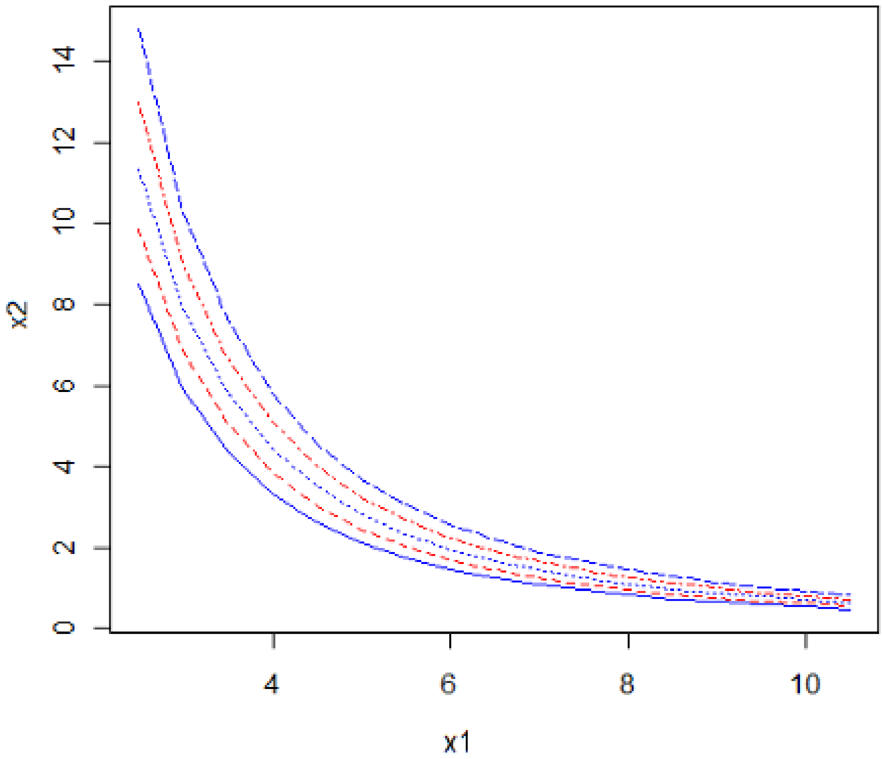

Figura 3. Representación gráfica de las curvas de indiferencia.

En esta representación gráfica, vemos las curvas de indiferencia en orden desde el origen para los niveles de utilidad C=2'7, C=2'8, C=2'9, C=3 y C=3'1, observando que conforme aumenta el valor de C se obtiene una curva más alejada del origen. Se observa que efecivamente, las curvas de indiferencia son decrecientes, convexas y no se cortan.

4. La elección del consumidor: El enfoque primal

Una vez definidas las preferencias y representadas mediante una función de utilidad y dado el conjunto factible, podemos abordar el problema de elección del consumidor.

El problema puede abordarse desde el punto de vista primal y desde el enfoque dual. El enfoque primal consiste en la maximización de la utilidad del individuo teniendo como restricción la recta de balance. El dual consiste en la minimización del gasto teniendo como restricción el nivel de utilidad deseado.

A continuación se describe el enfoque primal.

4.1 Planteamiento primal del problema del consumidor.

Considerando la función Cobb Douglas dada en (3) y la recta de balance dada en (1), el problema primal viene dado como (8).

Max U(x_1, x_2) = $A*x_1^{\alpha}*x_2^{\beta}$ (8)

Sujeto a: $\begin{cases} p_1*x_1+p_2*x_2=R \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

La primera restricción la haremos en términos de igualdad por el axioma de monotonía fuerte, el consumidor siempre querrá la máxima cantidad de cada uno de los bienes dentro de su conjunto factible. La segunda restricción especifica que el consumidor siempre accederá a cestas de cantidades de bienes no negativas.

Concretando para los valores parámetros considerados anteriormente, tendremos:

Max $U(x_1, x_2)=x_1^{(1/2)}*x_2^{(1/4)}$ (9)

sujeto a: $3*x_1+2*x_2=20$

$x_1, x_2 \geq 0$

La representación gráfica de este problema se obtiene combinando las figuras 1 y

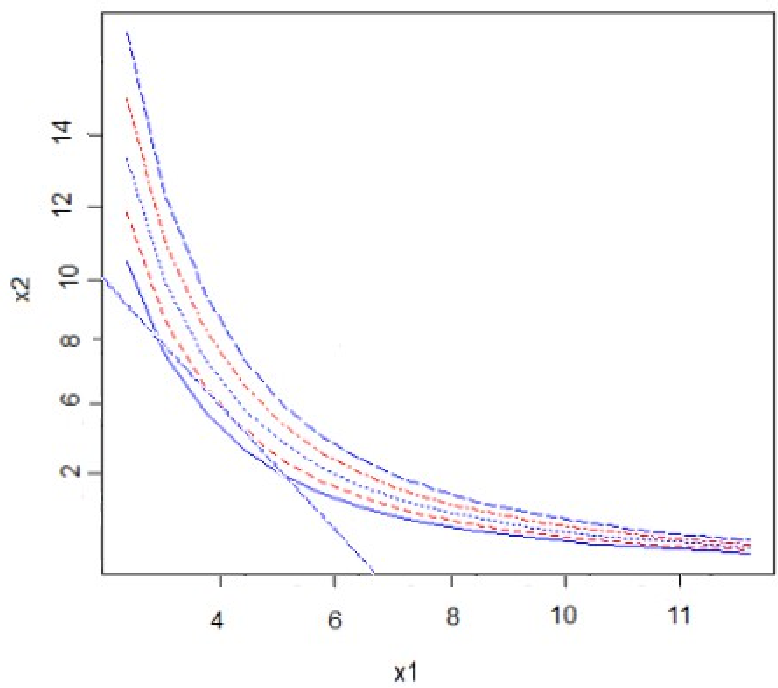

Figura 4. Representación gráfica del problema primal

Como vemos, el equilibrio del consumidor se alcanza cuando la recta presupuestaria es tangente en un punto a una curva de indiferencia. Por lo tanto, la curva de indiferencia más alejada del origen que toca tangencialmente con la recta presupuestaria representará el máximo nivel de utilidad al que puede aspirar el consumidor y por lo tanto, el punto de tangencia, la solución de equilibrio.

La decisión del consumidor (el punto de tangencia) puede deducirse matemáticamente por el método de los multiplicadores de Lagrange.

4.2 Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de máximo global.

Como $U(x_1,x_2)$ es continua y el conjunto factible es compacto, por el cumplimiento del teorema de Weierstrass podemos asegurar que el problema presentará máximo y mínimo globales. En este caso nos interesa la existencia de máximo global.

Por otro lado, el conjunto factible es convexo y si suponemos que las cantidades son estrictamente positivas la función de utilidad estrictamente cóncava. Esto mos permite afirmar que si el programa presenta un punto crítico, éste será un máximo global.

4.2.1 Cálculo del máximo global.

Ya hemos visto que el conjunto de consumo es convexo (ver figura 2). Ahora, para comprobar que la función objetivo es cóncava tenemos que trabajar con su matriz hessiana.

Para ello, utilizando el ANEXO 5 (Hessiana) Introduciendo la función de la siguiente forma:

x1^(1/2) * x2^(1/4)

La hessiana que nos devuelve la programación es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} -(1/4)*x_1^{(-3/2)}*x_2^{(1/4)} & (1/8)*x_2^{(-3/4)}*x_1^{(-1/2)} \\ (1/8)*x_2^{(-3/4)}*x_1^{(-1/2)} & -(3/16)\,x_1^{(1/2)}*x_2^{(-7/4)} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Siendo los menores principales:

$$D_1 = -\frac{1}{4}*x_1^{-\frac{3}{4}}*x_2^{\frac{1}{4}}$$

$D_2 = 2 * x_1^{-1} * x_2^{-\frac{3}{2}}$

Como podemos ver en 10 la matriz hessiana es definida negativa ya que el primer menor es negativo y el segundo es positivo, esto nos asegurará la concavidad de la función de utilidad (y por tanto la cuasi-concavidad). Por tanto estamos en condiciones de asegurar la existencia de un máximo global.

A continuación calculamos el punto en el que se alcanza el máximo global mediante la condición necesaria de Lagrange aplicada al problema dado en (8):

Max U(x_1, x_2) = $A * x_1^{\alpha} * x_2^{\beta}$ (11)

Sujeto a: $p_1 * x_1 + p_2 * x_2 = R$

$x_1, x_2 \geq 0$

La función lagrangiana se formula como sigue:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = A * x_1^{\alpha} * x_2^{\beta} + \lambda * (R - p_1 * x_1 - p_2 * x_2) \quad (12)$$

siendo λ el multiplicador de Lagrange, que en este caso representa la utilidad marginal de la renta.

La condición necesaria de Lagrange será la siguiente:

$$L_{x_1} = A * x_1^{(\alpha - 1)} * \alpha * x_2^{\beta} - p_1 * \lambda = 0 \quad (13)$$

$$L_{x_2} = A * x_1^{\alpha} * x_2^{(\beta - 1)} * \beta - p_2 * \lambda = 0$$

$$L_{\lambda} = R - p_1 * x_1 - p_2 * x_2 = 0$$

Resolviendo el sistema, hallaremos la solución al problema, obteniendo:

$$x_1 = \frac{R}{p_1} * \left(\frac{\alpha}{(\alpha + \beta)}\right) \quad (14)$$

$$x_2 = \frac{R}{p_2} * \left(\frac{\beta}{(\alpha + \beta)}\right)$$

$\lambda = R - p_1 * x_1 + p_2 * x_2$ DESPEJAR landa de (13)

Para hallarlo en el caso concreto Aplicando a estas condiciones a (9) que estamos desarrollando, aplicamos el anexo derivadas. Considerando los valores paramétricos anteriores, y utilizando el ANEXO 4, se obtiene:

$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$ D(expression((x1^(1/2)*x2^(1/4) - z*(3*x1 + 2*x2 – 20)), 'x1')

x1^((1/2) - 1) * (1/2) * x2^(1/4) – z*3

$\frac{\partial L}{\partial x_2}=0$ D(expression((x1^(1/2)*x2^(1/4) - z*(3*x1 + 2*x2 – 20)), 'x2')

x1^(1/2) * (x2^((1/4) - 1) * (¼)) – z*2

$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0$

D(x1^(1/2)*x2^(1/4) - z*(3*x1 + 2*x2 – 20)), 'z')

3*x1 + 2*x2 – 20

Solucionando este sistema obtenemos que la solución óptima es (x_1,x_2) = (4'44,3'33) con multiplicador asociado, λ=0'106 . Y el nivel de utilidad máximo alcanzado será de 2,8.

Volviendo a la figura 4, comprobamos que la solución de tangencia corresponde a este punto.

4.4 La función de demanda marshalliana.

4.4.1 Definición.

Las funciones de demanda marshallianas son la solución del problema primal del consumidor para cualquier vector de precios y nivel de renta. En nuestro problema si los precios y la renta actúan como variables exógenas, por el cumplimiento del teorema de la función implícita, a partir de las condiciones necesarias de la maximización de la utilidad, es posible deducir funciones que relacionan la cantidad demandada de cada uno de los bienes con los precios y la renta monetaria.

En nuestro caso, las funciones de demanda marshallianas se han obtenido en (14) y son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(p_1, p_2, R)=\frac{2*R}{3*p_1} \\ x_2(p_1, p_2, R)=\frac{R}{3*p_2} \end{array} \right\} \qquad (15)$$

Es inmediato observar que para el caso particular, la cantidad demandada de cada bien es independiente del precio del otro bien, si bien este resultado no es generalizable a otro tipo de preferencias.

4.4.2 Propiedades.

Las funciones de demanda Marshallianas tienen la característica de ser observables, continuas y homogéneas de grado cero en precios y renta.

Observabilidad: Dependen de variables que son observables, tal como lo son los precios y la renta.

Continuidad: Viene garantizada por la continuidad y estricta cuasi-concavidad de la función de utilidad y la convexidad del conjunto presupuestario.

Homogeneidad de grado cero en precios y renta: esta característica conlleva que ante un cambio en la misma proporción de precios y renta, el consumidor no cambiará su elección ya que seguirá dentro de su conjunto factible.

4.4.3 La Ley de la Demanda.

La relación entre la cantidad demandada de un bien y su precio se puede explicar mediante la *Ecuación de Slutsky,* la cual permite descomponer el efecto de una variación del propio precio sobre la demanda de un bien como suma de un efecto sustitución y un efecto renta. De este modo, se obtiene la denominada Ley de la Demanda, según la cual, para la mayoría de los bienes, existe una relación inversa entre cantidad demandada y precio. Como excepción se encuentran los denominados bienes Giffen. Se trata de bienes inferiores para los que el efecto renta domina al efecto sustitución.

4.4.4 Representación gráfica con "R" de las funciones de demanda marshallianas.

Dada la función Cobb-Douglas: $U(x_1, x_2) = x_1^{(1/2)} * x_2^{(1/4)}$

Dada la restricción presupuestaria: $s.a: 3*x_1 + 2*x_2 = 20$

(Ver ecuación 13)

A continuación representaremos gráficamente las funciones de demanda marshallianas en función del precio para una renta constante. Introducimos la función de demanda marshalliana dada en (15) para un nivel de renta dado, R=20, en el ANEXO 1 de representación gráfica de una función. Se obtiene:

```
eq = function(p1){20/p1 * (1/2)/((1/2)+(1/4))}
curve(eq, from=1, to=50, xlab="x", ylab="p2")
```

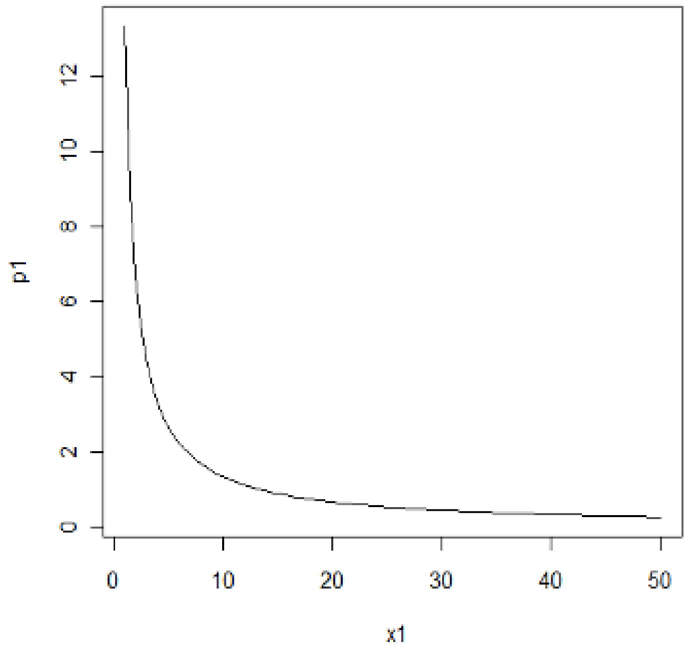

Figura 5. Curva de demanda marshalliana del bien 1

```
eq = function(p2){20/p2 * (1/4)/((1/4)+(1/2))}
curve(eq, from=1, to=50, xlab="x", ylab="p2")
```

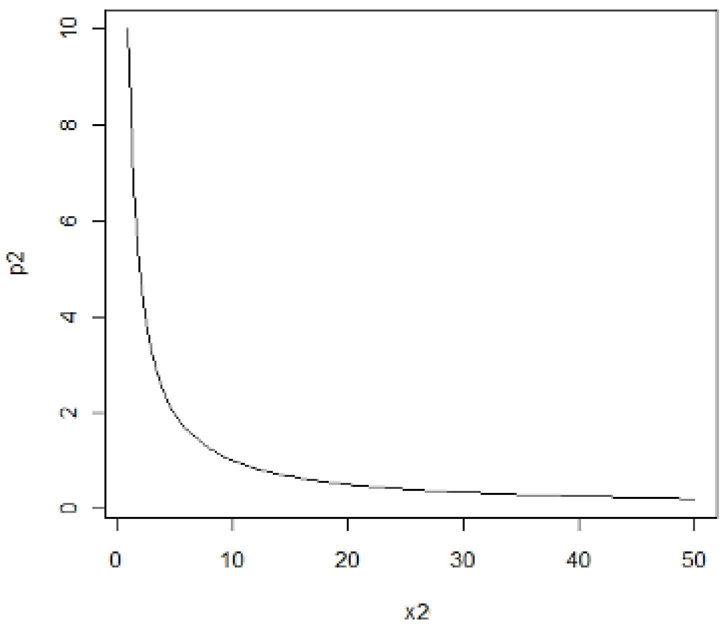

Figura 6. Curva de demanda marshalliana del bien 2.

Como vemos en las figuras 5 y 6, se cumplen las condiciones descritas para las funciones marshallianas ante cambios en precios.

A continuación se representan las funciones de demanda marshallianas dadas en (15) en función de la renta del individuo, obteniendose así las denominadas curvas de Engel.

Para representarlas, utilizamos nuevamente el ANEXO 1de representación gráfica de funciones, esta vez dando valores fijos a los precios (p_1=3 y p_2=2).

Para x_1 ;

eq = function(R){R/3 * (1/2)/((1/2)+(1/4))}

curve(eq, from=1, to=50, xlab="x1", ylab="R")

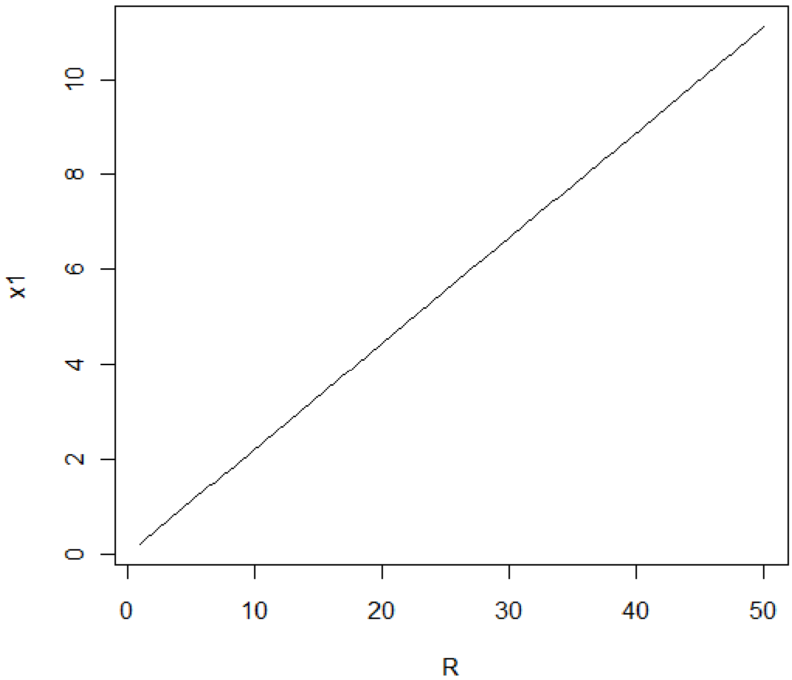

Figura 7. Curva de Engel del bien 1.

Para x_2;

eq = function(R){R/2 * (1/4)/((1/4)+(1/2))}

curve(eq, from=1, to=50, xlab="x2", ylab="R")

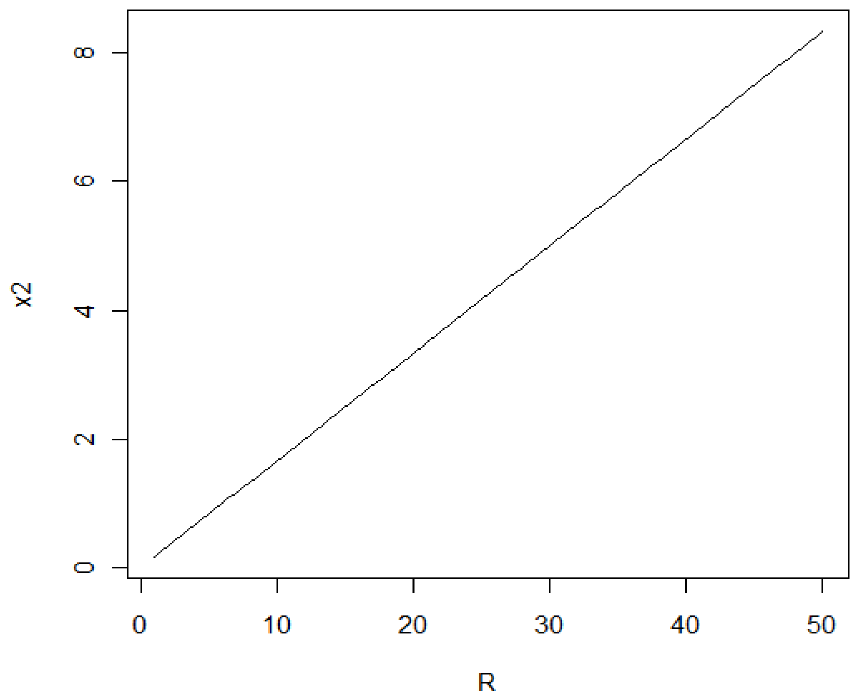

Figura 8. Curva de Engel del bien 2.

Observamos que ambos bienes tienen una relación creciente respecto de la renta, vemos, por tanto, que ambos bienes son normales.

4.5 La función indirecta de Utilidad.

4.5.1 Definición.

Esta función, para cada vector de precios y nivel de renta nos indica la máxima utilidad alcanzable.

Se obtiene sustituyendo las demandas marshallianas dadas en (15) en la función objetivo del problema primal dado en (3).

4.5.2 Propiedades.

La función indirecta de utilidad es continua para precios positivos y renta no negativa.

Es no decreciente respecto de la renta y no creciente respecto de los precios.

Otra propiedad es su **homogeneidad de grado cero en precios y renta.** Esto se deriva de las propiedades antes explicadas de las funciones de demanda marshallianas y nos da información sobre que el consumidor no variará su decisión si aumenta en la misma proporción precios y renta.

También cabe destacar la **cuasi-convexidad de la función en precios.** De forma contraria a lo que ocurría con la función directa de utilidad y las combinaciones de bienes, la máxima utilidad que puede obtenerse con presupuestos promedios siempre será menor que la que se obtendría con presupuestos extremos. Es decir, para rentas muy altas y precios muy bajos, la máxima utilidad será mucho mayor que para rentas promedio y precios promedio.

Por último, la relación matemática a destacar es la **Identidad de Roy** según la cual, la función de demanda marshalliana de un bien puede obtenerse a partir del cociente entre la derivada parcial de la función indirecta de utilidad respecto del correspondiente precio y la derivada parcial de la función indirecta de utilidad respecto de la renta, afectado de signo negativo.

4.5.3 Cálculo y representación en "R" de la función indirecta de utilidad.

Para calcular la función indirecta de utilidad, sustituiremos las funciones de demanda marshallianas obtenidas en (14) en la función directa de utilidad dada en (3). Así obtendremos una función de Utilidad en base a precios y renta.

$$V(p_1, p_2, R) = A * [\frac{R}{p_1} * (\frac{\alpha}{\alpha+\beta})]^{\alpha} * [\frac{R}{p_2} * (\frac{\beta}{\alpha+\beta})]^{\beta} \quad (16)$$

Para los valores concretos de los parámetros la función quedará:

$$V(p_{\cdot}1, p_2, R) = (\frac{(2*R)}{(3*p_1)})^{(1/2)} * (\frac{R}{3*p_2})^{(1/4)} \quad (17)$$

A continuación representaremos esta función indirecta de utilidad en función de los precios fijando la renta en 20 unidades monetarias utilizando el ANEXO 3.

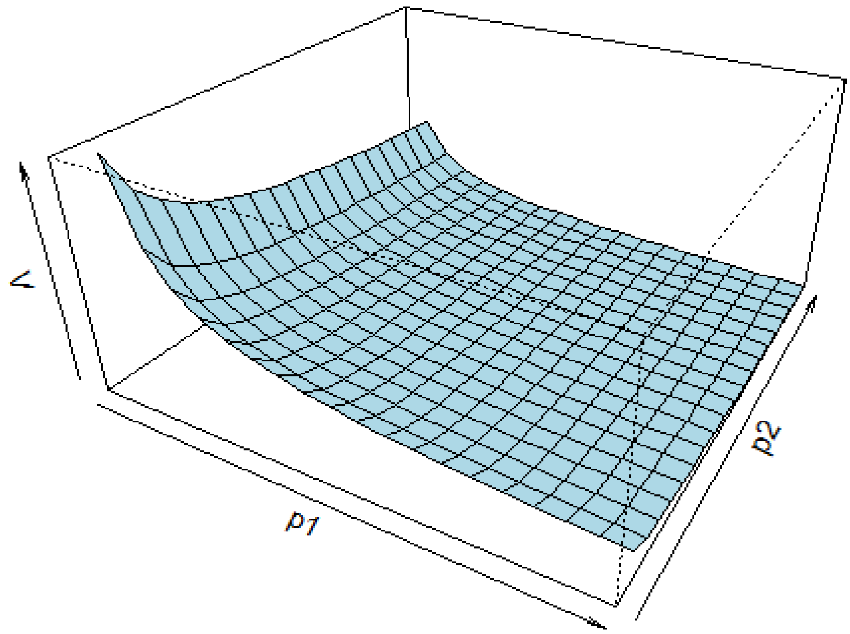

Figura 9. Función indirecta de Utilidad.

Se observa que es una función continua, decreciente respecto a p_1 y p_2 y convexa, por lo tanto cumple las características teóricas de la función indirecta de utilidad.

5. La elección del consumidor: El enfoque dual.

El problema dual del consumidor es un problema de minimización del gasto. Se trata del mismo problema del consumidor pero desde otro enfoque. Lo que fijamos como restricción esta vez es un nivel de utilidad que el individuo va a obtener como mínimo.

Dada esta restricción, y dados unos precios, se trata de alcanzar la demanda de cada uno de los bienes que permite obtener un determinado nivel de utilidad con el mínimo gasto posible.

5.1 Planteamiento del problema.

Este enfoque lo podemos plantear analíticamente de la siguiente forma:

Minimizar: $g(x_1, x_2) = p_1 * x_1 + p_2 * x_2$ (18)

sujeto a: $A * x1^{\alpha} * x2^{\beta} = U_0$

$x_1, x_2 \geq 0$

Como vemos en éste caso, la primera restricción es de igualdad por simplificar el problema , el individuo elegirá un nivel de utilidad que quiere alcanzar para obtener su punto óptimo.

Con los valores paraméticos que estamos considerando, el problema anterior quedará:

Min $g(x_1, x_2) = 3 * x_1 + 2 * x_2$ (19)

sujeto a : $x_1^{(1/2)} * x_2^{(1/4)} = U_0$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

5.1.1 Representación gráfica en "R" del problema dual

Para resolver este problema de forma gráfica, se representan diferentes curvas de nivel de la función objetivo del problema dual (restas de balance relativas a diferentes niveles de renta) y el conjunto factible que es la curva mínima de indiferencia que el individuo desea alcanzar.

Gráficamente, el planteamiento se representa mediante curvas iso gasto y la curva de utilidad. Para ello utilizamos el ANEXO 2 para diferentes niveles de renta y una utilidad mínima de 2'8 unidades, se obtiene:

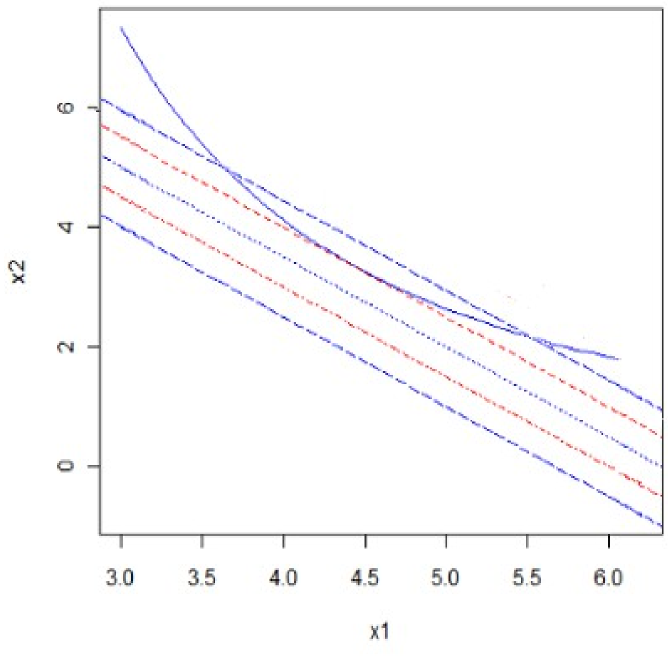

Figura 10. Representación gráfica del problema dual.

Como vemos la elección del consumidor se encontrará en el punto de tangencia entre el nivel mínimo de utilidad y una recta presupuestaria.

A continuación, llegaremos a calcular este punto de tangencia mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange.

5.2 Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de mínimo global.

Dado que el conjunto factible viene dado por el contorno de no inferioridad asociado al nivel de utilidad U_0 y éste es convexo, y la función objetivo es lineal (por tanto es cóncava y convexa), si el problema presenta un punto crítico, será un mínimo global.

5.2.1 Cálculo del mínimo global

Para comprobar las **condiciones necesarias** de óptimo, tenemos que formar la función auxiliar Lagrangiana:

$$L(x_1, x_2, \mu) = p_1 * x_1 + p_2 * x_2 + \mu[U - A * x_1^{\alpha} * x_2^{\beta}] \tag{20}$$

donde μ es el multiplicador de Lagrange.

Y la condición necesaria de Lagrange será la siguiente:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = p_1 - \mu * A * x_1^{(\alpha-1)} * x_2^{\beta} * \alpha = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = p_2 - \mu * A * x_2^{(\beta-1)} * x_1^{\alpha} * \beta = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \mu} = U_0 - A * x_1^{\alpha} * x_2^{\beta} = 0$$

Resolviendo el sistema hallaremos la solución al problema de la siguiente forma:

$$x_1 = \left(\frac{U_0}{A} * \left(\frac{p_2 * \alpha}{p_1 * \beta}\right)^{\beta}\right)^{\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)} \tag{22}$$

$$x_2 = \left(\frac{U_0}{A} * \left(\frac{p_1 * \beta}{p_2 * \alpha}\right)^{\alpha}\right)^{\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)}$$

Para los valores concretos de los parámetros, la función Lagrangiana será:

$$L(x_1, x_2, \mu) = 3 * x_1 + 2 * x_2 + \mu[2.8 - x_1^{(1/2)} * x_2^{(1/4)}]$$

Para calcular el punto crítico utilizaré el ANEXO 4, para un nivel de utilidad de 2'8 y los parámetros utilizados hasta ahora.

L(x1,x2,μ) = 3*x1 + 2*x2 + z[2.8 – x1 ^(1/2)* x2^(1/4)]

$\frac{\partial L}{\partial x_1}=0$ D(expression(3*x1 + 2*x2 + z[2.8 – x1 ^(1/2)* x2^(1/4)]),'x1')

3 + z * (x1^((1/2) - 1) * (1/2)) * x2^(1/4)

$\frac{\partial L}{\partial x_2}=0$ D(expression(3*x1 + 2*x2 + z[2.8 – x1 ^(1/2)* x2^(1/4)]) ,'x2')

2 + z * x1^(1/2) * (x2^((1/4) - 1) * (¼))

$\frac{\partial L}{\partial z}=0$

D(expression(3*x1 + 2*x2 + z*[2.8 – x1 ^(1/2)* x2^(1/4)]) ,'z')

x1^(1/2)*x2^(1/4)-2,8

Solucionando este sistema de ecuaciones obtenemos que la cesta óptima es $(x_1,x_2)=(4'44, 3'33)$. Siendo el nivel de renta mínimo 20 unidades monetarias.

Observamos que dicha solución coincide con la solución del problema primal, corroborando el cumplimiento del *teorema de la dualidad*.

5.3 La función de demanda hicksiana.

5.3.1 Definición.

Si en el problema dual consideramos que los precios y el nivel de utilidad son variables exógenas, a partir de las condiciones necesarias de mínimo y, bajo el cumplimiento del teorema de la función implícita, es posible obtener unas funciones que relacionan las cantidades demandadas de los bienes con los precios y nivel de utilidad, denominadas funciones de *demanda hicksianas o compensadas*. Representan todos las posibles soluciones del problema dual.

Para el problema considerado en (18), las funciones de demanda hicksianas se han obtenido en (22):

$$\begin{cases} x_1(p_1,p_2,U_0)=\left(\frac{U_0}{A}*\left(\frac{p_2*\alpha}{p_1*\beta}\right)^{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \\ x_2(p_1,p_2,U_0)=\left(\frac{U_0}{A}*\left(\frac{p_1*\beta}{p_2*\alpha}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \end{cases} \quad (23)$$

5.3.2 Propiedades.

Las funciones hicksianas son continuas en precios y utilidad.

También son homogéneas de grado 0 en precios, ya que ante un aumento proporcional de todos los precios no habrá variación en las cantidades demandadas de bienes.

Las derivadas parciales respecto de los precios definen los efectos de sustitución directos y cruzados. Por tanto, dada la negatividad de los efectos de sustitución directos, las curvas de demanda hicksianas presentan pendiente negativa y como consecuencia de su continuidad en precios, los efectos de sustitución cruzados son simétricos.

Estas funciones no son directamente observables, dado que dependen de la Utilidad que no lo es, a diferencia de las marshallianas que al depender de precios y renta son más fácilmente observables.

5.3.3 Representación en "R" de las funciones de demanda Hicksianas

Para los valores paramétricos considerados en este Trabajo Fin de Grado, la solución del problema dual (18) y por tanto las funciones de demanda hicksianas son:

$$x_1 = [U_0 * (\frac{2*p_2}{p_1})^{(1/4)}]^{(4/3)} \tag{24}$$

$$x_2 = [U_0 * (\frac{p_1}{2*p_2})^{(1/2)}]^{(4/3)}$$

Para comprobar sus características, utilizamos la representación gráfica de cada bien en función de su precio, fijando el precio del otro bien y la Utilidad mínima. De esta forma (utilizando el ANEXO 1) podemos deducir los efectos de precio directos.

Tomando p_2=2 y U_0=2'8

```
x1 = (2.8*(2/(2*p1))^(1/4))^(4/3)
```

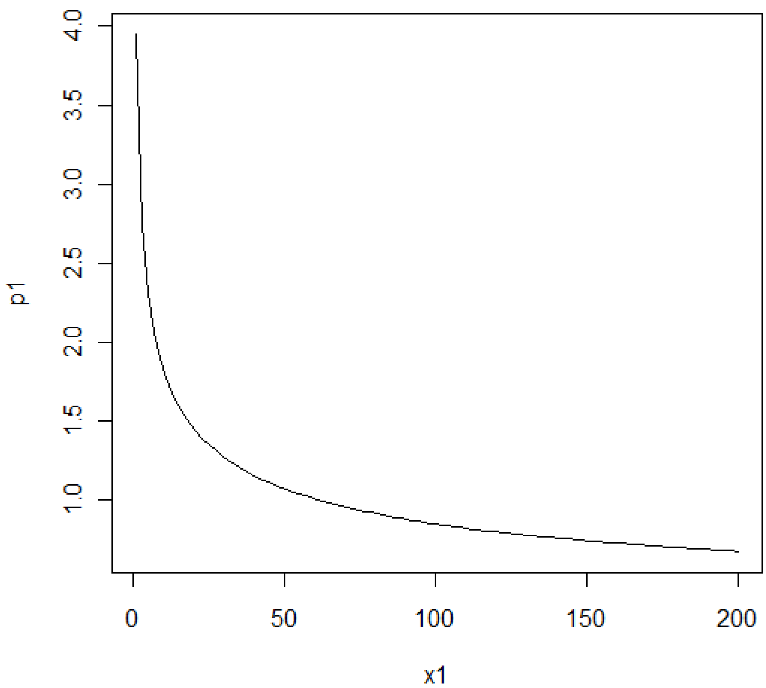

Figura 11. Curva de demanda Hicksiana del bien 1.

Como podemos ver, la relación del consumo con respecto al precio del propio bien es negativa indicando la negatividad del efecto sustitución directo.

Tomando p2=3 y U0=2'8, tenemos:

x2 = ((2.8*((1/4)*p2/(1/2)*2)^(1/2))^(1/(1/4+1/2))

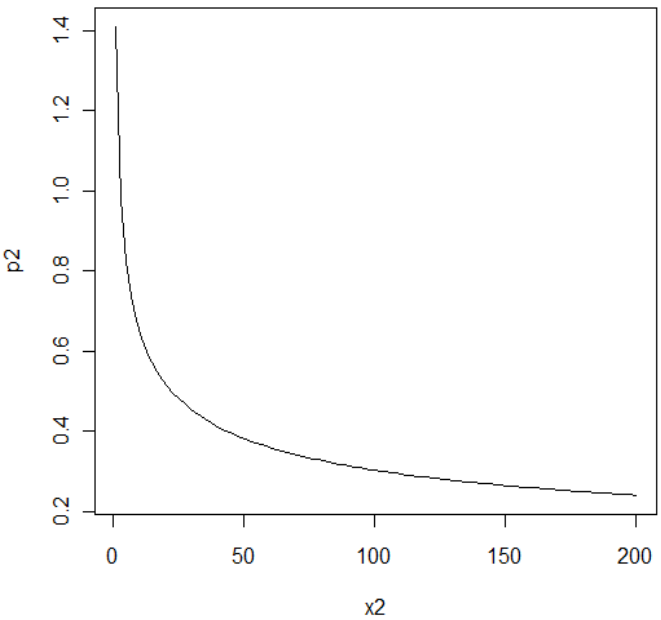

Figura 12. Curva de demanda Hicksiana del bien 2.

Como podemos ver en la Figura 12, la relación del consumo con respecto al precio del propio bien es negativa indicando la negatividad del efecto sustitución directo.

A continuación, para comprobar los efectos de sustitución cruzados, representaré gráficamente las funciones hicksianas de un bien respecto al precio del otro bien, utilizando el ANEXO 1.

Tomando U_0=2'8 y p_1=3:

x1=((2.8*(4*p2/6))^(1/4))^(4/3)

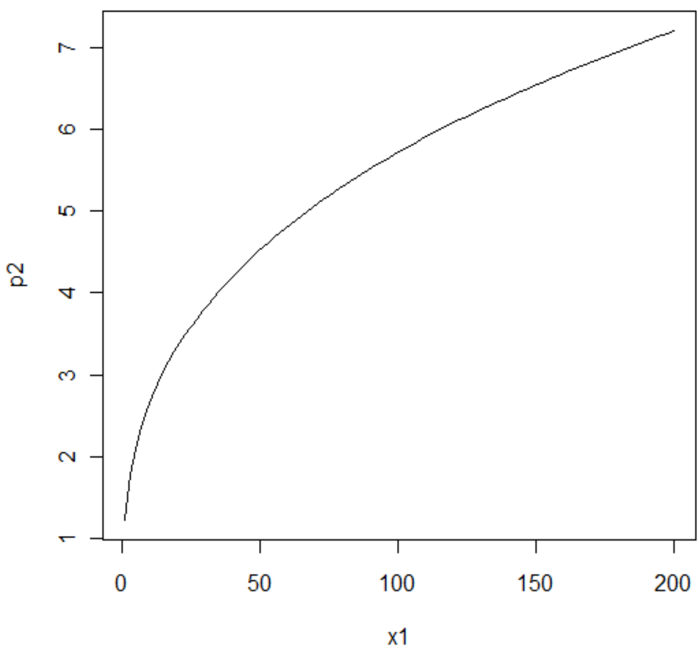

Figura 13. Efecto sustitución cruzado del bien 1 con respecto al precio del bien 2.

Como vemos, la relación del bien 1 con respecto al precio del bien 2 es una relación positiva. Podemos concluir que se trata de dos bienes sustitutivos netos.

Tomando U_0=2'8 y p_1=3, se obtiene la siguiente representación:

x2=((2.8*(2*p1/8))^(1/2))^(4/3)

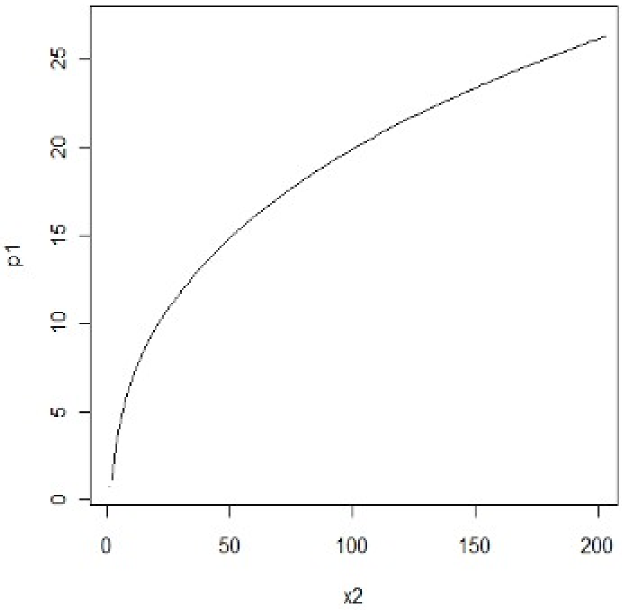

Figura 14. Efecto sustitución cruzado del bien 2 con respecto al precio del bien 1.

En la figura 14 se observa que la relación entre el bien 2 y el precio del bien 1 corresponde al de dos bienes sustitutivos netos.

5.4 Función de gasto

5.4.1 Definición.

Esta función es la función de valor asociada al problema dual y representa el gasto mínimo que el consumidor tiene que realizar para alcanzar un nivel mínimo de utilidad asociado a unos precios dados.

La obtenemos sustituyendo las funciones de demanda hicksianas dadas en (22) en la función objetivo del problema dual dado en (18).

5.4.2 Propiedades.

Es homogénea de grado uno en precios ya que el gasto mínimo aumenta en la misma proporción que aumenten los precios para alcanzar el mismo nivel de utilidad.

La función de gasto es creciente en la utilidad. Esto se produce porque siempre será necesario un mayor gasto para alcanzar mayores niveles de utilidad, es decir, siempre que queramos alcanzar mayores niveles de utilidad, tendremos que gastar más en la adquisición de bienes.

Es no decreciente en precios, ya que no necesariamente un precio tiene que aumentar para que aumente el gasto ya que depende del precio de los bienes.

Puede crecer el precio de un bien y no otro, por tanto matizamos que es no decreciente.

Esta función es cóncava en precios. Esta propiedad establece que la función de gasto aumentará en proporción menos que lineal que un aumento de precios. Como podemos ver en la representación gráfica. Dicha propiedad asegura, por un lado, que el consumidor tiene un comportamiento minimizador del gasto y por otro, implica que la matriz de efectos de sustitución esté asociada a una forma cuadrática semidefinida o definida negativa.

Se cumple el lema de Shepard: las derivadas parciales de la función de gasto con respecto a los precios definen las funciones de demanda hicksianas.

5.4.3 Cálculo y representación en "R" de la función de gasto.

Para calcular la función de gasto, utilizamos las funciones de demanda hicksianas obtenidas en (22) introduciéndolas en la función de gasto del problema dual dado en (18).

Tendremos el gasto que el individuo tendrá que realizar de acuerdo con los precios de los bienes y a la mínima Utilidad que quiere alcanzar.

$$G(p_1, p_2, U_0)=p_1*\left(\frac{U_0}{A}*\left(\frac{p_2*\alpha}{p_1*\beta}\right)^{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \text{¿} + p_2*\left(\frac{U_0}{A}*\left(\frac{p_1*\beta}{p_2*\alpha}\right)^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \qquad (25)$$

Particularizando a los valores paramétricos considerados anteriormente, la función de gasto queda:

$$G(p_1, p_2, U_0)= p_1*\left[U_0*\left(\frac{p_2}{2*p_1}\right)^{(1/4)}\right]^{(4/3)} + p_2*\left[U_0*\left(\frac{2*p_1}{p_2}\right)^{(1/2)}\right]^{(4/3)} \qquad (26)$$

Para representarla utilizando el ANEXO 3 de representación gráfica para funciones de dos variables, escogeremos un nivel de utilidad de 2'8. La función a introducir en el anexo es la siguiente:

```
G=(p1*(2.8*(p2/(2*p1))^(1/4))^(4/3))+(p2*(2.8*((2*p1)/p2)^(1/2))^(4/3))
```

Siendo la representación gráfica de la función de gasto para nuestro ejemplo:

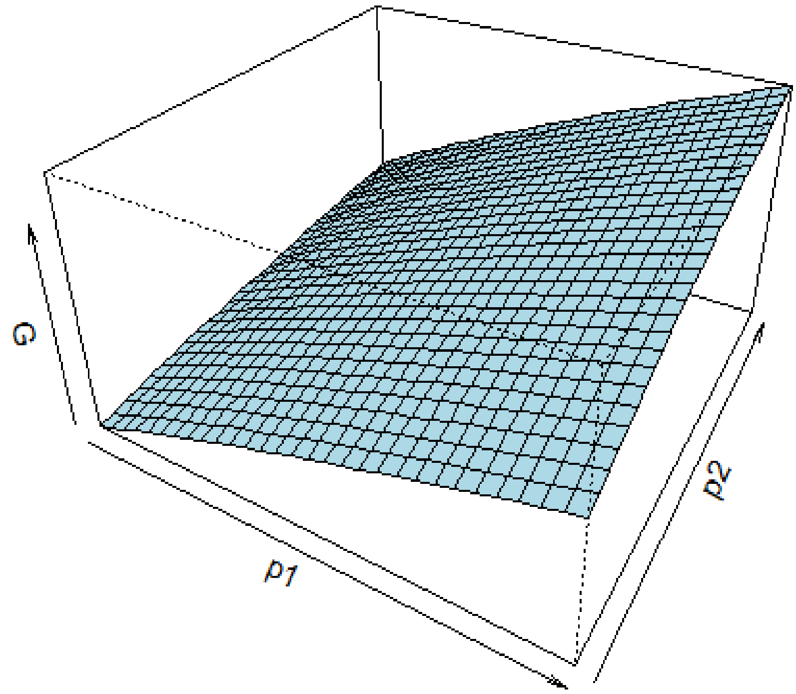

Figura 15. Función de Gasto.

Se observa en la figura 15 que la función es continua, no decreciente en precios y cóncava con respecto a los precios, por lo tanto cumple las características de la función de Gasto.

IV. CONCLUSIONES.

El objetivo se ha cumplido ya que se ha probado que el programa es una herramienta muy válida para ejemplificar el modelo del consumidor. De la misma manera, puede ser válida para otro tipo de ejemplos dentro del análisis económico.

Sin embargo, para una mayor profundización matemática, se requieren muchos conocimientos del programa y en algunas materias como el desarrollo de modelos de forma general (sin especificar parámetros concretos), el programa "R" presenta ciertas limitaciones.

Otras conclusiones más específicas que se han probado son:

1. R tiene capacidad considerable para el cáclulo y representación de resultados de problemas relacionados con la teoría de la demanda.

2. R tiene capacidad para representar funciones de forma ilustrativa, lo cual es útil para visualizar sus propiedades.

3. R es un lenguaje completo para funciones didácticas siempre que sea apoyado por metodología matemática.

4. No es necesario un conocimiento profundo del programa R para resolver problemas de la elección del consumidor.

5. R es accesible y claro, por lo que es muy recomendable para funciones didácticas en materia de microeconomía.

Este trabajo sirve como precedente para la utilización de "R" como herramienta didáctica en materia de análisis económico ya que hemos desarrollado con éxito de forma general el modelo del consumidor cumpliendo el objetivo.

Se ha desarrollado un modelo económico de forma general y explicativa sin entrar en análisis detallado, lo cual puede servir para alumnos y profesionales para introducirse y desarrollar su conocimiento en el análisis de modelos económicos. Estos resultados aportan utilidad tanto universitaria como profesional.

Además, se trata de un programa libre y gratuito dentro del marco de software libre con una gran comunidad de usuarios que comparten conocimientos. Esto es de gran importancia como apoyo para el aprendizaje autónomo, lo cual puede ser muy interesante para estudiantes con pocos recursos.

V. ANEXOS

ANEXO 1: Representación gráfica de una función. y=f(x)

```
eq = function(x){FUNCIÓN}
curve(eq, from=1, to=50, xlab="x", ylab="y")
```

ANEXO 2: Representación gráfica de curvas de nivel.

```
fun1<-function(x1) (FUNCIÓN 1)
fun2<-function(x1) (FUNCIÓN 2)
fun3<-function(x1) (FUNCIÓN 3)
fun4<-function(x1) (FUNCIÓN 4)
fun5<-function(x1) (FUNCIÓN 5)

x1<-seq(0,2*pi,0.2)
x2<-seq(0,2*pi,0.2)

matplot(x1,xlab="NOMBRE EJE X",ylab="NOMBRE EJE Y",
cbind(fun1(x1),fun2(x1),fun3(x1),fun4(x1),fun5(x1)),type="l",col=c("blue","red"
))
```

ANEXO 3: Representación gráfica de una función de dos variables. z = f(x, y)

```
x <- seq(10, 30, length = 30)
y <- x
f <- function(x, y) {FUNCIÓN}
z <- outer(x, y, f)
```

persp(x, y, z, theta = 100, phi = 30, expand = 0.5, col = "lightblue", xlab="**NOMBRE EJE X**", ylab="**NOMBRE EJE Y**", zlab="**NOMBRE EJE Z**")

ANEXO 4: Cálculo de derivadas.

D(expression((**FUNCIÓN**), 'x')

ANEXO 5: Cálculo de la matriz Hessiana

func <- expression(**FUNCIÓN**)

vars <- c("x", "y")

```
funcD <- sapply(vars, function(v) D(func, v))
funcDD <- matrix(list(), 2,2)
for (i in 1:length(vars))
        funcDD[,i] <- sapply(vars, function(v) D(funcD[[i]], v))

funcD <- sapply(vars, function(v) D(func, v))
funcDD <- matrix(list(), 2,2)
for (i in 1:length(vars))
        funcDD[,i] <- sapply(vars, function(v) D(funcD[[i]], v))
matrix(sapply(funcDD, eval, env=list(x=0, y=pi)), length(vars))
```

ANEXO 6: Cálculo de las funciones de demanda marshallianas.

Para calcular las funciones de demanda marshallianas, introduciremos x1 despejado de la restricción presupuestaria y la introduciremos en la función de utilidad para despejar x2.

Derivaremos el resultado igualándolo a 0.

ECUACION <- function(z)

{z<- D(expression(**FUNCIÓN**), "(**variable despejada**)")

return(**variable despejada**)}

ECUACION(0)

VI. BIBLIOGRAFÍA.

ARAI, M. (2009): *A brief guide to R for beginners in Econometrics.* Stockholm University, Estocolmo.

BAQUELA, E. , REDCHUK, A. (2013): *Optimización matemática con R. Volumen 1: Introducción al modelado y resolución de problemas.* Bubok, Madrid.

CABALLERO, R. , CALDERÓN, S. , COBO, A. , GONZÁLEZ A. , HIDALGO, R. , ORDOÑEZ, J.M. (1999): *MATHEMATICA: Programación y matemática en la economía y en la empresa.* Ra-Ma, Madrid.

FERNANDEZ, V. , LORDAN, O. , SALLAN, J. (2015): *Modeling and Solving Linear Programming with R.* Omnia, Barcelona.

JARNE, G. , MINGUILLÓN, E. , PEREZ-GRASA, I. (2001): *Matemáticas para la economía.* McGraw Hill, Madrid.

MAINDONALD, J.H., (2008): *R for Data Analysis and Graphics.* Oxford, Camberra.

PREVOS, P. Solving Quadratic Programs qith R's packages [R-bloggers]. Bavotassan. www.r-bloggers.com, 13/01/2014 [10/4/2017].

VILLAR, A. (1999): *Lecciones de microeconomía.* Bosch, Madrid.