

Trabajo fin de máster

# MODELIZACIÓN DE GUÍAS DE ONDA MULTINÚCLEO

Máster en Física y Tecnologías Físicas.  
Curso 2016-2017. Universidad de Zaragoza.

---

Autor: David Benedicto  
Director: Juan A. Vallés

## Resumen

Las guías de onda multinúcleo están adquiriendo cada vez más importancia debido a su potencial para incrementar la capacidad de transmisión de información de los sistemas ópticos así como para aumentar la potencia de dispositivos ópticos activos. Cuando los núcleos se encuentran acoplados, la propagación de las señales ópticas a lo largo de estas estructuras se modeliza expresando el campo electromagnético en forma de superposición de los modos de la estructura, conocidos como supermodos. Para modelizar la propagación de las señales ópticas en medios activos se utilizan las ecuaciones de la propagación de las potencias de los supermodos acopladas a las ecuaciones de las densidades de población de los iones activos que provocan la amplificación. En este trabajo se presentan los fundamentos de esta modelización, haciendo hincapié en el impacto de diversos factores como la competición modal, los batidos de potencia entre núcleos, la dependencia de la distribución de los supermodos con la variación del factor de ganancia y la existencia de zonas de índice deprimido.

# Índice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Introducción.</b>   | <b>1</b>  |
| <b>2. Guías de onda activas.</b>  | <b>3</b>  |
| 2.1. Propagación guiada de la luz. . . . .  | 3         |
| 2.2. Guías de onda dopadas con tierras raras. . . . .   | 4         |
| 2.2.1. Propiedades ópticas de los iones de tierras raras. . . . .   | 5         |
| 2.2.2. El ion $\text{Er}^{3+}$ . . . . .  | 5         |
| 2.3. Propagación de ondas en guías activas. . . . .   | 6         |
| <b>3. Modelización de amplificadores basados en guías de onda dopadas con <math>\text{Er}^{3+}</math>.</b>  | <b>8</b>  |
| 3.1. Modelo para guías con baja concentración de $\text{Er}^{3+}$ . . . . .                                 | 8         |
| 3.2. Modelos para guías con alta concentración de $\text{Er}^{3+}$ codopadas con $\text{Yb}^{3+}$ . . . . . | 9         |
| 3.3. Implementación numérica. . . . .   | 11        |
| <b>4. Análisis de guías de onda multinúcleo activas.</b>  | <b>13</b> |
| 4.1. Introducción. . . . .  | 13        |
| 4.2. Análisis mediante métodos analíticos. Teoría de modos acoplados. . . . .                               | 13        |
| 4.2.1. Acoplamiento entre dos núcleos. . . . .  | 13        |
| 4.2.2. Formalismo matricial. . . . .  | 14        |
| 4.3. Análisis mediante simulaciones numéricas. Propagación de supermodos. . . . .                           | 16        |
| 4.3.1. Modos de la estructura o supermodos. . . . .   | 16        |
| 4.3.2. Competición modal. . . . .   | 18        |
| 4.3.3. Batidos de la potencia y propagación de campo. . . . .   | 20        |
| 4.3.4. Dependencias con la variación longitudinal del factor de ganancia. . . . .                           | 23        |
| 4.4. Aplicación a estructuras multinúcleo integradas. . . . .   | 25        |
| <b>5. Conclusiones.</b>   | <b>27</b> |

## 1. Introducción.

El desarrollo de las fuentes de emisión láser y sus aplicaciones, a partir de los años 60 del pasado siglo, es uno de los mayores hitos tecnológicos de la humanidad, así como el punto de partida en el estudio de dispositivos que permitiesen la transmisión y procesado de señales ópticas. Los esfuerzos realizados en la década de los 70 en cuanto al desarrollo de fibras ópticas con bajas pérdidas, así como de los láseres de semiconductor emitiendo en las llamadas ventanas de comunicaciones, hicieron que la transmisión de información a través de fibras ópticas se convirtiese en una realidad. En las dos últimas décadas, el dopado de fibra óptica con iones de tierras raras ha permitido el desarrollo de sistemas fotónicos que combinan las ventajas de la propagación guiada con la amplificación óptica o la emisión láser. En cuanto a la óptica integrada, aunque su desarrollo ha sido más lento que el de las fibras ópticas, la posibilidad de conseguir circuitos ópticos integrados sobre un mismo sustrato con componentes muy variados, tiene un gran interés en el mundo de las comunicaciones ópticas que, a día de hoy, sigue en continuo desarrollo.

En la actualidad, el límite de potencia que puede transportar pasivamente una fibra óptica, o generar un láser de fibra, viene condicionado por los efectos no lineales que ocurren debido a la alta densidad de energía óptica. A partir del 2009 se planteó el uso de fibras multinúcleo para incrementar el área modal de las fibras en régimen monomodo [1, 2]. Un incremento en el área modal disminuye la densidad de energía y, por tanto, permite una mayor potencia propagada. Este incremento sería muy útil en múltiples aplicaciones, como las relacionadas con el transporte de alta potencia, o el incremento de potencia en láseres de procesado de materiales. Además, las posibles mejoras en láseres de fibra multinúcleo no vienen solo de la mano del incremento de la potencia o reducción de los efectos no lineales [3], sino también de la mejora de la calidad del haz [4].

En las próximas décadas, las comunicaciones basadas en fibra óptica se enfrentarán a un gran desafío debido a la necesidad de soportar un incremento prácticamente exponencial en su capacidad de transmisión de la información. Debido a los requerimientos en cuanto a la relación señal-ruido, las limitaciones del ancho de banda de los amplificadores ópticos [5], así como las dificultades debidas a los efectos no lineales causados por alta potencia [6]; la tecnología actual tiene un límite teórico cercano 100 Tb/s de capacidad. Como consecuencia, parece que nos estamos acercando al límite de la capacidad de transmisión de información, conocido como ‘*crunch limit*’ [7]. Dentro de este contexto, las fibras multinúcleo son consideradas como una de las mejores opciones para superar este límite gracias al multiplexado por división espacial [8], así como al multiplexado por división modal [9].

Aunque el multiplexado y el incremento del área modal son las dos aplicaciones que más aparecen en la literatura sobre fibras multinúcleos, este tipo de guías también tiene aplicaciones como convertidores de modo [10], equalizadores espectrales de ganancia [11], sensores [12] e instrumentos en el campo de la astrofotónica [13, 14].

Las **guías de onda multinúcleo** están formadas por varios núcleos contenidos en una misma guía óptica. La existencia de otros núcleos cercanos hace que la onda que se propaga por cada núcleo se vea perturbada por las ondas que se propagan por el resto de núcleos.

Bajo la denominación de guías de onda multinúcleo se encuentran diferentes tipos de guías de onda, así como diferentes geometrías en cuanto a la relación entre los núcleos. Al igual que en las guías normales, los núcleos de estas pueden ser monomodo o permitir la propagación guiada de varios modos transversales. Cuando cada núcleo individual es monomodo, la estructura tendrá tantos modos de propagación como núcleos. Por otro lado, el número de núcleos abarca un rango muy amplio, desde un par, hasta estructuras con decenas de núcleos. En algunos casos se busca que todos los núcleos sean iguales, mientras que en otros casos es preferible que haya diferencias entre ellos, bien en el tamaño, el índice efectivo, que haya o no presencia de dopante, etc. Algo similar ocurre con la geometría de la figura que forman los núcleos, que en muchos casos suele ser

simétrica, normalmente formada por anillos circulares o hexagonales; mientras que en el resto de casos podemos encontrar una gran variedad de geometrías. Según la separación entre núcleos, o el grado de confinamiento de la señal en estos, podemos tener guías en las que los núcleos estén débil o fuertemente acoplados. Todas estas opciones vendrán determinadas principalmente por las aplicaciones que se busque conseguir.

La experiencia del grupo de Fibras y Guías Ópticas Activas de la Universidad de Zaragoza en la modelización y caracterización de amplificadores y láseres de fibras ópticas y guías integradas dopadas con erbio, junto con el atractivo que presentan las guías de onda multinúcleo han motivado el trabajo que se desarrolla a continuación. Este trabajo se propone como un estudio sobre el comportamiento de las señales ópticas en estructuras con múltiples núcleos. Se trata de simular numéricamente la propagación de la señal óptica en este tipo de guías, tanto activas como pasivas, y con un número variable de núcleos; desde guías con dos núcleos hasta estructuras más complejas, como geometrías hexagonales. El trabajo propuesto conlleva una parte de estudio de la bibliografía correspondiente, así como una parte aplicada de simulación numérica. En el siguiente capítulo se presenta la teoría de la propagación guiada de ondas ópticas, así como las características de las tierras raras y la propagación en guías activas. En el tercer capítulo se explica la modelización de un amplificador basado en una guía de ondas dopada con erbio. El cuarto capítulo recoge las novedades que aportan las guías de onda multinúcleo. En primer lugar se explica el concepto de supermodo, relacionándolo mediante la teoría de modos acoplados con los modos de los núcleos individuales. A continuación se exponen diferentes aspectos a tener en cuenta a la hora de propagar señales ópticas en guías de onda multinúcleos, como son la competición modal, los batidos de potencia entre núcleos, la dependencia de la distribución de los supermodos con la variación del factor de ganancia y, por último, el impacto de zonas de índice deprimido. Para finalizar, se exponen las conclusiones del trabajo.

## 2. Guías de onda activas.

### 2.1. Propagación guiada de la luz.

La propagación de la luz en guías de onda se considera desde un punto de vista clásico, donde la luz viene expresada como una onda de campo electromagnético. Este campo viene descrito por cuatro magnitudes vectoriales reales que dependen de la posición y el tiempo: el campo eléctrico  $\mathbf{E}$ , el campo magnético  $\mathbf{H}$ , el desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}$  y la inducción magnética  $\mathbf{B}$ . Las variaciones espacio-temporales de dichas magnitudes se relacionan mediante las ecuaciones de Maxwell.

Usando la transformada de Fourier podemos representar una función con dependencia temporal arbitraria como una suma de funciones armónicas con frecuencias, amplitudes y fases diferentes. Esto nos permite reducir el análisis al estudio de ondas monocromáticas de frecuencia angular fija. Para ello utilizamos la representación mediante fasores.

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = 2\Re[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)] = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) \quad (1)$$

Con esta notación, las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de continuidad quedan de la forma:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{B} \quad \nabla \times \mathbf{H} = i\omega \mathbf{D} + \mathbf{J} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + i\omega \rho = 0 \quad (4)$$

siendo  $\mathbf{J}$  la densidad de corriente de carga y  $\rho$  la densidad cúbica de carga.

Estas magnitudes, vinculadas entre sí mediante las ecuaciones de Maxwell, también cumplen otro tipo de relaciones conocidas como ecuaciones constitutivas. Estas describen la interacción entre el medio por el que se propaga la onda y dicha onda, determinando las propiedades de propagación de la luz en los diversos medios. La ecuación de propagación en un medio dieléctrico, lineal, isótropo y no magnético que se deduce a continuación suele utilizarse como punto de partida para describir la propagación de la luz en guías de onda.

Aplicando el operador rotacional a la primera de las ecuaciones en (2) y utilizando la segunda ecuación es posible obtener la ecuación inhomogénea vectorial de ondas (5). Para ello hacemos uso de la igualdad vectorial  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$  y de las relaciones constitutivas del medio previamente mencionadas  $\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ .

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) \quad (5)$$

Si la densidad de cargas en el medio es nula, y se cumple  $|\nabla \epsilon_r| \ll \epsilon_r / \lambda$ , es posible despreciar el término inhomogéneo y obtener así la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad (6)$$

siendo  $k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}$  el número de onda.

En el caso más general en el que las variaciones de la permitividad con respecto a la posición no sean despreciables obtenemos la siguiente ecuación

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} + \nabla(\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \epsilon_r) = 0. \quad (7)$$

Cuando las variaciones de la permitividad del medio con respecto a la posición se dan solo en dos de las coordenadas espaciales, denominadas coordenadas transversales, la función  $n(x, y) = \sqrt{\epsilon_r(x, y)}$ , conocida como perfil de índice, define una guía uniforme y cualquier onda electromagnética que se propague por ella puede descomponerse en una suma de soluciones con la forma:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y)_\nu \exp(-i\beta_\nu z) = [\mathbf{E}_t(x, y) + \hat{\mathbf{z}} \cdot E_z(x, y)]_\nu \exp(-i\beta_\nu z), \quad (8)$$

siendo  $\hat{z}$  el vector unitario en el sentido positivo del eje de propagación.

Las soluciones de la ecuación (7) que tienen la forma de la expresión (8) se denominan modos de propagación de la guía, siendo el parámetro  $\beta_\nu$  la constante de propagación, donde el subíndice  $\nu$  identifica al modo. Es posible demostrar que una distribución transversal se puede descomponer de forma única como suma de los modos guiados, radiados y evanescentes [15]. Los modos guiados se van a propagar sin pérdidas a lo largo de la guía, los modos evanescentes se van a propagar con pérdidas, y los radiados van a escapar de la guía.

Debido a la independencia de la permitividad respecto a la dirección de propagación, la componente longitudinal en (7) queda desacoplada, y es posible obtener la siguiente ecuación para las componentes transversales del campo:

$$i\beta E_z = \nabla \cdot \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_t \cdot \nabla_t \ln \epsilon_r, \quad (9)$$

siendo  $\nabla_t$  el operador gradiente de las componentes transversales. Además, la componente longitudinal del campo puede deducirse a partir de las transversales. A partir de la solución del campo eléctrico puede obtenerse la del campo magnético mediante la primera ecuación en (2). Este análisis se puede llevar a cabo comenzando por la obtención del campo magnético y realizando un proceso similar.

A partir de aquí, la búsqueda de los modos transversales de propagación consiste en resolver la ecuación (9), tratándose esta de un problema de autovalores  $\beta_\nu$ , constante que juega el mismo papel en la propagación guiada que el número de onda en la propagación libre descrita por la ecuación de Helmholtz. De forma análoga al índice de refracción del medio, se define el índice de refracción efectivo como  $n_{ef,\nu} = \beta_\nu/k_0$ . Una vez obtenidas las ecuaciones de propagación guiada, tanto para guías uniformes (9) como no uniformes (5), la dificultad radica en resolver esta ecuación para las diferentes estructuras. Solo algunos casos particulares, como las guías planas o la fibra óptica con salto de índice que se muestran en la figura 1, poseen soluciones analíticas. Por lo tanto, en condiciones más generales, la resolución de la ecuación de propagación modal tiene que hacerse mediante métodos analíticos aproximados o mediante métodos numéricos. En este trabajo el cálculo de los modos de las diferentes estructuras se ha llevado a cabo mediante el programa RSoft CAD, en concreto mediante la aplicación FemSim, que utiliza el método de los elementos finitos para resolver las ecuaciones mencionadas.

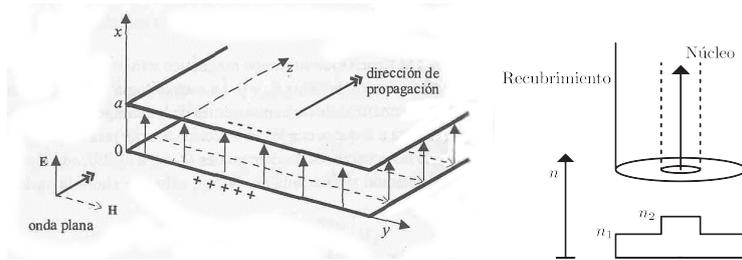


Figura 1: Ejemplo de guías de ondas con solución analítica: guía de ondas plana (izquierda) y fibra de salto de índice (derecha).

## 2.2. Guías de onda dopadas con tierras raras.

Mediante *tierras raras* se denomina a una serie de elementos químicos entre los que se encuentra el escandio, el itrio, los elementos del grupo de los lantánidos y, en algunas clasificaciones, también los elementos del grupo de los actinios. El nombre puede llevar a la conclusión errónea de que se trata de elementos escasos en la corteza terrestre. Sin embargo, el término *rara* surgió porque a principios del S.XX, ante la dificultad de separar los elementos constituyentes de los

minerales, estos eran raramente utilizados. El término *tierra*, por su parte, es una antigua manera de denominar a los óxidos. Los elementos utilizados como iones dopantes en medios activos suelen ser lantánidos debido a sus interesantes propiedades ópticas.

### 2.2.1. Propiedades ópticas de los iones de tierras raras.

Las tierras raras son sólidas a temperatura ambiente, y en este estado tienen a adoptar grado de oxidación +3, adquiriendo la configuración electrónica:  $4f^x 5s^2 5p^6$ , con  $x = 1, \dots, 14$ . En su configuración de estado trivalente  $A^{3+}$  tienden a perder dos electrones de la capa  $6s$  y uno de la capa  $4f$ , quedando con una configuración electrónica igual a la del Xenón, más un número de electrones en la subcapa  $4f$ :  $[Xe]4f^{x-1}$ . Debido a la configuración de gas noble que adoptan los electrones de las capas interiores, estas no afectan significativamente a los niveles de energía de la subcapa  $4f$ . Los electrones de la subcapa  $4f$  son los responsables de las transiciones ópticas de los espectros visible e infrarrojo. La interacción de los electrones entre sí y su acoplamiento espín-órbita determina de manera aproximada las longitudes de onda centrales de las transiciones, mientras que la interacción de los electrones con su entorno modifica el espectro y la intensidad de estas. Como los niveles de energía de los iones de estos elementos son relativamente insensibles a su entorno, las características de los materiales en los que estos iones se alojen no van a cambiar de manera significativa las longitudes de onda de emisión, aunque sí que van a afectar ligeramente al espectro de emisión y a su intensidad.

La interacción de los iones de las tierras raras entre sí adquiere una mayor importancia conforme se aumenta la concentración de estos iones en la matriz, como sucede en los dispositivos integrados. Cuando hablamos de transferencia de energía entre iones, esta puede ser radiativa o no radiativa. La transferencia radiativa de energía entre iones consiste en que un ion excitado puede emitir un fotón al desexcitarse que después puede ser absorbido por otro ion. Este caso se estudia de manera más precisa en el apartado de la propagación de ondas en guías activas. Por otro lado, también se puede dar la transferencia no radiativa de energía en los denominados como mecanismos de transferencia cooperativa de energía entre iones. La probabilidad de transferencia cooperativa de energía depende de la integral de solapamiento entre los perfiles de emisión del ion donante y de absorción del receptor, seleccionando los niveles desde los que se puede dar este tipo de transferencia; y depende del tipo de interacción, que determina la intensidad del fenómeno en función de la distancia que separa los iones. Esta transferencia de energía hace aparecer un gran número de fenómenos observables entre iones iguales o distintos. Estos mecanismos, que en un principio resultaban ser un problema debido a que provocaban despoblación en los niveles excitados, pasaron a utilizarse para ampliar las bandas de absorción de bombeo, mejorar la eficiencia de los láseres usando parejas de iones o evitar emisión de fluorescencia en ciertas longitudes de onda. Los fenómenos más habituales que se producen entre iones iguales son: *migración de energía*, *relajación cruzada* y *upconversion por transferencia cooperativa de energía*.

### 2.2.2. El ion $Er^{3+}$ .

El ion  $Er^{3+}$  es una de las tierras raras más usadas como elemento activo en medios dopados debido a que la banda espectral en la cual amplifica se encuentra en el intervalo correspondiente a la tercera ventana de telecomunicaciones, entre 1530 y 1560 nm, teniendo especial interés en comunicaciones ópticas por la baja atenuación que presentan las fibras ópticas de sílice en estas longitudes de onda. Con el dopado con  $Er^{3+}$  se pueden conseguir amplificadores de fibra óptica de hasta 50 dB de ganancia en régimen de baja señal con potencias de bombeo de varias decenas o centenas de mW. Además, tienen buena respuesta dinámica sin distorsión para frecuencias de modulación superior al MHz, altas eficiencias y bajas potencias umbrales en el caso de láseres, y baja figura de ruido. En la figura 2 vemos transiciones por absorción desde el nivel fundamental y por emisión desde los primeros niveles excitados del ion  $Er^{3+}$  cuando se encuentra en una matriz vítrea.

A lo largo del trabajo tratamos con dos tipos de guías de onda. Por un lado tenemos los amplificadores de fibra dopada con erbio, y por otro lado los amplificadores con guías de onda integradas en los que la matriz está codopada con erbio e iterbio. Los vidrios codopados con  $\text{Er}^{3+}$ - $\text{Yb}^{3+}$  son muy utilizados como medios activos en amplificadores y láseres. Una de las propiedades más interesantes del  $\text{Yb}^{3+}$  como ion dopante es que es capaz de sensibilizar a otras tierras raras mediante mecanismos de transferencia cooperativa de energía. Al añadir iones de iterbio a un vidrio dopado con erbio se incrementa la sección eficaz efectiva de absorción desde el estado fundamental al excitado, mejorando así la eficiencia de bombeo. Los diferentes esquemas de los niveles que se usan en la modelización se verán en detalle en la sección 3.

### 2.3. Propagación de ondas en guías activas.

El carácter activo de las guías de onda dopadas con tierras raras se basa en la interacción de los iones de tierras raras con ondas electromagnéticas. Sea  $\phi(x, y, z, \nu)$  [fotones/ $\text{m}^2 \cdot \text{s}$ ] una densidad de flujo de fotones de energía  $h\nu$ , la densidad de probabilidad de emisión o absorción estimulada por parte de una densidad de átomos  $n(x, y, z)$  [ $\text{m}^3$ ] es proporcional al producto de este flujo por la sección eficaz correspondiente,  $\sigma(\nu)$  [ $\text{m}^2$ ]:

$$W_\beta(x, y, z, \nu) = \phi(x, y, z, \nu)\sigma_\beta(\nu)n(x, y, z) \quad \text{con} \quad \beta = a \text{ (absorción), } e \text{ (emisión)} \quad (10)$$

Debido a esta densidad de probabilidad, el flujo de fotones se ve modificado tras recorrer una distancia  $dz$  en una cantidad:

$$\frac{d\phi(x, y, z, \nu)}{dz} = \gamma(x, y, z, \nu)\phi(x, y, z, \nu), \quad (11)$$

donde  $\gamma(x, y, z, \nu)$  es el *factor de ganancia o atenuación* del medio amplificador, definido en (12). El signo de este factor depende del número de iones en los diferentes niveles energéticos que involucran la relación entre la emisión y la absorción de los fotones. El factor será negativo en caso de que tengamos atenuación, y positivo si se produce ganancia. El número de iones que se encuentra en un determinado nivel se denomina densidad de población de dicho nivel  $n_i(x, y, z)$ , y para obtener el factor de ganancia habrá que tener en cuenta todos los diferentes niveles con todas sus posibles transiciones de emisión y absorción:

$$\gamma(x, y, z, \nu) = \sum_j \sigma_{e,j}(\nu) \cdot n_j(x, y, z) - \sum_i \sigma_{a,i}(\nu) \cdot n_i(x, y, z) \quad (12)$$

La densidad de población de un cierto nivel  $i$  depende de las densidades de probabilidad de absorción de fotones por los iones que se encuentran en el nivel  $i$ , y que por tanto se van a ver excitados al nivel  $j$ , así como por la probabilidad de emisión estimulada de fotones desde un nivel  $k$  de mayor energía al nivel  $i$  de menor energía. Además, también hay que tener en cuenta la probabilidad de emisión espontánea de los niveles superiores al nivel en cuestión ( $A_{ki}^r$ ), la desexcitación no-radiativa ( $A_{ki}^{nr}$ ), y los procesos de transferencia cooperativa de energía ( $C_{ij}$ ). La expresión más general de la variación de la densidad de población del nivel  $i$  durante un intervalo de tiempo  $dt$  toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dn_i(x, y, z, t)}{dt} = & \sum_{j>i} [(W_{ji}(x, y, z, t) + A_{ji}^r + A_{ji}^{nr}) \cdot n_j(x, y, z, t) - W_{ij}(x, y, z, t) \cdot n_i(x, y, z, t)] \\ & - \sum_{k<i} [(W_{ik}(x, y, z, t) + A_{ik}^r + A_{ik}^{nr}) \cdot n_i(x, y, z, t) - W_{ki}(x, y, z, t) \cdot n_k(x, y, z, t)] \\ & + \sum_{m,n} [C_{mn} \cdot n_m(x, y, z, t) \cdot n_n(x, y, z, t)], \end{aligned}$$

donde  $C_{mn}$  es un factor que cuantifica el fenómeno de transferencia cooperativa de energía. Además, a estas ecuaciones hay que añadir la ecuación de cierre que depende de la distribución de dopado de la guía:

$$\sum_i n_i(x, y, z, t) = n_T(x, y, z) \quad (13)$$

Cualquier amplificador óptico necesita dos frecuencias distintas propagándose  $\nu_s$  (señal) y  $\nu_b$  (bombeo), en donde la de bombeo se encarga de generar la diferencia de población entre los niveles de tal manera que el factor  $\gamma$  para la frecuencia de señal sea positivo y esta se vea amplificada. En el trabajo realizado, suponemos situaciones en las que tanto la potencia de bombeo como la de señal son constantes en el tiempo. Por tanto, nos basta con obtener la solución estacionaria  $\partial n_i / \partial t = 0$  de las ecuaciones de las densidades de población.

El conjunto de ecuaciones (10 - 13) describe de forma general el comportamiento de un amplificador óptico. Mediante el vector de poynting ( $\mathcal{S} = \mathcal{E} \times \mathcal{H}$ ) [ $\text{W}/\text{m}^2$ ] es posible relacionar la descripción clásica de las ondas electromagnéticas con la densidad de flujo de fotones  $\phi$ . Para ello, expresamos la densidad de flujo de energía de cada modo [ $\text{W}/\text{m}^2$ ] como el producto de un perfil modal de intensidad normalizado,  $\psi(x, y, \nu)$  [ $\text{m}^{-2}$ ], y de una potencia modal,  $P(z, \nu)$  [ $\text{W}$ ]:

$$\phi(x, y, z, \nu) = \frac{1}{h\nu} P(z, \nu) \psi(x, y, \nu) \quad (14)$$

Cuando nos interesa ver la evolución de la potencia total, necesitamos transformar la ecuación diferencial de la variación del flujo de fotones (11) en una ecuación diferencial que describa la evolución de la potencia modal:

$$\frac{dP(z, \nu)}{dz} = g(z, \nu) P(z, \nu) \quad (15)$$

Para poder obtener esta relación es necesario integrar los procesos locales de tal manera que englobemos todas las variaciones transversales que presenten los perfiles de intensidad y las densidades de población. Por lo tanto, el factor  $g(z, \nu)$  se define de forma análoga a la expresión (12) pero sustituyendo las densidades de población  $n_i(x, y, z)$  por las integrales de solapamiento entre la densidad de población y el perfil de intensidad modal:

$$N_i(z, \nu) = \int \int \psi(x, y, \nu) n_i(x, y, z) dx dy \quad (16)$$

Finalmente, si tenemos en cuenta que a lo largo de la propagación puede haber pérdidas, es necesario añadir un nuevo término en la definición del factor  $g(z, \nu)$ . Este término  $\alpha(\nu)$  corresponde a las pérdidas pasivas de propagación de la guía de ondas para una cierta frecuencia  $\nu$ .

### 3. Modelización de amplificadores basados en guías de onda dopadas con $\text{Er}^{3+}$ .

El modelo para guías con baja concentración de  $\text{Er}^{3+}$  sirve como punto de partida para el resto de formalismos. A partir de los niveles de energía de los iones dopantes establecemos un sistema de ecuaciones diferenciales para la evolución temporal de las densidades de sus poblaciones. En el caso de baja concentración, este sistema se puede resolver analíticamente, mientras que en el caso de alta concentración resultan necesarios métodos numéricos para su resolución. Aun así, cuando se necesitan métodos numéricos, la solución lineal suele ser un buen punto de partida por lo que mantiene su interés. Además, el sistema de ecuaciones diferenciales se encuentra acoplado a otro sistema de ecuaciones diferenciales que describen la evolución espacial de las potencias ópticas.

#### 3.1. Modelo para guías con baja concentración de $\text{Er}^{3+}$ .

El modelo inicial consiste en el esquema de tres niveles de energía del ion  $\text{Er}^{3+}$  bombeado a 980nm que se puede ver en la figura 2, donde aparecen las posibles transiciones entre niveles que vamos a tener en cuenta. Este esquema es el que vamos a utilizar para modelizar las fibras ópticas. En este sistema, los iones pasan del nivel fundamental al tercer excitado con una cierta probabilidad  $W_{13}$  mediante absorción de la potencia de bombeo. Como el nivel  ${}^4I_{11/2}$  tiene un tiempo de vida media muy corto ( $A_{32} \propto \frac{1}{\tau_{32}}$ ), los iones bombeados caerán rápidamente al nivel  ${}^4I_{13/2}$ . Este es el nivel metaestable dado que tiene un tiempo de vida relativamente largo, y desde este nivel el ion podrá desexcitarse espontánea o estimuladamente, utilizando esta transición para amplificar la señal. En consecuencia, la evolución temporal de las densidades de población de los tres niveles viene dada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, junto con la ecuación de cierre.

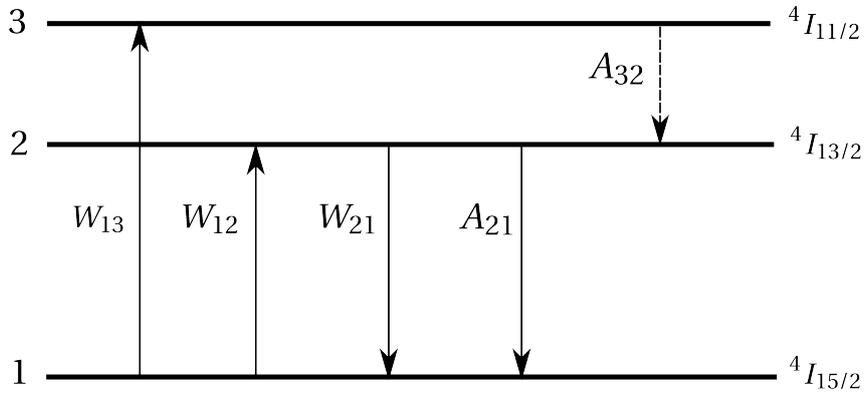


Figura 2: Niveles de población de los iones de Erblio y sus densidades de probabilidad de transición bombeado a 980 nm.

$$\frac{dn_1}{dt} = -(W_{13} + W_{12})n_1 + (w_{21} + A_{21})n_2 \quad (17)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = W_{12}n_1 - (W_{21} + A_{21})n_2 + A_{32}n_3 \quad (18)$$

$$\frac{dn_3}{dt} = W_{13}n_1 - A_{32}n_3 \quad (19)$$

$$n_{Er} = n_1 + n_2 + n_3, \quad (20)$$

donde  $n_{Er}$  es la densidad total de iones de  $\text{Er}^{3+}$ . Si la emisión es espontánea, la probabilidad de transición depende únicamente del tiempo de vida medio del nivel superior. Cuando la emisión

es estimulada, la transición depende de la potencia óptica correspondiente ( $\gamma$ : bombeo, señal o fluorescencia) de la forma [16]:

$$W_{ij}(x, y, z, t) = \int \frac{P_\gamma(z, t, \nu)\psi_\gamma(x, y)}{h\nu} \sigma_{ij}(\nu) d\nu \quad (21)$$

Teniendo esto en cuenta, las probabilidades de transición estimuladas toman la forma:

$$W_{13}(x, y, z, t) = \frac{P_b(z, t, \nu_b)\psi_b(x, y)}{h\nu_b} \sigma_{13}(\nu_b) \quad (22)$$

$$W_{12}(x, y, z, t) = \frac{P_s(z, t, \nu_s)\psi_s(x, y)}{h\nu_s} \sigma_{12}(\nu_s) + \int \frac{[P_f^+(z, t, \nu) + P_f^-(z, t, \nu)]\psi_s(x, y)}{h\nu} \sigma_{12}(\nu) d\nu \quad (23)$$

$$W_{21}(x, y, z, t) = \frac{P_s(z, t, \nu_s)\psi_s(x, y)}{h\nu_s} \sigma_{21}(\nu_s) + \int \frac{[P_f^+(z, t, \nu) + P_f^-(z, t, \nu)]\psi_s(x, y)}{h\nu} \sigma_{21}(\nu) d\nu, \quad (24)$$

donde en este último caso se ha tenido en cuenta la potencia de fluorescencia provocada por la emisión espontánea en todas las frecuencias en las que la sección eficaz de emisión no es despreciable, en dirección co- y contrapropagante ( $P_f^+$  y  $P_f^-$ ). En el caso en el que las potencias de bombeo y señal son constantes en el tiempo podemos resolver el sistema de forma analítica igualando a cero las derivadas de las densidades de población, transformándolo en un sistema de ecuaciones lineal.

El sistema de ecuaciones que gobierna la evolución temporal de las poblaciones está acoplado al sistema de ecuaciones que rige la propagación de las potencias ópticas. Para las potencias de bombeo y señal tenemos las siguientes ecuaciones [17]:

$$\frac{dP_b^\pm(z, t, \nu_b)}{dz} = \mp[N_{1,b}(z, t)\sigma_{13}(\nu_b) + \alpha_b]P_b^\pm(z, t, \nu_b) \quad (25)$$

$$\frac{dP_s^\pm(z, t, \nu_s)}{dz} = \pm[N_{2,s}(z, t)\sigma_{21}(\nu_s) - N_{1,s}(z, t)\sigma_{12}(\nu_s) - \alpha_s]P_s^\pm(z, t, \nu_s), \quad (26)$$

donde  $N_{i,\gamma}$  es la integral de solapamiento definida en (16), y  $\alpha_\gamma$  son las pérdidas pasivas de propagación. Los signos  $\pm$  expresan el sentido de propagación de las potencias, permitiéndonos trabajar con señal co- y contrapropagante y con bombeo uni- y bidireccional.

La ecuación de la fluorescencia consta de dos términos: uno correspondiente a la emisión espontánea y otro correspondiente a la emisión espontánea amplificada (ASE), que coincide formalmente con el de la señal dado que depende de los mismos factores. La ecuación queda de la siguiente forma [18]:

$$\frac{dP_f^\pm(z, t, \nu)}{dz} = \pm 2h\nu_f \Delta\nu N_{2,s}(z, t)\sigma_{21}(\nu) \pm [N_{2,s}(z, t)\sigma_{21}(\nu_s) - N_{1,s}(z, t)\sigma_{12}(\nu_s) - \alpha_s]P_f^\pm(z, t, \nu) \quad (27)$$

La aplicabilidad de este método resulta limitada al no considerar las contribuciones debidas a los mecanismos de transferencia cooperativa de energía no radiativa, así como otras transiciones entre niveles que se ven favorecidas por la alta concentración de  $\text{Er}^{3+}$ . Aun así, resulta útil como primera aproximación a modelos más complejos.

### 3.2. Modelos para guías con alta concentración de $\text{Er}^{3+}$ codopadas con $\text{Yb}^{3+}$ .

Al introducir una alta cantidad de dopante, hay que añadir en el modelo otras transiciones cuya probabilidad ya no es despreciable y, por tanto, tenemos que añadir también más niveles. Por otro lado, también hay que tener en cuenta los mecanismos cooperativos de transferencia

no radiativa de energía, cuya probabilidad depende de la distancia entre iones, que disminuye con la concentración. Este modelo es el usado para describir el comportamiento de las guías de onda integradas.

En nuestro caso nos interesa el modelo para guías codopadas con  $\text{Er}^{3+}$ - $\text{Yb}^{3+}$ , debido a que su uso aumenta la eficiencia del bombeo. Para modelizar este sistema incluimos los niveles del ion  $\text{Yb}^{3+}$  con sus transiciones, así como las transiciones no radiativas de energía entre el ion  $\text{Yb}^{3+}$  y el  $\text{Er}^{3+}$ . En este modelo, además de añadir el resto de transiciones de los niveles del  $\text{Er}^{3+}$ , se ha tenido en cuenta los fenómenos cooperativos de transferencia de energía asociados al  $\text{Er}^{3+}$  (upconversion), y al par  $\text{Er}^{3+}$ - $\text{Yb}^{3+}$  (transferencia entre los iones). En la imagen 3 se puede ver el esquema del sistema, donde  $C_{tr}$  es el coeficiente de transferencia no radiativa del ion  $\text{Yb}^{3+}$  al  $\text{Er}^{3+}$  y  $C_{inv}$  es el coeficiente de transferencia inversa. Asumiendo una distribución homogénea del upconversion, lo parametrizamos mediante un coeficiente  $C_{up}$ , que va a ser constante en todo el medio activo. En la bibliografía, a este modelo de tratar el upconversion se le denomina modelo de upconversion homogéneo. Del esquema mencionado se extrae el sistema de ecuaciones, que pasan a ser no lineales, de evolución de la densidad de población de ambos iones:

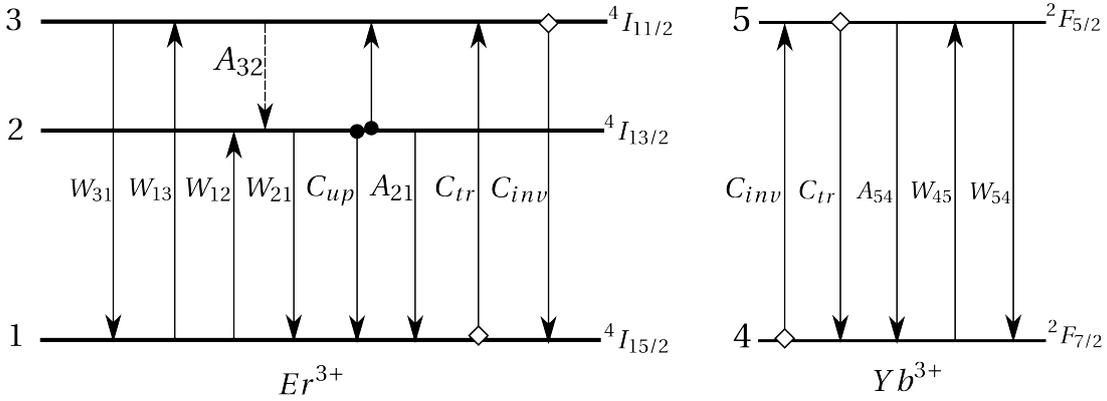


Figura 3: Niveles de población de un sistema codopado con iones de Erblio e Yterbio, así como sus densidades de probabilidad de transición bombeado a 980nm.

$$\frac{dn_1}{dt} = (W_{21} + A_{21})n_2 - (W_{13} + W_{12})n_1 + C_{up}n_2^2 - C_{tr}n_1n_5 + C_{inv}n_3n_4 \quad (28)$$

$$\frac{dn_2}{dt} = A_{32}n_3 - (W_{21} + A_{21})n_2 + W_{12}n_1 - 2C_{up}n_2^2 \quad (29)$$

$$\frac{dn_3}{dt} = W_{13}n_1 - A_{32}n_3 + C_{up}n_2^2 + C_{tr}n_1n_5 - C_{inv}n_3n_4 \quad (30)$$

$$\frac{dn_4}{dt} = (W_{54} + A_{54})n_5 - W_{54}n_4 + C_{tr}n_1n_5 - C_{inv}n_3n_4 \quad (31)$$

$$\frac{dn_5}{dt} = -(W_{54} + A_{54})n_5 + W_{54}n_4 - C_{tr}n_1n_5 + C_{inv}n_3n_4, \quad (32)$$

al cual hay que añadirle dos ecuaciones de cierre:

$$n_1 + n_2 + n_3 = n_{Er} \quad (33)$$

$$n_4 + n_5 = n_{Yb} \quad (34)$$

Las ecuaciones de la señal y la fluorescencia son iguales que en el caso del  $\text{Er}^{3+}$  debido a que el ion  $\text{Yb}^{3+}$  no presenta ni emisión ni absorción en la banda de señal. No obstante, la ecuación de la potencia de bombeo sí que se ve modificada:

$$\frac{dP_b^\pm(z, t, \nu_b)}{dz} = \mp [N_{1,b}(z, t)\sigma_{13}(\nu_b) + N_4(z, t)\sigma_{45}(\nu_b) - N_5(z, t)\sigma_{54}(\nu_b) + \alpha_b] \cdot P_b^\pm(z, t, \nu_b) \quad (35)$$

Este sistema no tiene solución analítica, por lo que utilizaremos el método de Newton para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales. Como solución inicial consideramos  $C_{up} = 0$ ,  $C_{tr} = 0$  y  $C_{inv} = 0$  [18].

### 3.3. Implementación numérica.

Hasta ahora se ha descrito, mediante distintos formalismos, el comportamiento de una guía de ondas activa sin tener en cuenta el dispositivo implementado con ella. Para describir correctamente sistemas reales es necesario imponer una serie de condiciones de contorno. Además, introducimos como nuevas variables las potencias de entrada y de salida,  $P_{in,\gamma}^{\pm}$  y  $P_{out,\gamma}^{\pm}$ , así como la longitud de la guía,  $l$ , que nos permiten fijar las condiciones de contorno, tratándose de las magnitudes que somos capaces de medir experimentalmente.

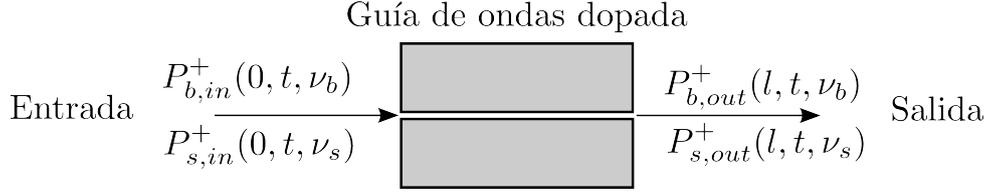


Figura 4: Esquema de las variables de entrada y salida de un amplificador bombeado unidireccionalmente con señal copropagante.

En el caso de un amplificador con bombeo bidireccional, las condiciones de contorno del bombeo serán:

$$\begin{aligned} P_b^+(0, t, \nu_b) &= P_{b,in}^+(t, \nu_b) \\ P_b^+(l, t, \nu_b) &= P_{b,out}^+(t, \nu_b) \\ P_b^-(0, t, \nu_b) &= P_{b,out}^-(t, \nu_b) \\ P_b^-(l, t, \nu_b) &= P_{b,in}^-(t, \nu_b), \end{aligned}$$

mientras que si el bombeo es unidireccional las dos últimas expresiones se igualan a cero. En el caso de la señal, si tenemos un sistema copropagante sus condiciones vendrán dadas por:

$$\begin{aligned} P_s^+(0, t, \nu_s) &= P_{s,in}^+(t, \nu_s) \\ P_s^+(l, t, \nu_s) &= P_{s,out}^+(t, \nu_s) \\ P_s^-(0, t, \nu_s) &= 0 \\ P_s^-(l, t, \nu_s) &= 0, \end{aligned}$$

mientras que cuando la señal sea contrapropagante ocurrirá al contrario.

Finalmente, las condiciones de contorno para la fluorescencia vienen dadas por:

$$\begin{aligned} P_f^+(0, t, \nu_s) &= 0 \\ P_f^+(l, t, \nu_s) &= P_{s,out}^+(t, \nu_s) \\ P_f^-(0, t, \nu_s) &= P_{s,out}^-(t, \nu_s) \\ P_f^-(l, t, \nu_s) &= 0. \end{aligned}$$

La resolución del conjunto de ecuaciones de propagación, junto con las ecuaciones que determinan la evolución de las poblaciones de los iones, permite obtener la evolución de las potencias ópticas que se propagan por la guía, en función de las condiciones de contorno. Debido a la complejidad y no linealidad del conjunto de relaciones que describen la dinámica de las poblaciones,

es necesario resolver estas relaciones y las ecuaciones de propagación mediante métodos numéricos. Los valores estacionarios de las densidades de población al inicio de la guía, es decir, donde se acoplan las potencias de bombeo y señal, se calculan usando el método de Newton-Raphson. Después se calculan las integrales de solapamiento a partir de las densidades de población y los perfiles de intensidad y, mediante las ecuaciones de propagación, los valores de las derivadas de las potencias al comienzo de la guía. La resolución de las ecuaciones de propagación la llevamos a cabo mediante el método de Hamming-Runge Kutta. Los valores de fluorescencia contrapropagante que deben de obtenerse al inicio de la guía se desconocen a priori, por lo que partimos de un valor nulo para todos los canales. De esta manera se obtienen unos valores de potencias al final de la guía que no son la solución correcta. No obstante, resolvemos de nuevo las ecuaciones de propagación de las potencias en dirección copropagante, partiendo de los valores de fluorescencia que acabamos de obtener, e igualando a cero los valores de la fluorescencia contrapropagante. Mediante esta iteración de ida y vuelta a lo largo de la guía obtenemos una estimación de los valores de la fluorescencia contrapropagante que se desconocían al principio. Utilizamos esta estimación como base de partida para la siguiente iteración y continuamos este proceso hasta que obtenemos un valor estacionario de la misma.

Con el fin de llevar a cabo todos estos cálculos hemos escrito un código en lenguaje C implementando el algoritmo, en el cual somos capaces de variar los diferentes parámetros que influyen en el proceso, así como partir de una geometría cualquiera y una distribución de dopante arbitraria; fundamental de cara a la modelización de estructuras con múltiples núcleos. Como se verá en la sección 4.1, calculamos la distribuciones de intensidad a propagar mediante un programa comercial, RSoft CAD [19], que calcula los modos de las estructuras mediante el método de los elementos finitos. Una vez obtenidos los perfiles de intensidad, se utilizan como base de partida para el código implementado en C, donde se especifican la geometría del dopado, la distribución de índice, las condiciones de contorno, así como los diferentes valores numéricos necesarios, tales como las secciones eficaces, tiempos de vida medio de los diferentes niveles de energía, coeficientes de fenómenos de transferencia cooperativa de energía, etc. Una vez comprendido e implementado el comportamiento general del algoritmo, es posible utilizarlo para estudiar el comportamiento de las guías de onda multinúcleo.

## 4. Análisis de guías de onda multinúcleo activas.

### 4.1. Introducción.

Cuando tenemos una estructura de varios núcleos que se encuentran acoplados entre sí, los modos de los núcleos individuales no se van a propagar invariantes, tal y como ocurre cuando los núcleos están aislados, sino que se van a ver perturbados por la presencia del resto de núcleos. Como consecuencia se va a dar un cierto transvase de potencia entre los diferentes núcleos que dependerá de los parámetros de la estructura, y que va a dar lugar a una serie de modos de la estructura. La distribución de campo de estos modos de la estructura puede verse como una superposición de las distribuciones de campo de los modos de los núcleos individuales. Esto nos lleva a uno de los conceptos fundamentales de este trabajo, básico a la hora de analizar el acoplamiento entre los diferentes núcleos de una guía: el concepto de **Supermodo**. Los supermodos, cuya distribución electromagnética no varía a lo largo de la guía, son los modos propios de la guía multinúcleo. Estos supermodos se usan para entender y analizar las propiedades de las guías multinúcleo [20], e incluso directamente en sistemas de comunicaciones ópticas y láseres [21].

Los supermodos de las guías multinúcleo pueden analizarse mediante métodos analíticos [22], o mediante simulaciones numéricas [23, 24, 25]. Comparados con los resultados numéricos, los resultados analíticos permiten entender mejor las propiedades y características de los supermodos, y analizar comportamientos de estos que serían complicados de deducir a partir de los resultados numéricos. Por otro lado, los métodos analíticos suelen hacer uso de ciertas aproximaciones que pueden ocasionar falta de precisión en ciertas situaciones. Además, conforme aumenta la complejidad de la estructura, también se vuelve más complicado obtener resultados analíticos. Hoy por hoy, existen algunas publicaciones con resultados analíticos de los supermodos, entre las que se incluyen estructuras de núcleos alineados formando una recta [26], una circunferencia con varios anillos [27], o una figura hexagonal [21]. El estudio analítico de los supermodos suele hacer uso de la teoría de modos acoplados y operaciones matriciales, típicamente obtención de valores y vectores propios. En este tipo de cálculos se suelen suponer núcleos idénticos, monomodo y estructuras simétricas de tal forma que simplifique al máximo posible los cálculos. Además, solo se suele considerar la perturbación provocada por núcleos adyacentes. Estos métodos sirven para entender mejor las estructuras básicas, pero en casos en los que el acoplamiento entre núcleos es fuerte o estructuras con inhomogeneidades y falta de simetría es conveniente buscar las soluciones mediante simulaciones numéricas. El método más usado en la literatura para calcular el perfil modal de una estructura arbitraria es el método de los elementos finitos vectorial (full-vectorial finite element method). Cuando este es el caso, es posible desarrollar un programa propio implementando este método, o bien hacer uso de software comercial como Comsol Multiphysics o Rsoft Cad. En nuestro caso, los supermodos obtenidos mediante métodos numéricos se calculan mediante la herramienta FemSIM del programa Rsoft.

En este capítulo, comenzamos por explicar el formalismo analítico que se utiliza para obtener los modos de propagación partiendo de las ecuaciones de modos acoplados en la sección 4.2. A continuación, en el apartado 4.3, partimos del concepto de supermodo y modelizamos la propagación de la señal en el medio activo mediante el formalismo desarrollado en los capítulos anteriores y teniendo en cuenta diferentes factores a considerar.

### 4.2. Análisis mediante métodos analíticos. Teoría de modos acoplados.

#### 4.2.1. Acoplamiento entre dos núcleos.

Empezamos por un caso sencillo en el que tenemos dos núcleos y queremos ver cómo se ve modificada la evolución de la señal debido al acoplamiento entre estos. Partimos de la distribución transversal de campo modal de cada uno de los dos núcleos,  $\phi_1(x, y)$  y  $\phi_2(x, y)$ , sus constantes de propagación,  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , así como su distribución de índice efectivo,  $n_1(x, y)$  y  $n_2(x, y)$ . Si

denotamos por  $\psi(x, y, z)$  al campo total de la estructura, buscamos una solución de la ecuación de Helmholtz que tenga la forma:

$$\psi(x, y, z) = A(z) \cdot \psi_1(x, y) \cdot e^{-i\beta_1 z} + B(z) \cdot \psi_2(x, y) \cdot e^{-i\beta_2 z}, \quad (36)$$

la cual es válida cuando los dos núcleos no interactúan fuertemente. Para un acoplamiento nulo se entiende que  $A(z) = A$  y  $B(z) = B$ , y por tanto los núcleos mantienen su modo individual de propagación. Cuando existe acoplamiento tenemos que calcular  $A(z)$  y  $B(z)$  de la estructura. Para ello sustituimos la solución en la ecuación y llegamos hasta las ecuaciones de modos acoplados [28]:

$$\frac{dA(z)}{dz} = -ik_{11}A(z) - ik_{12}B(z)e^{+i\Delta\beta z} \quad (37)$$

$$\frac{dB(z)}{dz} = -ik_{21}A(z)e^{-i\Delta\beta z} - ik_{22}B(z), \quad (38)$$

donde,

$$k_{ij} = \frac{k_0^2}{2\beta_i} \frac{\int \int \psi_i(x, y) \Delta n_j^2(x, y) \psi_j^*(x, y) dx dy}{\int \int \psi_i(x, y) \psi_j^*(x, y) dx dy}. \quad (39)$$

En estas ecuaciones se suelen despreciar los términos  $k_{11}$  y  $k_{22}$ , que representan las correcciones a las constantes de propagación de cada modo de guía de onda individual debido a la presencia de la otra guía. Diferenciando la primera de las ecuaciones de los modos acoplados (despreciando  $k_{11}$ ) respecto de  $z$  y eliminando la dependencia con el parámetro  $B(z)$  obtenemos

$$\frac{d^2 A}{dz^2} - i\Delta\beta \frac{dA}{dz} + k^2 A = 0, \quad (40)$$

cuya solución general es

$$A(z) = e^{i\Delta\beta z/2} (a_1 e^{i\gamma z} + a_2 e^{-i\gamma z}), \quad (41)$$

donde las constantes  $a_1$  y  $a_2$  pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales, y los nuevos parámetros se definen tal que

$$\gamma^2 = k^2 + \Delta\beta^2/4 \quad k^2 = \sqrt{k_{12}k_{21}}. \quad (42)$$

Estas ecuaciones nos permiten conocer la evolución de la señal conforme se propaga. Si, por ejemplo, suponemos que excitamos únicamente el núcleo 1 con una potencia inicial  $P(0)$ , la potencia en cada uno de los núcleos en función de  $z$  vendrá dada por las ecuaciones

$$\frac{P_1(z)}{P_1(0)} = 1 - \frac{k^2}{\gamma^2} \sin^2(\gamma z) \quad (43)$$

$$\frac{P_2(z)}{P_1(0)} = \frac{k^2}{\gamma^2} \sin^2(\gamma z) \quad (44)$$

#### 4.2.2. Formalismo matricial.

La variación de los coeficientes  $A(z)$  y  $B(z)$  de las ecuaciones de los modos acoplados vistas en el apartado anterior puede expresarse en forma matricial. Si definimos unas nuevas variables  $a(z) = A(z) \cdot e^{-i\beta_1 z}$  y  $b(z) = B(z) \cdot e^{-i\beta_2 z}$  podemos escribir las ecuaciones (37) y (38) de la forma siguiente:

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & k_{12} \\ k_{21} & \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (45)$$

Cuando la estructura a estudiar consta de más núcleos, se usa la versión matricial de la teoría de modos acoplados para su análisis. De acuerdo con esta teoría [29], la interacción entre los

modos de una serie de núcleos individuales se puede escribir mediante una ecuación de modos acoplados tal que

$$\frac{d}{dz}\mathbf{A} = -i\hat{\mathbf{M}}\mathbf{A}, \quad (46)$$

de tal forma que el vector  $\mathbf{A}$  contiene las amplitudes modales en función de  $z$  de cada uno de los núcleos, y en la matriz  $\hat{\mathbf{M}}$  se encuentran las constantes de propagación individuales así como los distintos factores de acoplamiento  $k_{ij}$ . Cuando tenemos un sistema sin pérdidas la matriz es hermítica [22] y puede ser diagonalizada mediante una matriz unitaria tal que

$$\mathbf{Q}^{-1}\hat{\mathbf{M}}\mathbf{Q} = \Lambda, \quad (47)$$

donde  $\Lambda$  es una matriz diagonal en la diagonal de la cual se encuentran las constantes de propagación de los supermodos de la guía de onda multinúcleo. El vector de las amplitudes de los supermodos se representa como

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}, \quad (48)$$

bajo el cual la ecuación de los modos acoplados (46) se puede expresar de la forma siguiente:

$$\frac{d}{dz}\mathbf{B} = -i\Lambda\mathbf{B}. \quad (49)$$

Si, por ejemplo, tenemos una estructura formada por cuatro núcleos dispuestos en una geometría cuadrada, en la cual cada núcleo individual tiene la misma constante de propagación  $\beta_0$ , nuestro sistema vendrá descrito por la siguiente matriz:

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \beta_0 & c_1 & c_2 & c_1 \\ c_1 & \beta_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_1 & \beta_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_1 & \beta_0 \end{bmatrix}, \quad (50)$$

y el vector de las amplitudes  $\mathbf{A} = [A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4]^T$  hace referencia a las amplitudes complejas del campo eléctrico de cada uno de los núcleos. Y donde  $c_1$  y  $c_2$  son los coeficientes de acoplamiento entre los núcleos adyacentes y no adyacentes respectivamente. La matriz diagonal tomará la forma,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_4 \end{bmatrix}, \quad (51)$$

donde  $\beta_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4$ ) es la constante de propagación del supermodo  $m$  soportado por la estructura. La obtención de los valores de las constantes de propagación consiste en la búsqueda de los valores propios de la matriz, que en nuestro caso vienen dados por [22]:

$$\beta_1 = \beta_0 + 2c_1 + c_2; \quad \beta_2 = \beta_0; \quad \beta_3 = \beta_0 - c_2; \quad \beta_4 = \beta_0 - 2c_1 + c_2, \quad (52)$$

y la amplitud de cada supermodo será el vector propio del autovalor correspondiente.

En conclusión, mediante el formalismo matricial de la teoría de los modos acoplados, el problema de la obtención de los supermodos se puede resumir en el cálculo de los autovalores y autovectores de la matriz de las constantes de propagación y los coeficientes de acoplamiento, siendo esta diferente para cada estructura.

### 4.3. Análisis mediante simulaciones numéricas. Propagación de supermodos.

#### 4.3.1. Modos de la estructura o supermodos.

En el apartado anterior hemos visto que es posible calcular los modos de una estructura, comúnmente llamados supermodos, partiendo de la teoría de modos acoplados. Estos supermodos también se pueden obtener numéricamente, especificando la geometría y los parámetros de la estructura. Para ello se resuelven las ecuaciones expuestas en el apartado 2.1 teniendo en cuenta las condiciones de frontera impuestas.

Cuando introducimos una señal óptica en una guía de ondas, el campo eléctrico y el campo magnético se pueden separar en dos partes. Una parte representa al campo guiado a lo largo de la guía, y otra al campo radiado al exterior. La parte guiada se puede expresar como una suma finita de modos, que son soluciones de las ecuaciones de Maxwell libre de fuentes para la guía de ondas. Por lo tanto podemos expresar los campos de forma que

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sum_j a_j \mathbf{E}_j(x, y, z) + \sum_j a_{-j} \mathbf{E}_{-j}(x, y, z) + \mathbf{E}_{rad}(x, y, z) \quad (53)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \sum_j a_j \mathbf{H}_j(x, y, z) + \sum_j a_{-j} \mathbf{H}_{-j}(x, y, z) + \mathbf{H}_{rad}(x, y, z), \quad (54)$$

donde  $j = 1, 2, \dots, M$  siendo  $M$  el número de modos. Cuando la estructura tiene independencia translacional los modos de la estructura dependen únicamente de las coordenadas  $x$  e  $y$ , por lo que su perfil transversal se mantiene constante a lo largo de la propagación. El primer sumatorio es sobre los modos que se propagan en una dirección, mientras que el segundo término corresponde a los que se propagan en dirección opuesta. El subíndice *rad* denota al campo radiado y los coeficientes  $a_{\pm j}$  son las amplitudes modales, cuyos valores dependen de la fuente de excitación. En el caso de las guías multinúcleo, proyectamos la señal óptica que queremos propagar sobre cada uno de los supermodos de la guía para obtener sus amplitudes modales. La amplitud modal del supermodo  $j$  viene dada por la expresión:

$$a_j = \frac{[\int_A \mathbf{E}_j(x, y) \cdot \mathbf{E}(x, y) dA]^2}{\int_A |\mathbf{E}_j(x, y)| dA \int_A |\mathbf{E}(x, y)| dA} \quad (55)$$

Cuando trabajamos en régimen de baja señal, es decir, cuando el efecto que tiene la señal óptica sobre la densidad de población de los niveles del dopante puede despreciarse, y en la mayoría de geometrías y parámetros que se encuentran en la literatura, podemos calcular la ganancia de cada supermodo de forma individual. Como una vez obtenidas las amplitudes modales sabemos qué proporción de cada supermodo tiene la señal, y sabemos que la presencia de un supermodo no va a modificar la evolución de los otros supermodos que se estén propagando, nos vale con obtener ganancias individuales para cada supermodo. Para calcular la ganancia de cada supermodo tenemos que calcular su perfil de intensidad, que vendrá dado por el vector de Poynting de su distribución de campo electromagnético  $\mathbf{S}_j(x, y) = \mathbf{E}_j(x, y) \times \mathbf{H}_j(x, y)$ , donde  $\mathbf{E}_j$  y  $\mathbf{H}_j$  son los perfiles modales del campo eléctrico y magnético respectivamente del supermodo  $j$ . Esta potencia se puede descomponer en un término normalizado multiplicado por una potencia independiente del plano transversal:

$$P_j(x, y, z, t) = P_j(z, t) \cdot \psi_j(x, y), \quad (56)$$

donde  $\psi_j(x, y)$  es la distribución de intensidad del supermodo  $S_j(x, y)$  normalizada de tal forma que se cumpla:

$$\int \int_{A_\infty} \psi_j(x, y) dx dy = 1. \quad (57)$$

Por otro lado, el término  $P_j(z, t)$  hace referencia a la potencia total en función de la distancia de propagación y del tiempo. Al tratar con fasores no tenemos en cuenta directamente la parte

temporal, por lo que nos quedamos con una potencia total que depende de la posición en la dirección de propagación. Para poder calcular su evolución necesitamos conocer la potencia inicial del supermodo. Si denotamos por  $P(0) = P_0$  la potencia al inicio de la guía, la potencia del supermodo  $j$  al inicio de la guía será  $P_j(0) = a_j \cdot P_0$ . Con la potencia inicial, la distribución modal de propagación, así como el resto de parámetros necesarios para llevar a cabo la propagación activa, somos capaces de obtener la evolución de la potencia total del supermodo  $P_j(z)$ . Una vez obtenida la propagación en el medio activo de cada uno de los supermodos individuales podemos expresar la evolución de la señal óptica con la que excitamos la guía descomponiéndola de nuevo en cada uno de sus supermodos:

$$\Psi(x, y, z) = \sum_j \sqrt{P_j(z)} \cdot \psi_j(x, y) \cdot e^{i\beta_j z} \quad (58)$$

En la figura 5 encontramos los supermodos de una estructura con núcleos formando un anillo hexagonal más un núcleo central. Vamos a utilizar esta estructura para ver la evolución en el medio activo de cada uno de los supermodos. Para calcular la ganancia de un supermodo, se excita la guía con su distribución. Por defecto vamos a suponer el bombeo y el dopado homogéneo en todos los núcleos. No obstante, en este caso vamos a considerar la posibilidad de que no todos los núcleos se encuentren dopados, y así observar las diferencias en la ganancia final. La ganancia por unidad de longitud de cada uno de estos núcleos se observa en la gráfica 6 para dos posibles casos: por un lado calculamos la ganancia de cada supermodo cuando todos los núcleos están dopados y están siendo bombeados. Podemos ver como existen pequeñas desviaciones entre ganancias de los supermodos debido a la diferencia de solapamiento de cada distribución con la zona dopada y bombeada. Por otro lado calculamos las ganancias dopando y bombeando únicamente el núcleo central, para ver con más claridad las posibles diferencias entre supermodos. El supermodo  $f$ ) tiene una ganancia similar debido a que, como vemos en la figura 5, la mayor parte de su intensidad se encuentra en el núcleo central y, por tanto, se va a ver amplificada. El supermodo  $a$ ) también se va a ver amplificado, aunque en menor medida, mientras que el resto de supermodos no van a amplificarse notablemente debido a que el solapamiento de su perfil modal de intensidad con el núcleo central es despreciable.

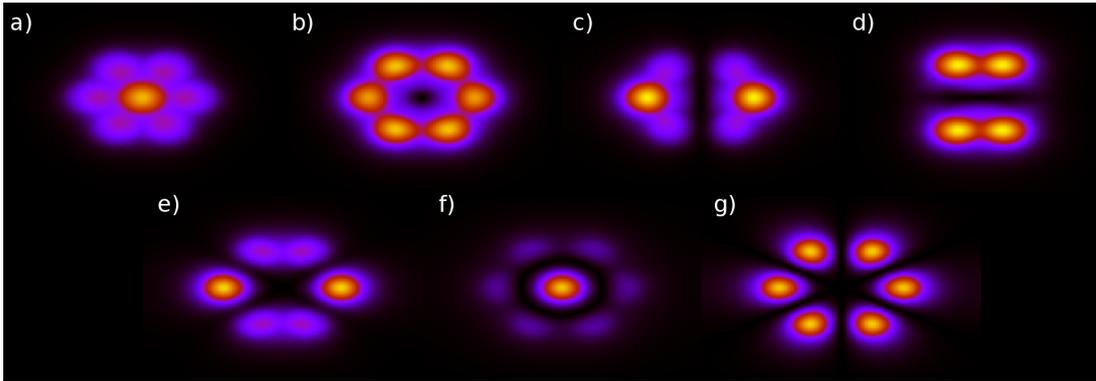


Figura 5: Distribución de la intensidad de los siete supermodos de una estructura hexagonal con un núcleo central.

Suponiendo una excitación del núcleo central únicamente, descomponemos dicha excitación en función de cada uno de los supermodos tal y como se muestra en (55), obteniendo las siguientes amplitudes modales:  $A_a = 0,59$ ;  $A_b = 2,3 \cdot 10^{-7}$ ;  $A_c = 4,8 \cdot 10^{-7}$ ;  $A_d = 3,6 \cdot 10^{-8}$ ;  $A_e = 1,5 \cdot 10^{-3}$ ;  $A_f = 0,38$ ;  $A_g = 1,1 \cdot 10^{-7}$ . En la figura 7 podemos ver el perfil de intensidad de la excitación inicial del núcleo central, así como el perfil de intensidad a la salida de la guía en el caso en el que todos los núcleos están dopados y bombeados y en el caso en el cual únicamente el núcleo central lo está.

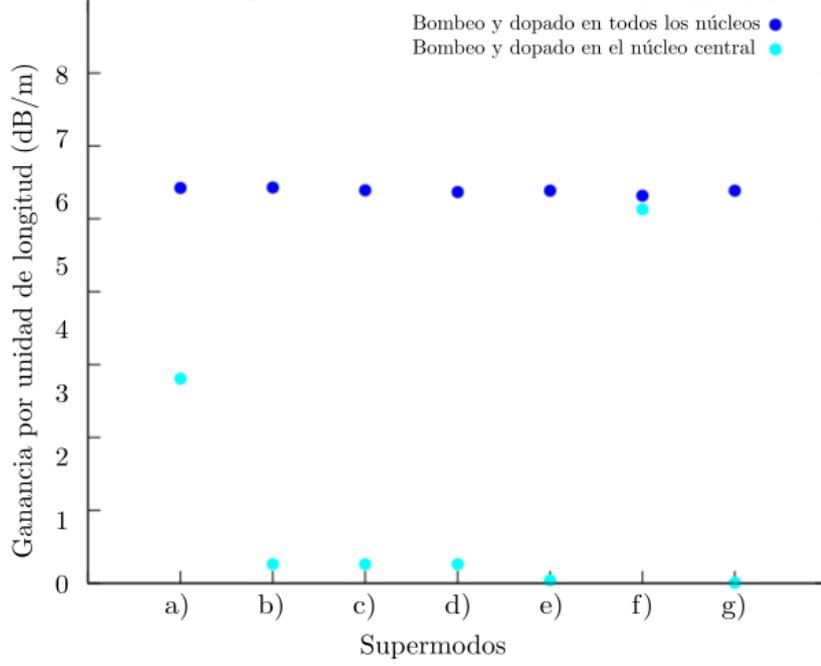


Figura 6: Ganancia por unidad de longitud de cada uno de los supermodos de una estructura hexagonal con un núcleo central para una potencia de bombeo  $P_b = 350\text{mW}$ , una concentración de Erblio  $n_{Er^{3+}} = 5 \cdot 10^{24}$  iones/ $\text{m}^3$  y en régimen de baja señal.

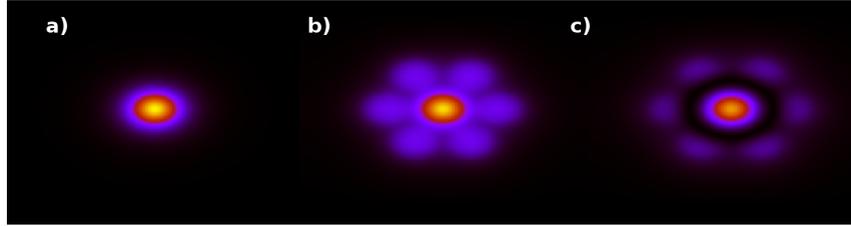


Figura 7: Perfil de intensidad normalizado a la entrada de la guía (a), y a la salida cuando todos los núcleos están dopados y bombeados (b), y cuando solo el central lo está (c).

#### 4.3.2. Competición modal.

Cuando salimos del régimen de baja señal, y sobretodo en caso de saturación, que es como suelen trabajar los sistemas amplificadores reales, no se puede despreciar el hecho de que los diferentes supermodos están compartiendo la misma distribución de densidad de población de los iones activos. Esto hace que la propagación de cada supermodo se vea afectada por la propagación del resto de supermodos.

Para tener en cuenta este efecto debemos modificar las ecuaciones de la densidad de población. El cambio consiste en considerar las densidades de probabilidad de transición provocadas por el total de los supermodos que se propagan por la guía de ondas. Para ello pasamos a redefinir los coeficientes  $W_{ij}$  de tal forma que en ellos esté contenida la suma de coeficientes de los diferentes supermodos:

$$W_{12}(x, y, z, t) = \sum_j W_{12,j}(x, y, z, t) \quad W_{21}(x, y, z, t) = \sum_j W_{21,j}(x, y, z, t), \quad (59)$$

donde  $j = 1, 2, \dots, M$  siendo  $M$  el número de supermodos de señal que se propagan, y donde los

coeficientes de los supermodos vienen definidos como:

$$W_{12,j}(x, y, z, t) = \frac{P_{s,j}(z, t, \nu_s)\psi_{s,j}(x, y)}{h\nu_s}\sigma_{12}(\nu_s) + \int \frac{[P_{f,j}^+(z, t, \nu) + P_{f,j}^-(z, t, \nu)]\psi_{s,j}(x, y)}{h\nu}\sigma_{12}(\nu)d\nu \quad (60)$$

$$W_{21,j}(x, y, z, t) = \frac{P_{s,j}(z, t, \nu_s)\psi_{s,j}(x, y)}{h\nu_s}\sigma_{21}(\nu_s) + \int \frac{[P_{f,j}^+(z, t, \nu) + P_{f,j}^-(z, t, \nu)]\psi_{s,j}(x, y)}{h\nu}\sigma_{21}(\nu)d\nu. \quad (61)$$

En este caso se han modificado únicamente las densidades de probabilidad de transición  $W_{12}$  y  $W_{21}$  porque son las únicas que se ven influenciadas por tener varios supermodos de señal. En el caso en el que tuviésemos varios supermodos de bombeo habría que extender este formalismo al resto de coeficientes  $W_{13}$ ,  $W_{45}$  y  $W_{54}$ . A su vez, se puede ver que ya no hay una única potencia de señal, sino que hay una para cada supermodo, y por consiguiente el número de potencias de fluorescencia también se ve multiplicado por el número de supermodos que se propagan. Las ecuaciones 26 y 27 se redefinen quedando de la forma:

$$\frac{dP_{s,j}^\pm(z, t, \nu_s)}{dz} = \mp[N_{1,s,j}(z, t)\sigma_{12}(\nu_s) - N_{2,s,j}(z, t)\sigma_{21}(\nu_s) + \alpha_s]P_{s,j}^\pm(z, t, \nu_s), \quad (62)$$

$$\frac{dP_{f,j}^\pm(z, t, \nu)}{dz} = \pm 2h\nu_f\Delta\nu N_{2,s,j}(z, t)\sigma_{21}(\nu) \mp [N_{1,s,j}(z, t)\sigma_{12}(\nu_s) - N_{2,s,j}(z, t)\sigma_{21}(\nu_s) + \alpha_s]P_{f,j}^\pm(z, t, \nu) \quad (63)$$

donde  $j$  vuelve a hacer referencia al supermodo y la integral de solapamiento 16 pasa a definirse:

$$N_{i,j}(z, \nu) = \int \int \psi_j(x, y, \nu)n_i(x, y, z)dx dy. \quad (64)$$

A continuación vamos a ver un ejemplo en el cual es necesario tener en cuenta la saturación. Para ello, vamos a estudiar una estructura de tres núcleos situados en cada una de las puntas de un triángulo equilátero. Esta estructura tiene tres supermodos, cuyo perfil modal del campo eléctrico puede observarse en la figura 8. Dependiendo de la distancia de separación entre los núcleos, el acoplamiento entre estos va a variar, y las distribuciones modales van a ser diferentes. En la figura mencionada, la separación entre núcleos coincide con el diámetro de estos.

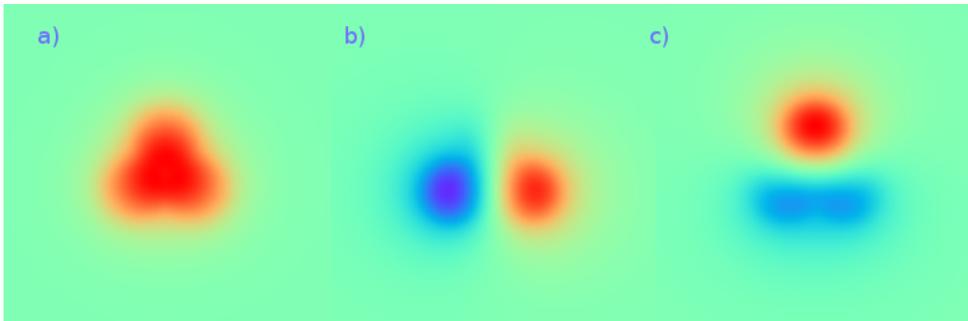


Figura 8: Campo eléctrico normalizado de los supermodos de una estructura con tres núcleos en formando un triángulo equilátero cuyos centros están separados por una distancia igual al diámetro de cada núcleo.

Esta estructura nos permite entender la importancia del efecto de la saturación. En la figura 9 se muestra la evolución de la señal a lo largo de una distancia suficiente como para que el

sistema sature. Las líneas discontinuas hacen referencia al calculo de la ganancia propagando cada supermodo de forma individual (de la misma forma en la que se ha calculado la ganancia de la gráfica anterior, solo que ahora ya no nos encontramos en régimen de baja señal). Las continuas, por el contrario, corresponden a una propagación conjunta de supermodos en la cual han tenido que compartir la inversión de población.

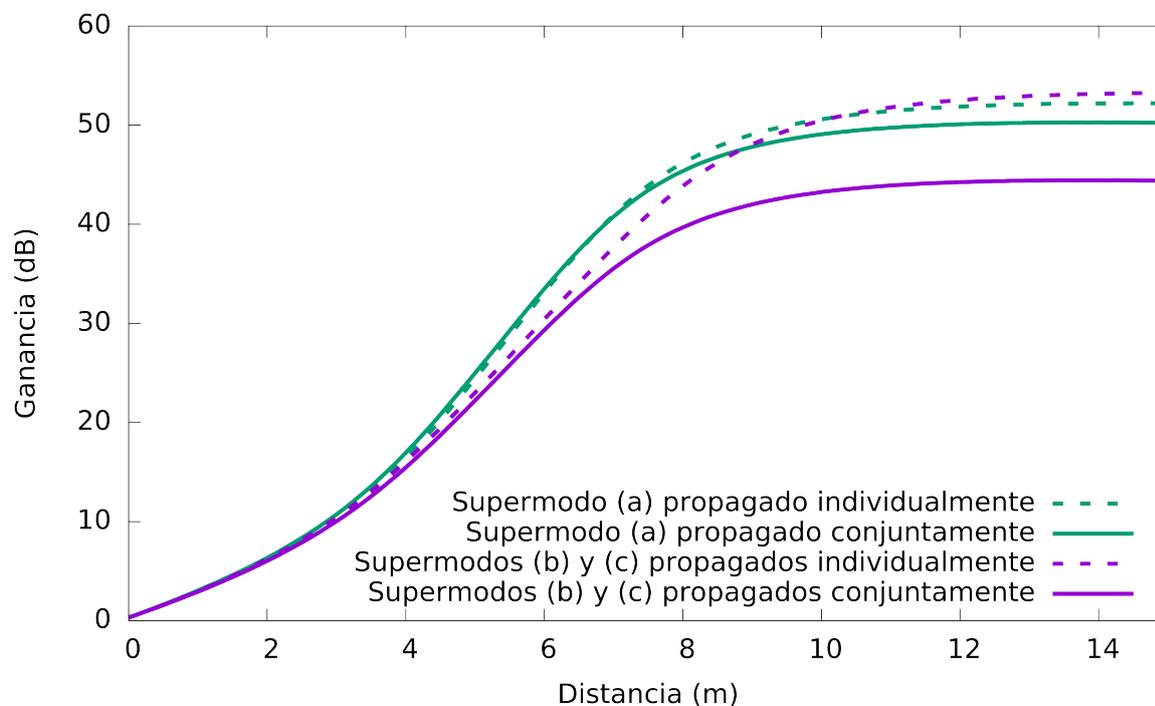


Figura 9: Evolución de la ganancia de cada uno de los supermodos de la estructura triangular con potencia de señal  $P_s = 10^{-16} W$ , potencia de bombeo  $P_b = 500mW$  y concentración  $n_{Er^{3+}} = 5 \cdot 10^{24}$ .

Si nos fijamos primero en las líneas discontinuas, podemos ver que para baja señal el primer supermodo tiene una ganancia mayor a la de los otros dos, no obstante al alcanzar la situación de saturación esto cambia. Ahora bien, si propagamos los supermodos simultáneamente e interaccionando todos ellos con la distribución de densidades de población existente, tenemos una situación diferente. Para baja señal el comportamiento es similar en ambos casos, sin embargo el resultado en régimen de saturación evoluciona de forma diferente, siendo ahora el primer supermodo el que alcanza una mayor ganancia. Las distribuciones de intensidad de los supermodos b) y c) solapan con la misma distribución de densidad de población de los iones, por lo que ambos se verán saturados en mayor medida. El supermodo a) por otra parte, solapa parcialmente con estos, pero también se propaga por una zona libre de los otros dos supermodos, permitiendo que el efecto de la saturación le afecte menos. En rasgos generales, se puede ver además que la ganancia total disminuye al tener en cuenta la propagación a lo largo de la misma distribución de densidad de población de iones dopantes.

#### 4.3.3. Batidos de la potencia y propagación de campo.

Hasta ahora se ha considerado que la evolución de la señal óptica podía obtenerse propagando las potencias en el medio activo. No obstante, en algunas estructuras se busca una falta de simetrías o inhomogeneidades que pueden hacer necesario propagar el campo electromagnético. Hasta la fecha existen escasos artículos [30, 31] en los que se mencione la importancia del trasvase de potencia entre núcleos para la correcta modelización de la evolución de la señal.

A continuación vamos a estudiar la diferencia a la hora de propagar potencias o campos en

una estructura que permita observar desigualdades en el comportamiento. Vamos a partir de una guía con dos núcleos con diferente tamaño e índice de refracción, en la cual únicamente uno de los dos va a estar dopado. Debido a que la estructura tiene dos núcleos, y suponiendo que ambos son monomodo individualmente, la guía va a contar con dos supermodos. Al excitar únicamente uno de los dos tendremos una cierta componente de cada supermodo, por lo que el perfil de intensidad no se mantendrá constante sino que irá oscilando. En este caso simple, la oscilación se dará de tal forma que habrá un trasvase de potencia de un núcleo a otro conforme avanza en la dirección de propagación. Al propagar la potencia de los supermodos individualmente, estos no van a recoger información sobre cuál de los dos núcleos es el dopado, y al expresar la señal en función de los supermodos y su ganancia individual no se va a poder ver nada que indique que únicamente uno de los dos núcleos está dopado. Si nos olvidamos de la propagación de las potencias de los supermodos y nos fijamos en la evolución de la señal, teniendo en cuenta el trasvase de potencia entre núcleos, es de esperar que cuando la intensidad se encuentra principalmente en el núcleo dopado la potencia aumente en mayor medida que cuando la intensidad se encuentre principalmente en el núcleo sin dopar, por lo que en la evolución de la potencia total debería de reflejarse en una cierta variación periódica.

Con el fin de calcular la propagación activa teniendo en cuenta la evolución del campo complejo, se calcula la distribución de la potencia en cada paso. Es decir, en la ecuación (56) la distribución normalizada va a pasar a depender también de la dirección de propagación  $z$ :

$$P(x, y, z, t) = P(z, t) \cdot \psi(x, y, z), \quad (65)$$

donde la distribución de intensidad normalizada se obtiene calculando el vector de Poynting de la suma de la propagación de los campos de los supermodos:

$$\mathbf{S}(x, t, z) = \mathbf{E}(x, y, z) \times \mathbf{H}(x, y, z). \quad (66)$$

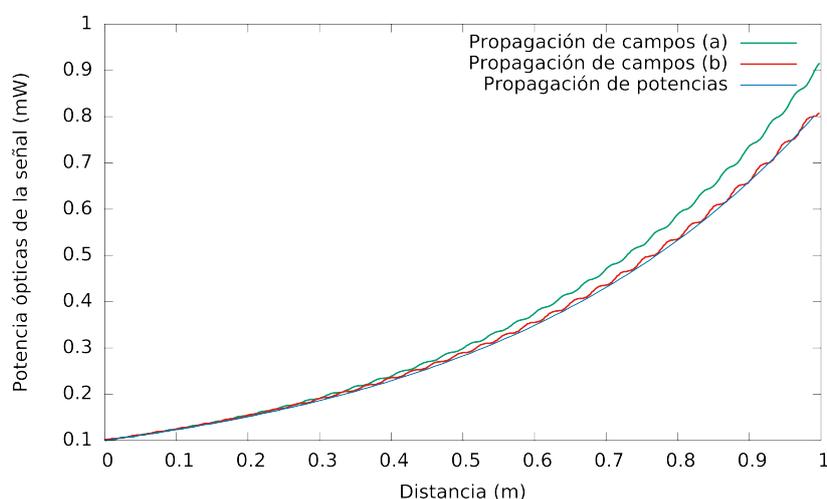


Figura 10: Evolución de la potencia óptica total obtenida propagando campos, teniendo en cuenta la potencia de cada modo (a) o sin tenerla en cuenta (b) para calcular el perfil de intensidad, o propagando potencias.

Ahora bien, hay dos formas de calcular este perfil de intensidad. En la mayor parte de la literatura nos encontramos con que a la hora de calcular esta distribución de intensidad no se tiene en cuenta el factor de ganancia de cada supermodo, es decir, únicamente se propaga la distribución transversal multiplicada por la exponencial compleja que lleva la fase. Por lo tanto,

los campos eléctrico y magnético vendrán dados por

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sum_j \mathbf{e}_j(x, y) \cdot e^{i\beta_j z} \quad \text{y} \quad \mathbf{H}(x, y, z) = \sum_j \mathbf{h}_j(x, y) \cdot e^{i\beta_j z}, \quad (67)$$

y la distribución total de intensidad va a repetir el mismo patrón de forma periódica en su propagación. No obstante, la realidad es que dicha distribución de intensidad debería de verse afectada por la posibilidad de que los modos tengan ganancias diferentes y, como consecuencia, estos adquieran diferente grado de importancia en el perfil de intensidad. En este caso, los campos eléctrico y magnético vendrán dados por

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \sum_j g_j(z) \cdot \mathbf{e}_j(x, y) \cdot e^{i\beta_j z} \quad \text{y} \quad \mathbf{H}(x, y, z) = \sum_j g_j(z) \cdot \mathbf{h}_j(x, y) \cdot e^{i\beta_j z}, \quad (68)$$

donde  $g_j(z)$  recoge la información sobre la potencia de cada supermodo. Siempre teniendo en cuenta que la distribución de intensidad a solapar con la zona dopada y bombeada ha de estar correctamente normalizada. De esta forma estamos teniendo en cuenta el batido de potencia que se produce entre los dos núcleos para calcular el incremento de potencia conforme se propaga la señal. En la figura 10 se puede observar la comparación de la potencia total propagando campos y propagando potencias. Como podemos observar, en la propagación del campo aparece el rizado esperado, al contrario que en la propagación de las potencias. En el caso en el que no se tiene en cuenta la ganancia de cada supermodo para calcular la intensidad, tanto la evolución como el resultado final resulta ser muy similar. No obstante, al tenerlo en cuenta sí que es posible ver como tiende a evolucionar de forma notablemente diferente, alcanzando una diferencia de aproximadamente 1dB en un metro.

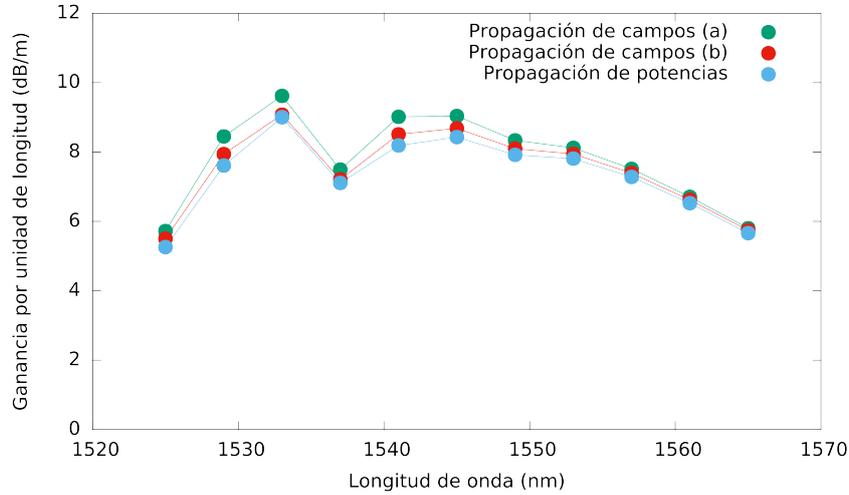


Figura 11: Espectro de ganancia de una fibra con dos núcleos asimétricos en condición de ‘phase-matching’ para 1533 nm, con uno de los núcleos dopado con erbio. Comparación entre propagación de campo, teniendo en cuenta la potencia de cada modo (a) o sin tenerla en cuenta (b) para calcular el perfil de intensidad, y la propagación de potencia.

Esta evolución depende de la longitud de batido, es decir, del periodo espacial con el que la potencia oscila entre los diferentes núcleos, por lo que cabe esperar que el comportamiento varíe cuando esta frecuencia de batido cambie. Para estudiar esta posibilidad se puede variar la longitud de onda de la señal que se propaga por la guía de onda, haciendo que tanto el perfil modal como las constantes de propagación de los dos supermodos se vean modificadas. Con este objetivo, se aprovecha para presentar una de las aplicaciones mencionadas: un amplificador

de fibra dopada con erbio con ganancia ecualizada. Consiste en una fibra óptica de dos núcleos asimétricos acoplados, uno de los cuales está dopado. El tamaño y el índice de refracción de estos núcleos se elige de tal forma que el máximo trasvase de potencia entre ambos, conocido como ‘phase matching’, se de para la longitud de onda del pico de máxima emisión del erbio. La señal se inyecta por el núcleo dopado, en donde se va a ver amplificada, pero oscila al núcleo sin dopar. Cuanto mayor sea el trasvase de potencia entre ambos núcleos, mayor parte del camino se va a encontrar la señal en el núcleo sin dopar y, como consecuencia, se va a ver menos amplificada. Es por esto que se elige el máximo trasvase de potencia en el pico de máxima emisión del erbio, con el fin de reducir la ganancia en esta frecuencia, pero manteniendo la ganancia máxima en las frecuencias alejadas de la condición de ‘phase matching’. En la figura 11 se puede observar el espectro de ganancia de la estructura comentada, en donde la ganancia en el pico de emisión del erbio se ha reducido. Las tres curvas permiten observar las diferencias a la hora de modelizar la evolución de la señal propagando campos o potencias.

#### 4.3.4. Dependencias con la variación longitudinal del factor de ganancia.

En la introducción de este capítulo se mencionaba que el análisis de los supermodos mediante la teoría de modos acoplados, de tal manera que se puedan obtener resultados analíticos, nos permite entender mejor el comportamiento de estos. Volviendo al esquema de los dos núcleos presentado en el apartado 4.2.1, una vez conocidos los parámetros  $A(z)$  y  $B(z)$  podemos expresar la ecuación (36) un función de dos supermodos de la forma

$$\Psi_{s,a}(x, y, z) = \psi_{s,a}(x, y)e^{i\beta_{s,a}z}, \quad (69)$$

donde los subíndices  $s$  y  $a$  hacen referencia al supermodo simétrico y antisimétrico respectivamente, y los perfiles vienen dados por [11]:

$$\psi_{s,a}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{a + \bar{b}_{s,a}^2}}[\psi_1(x, y) + \bar{b}_{s,a}^2\psi_2(x, y)], \quad (70)$$

donde

$$\bar{b}_{s,a} = \frac{\beta_{s,a} - \beta_1}{k_{12}}, \quad (71)$$

siendo  $\beta_{s,a}$  las constantes de propagación de cada uno de los supermodos, que viene dada por la expresión

$$\beta_{s,a} = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\beta_1 - \beta_2)^2 + 4k^2}, \quad \text{con } k = \sqrt{k_{12}k_{21}}. \quad (72)$$

En esta expresión, las constantes de propagación de los modos individuales,  $\beta_1$  y  $\beta_2$ , así como las constantes de acoplamiento,  $k_{12}$  y  $k_{21}$ , se mantienen constantes en la dirección de propagación. Sin embargo, si suponemos, como en el apartado anterior, que uno de los dos núcleos está dopado; la constante de uno de estos núcleos (suponemos el núcleo 1) va a tener una parte compleja  $\beta_1 \leftarrow \beta_1 + i\gamma_1$ . En el caso de tener el núcleo dopado con iones de erbio el coeficiente de ganancia viene dado por [11]:

$$\gamma_1(\lambda, z) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^R (\sigma_e(\lambda)N_2(r, z) - \sigma_a(\lambda)N_1(r, z))\psi_1^2(r) r dr \right] \quad (73)$$

Aquí podemos ver que el coeficiente de ganancia  $\gamma_1$  depende de  $z$ , por lo que las constantes de propagación de los supermodos también tendrán esta dependencia, así como las constantes  $\bar{b}_s$  y  $\bar{b}_a$ . Esto significa que el perfil de los supermodos no se va a mantener constante, sino que va a evolucionar conforme se propaga,  $\psi_{s,a}(x, y) \rightarrow \psi_{s,a}(x, y, z)$ . Ahora bien, tanto para el formalismo de modelización como para las diversas aplicaciones, se espera que los supermodos no cambien conforme se propagan, por lo que conviene ver hasta que punto la variación del factor de ganancia influye en los supermodos.

El coeficiente de ganancia va a ser, en general, alto al principio, cuando el bombeo es máximo; e irá disminuyendo su valor conforme se absorbe el bombeo, llegando al valor mínimo que se busca en la longitud óptima de bombeo, donde la guía deja de amplificar por falta de potencia de bombeo. La idea es comparar la influencia de la variación del coeficiente de ganancia al inicio de la guía con el final de esta. El coeficiente de ganancia inicial será mayor cuanto mayor sea la potencia de bombeo y la concentración de dopante, por lo que, dentro de los valores típicos, buscamos ver su repercusión.

Cuando hablamos de fibra óptica, solemos encontrar concentraciones de iones de erbio de órdenes entre  $2 \cdot 10^{24} - 2 \cdot 10^{25}$  iones/m<sup>3</sup>. En cuanto a las potencias de bombeo, los valores máximos suelen estar en unas pocas centenas de mW. Para el caso tomado como ejemplo, con una concentración de  $2 \cdot 10^{25}$  y 300 mW de potencia de bombeo, el factor de ganancia llega a alcanzar un valor máximo de  $\gamma_{max} = 4 \text{ m}^{-1}$  y un valor mínimo de  $\gamma_{min} = 1,5 \text{ m}^{-1}$ , como se puede ver en la figura 12.

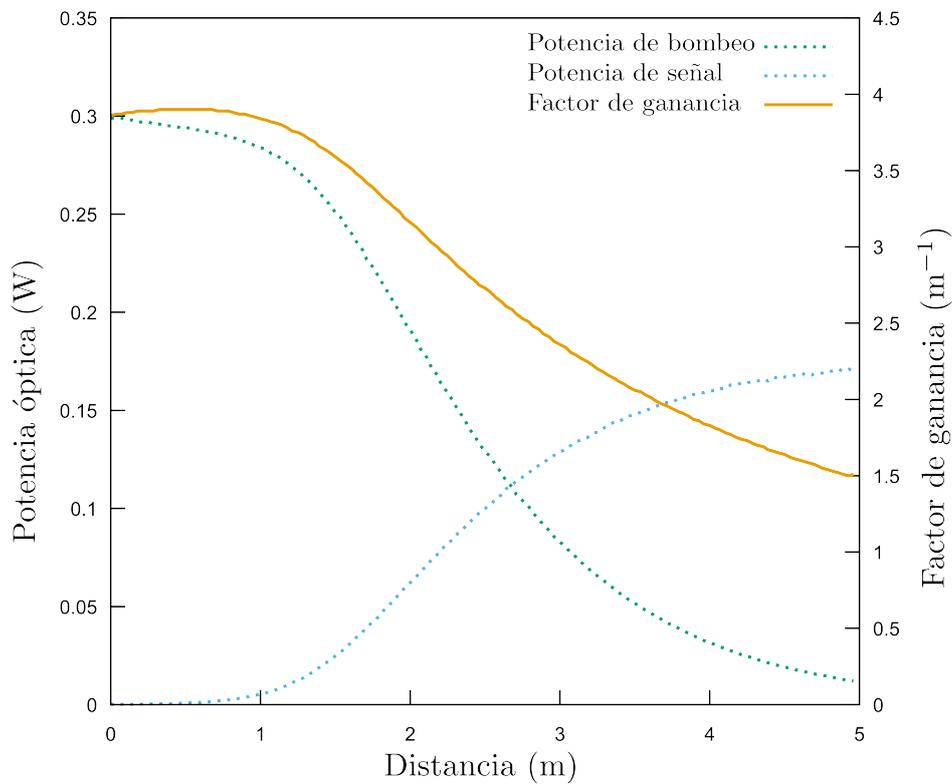


Figura 12: Evolución de las potencias ópticas de bombeo y señal, y del factor de ganancia a lo largo de la dirección de propagación.

El parámetro a estudiar:  $\bar{b}_{s,a}^2$ , que balancea el peso de cada distribución modal de los núcleos individuales en la distribución de los supermodos, depende de varios parámetros. En el estudio realizado, se ha visto que el impacto que tiene la variación del factor de ganancia depende fuertemente de otros parámetros como la diferencia entre las constantes de propagación  $\beta_2 - \beta_1$ , o el valor de los coeficientes de acoplamiento  $k_{12}$  y  $k_{21}$ . Así pues, cuando las constantes de propagación son iguales, se anula uno de los términos que varía con la distancia de propagación y la distribución de los supermodos se mantiene constante. En el caso en el que las constantes de propagación son diferentes, la variación del parámetro a estudiar solo se hace significativa cuando los núcleos están débilmente acoplados. Teniendo en cuenta esto, se ha buscado una situación en la que la variación del parámetro bajo estudio sea significativa. No obstante, aquí solo se pretende ilustrar un caso concreto en el que la variación en el factor de ganancia, provocada por

una alta concentración de iones de erbio y potencia de bombeo, repercute de forma significativa en la variación del perfil de intensidad de los supermodos de la estructura. Para un estudio más detallado haría falta realizar un análisis paramétrico exhaustivo y en un mayor número de geometrías. Este concepto abre un nuevo campo de estudio que podría ser de gran importancia en el estudio de los supermodos. En la aplicación del ecualizador espectral de ganancia comentada en el apartado 4.3.3, la diferencia entre las constantes de propagación de los modos de cada uno de los núcleos individuales aumenta conforme nos alejamos de la condición de ‘*phase matching*’. Fijándonos en este ejemplo se han seleccionado los siguientes valores del índice efectivo del modo fundamental de cada núcleo individual:  $n_{ef1} = 1,44740$  y  $n_{ef2} = 1,44725$ . En cuanto al coeficiente de acoplamiento, hemos hecho una aproximación al suponer  $k_{12} = k_{21} = k$ , y hemos analizado la influencia de este coeficiente en el parámetro  $\bar{b}_{s,a}^2$ , dentro de los rangos lógicos que puede tomar. En la figura 13 se puede observar el valor que toma este parámetro conforme varía el factor de ganancia, es decir, a lo largo de la dirección de propagación, para diferentes valores del coeficiente de acoplamiento. Concretando en un ejemplo, para un valor  $k = 2000$ , la variación en  $\bar{b}_{s,a}^2$  provocada por la variación del factor de ganancia entre  $\gamma_{max} = 4$  y  $\gamma_{min} = 1,5$  es aproximadamente de un 5 %.

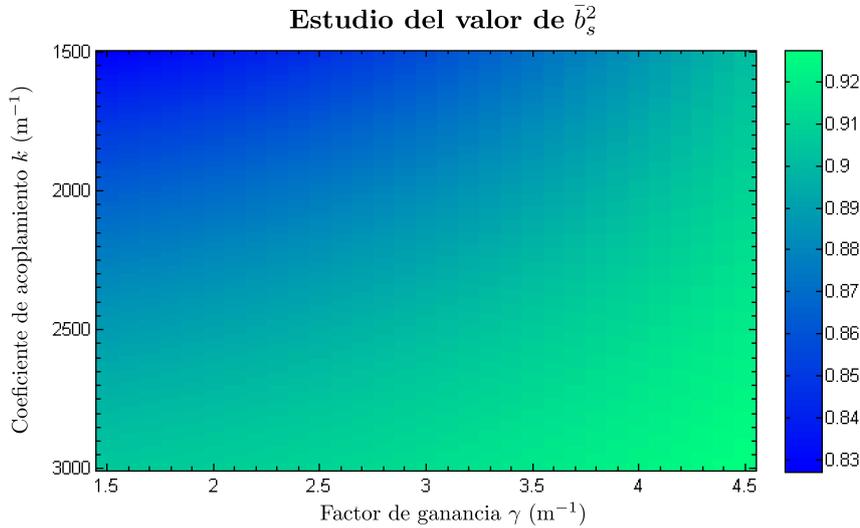


Figura 13: Evolución del valor de  $\bar{b}_s^2$  conforme varía el factor de ganancia  $\gamma$  para diferentes valores del coeficiente de acoplamiento  $k$ .

#### 4.4. Aplicación a estructuras multinúcleo integradas.

En el campo de las guías integradas existen diversas consideraciones a tener en cuenta en cuanto a la modelización de estructuras multinúcleo. Por una parte, las guías integradas tienen una alta concentración de dopante, del orden de  $10^{26}$  iones/m. Este hecho puede hacer que el factor de ganancia varíe suficiente como para tener en cuenta la posibilidad de que la distribución de los supermodos no se mantenga constante, tal y como hemos visto en la sección 4.3.4. Por otra parte, en general todo el vidrio va a estar dopado, por lo que hace falta tener en cuenta la absorción de la señal en las zonas que se encuentran dopadas pero no están siendo bombeadas. Por último, con respecto al proceso de escritura directa de guías de onda en vidrios mediante láser de femtosegundos, es posible conseguir que se produzca una variación positiva del índice de refracción con respecto a su entorno que permite crear una guía de onda en el interior del material. Esta variación positiva del índice viene acompañada de una variación negativa del índice en una zona adyacente a esta, modificando ligeramente el perfil del modo de la guía. Este perfil del índice de refracción se puede ver en la imagen 14. Además, el proceso de escritura

también puede modificar ligeramente la concentración de dopado en la guía, permitiendo así obtener guías multinúcleo con dopados inhomogéneos en los que puede ser necesario utilizar el formalismo de propagación de campos expuesto en la sección 4.3.3.

Este trabajo se ha desarrollado dentro de un proyecto en el cual se colabora con el Grupo de Procesado por Láser del CSIC de Madrid, siendo una de las líneas de investigación de este grupo la escritura directa de guías de onda en vidrios con láser de femtosegundos. Una de las colaboraciones con este grupo ha consistido en entender la importancia de esta zona de índice negativo en el perfil del modo guiado, así como las limitaciones que impone sobre estructuras multinúcleo. Las connotaciones clave son dos: por un lado los modos de la guía individual van a verse afectados por la zona de índice deprimido. Esta influencia se verá más o menos agravada según el modo esté más o menos confinado. Por otra parte, crea una restricción importante en cuanto a las geometrías que pueden llevarse a cabo, dado que los núcleos ya no pueden juntarse hasta estar colindantes, sino que será la zona de índice deprimido la que delimitará el máximo acercamiento entre guías individuales.

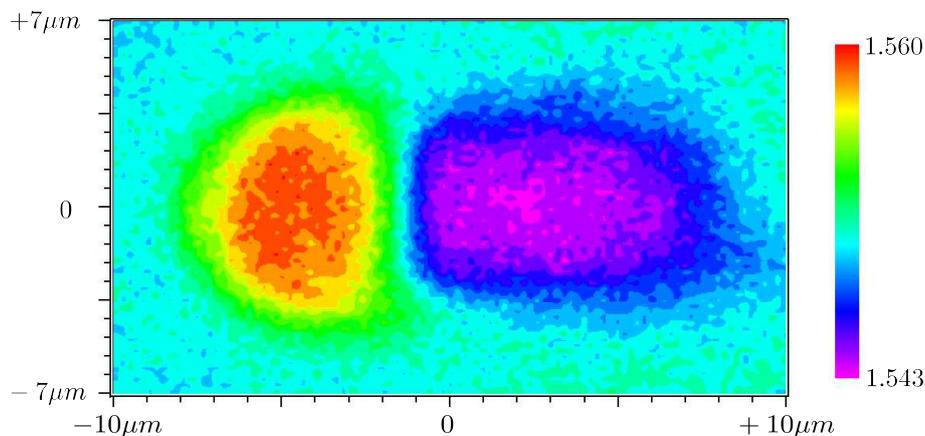


Figura 14: Perfil de índice de una guía inscrita en un vidrio mediante un láser de femtosegundos. Los colores hacen referencia al valor del índice de refracción del material, siendo el más bajo el de la zona de índice deprimido, y el más alto el del núcleo de la guía.

Gracias a la colaboración con el Grupo de Procesado por Láser (GPL) del CSIC de Madrid, es posible inscribir guías con las estructuras estudiadas para su consiguiente caracterización experimental. En los últimos meses se ha intensificado la colaboración entre ambos grupos y, a día de hoy, están comenzando a escribir las primeras guías integradas multinúcleo, con el objetivo de poder caracterizar su comportamiento en el grupo de fibras y guías activas de la universidad. Además, en la literatura se encuentran dos técnicas de caracterización experimental: por un lado se recogen las distribuciones de intensidad con una cámara y se tratan por ordenador mediante diversas técnicas de imagen, mientras que por otro lado, un nuevo método utiliza hologramas generados por ordenador (CGHs) para descomponer espacialmente las componentes de cada modo en tiempo real. Por el momento no existe ningún estudio comparando ambas técnicas experimentales. La colaboración con el Grupo de Holografía de la Universidad de Zaragoza, en la asignatura de prácticas externas de este máster, ha hecho posible diseñar el montaje necesario para caracterizar experimentalmente las señales de las estructuras complejas mediante CGHs, para compararlo con el método tradicional de tratamiento de imágenes, mediante una cámara de visión en el infrarrojo cuyo montaje se está realizando en estos momentos.

## 5. Conclusiones.

Este trabajo comenzó como una incursión en el mundo de las guías de onda con múltiples núcleos en medios activos. Se buscaba comprender el acoplamiento que surge entre diferentes núcleos y cómo influye en la propagación de las señales ópticas en un medio dopado, para posteriormente modelizarlo. Además, nos encontrábamos ante una búsqueda más amplia de ventajas de las estructuras con respecto a otro tipo de guías, de sus posibilidades en cuanto a aplicaciones, así como de posibles efectos a tener en cuenta que no se encontrasen aun plasmados en la literatura a día de hoy.

Se podría decir que la columna vertebral de este trabajo ha sido implementar la posibilidad de propagar supermodos mediante el formalismo de propagación de potencias ópticas acoplado con las ecuaciones de densidades de población. Formalismo en el cual el grupo de fibras y guías activas de la Universidad de Zaragoza tiene una amplia experiencia. Los inicios del trabajo vinieron marcados por una búsqueda bibliográfica sobre guías multinúcleo, la cual se ha tratado de plasmar de forma resumida en la introducción; aunque la revisión de la literatura ha estado presente a lo largo de todo el proceso hasta el día de hoy. De la mano de implementar la propagación de las potencias de los supermodos en el medio activo, vino la búsqueda de aplicaciones con el objetivo de cerciorarnos del correcto funcionamiento del código así como de optimizar diversas estructuras. Fue tras reproducir algunas aplicaciones cuando decidimos ir más allá de la propagación de las potencias de los supermodos que está presente en la literatura actual, para estudiar con mayor detalle la necesidad de propagar el campo complejo. Se ha visto que la manera de tratar la evolución del campo en la literatura no provoca diferencias notables con la propagación de potencias, más allá de la aparición de un rizado bajo ciertas condiciones. No obstante, la propuesta realizada en este trabajo sí que muestra diferencias notables con respecto a la propagación de potencias. Este estudio también nos permitió darnos cuenta de la posibilidad de que los supermodos no se mantengan constantes a lo largo de la dirección de propagación; hecho que, hasta donde hemos visto, no se había considerado en la literatura actual.

Por lo tanto, a nivel del grupo de fibras activas, se ha implementado la posibilidad de que las guías de onda consten de varios núcleos acoplados; y, a nivel de la literatura actual, se han obtenido resultados de propagación de supermodos de la misma forma que está presente en los artículos más actuales, y se ha tratado de ir un paso más allá en cuanto a la comprensión de factores, como la falta de simetría o inhomogeneidad, que hacen que la propagación de potencias no sea suficientemente precisa. Además, hemos encontrado que, bajo ciertas condiciones, la distribución transversal de los supermodos no se mantiene constante a lo largo de la dirección de propagación, pese a que la guía sí que lo sea. Este fenómeno ha despertado suficiente interés como para que su estudio haya sido aceptado para participar en el congreso 38th PIERS (Progress In Electromagnetics Research Symposium) en San Petersburgo.

El trabajo realizado hasta la fecha pretende servir de base para un estudio más profundo. Se ha visto que la literatura de las guías de onda multinúcleo está centrada principalmente en fibras, dejando abierta la posibilidad de estudiar con más detalle las guías integradas para ver diferencias en el comportamiento y por tanto en la modelización. Por otra parte, se está trabajando en mejorar y optimizar estructuras que sirvan para aplanar el espectro frecuencial en ganancia, añadiendo nuevo núcleos con diferentes acoplamientos entre ellos. La modelización de este tipo de estructuras se expuso en las VII Jornadas de Jóvenes Investigadores de Química y Física de Aragón. Teniendo claro el impacto de la forma de la estructura y de la distribución de dopante en la propagación de la señal, se abre un mundo de posibles geometrías a tratar.

Para finalizar, el estudio desarrollado hasta ahora, en el marco de este trabajo, ha sido puramente teórico. No obstante, gracias a la colaboración con el Grupo de Procesado por Láser del CSIC de Madrid y con el Grupo de Holografía de la Universidad de Zaragoza, se pretende comparar los dos métodos de caracterización experimental que se encuentran en la literatura con el fin de que las bases teóricas expresadas en este trabajo a día de hoy puedan ser puestas a prueba en un futuro no muy lejano.

## Referencias

- [1] Moritz M Vogel, Marwan Abdou-Ahmed, Andreas Voss, and Thomas Graf. Very-large-mode-area, single-mode multicore fiber. *Optics letters*, 34(18):2876–2878, 2009.
- [2] John M Fini. Large-mode-area multicore fibers in the single-moded regime. *Optics express*, 19(5):4042–4046, 2011.
- [3] Axel Schulzgen, James Anderson, Clemence Jollivet, Amy Van Newkirk, Kay Schuster, and Stephan Grimm. Multi-core fiber lasers. In *Laser Science*, pages LTu2H–2. Optical Society of America, 2015.
- [4] Zhou Pu, Wang Xiao-Lin, Ma Yan-Xing, Ma Hao-Tong, Xu Xiao-Jun, and Liu Ze-Jin. Beam quality and power scalability of various multicore fiber lasers. *Chinese Physics Letters*, 26(8):084205, 2009.
- [5] Emmanuel B Desurvire. Capacity demand and technology challenges for lightwave systems in the next two decades. *Journal of Lightwave Technology*, 24(12):4697–4710, 2006.
- [6] René-Jean Essiambre, Gerard Foschini, Peter Winzer, and Gerhard Kramer. Capacity limits of fiber-optic communication systems. In *Optical Fiber Communication Conference*, page OThL1. Optical Society of America, 2009.
- [7] Andrew Chralyvy. Plenary paper: The coming capacity crunch. In *2009 35th European Conference on Optical Communication*, pages 1–1. IEEE, 2009.
- [8] Kunimasa Saitoh and Shoichiro Matsuo. Multicore fiber technology. *Journal of Lightwave Technology*, 34(1):55–66, 2016.
- [9] Yasuo Kokubun and Masanori Koshiba. Novel multi-core fibers for mode division multiplexing: proposal and design principle. *IEICE Electronics Express*, 6(8):522–528, 2009.
- [10] Ping Wang, Guanghua Cheng, Ruimin Yi, Xin Liu, Tao Shang, Zhansheng Wang, and Lixin Guo. Theoretical and experimental study of 37-core waveguides with large mode area. *Applied optics*, 52(33):7981–7986, 2013.
- [11] Jyoti Anand, Jagneet Kaur Anand, and Enakshi K Sharma. Gain flattening in erbium doped fiber amplifiers by use of a coaxial fiber. *Session 4A1 Fiber Optics, Optical Sensors*, page 764, 2012.
- [12] Shigang Zhao, Xue Wang, and Libo Yuan. Four-core fiber-based bending sensor. *Frontiers of Optoelectronics in China*, 1(3-4):231–236, 2008.
- [13] Nemanja Jovanovic, Izabela Spaleniak, Simon Gross, Michael Ireland, Jon S Lawrence, Christopher Miese, Alexander Fuerbach, and Michael J Withford. Integrated photonic building blocks for next-generation astronomical instrumentation i: the multimode waveguide. *Optics Express*, 20(15):17029–17043, 2012.
- [14] Izabela Spaleniak, Nemanja Jovanovic, Simon Gross, Michael J Ireland, Jon S Lawrence, and Michael J Withford. Integrated photonic building blocks for next-generation astronomical instrumentation ii: the multimode to single mode transition. *Optics express*, 21(22):27197–27208, 2013.
- [15] Allan W Snyder and John Love. *Optical waveguide theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [16] C Randy Giles and Emmanuel Desurvire. Modeling erbium-doped fiber amplifiers. *Journal of lightwave technology*, 9(2):271–283, 1991.

- [17] C Randy Giles and Emmanuel Desurvire. Modeling erbium-doped fiber amplifiers. *Journal of lightwave technology*, 9(2):271–283, 1991.
- [18] Victor Berdejo Arceiz. *Estudio y desarrollo de amplificadores y láseres basados en fibras de cristal fotónico y guías integradas escritas con láser con aplicación como sensores*. PhD thesis, Universidad de Zaragoza, 2013.
- [19] Rsoft cad environment product overview. <https://optics.synopsys.com/rsoft/rsoft-cad-environment.html>. Accessed: 2017-02-06.
- [20] Govind P Agrawal. *Nonlinear fiber optics*. Academic press, 2007.
- [21] Wenhua Ren, Zhongwei Tan, and Guobin Ren. Analytical formulation of supermodes in multicore fibers with hexagonally distributed cores. *IEEE Photonics Journal*, 7(1):1–11, 2015.
- [22] Cen Xia, Neng Bai, Ibrahim Ozdur, Xiang Zhou, and Guifang Li. Supermodes for optical transmission. *Optics express*, 19(17):16653–16664, 2011.
- [23] Arash Mafi and Jerome V Moloney. Shaping modes in multicore photonic crystal fibers. *IEEE photonics technology letters*, 17(2):348–350, 2005.
- [24] Yibo Zheng, Jianquan Yao, Lei Zhang, Yuan Wang, Wuqi Wen, Rui Zhou, Zhigang Di, and Lei Jing. Supermode analysis in multi-core photonic crystal fiber laser. In *Photonics Asia 2010*, pages 784316–784316. International Society for Optics and Photonics, 2010.
- [25] Sercan Ö Arik and Joseph M Kahn. Coupled-core multi-core fibers for spatial multiplexing. *IEEE Photonics Technology Letters*, 25(21):2054–2057, 2013.
- [26] Chunying Guan, Libo Yuan, Qiang Dai, and Fengjun Tian. Supermodes analysis for linear-core-array microstructured fiber. *Journal of Lightwave Technology*, 27(11):1741–1745, 2009.
- [27] Junhe Zhou. Analytical formulation of super-modes inside multi-core fibers with circularly distributed cores. *Optics express*, 22(1):673–688, 2014.
- [28] Ajoy Ghatak and K. Thyagarajan. *An Introduction to Fiber Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, 006 1998.
- [29] N Kishi and E Yamashita. A simple coupled-mode analysis method for multiple-core optical fiber and coupled dielectric waveguide structures. In *Microwave Symposium Digest, 1988.*, *IEEE MTT-S International*, pages 739–742. IEEE, 1988.
- [30] Simon Akhtari and Peter M Krummrich. Impact of mode beating effects in optical multi-mode amplifiers for space division multiplexing. *IEEE Photonics Technology Letters*, 25(24):2482–2485, 2013.
- [31] EE Leong Lim, Qiongyue Y Kang, Mindaugas Gecevicius, Francesco Poletti, Shaif-ul Alam, and David J Richardson. Vector mode effects in few moded erbium doped fiber amplifiers. In *Optical Fiber Communication Conference*, pages OTu3G–2. Optical Society of America, 2013.