

# Sistemas Complejos: Estudio de modelos para la distribución del dinero



**Gorka Labata Lezaun**  
Trabajo de fin de grado en Matemáticas  
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Ricardo López Ruiz  
6 de julio de 2016



# Prólogo

El presente trabajo estudia modelos sobre la distribución del dinero entre la población y los diferentes factores que le afectan. Se recopilan para ello algunos trabajos esenciales sobre la materia desarrollados tanto por matemáticos como por físicos y se respaldan con simulaciones numéricas que corroboran lo mencionado. Todo ello intentando seguir un orden cronológico que nos permite ver el desarrollo del campo que nos concierne, la econofísica.

Tras una breve introducción histórica introduciremos un primer modelo básico, el cual analizaremos de formas distintas, para luego comenzar a introducir modificaciones sobre este. De esta manera, conseguiremos modelizar situaciones más concretas de la vida cotidiana o incluso introducir la posibilidad de préstamos de dinero entre la población.

Cabe destacar que de las tres principales distribuciones sobre las que se centra la econofísica, dinero, salarios y riqueza, únicamente nos centraremos en la primera y pese a que parece que hacen referencia a elementos similares, no todos los resultados válidos para un tipo de distribuciones son válidos para otros. De esta forma, los resultados aquí recogidos no deben ser extrapolados a las otras distribuciones sin justificación previa.

La mayoría de los cálculos se desarrollarán en el propio trabajo para facilitar su seguimiento, salvo en ciertos casos en los que el desarrollo completo de los cálculos distraería al lector del hilo principal de la demostración.

Las simulaciones se han obtenido mediante programación en C++ y no se han incluido los programas por el carácter informal de estos.



# Resumen

Along the centuries, philosophers and politicians have been worried about wealth. They were worried about its growth but, specially, about its distribution and developed many different models and solutions for it. However, scientists did not care about it until statisticians started to accumulate data about the wealth of the population. That was the first meeting between science and wealth distribution. Later on, in the 80's, the computers development allowed financial workers to save big amounts of data and that made them hire physicists and mathematicians to handle it. They started making models just to predict the market but, little by little, they continued focusing on many different objectives. The field become wider until, finally, they considered again the problem of wealth distribution. With a deeper knowledge on physics and mathematics than the first statisticians, they applied models developed on physics to the problems they met. That engender *econophysics*.

In particular, for the case we are concerned, they started to use gas-type models. They considered agents on the market as particles interacting in a gas. Those particles collide and, in each collision, exchange energy. In a similar way, agents interact in pairs exchanging money. Depending on the rules of the procedure different models are proposed taking into consideration saving propensity, loans, the amount of money each agent trade or even how the agents relate with the others. These models could be expressed just as exchange laws, as functional between probability spaces, as stochastic functions...

In this work, we will focus on models in which the amount of money exchanged is random. The first model we will consider is the one that fulfills the following law: Let us randomly choose 2 agents,  $j$  and  $i$ , and let  $m_j$  and  $m_i$  be the the amount of money they own respectively at the beginning of the trade and  $m'_j$ ,  $m'_i$  the amount they have at the end. Let  $\varepsilon$  be a random number.

$$m'_j = \varepsilon(m_j + m_i) \quad m'_i = (1 - \varepsilon)(m_j + m_i)$$

By computer simulations, we can see how this model converges to an exponential distribution, independently of the initial distribution. We can also formulate it as a functional between probability spaces in the following way:

$$p_{t+1}(x) = \mathcal{T}(p_t)(x) = \int \int_{S(x)} \frac{p_t(u)p_t(v)}{u+v} dudv$$

where  $S(x) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u > 0, \quad v > 0 \quad u + v > x\}$ . By very different results, using Laplace transforms, results on integrals, on probability distributions and measures, it will be shown that this functional, and therefore the succession of exchanges, converges to the Boltzmann factor, an exponential probability distribution. We will also reach this result from geometry, considering equiprobability on the N-hyperplane  $\{(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1 + x_2 + \dots + x_N = E\}$  with  $E$  the total amount of money.

This exponential distribution matches with the empiric results observed on the wealth and income distributions and also satisfies an interesting property: Although there is a big mass of agents with small money, it also has more than a 50% of rich and medium class agents, what could help to make the society generated "politically stable".

However, this model does not take in consideration an important fact. On its pursuit of generality, the last model forgets that many of the exchanges are not undirected. When we go to the supermarket to buy food, we always pay for the products we buy, and not sometimes pay and sometimes get paid for it. The next model considers this, and it is call a directed model: Let us first choose, from the population,

the agent who will win the money and call it the agent  $j$ , the loser agent will be  $i$ . Let  $\varepsilon$  be a random number. The transaction law is:

$$m'_j = \varepsilon m_i + m_j \quad m'_i = (1 - \varepsilon)m_i$$

A functional formula can be found for this last model by considering 2 equal copies of the population from which we extract the loser and the winner of the trade. Thus:

$$p_{t+1}(x) = \mathcal{F}(p_t)(x) = \frac{1}{2} \int_{u>x} \frac{p_t(u)}{u} du + \frac{1}{2} \int \int_{v<x<u+v} \frac{p_t(u)p_t(v)}{u} dudv$$

Following similar steps to the first case, it is shown that the model converges to a gamma distribution of parameters  $1/2$  and  $\langle x \rangle$ , with  $\langle x \rangle$  the mean wealth of the system. This new distribution has also an exponential tail, and it still fulfills the condition of having a population of rich and middle class agents of almost 50%.

Another condition to be considered is what happens when borrowing money is allowed. Borrowing would force the model to not maintain the total amount of money but we can develop one with a bounded limit. Back to the first model, we can consider that one of the agents can borrow  $(1 - a)$  times its money (so it will have  $(2 - a)m_j$  money), while the other agent just can lend  $(1 - a)$  times its money, when it is supposed  $a < 1$ . The case  $a > 1$  is symmetric. This leads us to the functional:

$$p_{t+1}(x) = \mathcal{F}(p_t)(x) = \int \int_{(2-a)u+av>x} \frac{p_t(u)p_t(v)}{(2-a)u+av} dudv$$

Note that the total amount of money will be conserved in the limit (the total money will not grow or decrease from the initial amount) since the extra money obtained when the agent who gets the loan is the one with more money will be compensated with the lost produced when the agent who gets the loan is the one with less money.

Although there is no known probability distribution for the limit of the functional, it is proven that it has a heavier tail than the first model and that this tail is heavier as the number  $a$  gets further from 1 at both sides, but without reaching it, something that can also be checked by computer simulations. For the case  $a = 1$  we are in the first model again.

In the last chapter, we will focus on the distribution of money of the richest man. By giving general conditions valid for any of the distributions studied before, we will give this distribution in terms of the wealth distribution. We will model this situation as the maximum of  $n$  samples taken from the wealth distribution. We will also study the maximum to conclude that the many samples we take to find the maximum, the richest agent becomes still richer at each new iteration.

# Índice general

<b>Prólogo</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>1.</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Primer modelo . . . . .	2
1.2.1. Explicación geométrica . . . . .	2
1.2.2. Explicación funcional . . . . .	3
<b>2.</b>	<b>9</b>
2.1. Un modelo más realista . . . . .	9
2.1.1. Explicación funcional . . . . .	9
2.2. Un modelo con préstamo . . . . .	13
2.3. Un modelo con ahorro . . . . .	16
<b>3.</b>	<b>19</b>
3.1. La distribución del más rico . . . . .	19
<b>Anexos</b>	<b>23</b>
3.2. Anexo I . . . . .	23
<b>Bibliografía</b>	<b>25</b>





# Capítulo 1

## 1.1. Introducción

En los años 80, las grandes firmas financieras de *WallStreet* comenzaron a contratar a físicos y matemáticos para analizar las ingentes cantidades de datos obtenidas debido a la informatización de las bolsas. Durante los años 90, gran cantidad de artículos fueron escritos, proponiendo nuevos modelos sobre el mercado, inspirados o tomados directamente de la física, dando lugar a la econofísica, nombre otorgado por H.E. Stanley en una conferencia en Kolkata. Pronto dejaron de fijarse únicamente en la evolución de los activos financieros, sino que se centraron en las causas del mercado financiero, la distribución de la riqueza. De esta forma plantearon numerosos modelos dando explicación a tal importante hecho [1][2]. Basándose en datos estadísticos V.M.Yakovenko [1] aproxima las distribuciones de riqueza, de dinero y de salario por diversas distribuciones de probabilidad (obviamente escalando). Una de ellas corresponde a la planteada años antes por el mismo y A.Dragulesku [3] en la que se aproxima la distribución del dinero por una distribución exponencial o distribución de Boltzmann-Gibbs basándose en resultados empíricos planteados en [4]. De esta forma, la probabilidad de que, eligiendo una persona al azar en una población, esta posea una riqueza  $x$  será:

$$p(x) = \frac{1}{\langle x \rangle} e^{-x/\langle x \rangle}$$

siendo  $\langle x \rangle$  la cantidad de dinero media de la población.

Obsérvese que, si dividimos a la población dependiendo del dinero que cada uno posea en 3 clases baja (menos de la mitad de dinero que la media), alta (más del doble del dinero medio) y media, esta distribución cumple, pese a la desigualdad en el reparto, que alrededor de un 39,3% de la población pertenece a la clase baja, un 47,2% a la clase media y un 13,5% a la clase alta. Así, una clase media tan amplia (casi la mitad de la población), crearía un modelo social estable y contrario a las revoluciones o, en palabras de Aristóteles: “Una constitución no se consolida sino donde la clase media es más numerosa que las otras dos clases extremas, o por lo menos que cada una de ellas”(Política, libro VI, capítulo 10).

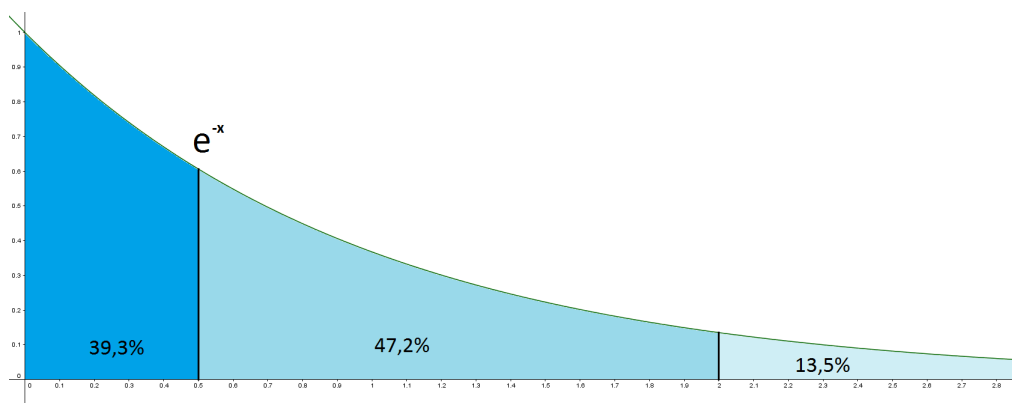


Figura 1.1: Porcentajes de riqueza de cada clase social según el modelo con distribución exponencial.

## 1.2. Primer modelo

Nuestro modelo inicial pues, deberá dar lugar a una distribución de riqueza exponencial. Lo que A.Dragulesku y V.M.Yakovenko [3] proponen es modelizar los intercambios de dinero en una población de  $n$  individuos de la siguiente forma:

- Se eligen aleatoriamente 2 individuos de la población.
- Cada individuo pone sobre la mesa todo su dinero.
- Uno de los 2 individuos, retira una cantidad arbitraria del dinero que hay sobre la mesa y el otro individuo se queda con lo que queda.

Este modelo también se puede formular con la siguiente ley de intercambio:

$$x'_i = \varepsilon(x_i + x_j)$$

$$x'_j = (1 - \varepsilon)(x_i + x_j)$$

Realizando simulaciones de gran cantidad de intercambios de dinero, ambos observaron que la distribución del dinero convergía a una distribución exponencial (ver Figura 1.1).

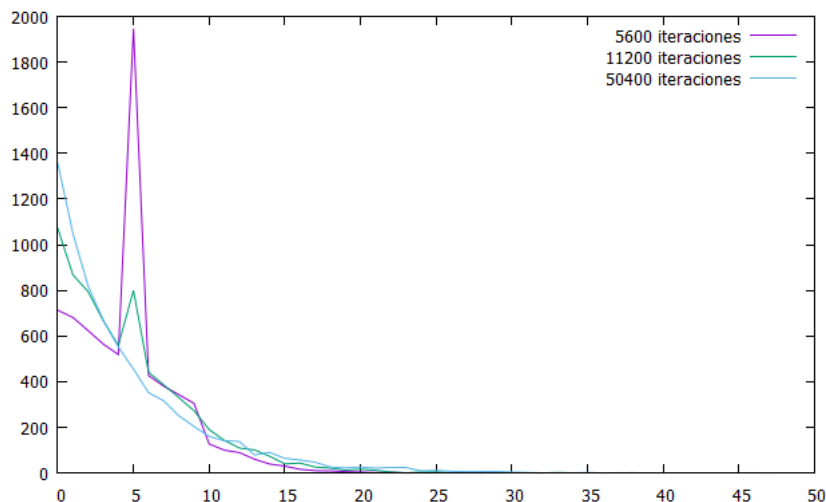


Figura 1.2: Imagen correspondiente a la simulación del modelo utilizando 7000 agentes con una cantidad inicial determinada. El eje vertical representa la cantidad de personas y el eje horizontal el dinero.

### 1.2.1. Explicación geométrica

Más tarde, R.López-Ruiz, J.Sañudo y X.Calbet propusieron una interpretación de la aparición, en el equilibrio, de la distribución exponencial [5]. En ella, proponen considerar el modelo como un espacio  $n$ -dimensional. La coordenada  $x_i$  representa la cantidad de dinero del  $i$ -ésimo agente económico. Suponiendo una cantidad total de dinero constante  $E$ , el sistema evoluciona en la parte positiva del hiperplano:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = E$$

Llamando  $S_n(E)$  a la superficie de  $E$ ,  $\omega_\perp$  al vector perpendicular al hiperplano,  $\omega_\perp = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, 1, \dots, 1)$  y  $e_n$  al  $n$ -ésimo vector de la base canónica, definimos  $\theta_n$  como el ángulo satisfaciendo:

$$\cos\theta_n = \omega_\perp \cdot e_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Proyectamos ahora dicho hiperplano en la dirección  $n$ -ésima, obteniendo un volumen  $(n-1)$ -dimensional,  $V_{n-1}(E)$ , que cumple  $V_{n-1}(E) = S_n(E)\cos\theta_n$  por tratarse de una proyección. Dicha proyección está conformada por los puntos  $x_i \geq 0$  tales que  $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \leq E$ . De esta forma, sabiendo que:

$$V_{n-1}(E) = \frac{E^{n-1}}{(n-1)!}$$

Obtenemos:

$$S_n(E) = \frac{\sqrt{n}E^{n-1}}{(n-1)!}$$

Aplicando el Criterio de Laplace o principio de razón insuficiente, como no sabemos la distribución de probabilidad de  $(x_1, \dots, x_n)$ , consideramos que todos los puntos son equiprobables. De esta forma la probabilidad de encontrar un agente  $i$  con dinero  $x_i$ ,  $f(x_i)dx_i$  es proporcional a la superficie del área de todos los puntos del hiperplano cuya  $i$ -ésima coordenada es  $x_i$ . Al mismo tiempo, para poder ser una distribución de probabilidad se ha de cumplir:

$$\int_0^E f(x_i)dx_i = 1$$

De la igualdad  $\cos^2\theta_n + \sin^2\theta_n = 1$  obtenemos  $\sin\theta_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}$ .

Si el  $i$ -ésimo agente tiene dinero  $x_i$ , los otros  $n-1$  agentes comparten dinero  $E - x_i$ . Llamando  $S_{n-1}(E - x_i)$  a la superficie dada por la ecuación  $x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_n = E - x_i$ . Se puede ver que:

$$S_n(E) = \int_0^E S_{n-1}(E - x_i) \frac{dx_i}{\sin\theta_n}$$

Y así la superficie del hiperplano para la que el área está entre  $x_i$  y  $dx_i$  es proporcional a  $S_{n-1}(E - x_i)dx_i/\sin\theta_n$ . Si normalizamos (dividimos entre el área total) obtenemos:

$$f(x_i) = \frac{S_{n-1}(E - x_i)}{S_n(E)\sin\theta_n} = \frac{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(E - x_i)^{n-2}}{\frac{\sqrt{n}}{(n-1)!}E^{n-1}} \sqrt{\frac{n}{n-1}} = (n-1) \frac{(E(1 - \frac{x_i}{E}))^{n-2}}{E^{n-1}} = (n-1)E^{-1} \left(1 - \frac{x_i}{E}\right)^{n-2}$$

Por tanto, llamando  $\varepsilon$  al dinero medio por agente, tenemos  $E = n\varepsilon$  y tomando el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ :

$$f(x_i) = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{x_i}{n\varepsilon}\right)^{n-2} - \frac{1}{n\varepsilon} \left(1 - \frac{x_i}{n\varepsilon}\right)^{n-2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon} e^{-x/\varepsilon}$$

Que coincide con la función de distribución de la exponencial.

### 1.2.2. Explicación funcional

Otra forma de obtener la distribución exponencial desde una situación fuera del equilibrio sería mediante el modelo propuesto por R.López-Ruiz y estudiado en [6], que se ha denominado *Z - Model*, utilizando funcionales  $\mathcal{T}$ : Supongamos que  $p_m$  es la distribución del dinero en la iteración  $m$ . La probabilidad de que dos agentes con dinero  $u$  y  $v$  interactúen es por tanto  $p_m(u)p_m(v)$  puesto que la elección de los agentes se realiza aleatoriamente y de forma independiente. Una vez que han puesto el dinero sobre la mesa, uno de los dos agentes se lleva una cantidad aleatoria. La cantidad que se lleva sigue una distribución uniforme entre 0 y  $u + v$ . Así, la probabilidad de que tras el intercambio, uno de los agentes termine con dinero  $x < u + v$  es  $p_m(u)p_m(v)/(u + v)$ . Puesto que para obtener dinero  $x$ , nos sirve cualquier par de  $(u, v)$  tales que  $x < u + v$ , la distribución de probabilidad en la iteración  $m + 1$  será:

$$p_{m+1}(x) = \mathcal{T} p_m(x) = \int \int_{u+v>x} \frac{p_m(u)p_m(v)}{u+v} dudv \quad (1.1)$$

La convergencia a la distribución exponencial y su unicidad fué propuesta y verificada en [6] y más tarde demostrada por Guy Katriel [7] de la siguiente forma:

Se define el espacio  $P$  de todas las distribuciones de probabilidad en  $[0, \infty)$  y  $\mathcal{P}_\alpha$  el subespacio de todas las probabilidades con momento de orden  $\alpha$  convergente,  $\mathcal{P}_\alpha = \{p \in \mathcal{P} | M_\alpha(p) < \infty\}$ , siendo  $M_\alpha(p) = \int_0^\infty x^\alpha p(x) dx$ . Denotemos  $p_\omega^*(x) = e^{-x/\omega}/\omega$  con  $\omega$  la media de la distribución  $p_0$  y sean:

$$F_k(x) = \int_0^x p_k(u) du \quad F_\omega^*(x) = \int_0^x p_\omega^*(u) du = 1 - e^{-x/\omega}$$

las funciones de distribución acumuladas de  $p_k$  y  $p_\omega^*$  respectivamente. Veremos que si  $p_k \in \mathcal{P}_\alpha$  con  $\alpha > 1$ , entonces converge en ley a  $p_\omega^*$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x) = F_\omega^*(x) \quad \forall x \geq 0$$

Observemos que (1.1) es siempre finita para todo  $x$  mayor que 0 puesto que:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}p(x) &= \int \int_{u+v>x} \frac{p(u)p(v)}{u+v} dudv \leq \frac{1}{x} \int \int_{u+v>x} p(u)p(v) dudv \leq \frac{1}{x} \int_0^\infty \int_0^\infty p(u)p(v) dudv = \\ &= \frac{1}{x} \|p\|_{L^1}^2 = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

ya que  $p$  es una distribución de probabilidad luego  $\|p\|_{L^1}^2 = 1$ . Comprobemos ahora que  $\mathcal{T}$  va de  $\mathcal{P}_\alpha$  en  $\mathcal{P}_\alpha$  y que conserva la media:

**Lema 1.1.** Si  $\alpha \geq 1$  y  $p \in \mathcal{P}_\alpha$ , entonces:

- $\mathcal{T}(p) \in \mathcal{P}_\alpha$
- $M_1(\mathcal{T}(p)) = M_1(p)$

*Demostración.* Renombrando  $u+v=z$  tenemos:

$$\mathcal{T}p(x) = \int_x^\infty \frac{1}{z} \int_0^z p(u)p(z-u) dudz \quad (1.2)$$

Ahora para cada  $\beta \geq 1$ :

$$\begin{aligned} M_\beta(\mathcal{T}p) &= \int_0^\infty x^\beta \int_x^\infty \frac{1}{z} \int_0^z p(u)p(z-u) dudz dx = \int_0^\infty \frac{1}{z} \int_0^z x^\beta \int_0^z p(u)p(z-u) dudx dz = \\ &= \frac{1}{\beta+1} \int_0^\infty z^\beta \int_0^z p(u)p(z-u) dudz = \int_0^\infty \int_u^\infty \frac{z^\beta p(u)p(z-u)}{\beta+1} dz du = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(u+v)^\beta p(u)p(v)}{\beta+1} dudv \end{aligned}$$

De esta forma, para  $\beta = 0$  obtenemos:

$$\|\mathcal{T}p\|_{L^1}^2 = M_0(\mathcal{T}p) = \int_0^\infty \int_0^\infty p(u)p(v) dudv = \int_0^\infty p(u) du \int_0^\infty p(v) dv = \|p\|_{L^1}^2 = 1$$

y la distribución resultante es también una distribución de probabilidad. Para  $\beta = 1$ :

$$M_1(\mathcal{T}p) = \frac{1}{2} \left[ \int_0^\infty u p(u) \int_0^\infty p(v) dv du + \int_0^\infty v p(v) \int_0^\infty p(u) du dv \right] = M_1(p)$$

Para una  $\beta$  arbitraria (mayor o igual que 1), usando la desigualdad  $(u+v)^\beta \leq 2^{\beta-1}(u^\beta + v^\beta)$  tenemos:

$$\begin{aligned} M_\beta(\mathcal{T}p) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(u+v)^\beta p(u)p(v)}{\beta+1} dudv \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{2^{\beta-1}(u^\beta + v^\beta) p(u)p(v)}{\beta+1} dudv = \\ &= \frac{2^{\beta-1}}{\beta+1} \left[ \int_0^\infty u^\beta p(u) \int_0^\infty p(v) dv du + \int_0^\infty v^\beta p(v) \int_0^\infty p(u) du dv \right] = \frac{2^\beta}{\beta+1} M_\beta(p) \end{aligned}$$

y así  $p \in \mathcal{P}_\alpha$  implica que  $\mathcal{T}(p) \in \mathcal{P}_\alpha$ . □

Como es sabido, se pueden aplicar transformadas de Laplace a probabilidades. Sea  $\hat{p} = \mathcal{L}[p]$  la transformada de Laplace de la distribución  $p$ . Se tiene:

**Lema 1.2.** *Sea  $p$  una distribución de probabilidad en  $[0, \infty)$ . Entonces:*

$$\mathcal{L}[\mathcal{T}(p)](s) = \int_0^1 (\hat{p}(s\varepsilon))^2 d\varepsilon \quad (1.3)$$

*Demostración.* Usando (1.2) tenemos:

$$\mathcal{T}(p)(x) = \int_x^\infty g(z) dz; \quad g(x) = \frac{1}{x} h(x); \quad h(x) = \int_0^x p(u) p(x-u) du = (p * p)(x)$$

De esta manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[h](s) = (\hat{p}(s))^2 &\Rightarrow \mathcal{L}[g](s) = \int_s^\infty (\hat{p}(r))^2 dr \Rightarrow \mathcal{L}[\mathcal{T}(p)](s) = \frac{1}{s} (\mathcal{L}[g](0) - \mathcal{L}[g](s)) = \\ &= \frac{1}{s} \int_0^s (\hat{p}(r))^2 dr = \int_0^1 (\hat{p}(s\varepsilon))^2 d\varepsilon \end{aligned}$$

□

Si calculamos la transformada de Laplace de  $p_\omega^*$  obtenemos:

$$\hat{p}_\omega^* = \frac{1}{1 + \omega s},$$

y la transformada de Laplace del funcional  $\mathcal{T}$  aplicado a  $p_\omega^*$ :

$$\int_0^1 \left( \frac{1}{1 + \omega s \varepsilon} \right)^2 = \frac{1}{1 + \omega s} = \hat{p}_\omega^*$$

y así:

$$\mathcal{L}[\mathcal{T}(p_\omega^*)] = \hat{p}_\omega^* = \mathcal{L}[p_\omega^*].$$

Luego  $p_\omega^*$  es un punto fijo de  $\mathcal{T}$ .

Definamos ahora para cualquier  $\alpha \in (1, 2)$ ,  $\omega > 0$ ,  $p \in \mathcal{P}_\alpha$ , una función distancia  $d_\alpha$  satisfaciendo:

$$d_\alpha(p, q) = \sup_{s>0} \frac{|\mathcal{L}[p](s) - \mathcal{L}[q](s)|}{s^\alpha}.$$

Comprobemos pues que dicha métrica está bien definida:

**Lema 1.3.** *Si  $\alpha \in (1, 2)$ ,  $\omega > 0$ ,  $p \in \mathcal{P}_{\alpha, \omega} = \{p \in \mathcal{P}_\alpha | M_1(p) = \omega\}$ , entonces  $d_\alpha(p, q) < \infty$ .*

*Demostración.* Sea  $p \in \mathcal{P}_{\alpha, \omega}$  y  $\hat{p} = \mathcal{L}[p]$ . Podemos escribir:

$$\frac{1}{s^\alpha} [\hat{p}(s) + \omega s - 1] = \frac{1}{s^\alpha} \int_0^\infty p(x) [\hat{p}(s) + \omega s - 1] dx = \int_0^\infty x^\alpha p(x) \psi(sx) dx$$

en donde  $\psi(z) = \frac{1}{z^\alpha} [e^{-z} + z - 1]$ . Puesto que  $\psi(z) \geq 0 \forall z \geq 0$ , tenemos:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \psi(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \psi(z) = 0$$

De esta forma, para cada  $x$ :

$$\lim_{s \rightarrow 0_+} x^\alpha p(x) \psi(sx) = 0$$

Además observamos que, puesto que  $\psi$  es continua en  $(0, \infty)$  (composición de continuas en dicho intervalo), y en ambos extremos el límite es 0,  $\psi$  está acotada por una cierta constante  $M$  en el intervalo  $[0, \infty)$ . Así, tomando  $p \in \mathcal{P}_{\alpha, \omega}$ :

$$0 \leq x^\alpha p(x) \psi(sx) \leq x^\alpha p(x) M \in L^1[0, \infty)$$

donde  $L^1[0, \infty)$  es el espacio de funciones con valor absoluto integrable en  $[0, \infty)$ . Aplicando ahora el teorema de la convergencia dominada conseguimos:

$$\lim_{s \rightarrow 0_+} \frac{1}{s^\alpha} [\widehat{p}(s) + \omega s - 1] = \lim_{s \rightarrow 0_+} \int_0^\infty x^\alpha p(x) \psi(sx) dx = 0$$

Y así, si  $p, q \in \mathcal{P}_{\alpha, \omega}$ , tenemos:

$$\lim_{s \rightarrow 0_+} \frac{|\widehat{p}(s) - \widehat{q}(s)|}{s^\alpha} = \lim_{s \rightarrow 0_+} \frac{1}{s^\alpha} |(\widehat{p}(s) + \omega s - 1) - (\widehat{q}(s) + \omega s - 1)| = 0$$

y puesto que  $0 \leq \widehat{p}(s), \widehat{q}(s) \leq 1$  (ya que  $\|p\|_{L^1} = \|q\|_{L^1} = 1$ ), también tenemos:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{|\widehat{p}(s) - \widehat{q}(s)|}{s^\alpha} = 0$$

y por tanto se trata de una métrica acotada, y así  $d_\alpha(p, q)$  es siempre finito.  $\square$

**Lema 1.4.** Sean  $\alpha \in (1, 2)$ ,  $\omega > 0$ ,  $p \in \mathcal{P}_{\alpha, \omega}$ , entonces:

$$d_\alpha(\mathcal{T}(p), \mathcal{T}(q)) \leq \frac{2}{\alpha + 1} d_\alpha(p, q).$$

*Demostración.* Gracias al Lema 1.1. sabemos que  $\mathcal{T}(p), \mathcal{T}(q) \in \mathcal{P}_{\alpha, \omega}$ . Así:

$$d_\alpha(\mathcal{T}(p), \mathcal{T}(q)) = \sup_{s > 0} \frac{|\mathcal{L}[\mathcal{T}(p)](s) - \mathcal{L}[\mathcal{T}(q)](s)|}{s^\alpha}$$

Como  $0 \leq \widehat{p}(s), \widehat{q}(s) \leq 1$  y usando el Lema 1.2. tenemos  $\forall s > 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{L}[\mathcal{T}(p)](s) - \mathcal{L}[\mathcal{T}(q)](s)|}{s^\alpha} &= \frac{1}{s^\alpha} \left| \int_0^1 [\widehat{p}(s\varepsilon) - \widehat{q}(s\varepsilon)] [\widehat{p}(s\varepsilon) + \widehat{q}(s\varepsilon)] d\varepsilon \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{s^\alpha} \left| \int_0^1 |\widehat{p}(s\varepsilon) - \widehat{q}(s\varepsilon)| \widehat{p}(s\varepsilon) d\varepsilon + \frac{1}{s^\alpha} \left| \int_0^1 |\widehat{p}(s\varepsilon) - \widehat{q}(s\varepsilon)| \widehat{q}(s\varepsilon) d\varepsilon \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^1 \frac{|\widehat{p}(s\varepsilon) - \widehat{q}(s\varepsilon)|}{(s\varepsilon)^\alpha} \varepsilon^\alpha d\varepsilon + \left| \int_0^1 \frac{|\widehat{p}(s\varepsilon) - \widehat{q}(s\varepsilon)|}{(s\varepsilon)^\alpha} \varepsilon^\alpha d\varepsilon \right| \\ &\leq 2 \sup_{r > 0} \frac{|\widehat{p}(r) - \widehat{q}(r)|}{(r)^\alpha} \int_0^1 \varepsilon^\alpha d\varepsilon = \frac{2}{\alpha + 1} d_\alpha(p, q) \end{aligned}$$

$\square$

**Lema 1.5.** Sean  $\alpha \in (1, 2)$ ,  $\omega > 0$ ,  $p_0 \in \mathcal{P}_{\alpha, \omega}$ , entonces:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_\alpha(\mathcal{T}^k(p_0), p_\omega^*) = 0$$

*Demostración.* Por el Lema 1.4, para cada  $k \geq 0$  tenemos:

$$d_\alpha(\mathcal{T}^{k+1}(p_0), p_\omega^*) \leq \frac{2}{\alpha + 1} d_\alpha(\mathcal{T}^k(p_0), p_\omega^*)$$

Luego por inducción:

$$d_\alpha(\mathcal{T}^k(p_0), p_\omega^*) \leq \left( \frac{2}{\alpha + 1} \right)^k d_\alpha(p_0, p_\omega^*)$$

y puesto que  $\alpha > 1$ , tomando límite cuando  $k$  tiende a infinito, llegamos al resultado.  $\square$

**Lema 1.6.** Si  $\alpha > 1$ ,  $\omega > 0$ ,  $p_0 \in \mathcal{P}_{\alpha, \omega}$ , entonces:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{p}_k(s) = \widehat{p}_\omega^*(s). \quad \forall s > 0.$$

*Demostración.* Puesto que  $p_0 \in \mathcal{P}_{\alpha', \omega} \forall 1 < \alpha' < \alpha$ , podemos tomar  $\alpha'$  tal que  $1 < \alpha' < \min(2, \alpha)$  y el Lema 1.5 nos asegura que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_{\alpha'}(p_k, p_{\omega}^*) = 0$$

y puesto que por la definición de nuestra función distancia  $d_{\alpha'}$ , para cada  $s > 0$  tenemos:

$$|\widehat{p}_k(s) - \widehat{p}_{\omega}^*| < s^{\alpha'} d_{\alpha'}(p_k, p_{\omega}^*) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

□

Para acabar, como está demostrado en [8], usamos el siguiente resultado:

**Lema 1.7.** Sean  $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$  y  $p_{\omega}^*$  distribuciones de probabilidad en  $[0, \infty)$  y  $\widehat{p}_k, \widehat{p}_{\omega}^*$  definidas como hasta ahora. Si existen  $0 \leq s_1 < s_2$  tales que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{p}_k(s) = \widehat{p}_{\omega}^*(s) \quad \forall s \in (s_1, s_2)$$

entonces las funciones de distribución acumuladas  $F_k(x)$  y  $F_{\omega}^*(x)$  satisfacen:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x) = F_{\omega}^*(x)$$

Obsérvese que de esta demostración se obtiene también que el punto fijo es único, algo ya demostrado en [6].





# Capítulo 2

## 2.1. Un modelo más realista

Pese a que el modelo del capítulo anterior da unos resultados acordes a los datos empíricos, lo cierto es que las transacciones rara vez son bidireccionales. Lo normal es que una vez determinada la transacción sea uno de los agentes el que tenga el papel de perdedor y otro el de ganador debido al carácter de esta. Por ejemplo, cuando vamos a comprar al supermercado, sabemos que siempre debemos pagar, y no unas veces pagar y otras recibir dinero, dependiendo de nuestra suerte. Otro ejemplo sería lo que sucede con un jefe y sus empleados ya que no hay veces en las que los empleados pagan al jefe y veces que es este el que paga a sus empleados, cada uno tiene un rol bien definido. De esta forma se introdujeron los modelos dirigidos. El primero de ellos fué descrito por John Angle [9] y a raíz de este muchos otros, más o menos interesantes, surgieron. Uno de ellos y al que nosotros prestaremos nuestra atención, es el descrito por Ismael Martínez-Martínez y Ricardo López Ruiz [10]. Este modelo sigue el esquema:

$$x'_i = \varepsilon x_i$$
$$x'_j = x_j + (1 - \varepsilon)x_i$$

Mediante simulaciones con ordenador, se puede comprobar que la distribución obtenida no es exactamente una exponencial. Hay más gente pobre y menos rica que en dicha distribución y la convergencia a una distribución estable es realmente rápida.

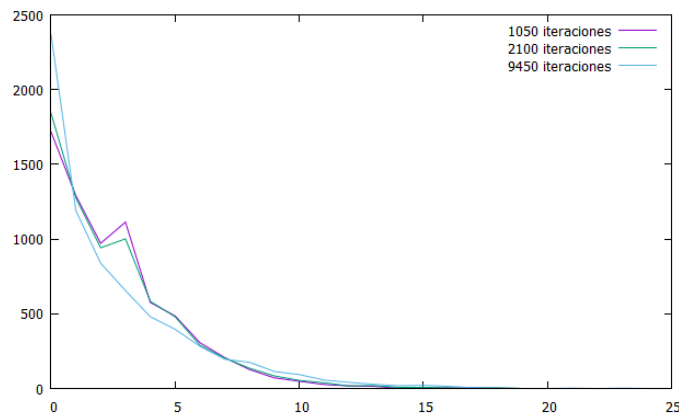


Figura 2.1: Imagen correspondiente a la simulación de este nuevo modelo utilizando 7000 agentes con una cantidad inicial determinada. El eje vertical representa la cantidad de personas y el eje horizontal el dinero. Se aprecia una convergencia más rápida que en la Figura 1.2

### 2.1.1. Explicación funcional

Para ofrecer una explicación utilizando funcionales, debemos separar la distribución del dinero en dos distribuciones a priori idénticas. Una de ellas corresponde a la probabilidad de extraer un agente

perdedor con dinero  $u$  y la otra la de extraer un agente ganador con dinero  $v$ . De esta forma, si  $p$  es la probabilidad de extraer un agente con dinero  $x$  y  $p'$  y  $p''$  la probabilidad de extraer un agente ganador o perdedor con dinero  $x$  respectivamente, en la primera iteración se tiene:

$$p_1(x) = \frac{1}{2}p'_0(x) + \frac{1}{2}p''_0(x)$$

Para las siguientes iteraciones, la distribución total se puede dividir de igual manera, separada en la distribución de que el seleccionado provenga de perder más la de ganar:

$$p_{m+1}(x) = \frac{1}{2}p'_{m+1}(x) + \frac{1}{2}p''_{m+1}(x) = \mathcal{T}p_m(x) \quad (2.1)$$

Nuestro problema pues es saber las distribuciones de  $p'_{m+1}(x)$  y  $p''_{m+1}(x)$ . Para que un perdedor alcance el dinero  $x$  al perder, obviamente ha de poseer una cantidad  $u > x$  de dinero antes del intercambio, y puesto que es una cantidad aleatoria, la cantidad de dinero que ponga en la mesa se distribuirá de una forma uniforme en  $[0, u]$ . Así:

$$p'_{m+1}(x) = \int \int_{u>x} \frac{p_m(u)p_m(v)}{u} dudv = \int_0^\infty p(v)dv \int_{u>x} \frac{p_m(u)}{u} du = \int_{u>x} \frac{p_m(u)}{u} du \quad (2.2)$$

Para que un ganador alcance la cantidad de dinero  $x$ , primero ha de poseer una cantidad de dinero  $v$  inferior a  $x$ ,  $v < x$ . Además, la suma del dinero de los dos agentes del intercambio ha de ser mayor que  $x$ , puesto que la máxima cantidad que se puede llevar es  $u + v$ . Así  $v < x < u + v$ . Como el dinero que recibe está entre  $v$  y  $u + v$ , sigue una distribución uniforme en  $[v, u + v]$ , cuya función de distribución es  $1/u$ . De esta forma:

$$p''_{m+1}(x) = \int \int_{v<x<u+v} \frac{p_m(u)p_m(v)}{u} dudv \quad (2.3)$$

De esta forma, juntando (2.2) y (2.3) obtenemos:

$$p_{m+1}(x) = \mathcal{T}p_m(x) = \frac{1}{2} \int_{u>x} \frac{p_m(u)}{u} du + \frac{1}{2} \int \int_{v<x<u+v} \frac{p_m(u)p_m(v)}{u} dudv \quad (2.4)$$

Notese que:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p'_{m+1}(x)dx &= \int_0^\infty \int_{u>x} \frac{p_m(u)}{u} dudx = \int_0^\infty \int_0^u \frac{p_m(u)}{u} dxdu = \int_0^\infty p_m(u)du = 1 \\ \int_0^\infty p''_{m+1}(x)dx &= \int_0^\infty \int \int_{v<x<u+v} \frac{p_m(u)p_m(v)}{u} dudvdx = \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \int_v^{u+v} \frac{p_m(u)p_m(v)}{u} dx = \\ &= \int_0^\infty p(u)du \int_0^\infty p(v)dv = 1 \end{aligned}$$

Luego continúa siendo una probabilidad. Para calcular el dinero medio comprobamos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p'_{m+1}(x)dx &= \int_0^\infty \int_{u>x} x \frac{p_m(u)}{u} dudx = \int_0^\infty du \int_0^u x \frac{p_m(u)}{u} dx = \frac{1}{2} \int u p_m(u) du = \frac{1}{2} \langle x \rangle \\ \int_0^\infty p''_{m+1}(x)dx &= \int_0^\infty x \int \int_{v<x<u+v} \frac{p_m(u)p_m(v)}{u} dudvdx = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_v^{u+v} x \frac{p_m(u)p_m(v)}{u} dx dv du = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{2} (u+2v) p_m(u)p_m(v) dv du = \frac{1}{2} \left[ \int_0^\infty \int_0^\infty u p_m(u)p_m(v) dv du + \int_0^\infty \int_0^\infty 2v p_m(v)p_m(u) dudv \right] = \frac{3}{2} \langle x \rangle \end{aligned}$$

y por tanto el dinero medio, que es la media de los dineros medios de la distribución de ganadores y la de perdedores, es constante.

Tomando este modelo y teniendo en cuenta las simulaciones realizadas por ordenador, Guy Katriel [11] demostró que la sucesión de distribuciones obtenidas al aplicar el funcional  $\mathcal{T}$  convergía a una

distribución Gamma con parámetro de forma  $1/2$  y media  $\langle x \rangle$ , es decir, su función de distribución era:

$$p_{\langle x \rangle}^* = \frac{1}{\sqrt{2 \langle x \rangle \pi x}} e^{-\frac{x}{2 \langle x \rangle}} \quad (2.5)$$

Para ello, comenzó reescribiendo (2.4):

$$\mathcal{T} p_m(x) = \frac{1}{2} \left[ \int_x^\infty \frac{p_m(u)}{u} du + \int_0^x p_m(x-v) \int_u^\infty \frac{p_m(v)}{v} dv du \right] \quad (2.6)$$

y buscó los puntos fijos del funcional, es decir, las distribuciones  $p$  tales que  $\mathcal{T}(p) = p$ . Para obtenerlos, aplicó la transformada de Laplace a (2.6):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \frac{1}{x} p(x) \right] (s) &=^* - \int_0^s \widehat{p}(s') ds' + \int_0^\infty \frac{1}{x} p(x) dx \Rightarrow \mathcal{L} \left[ \int_x^\infty \frac{1}{v} p(v) dv \right] (s) =^{**} \frac{1}{s} \int_0^s \widehat{p}(s') ds' \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{L} \left[ \int_0^x p(x-u) \int_u^\infty \frac{1}{v} p(v) dv du \right] (s) = \widehat{p}(s) \frac{1}{s} \int_0^s \widehat{p}(s') ds' \end{aligned}$$

Donde los cálculos seguidos para \* y \*\* son explicados en el Anexo I. También:

$$\mathcal{L} \left[ \int_x^\infty \frac{1}{u} p(u) du \right] (s) = \frac{1}{s} \int_0^s \widehat{p}(s') ds'$$

Así:

$$\mathcal{L}[\mathcal{T}[p]](s) = \frac{1}{2s} [\widehat{p}(s) + 1] \int_0^s \widehat{p}(s') ds' \quad (2.7)$$

De esta forma, hallaremos  $\widehat{p}(s)$  satisfaciendo (2.7):

$$\widehat{p}(s) = \frac{1}{2s} [\widehat{p}(s) + 1] \int_0^s \widehat{p}(s') ds' \Leftrightarrow \left[ \frac{s \widehat{p}(s)}{\widehat{p}(s) + 1} \right]' = \frac{1}{2} \widehat{p}(s)$$

Desarrollamos la derivada:

$$\widehat{p}'(s) = \frac{1}{2s} [(\widehat{p}(s))^2 - 1] \widehat{p}(s)$$

Y la resolvemos:

$$\widehat{p}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + Cs}}$$

Aplicamos la antitransformada de Laplace para obtener:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{C\pi x}} e^{-\frac{x}{C}}$$

Para determinar  $C$  utilizamos la condición  $\int_0^\infty xp(x)dx = \omega$  y obtenemos  $C = 2\omega$ . De esta forma los puntos fijos de (2.6) son:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\omega\pi x}} e^{-\frac{x}{2\omega}} \quad (2.8)$$

El siguiente paso será comprobar que la sucesión de distribuciones  $\{p_t\}_0^\infty$  converge a la distribución obtenida en (2.8), a la que llamaremos de nuevo  $p_\omega^*$ . El procedimiento será análogo al del primer capítulo, tratando de demostrar una convergencia en distribución de las distribuciones de  $\{p_t\}_0^\infty$  a la de  $p_\omega^*$ . Para evitar redundancias, todos los demás terminos definidos en el capítulo 1 se denotarán de igual manera, salvo que se indique lo contrario. El primer resultado es:

**Lema 2.1.** Si  $\alpha \geq 1$  y  $p \in \mathcal{P}_{\alpha,\omega}$ , entonces  $\mathcal{T}[p] \in \mathcal{P}_{\alpha,\omega}$

*Demostración.* Comenzaremos probando que el momento de orden  $\alpha$  de  $\mathcal{T}[p]$  es finito. Para ello:

$$\begin{aligned} M_\alpha(\mathcal{T}[p]) &= \int_0^\infty x^\alpha \mathcal{T}[p](x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty x^\alpha \int_0^x p(x-u) \int_u^\infty \frac{1}{v} p(v) dv du dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty x^\alpha \int_x^\infty \frac{1}{u} p(u) du dx \end{aligned}$$

Centrandonos en el primer sumando y utilizando la desigualdad  $(u+x)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(x^\alpha + u^\alpha)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^\alpha \int_0^x p(x-u) \int_u^\infty \frac{1}{v} p(v) dv du dx &= \int_0^\infty \int_u^\infty x^\alpha p(x-u) dx \int_u^\infty \frac{1}{v} p(v) dv du = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty (x+u)^\alpha p(x) dx \int_u^\infty \frac{1}{v} p(v) dv du \leq \\ &\leq 2^{\alpha-1} \left[ \int_0^\infty \int_0^\infty x^\alpha p(x) dx \int_u^\infty \frac{1}{v} p(v) dv du + \int_0^\infty u^\alpha \int_0^\infty p(x) dx \int_u^\infty \frac{1}{v} p(v) dv du \right] = \\ &= 2^{\alpha-1} \left[ M_\alpha(p) \int_0^\infty \int_u^\infty \frac{1}{v} p(v) dv du + \int_0^\infty u^\alpha \int_u^\infty \frac{1}{v} p(v) dv du \right] = \\ &= 2^{\alpha-1} \left[ M_\alpha(p) \int_0^\infty \frac{1}{v} p(v) \int_0^v du dv + \int_0^\infty \frac{1}{v} p(v) \int_0^v u^\alpha du dv \right] = \\ &= 2^{\alpha-1} \left[ M_\alpha(p) \int_0^\infty p(v) dv + \frac{1}{\alpha+1} \int_0^\infty p(v) v^{\alpha+1} dv \right] = 2^{\alpha-1} M_\alpha(p) \frac{\alpha+2}{\alpha+1} \end{aligned}$$

Para el segundo sumando tenemos:

$$\int_0^\infty x^\alpha \int_x^\infty \frac{1}{u} p(u) du dx = \int_0^\infty \frac{1}{u} p(u) \int_0^u x^\alpha dx du = \frac{1}{\alpha+1} \int_0^\infty u^\alpha p(u) du = \frac{M_\alpha(p)}{\alpha+1} \quad (2.9)$$

De esta forma combinándolos obtenemos:

$$M_\alpha(\mathcal{T}[p]) \leq \frac{1}{2(\alpha+1)} (2^{\alpha-1}(\alpha+2) + 1) M_\alpha(p)$$

Luego si  $M_\alpha(p) < \infty$  tendremos  $M_\alpha(\mathcal{T}[p]) < \infty$ . Para  $\alpha = 1$  la desigualdad  $(u+x)^\alpha \leq 2^{\alpha-1}(x^\alpha + u^\alpha)$  es una igualdad y por tanto se tiene la igualdad también en (2.9) y así  $M_1(p) = M_1(\mathcal{T}[p]) = \omega$ , luego  $\mathcal{T}[p] \in \mathcal{P}_{\alpha, \omega}$ .  $\square$

Veremos ahora que, con la función distancia definida anteriormente, el funcional  $\mathcal{T}$  es contractivo:

**Lema 2.2.** Sea  $1 < \alpha < 2$ ,  $\omega > 0$ ,  $p, q \in \mathcal{P}_{\alpha, \omega}$ . Entonces:

$$d_\alpha(\mathcal{T}[p], \mathcal{T}[q]) \leq \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha+1} \right) d_\alpha(p, q)$$

*Demostración.* Nótese primero que en el Lema 1.3. ya probamos que  $d_\alpha(p, q) < \infty$  luego la desigualdad está siempre bien definida. Haciendo el cambio de variable  $s' = s\varepsilon$  en (2.7) conseguimos:

$$\mathcal{L}[\mathcal{T}[p]](s) = \frac{1}{2} [\widehat{p}(s) + 1] \int_0^1 \widehat{p}(s\varepsilon) d\varepsilon$$

$$\mathcal{L}[\mathcal{T}[p]](s) - \mathcal{L}[\mathcal{T}[q]](s) = \frac{1}{2} [\widehat{p}(s) - \widehat{q}(s)] \int_0^1 \widehat{p}(s\varepsilon) d\varepsilon + \frac{1}{2} [\widehat{q}(s) + 1] \int_0^1 [\widehat{p}(s\varepsilon) - \widehat{q}(s\varepsilon)] d\varepsilon$$

Puesto que  $\|p\|_{L^1} = \|q\|_{L^1} = 1$  tenemos  $|\widehat{p}(s)| \leq 1$ ,  $|\widehat{q}(s)| \leq 1$  y por tanto podemos estimar:

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{L}[\mathcal{T}[p]](s) - \mathcal{L}[\mathcal{T}[q]](s)|}{s^\alpha} &\leq \frac{1}{2} \left( \frac{|\widehat{p}(s) - \widehat{q}(s)|}{s^\alpha} \int_0^1 \widehat{p}(s\varepsilon) d\varepsilon + [\widehat{q}(s) + 1] \int_0^1 \varepsilon^\alpha \frac{|\widehat{p}(s\varepsilon) - \widehat{q}(s\varepsilon)|}{(s\varepsilon)^\alpha} d\varepsilon \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} d_\alpha(p, q) + d_\alpha(p, q) \int_0^1 \varepsilon^\alpha d\varepsilon = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha+1} \right) d_\alpha(p, q) \end{aligned}$$

Y puesto que este resultado no depende de  $s$ , tomando supremos en  $s > 0$  la cota se mantiene igual.  $\square$

De esta forma estamos en condiciones de probar que la sucesión de probabilidades converge al correspondiente punto fijo.

**Lema 2.3.** Sea  $1 < \alpha < 2$ ,  $\omega > 0$ ,  $p_0 \in \mathcal{P}_{\alpha,\omega}$ . Entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_{\alpha}(p_t, p_{\omega}^*) = 0$$

*Demostración.* Gracias al Lema 2.2. tenemos por recurrencia:

$$d_{\alpha}(p_t, p_{\omega}^*) \leq \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha + 1} \right)^t d_{\alpha}(p_0, p_{\omega}^*)$$

lo que implica el enunciado puesto que  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha + 1}) < 1$  si  $\alpha > 1$ . □

La convergencia en la métrica  $d_{\alpha}$  implica la convergencia puntual de las transformadas de Laplace y, aplicando el Lema 1.7. llegamos al resultado deseado.

Así pues este nuevo modelo converge a una distribución gamma de parámetro de forma  $1/2$ , una distribución con mayor número de gente pobre y de gente rica que el modelo anterior, pero que, sin embargo, mantiene un porcentaje de población de clases alta y media cercano al 50% (no hay que olvidar que los rangos de riqueza asociados a cada clase social son, en cierta forma, arbitrarios y que los elegimos así para simplificar).

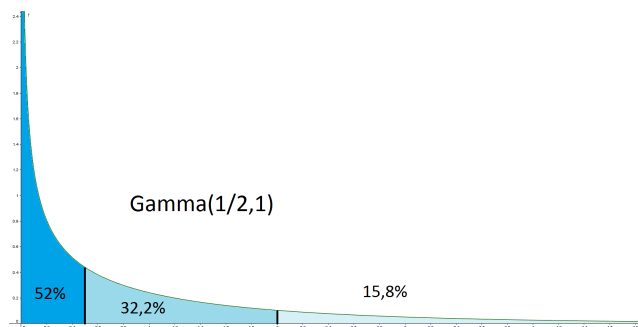


Figura 2.2: Porcentajes de riqueza en cada clase social obtenidos aplicando el método de Simpson.

## 2.2. Un modelo con préstamo

Volviendo al modelo desarrollado en el capítulo 1, hay un factor importante en la distribución del dinero que, antes incluso de que la usura fuera despenalizada por la iglesia, ya tenía una gran importancia en la distribución de este. Se trata del préstamo. Puesto que en la explicación funcional en ningún caso se considera que el dinero sobre la mesa pueda ser superior (o inferior) a la cantidad de dinero que poseen entre los dos agentes seleccionados, el préstamo queda totalmente fuera de consideración. Conscientes de esto, en el artículo [12] se propone un nuevo modelo, basado en funcionales y al que se denomina *Z – Model generalizado* que en este caso sí tenía en cuenta el préstamo o inyección de capital:

$$p_{m+1}(x) = \mathcal{T} p_m(x) = \int \int_{S_a(x)} \frac{p_m(u)p_m(v)}{au + (2 - a)v} dudv \tag{2.10}$$

siendo  $S_a(x) = \{(u, v) | x < au + (2 - a)v\}$  y  $a \in (0, 2)$ . Nótese que el dinero total se mantiene constante, (ni se crea ni se destruye). Así, para cada  $(u, v)$  existe un  $(v, u)$  de forma que el dinero en juego de las 2 parejas es  $au + (2 - a)v + av + (2 - a)u = 2(u + v)$ . Esto se podría interpretar como que se puede tanto recibir un préstamo al bote de una pareja o que se puede extraer dinero del bote de una pareja.

Para ver la convergencia de este nuevo modelo Yves Pomeau y Ricardo López Ruiz buscaron una fórmula recursiva para la función generatriz de momentos. Nótese que:

$$\begin{aligned} M_0(p_{m+1}) &= \int_0^\infty \int \int_{S_a(x)} \frac{p_m(u)p_m(v)}{au + (2-a)v} dudvdx = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{p_m(u)p_m(v)}{au + (2-a)v} dudv \int_0^{au+(2-a)v} dx = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty p(u)p(v)dudv = M_0(p_m) \end{aligned}$$

luego  $\{p_m\}_0^\infty$  son distribuciones de probabilidad si  $p_0$  lo es. Además:

$$\begin{aligned} M_1(p_{m+1}) &= \int_0^\infty x \int \int_{S_a(x)} \frac{p_m(u)p_m(v)}{au + (2-a)v} dudvdx = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{p_m(u)p_m(v)}{au + (2-a)v} dudv \int_0^{au+(2-a)v} x dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty aup(u)p(v)dudv + \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty (2-a)vp(u)p(v)dudv = \frac{a}{2} \int_0^\infty up(u)du + \frac{2-a}{2} \int_0^\infty vp(v)dv = M_1(p_m) \end{aligned}$$

lo que implica que si existe la media de  $p_0$ , también existirán las medias de  $p_m$  para cualquier  $m$ . Como regla general se tiene:

$$M_k(p_{m+1}) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{p_m(u)p_m(v)}{au + (2-a)v} dudv \int_0^{au+(2-a)v} x^k dx = \frac{1}{k+1} \int_0^\infty \int_0^\infty p_m(u)p_m(v)(au + (2-a)v)^k dudv$$

Puesto que  $(au + (2-a)v)^k = (a^k u^k + (2-a)^k v^k + \dots)$  podemos quedarnos con los términos de mayor orden. Notar que si  $a < 1$ , algo que haría que el peso del término  $u^k$  fuese muy pequeño en el límite, tendríamos que  $2-a$  sería mayor que 1, con lo que casi todo el peso estaría en  $v^k$ , término que también tenemos en consideración. Por lo tanto, llamando  $b = 1-a$  para simplificar:

$$M_k(p_{m+1}) = \frac{1}{k+1} [((1-b)^k + (1+b)^k)M_k(p_m) + l.o.t(m)] \quad (2.11)$$

siendo  $l.o.t(m)$  los términos de menor orden. Al repetir  $m$  veces el funcional, el momento de orden  $k$  convergerá o divergerá dependiendo del coeficiente de  $M_k(p_m)$ . Si  $\frac{(1-b)^k + (1+b)^k}{k+1} < 1$ , al iterar o, en otras palabras, al aplicar el límite  $m \rightarrow \infty$ , el momento  $M_k(p_m)$  convergerá, pero si  $\frac{(1-b)^k + (1+b)^k}{k+1} > 1$  estos momentos crecerán exponencialmente. Para saber los valores de  $b$  para los que, para un momento de orden  $k$  fijo, la sucesión converge consideramos:

$$\frac{(1-b)^k + (1+b)^k}{k+1} \geq \frac{(1+|b|)^k}{k+1} > 1 \quad (2.12)$$

Tomando logaritmos:

$$\ln(1+|b|)^k = k \ln(1+|b|) > \ln(k+1) \Leftrightarrow \ln(1+|b|) > \frac{\ln(k+1)}{k} > \frac{1}{k}$$

ya que estamos considerando cuando  $k \geq 2$ . Así  $\ln(1+|b|) > \frac{1}{k}$ . Puesto que  $|b| < 1$  podemos aproximar  $\ln(1+|b|) \approx |b|$ , luego  $k > \frac{1}{|b|}$ . Llevando el resultado de nuevo a (2.12) obtenemos:

$$\ln(1+|b|) \approx |b| > \frac{\ln(k+1)}{k} > \frac{\ln(\frac{1}{|b|}) + 1}{k} \Leftrightarrow k > \frac{\ln(\frac{1}{|b|}) + 1}{|b|}$$

Esto muestra que cuanto mas cercano a 0 sea  $b$ , sin llegar a alcanzarlo, la distribución a la que converge, si es que converge, deberá tener una cola pesada, para causar que los momentos diverjan como lo hacen.

Esto puede ser comprobado mediante simulación numérica. Para ello simplemente utilizamos la regla de intercambio:

$$x'_i = \varepsilon(ax_i + (2-a)x_j)$$

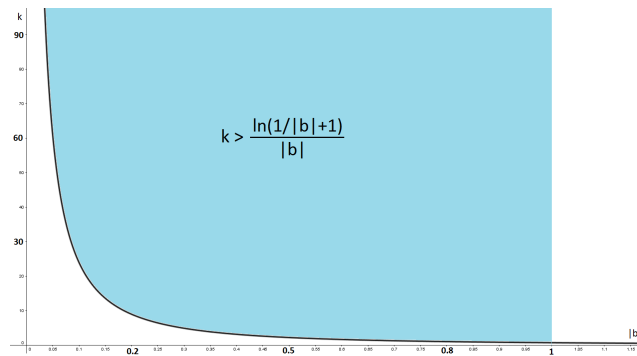


Figura 2.3: La figura muestra el conjunto de puntos (k,|b|) donde el momento de orden k converge.

$$x'_j = (1 - \varepsilon)(ax_i + (2 - a)x_j)$$

Pese a que el dinero total no se mantiene constante, tomando un número de agentes lo suficientemente grande, de forma que la pérdida de dinero que se pueda producir en un intercambio sea prácticamente insignificante con respecto al dinero total, todo funciona correctamente. Se aprecia en las simulaciones también una rápida convergencia a la distribución estacionaria, menor sin embargo que en el caso anterior.

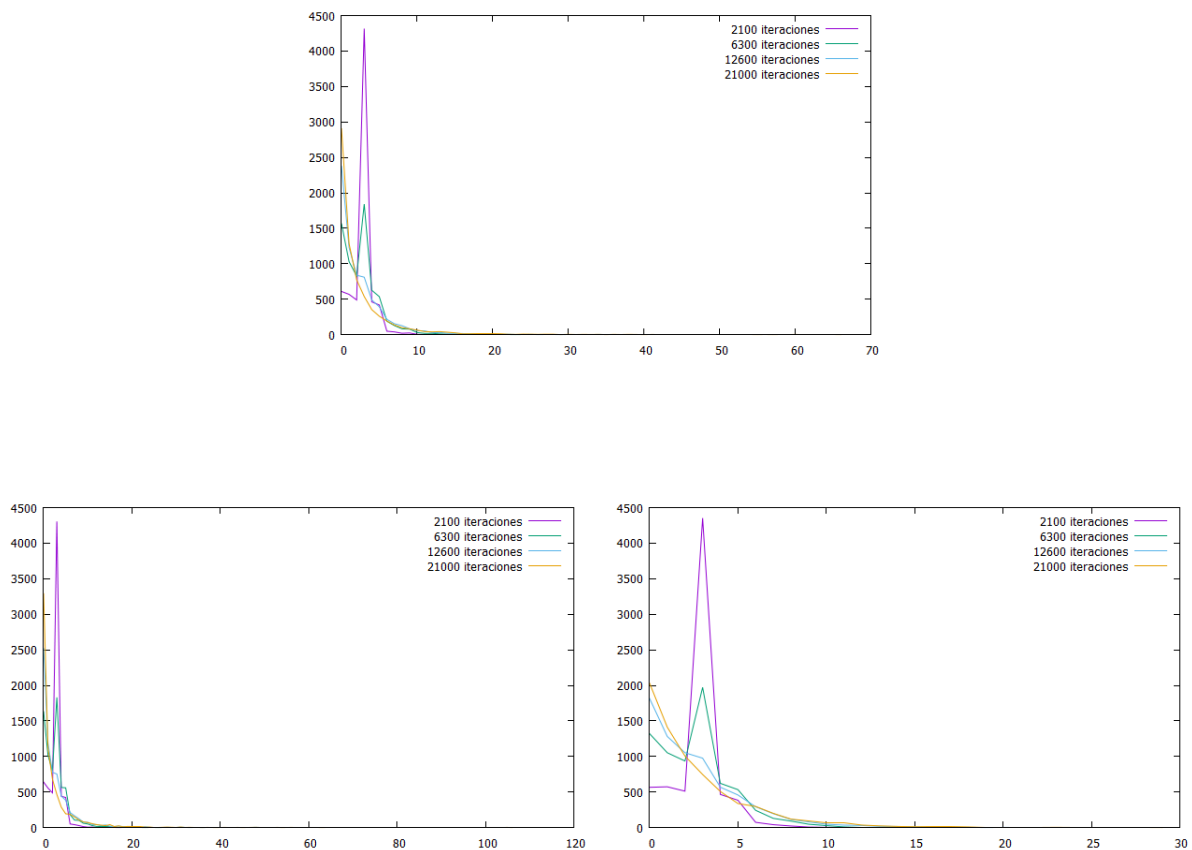


Figura 2.4: Histogramas obtenidos para los valores  $a = 0,1$  en la izquierda,  $a = 1,8$  en el centro y  $a = 1,3$  en la derecha. En los 3 casos el número de agentes ha sido 7000 que comenzaron con una cantidad igual de dinero.

### 2.3. Un modelo con ahorro

Otro factor que puede ser tenido en cuenta es el ahorro. Parece extraño considerar que los agentes pongan en juego siempre todo su dinero. Más normal resultaría que el dinero que pusiesen fuese una fracción  $\lambda$  del total. Existen varios modelos considerando el ahorro, teniendo en cuenta si son dirigidos, no dirigidos o incluso si el ahorro es fijo o variable. El más sencillo de ellos considera un ahorro fijo y un intercambio no dirigido. Como fué introducida en [13] y [14], que el modelo no dirigido por Marco Patriarca, Anirban Chakraborty y Kimmo Kasky, la regla de intercambio que modeliza esta situación es:

$$\begin{aligned}x'_i &= \lambda x_i + (1 - \lambda)\varepsilon(x_i + x_j) \\x'_j &= \lambda x_j + (1 - \lambda)\varepsilon(x_i + x_j)\end{aligned}$$

Para obtener una expresión funcional de dicho intercambio seguimos los siguientes pasos: La probabilidad de que tras un intercambio un agente tenga dinero  $x$ , depende de que en el momento anterior 2 agentes tengan dinero  $u$  y  $v$  interactúen. En dicha interacción, el dinero a repartir es  $(1 - \lambda)(u + v)$ , y consideraremos que la probabilidad de que un agente se lleve una parte  $z$  de ese dinero sigue una distribución uniforme. De esta forma  $p_{m+1}(x)$  dependerá de  $\frac{p_m(u)p_m(v)}{(1-\lambda)(u+v)}$ . Para hallar los extremos de integración consideramos primero que es el agente con dinero  $v$  el que llega a tener  $x$ . Así  $x$  siempre será más grande que  $\lambda v$  porque es el dinero ahorrado por el agente y mas pequeño que  $(1 - \lambda)u + v$ , que es el dinero que obtendría si ganara todo el dinero que pone en juego el agente con dinero  $u$  y no perdiese nada. Si el que llega a tener dinero  $x$  es el agente con dinero  $u$  se tiene el análogo intercambiando papeles. Como ambos agentes tienen la misma probabilidad de llegar a tener el dinero  $x$  ( $1/2$  y  $1/2$ ), se tiene:

$$\begin{aligned}p_{m+1}(x) &= \mathcal{T} p_m(x) = \frac{1}{2} \int \int_{(1-\lambda)u+v > x > \lambda v} \frac{p_m(u)p_m(v)}{(1-\lambda)(v+u)} dudv + \frac{1}{2} \int \int_{(1-\lambda)v+u > x > \lambda u} \frac{p_m(u)p_m(v)}{(1-\lambda)(v+u)} dudv = \\ &= \int \int_{(1-\lambda)u+v > x > \lambda v} \frac{p_m(u)p_m(v)}{(1-\lambda)(v+u)} dudv\end{aligned}\quad (2.13)$$

Si integramos de 0 a  $\infty$  nuestro funcional tenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int \int_{(1-\lambda)u+v > x > \lambda v} \frac{p_m(u)p_m(v)}{(1-\lambda)(v+u)} dudvdv dx &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\lambda v}^{(1-\lambda)u+v} \frac{p_m(u)p_m(v)}{(1-\lambda)(v+u)} dx dudv = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{p_m(u)p_m(v)}{(1-\lambda)(v+u)} [x]_{\lambda v}^{(1-\lambda)u+v} dudv = \int_0^\infty \int_0^\infty p_m(u)p_m(v) dudv = 1\end{aligned}$$

Luego la distribución resultante sigue siendo una distribución de probabilidad. Para ver si el dinero total se conserva calculamos la esperanza:

$$\begin{aligned}M_1(p_{m+1}) &= \int_0^\infty \int \int_{(1-\lambda)u+v > x > \lambda v} x \frac{p_m(u)p_m(v)}{(1-\lambda)(v+u)} dudvdv dx = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\lambda v}^{(1-\lambda)u+v} x \frac{p_m(u)p_m(v)}{(1-\lambda)(v+u)} dx dudv = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{p_m(u)p_m(v)}{(1-\lambda)(v+u)} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{\lambda v}^{(1-\lambda)u+v} dudv = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{p_m(u)p_m(v)}{2} [(1-\lambda)u^2 + 2uv + (1+\lambda)v^2] dudv = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{p_m(u)p_m(v)}{2(1-\lambda)(v+u)} [(u+v)^2 + \lambda(v^2 - u^2)] dudv = \int_0^\infty \int_0^\infty p_m(u)p_m(v) \frac{1}{2} [(u+v) + \lambda(v-u)] dudv = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty p_m(u)p_m(v) \frac{1}{2} ududv + \int_0^\infty \int_0^\infty p_m(u)p_m(v) \frac{1}{2} vdudv + \\ &+ \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty p_m(u)p_m(v) \frac{1}{2} vdudv - \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty p_m(u)p_m(v) \frac{1}{2} ududv = \\ &= \frac{1}{2} (M_1(p_m) + M_1(p_m) + \lambda M_1(p_m) - \lambda M_1(p_m)) = M_1(p_m)\end{aligned}$$



Puesto que si que se conserva, nuestro nuevo funcional es válido.

Mediante simulación numérica se puede comprobar como, tal y como hicieron en [13] y [14], esta nueva regla de intercambio hace converger la distribución inicial a una distribución cercana a la forma:

$$p(x) = \left( \frac{\nu}{\langle x \rangle} \right)^\nu \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{x\nu}{\langle x \rangle}}$$

donde  $\nu = 1 + \frac{3\lambda}{1-\lambda}$ .

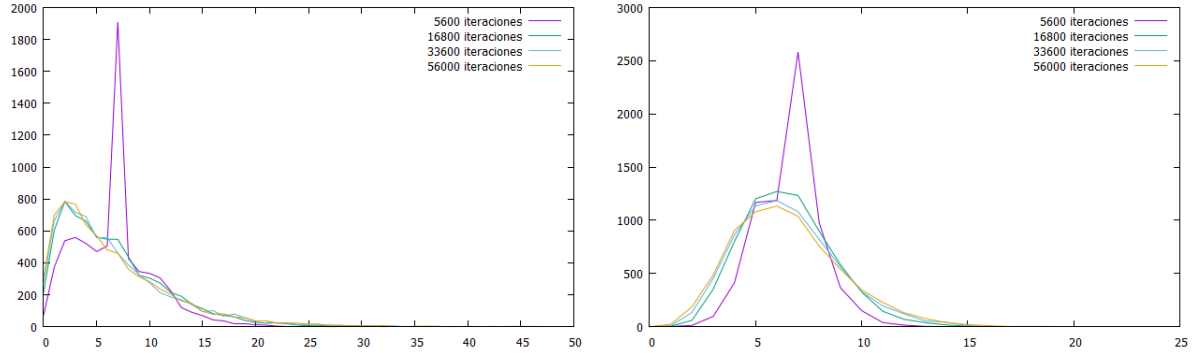


Figura 2.5: Histogramas obtenidos para los valores  $\lambda = 0,2$  en la izquierda y  $\lambda = 0,7$  en la derecha. En ambos casos el número de agentes ha sido 7000, que comenzaron con una cantidad igual de dinero.

Algo similar se puede hacer para el caso de intercambio dirigido con ahorro. Dividiendo la población en ganadores y perdedores determinamos que la probabilidad de que un perdedor llegue a tener dinero  $x$  es:

$$\int_{u>x>\lambda u} \frac{p_m(u)}{(1-\lambda)u} du \tag{2.14}$$

La probabilidad de que el que llegue a tener dinero  $x$  sea un ganador es:

$$\int \int_{(1-\lambda)u+v>x>v} \frac{p_m(u)p_m(v)}{(1-\lambda)u} dudv \tag{2.15}$$

Y así, juntando ambas tenemos:

$$p_{m+1}(x) = \mathcal{T} p_m(x) = \frac{1}{2} \int_{u>x>\lambda u} \frac{p_m(u)}{(1-\lambda)u} du + \frac{1}{2} \int \int_{(1-\lambda)u+v>x>v} \frac{p_m(u)p_m(v)}{(1-\lambda)u} dudv \tag{2.16}$$

Para comprobar que la distribución resultante es una distribución de probabilidad calculamos su momento de orden 0. Reescribiendo (2.14) y desarrollando tenemos:

$$\int_0^\infty \int_{u>x>\lambda u} \frac{p_m(u)}{(1-\lambda)u} dudx = \int_0^\infty \int_{\lambda u}^u \frac{p_m(u)}{(1-\lambda)u} dxdu = 1$$

Haciendo lo mismo con (2.15) obtenemos:

$$\int_0^\infty \int \int_{(1-\lambda)u+v>x>v} \frac{p_m(u)p_m(v)}{(1-\lambda)u} dudvdv = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_v^{(1-\lambda)u+v} \frac{p_m(u)p_m(v)}{(1-\lambda)u} dx dudv = \int_0^\infty \int_0^\infty p_m(u)p_m(v) = 1$$

Luego se trata de una distribución de probabilidad.

Para ver que conserva el dinero medio y que por tanto es un intercambio, calculamos, como siempre, el momento de primer orden. Partiendo de (2.14):

$$\int_0^\infty \int_{\lambda u}^u x \frac{p_m(u)}{(1-\lambda)u} dxdu = \int_0^\infty \frac{(1+\lambda)u}{2} p_m(u) du = \frac{(1+\lambda)}{2} M_1(p_m)$$

Y desde (2.15):

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_v^{(1-\lambda)u+v} x \frac{p_m(u)p_m(v)}{(1-\lambda)u} dx dudv = \int_0^\infty \int_0^\infty p_m(u)p_m(v) \frac{(1-\lambda)u+2v}{2} dudv = \frac{(3-\lambda)}{2} M_1(p_m)$$

De esta forma:

$$M_1(p_{m+1}) = \frac{(1+\lambda)}{4} M_1(p_m) + \frac{(3-\lambda)}{4} M_1(p_m) = M_1(p_m)$$

Y así se trata, por tanto, de un intercambio.

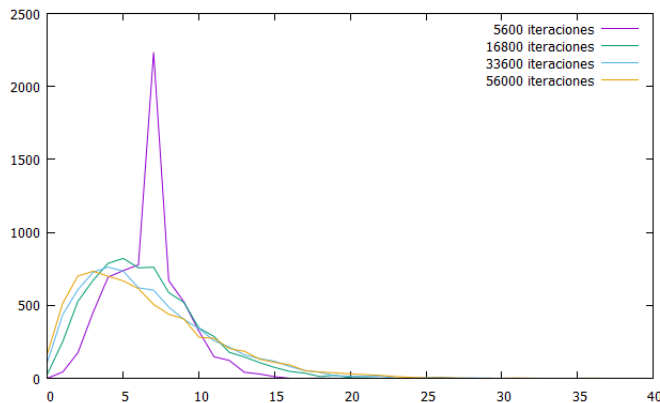


Figura 2.6: Histograma obtenido para un intercambio dirigido con ahorro  $\lambda = 0,5$ . 7000 agentes comenzaron con la misma cantidad de dinero.

Sin pérdida de validez en las demostraciones realizadas en esta sección se puede considerar un modelo con ahorro aleatorio tomando valores en  $(0, 1)$  y que daría lugar para el intercambio dirigido al funcional:

$$p_{m+1}(x) = \mathcal{T} p_m(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{u>x>\lambda u} \frac{p_m(u)}{(1-\lambda)u} dud\lambda + \frac{1}{2} \int_0^1 \int \int_{(1-\lambda)u+v>x>v} \frac{p_m(u)p_m(v)}{(1-\lambda)u} dudvd\lambda$$

Y para el no dirigido:

$$p_{m+1}(x) = \mathcal{T} p_m(x) = \int_0^1 \int \int_{(1-\lambda)u+v>x>\lambda v} \frac{p_m(u)p_m(v)}{(1-\lambda)(v+u)} dudvd\lambda$$

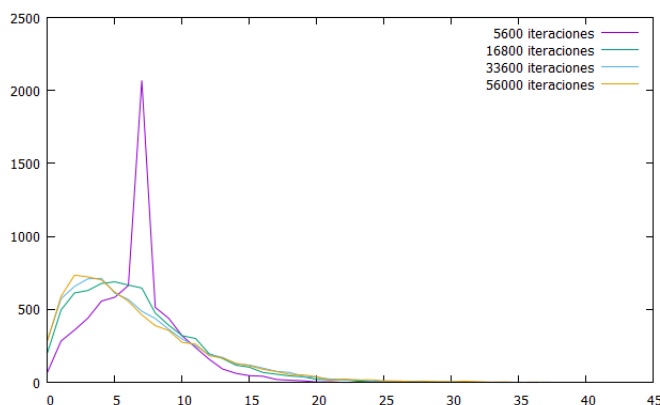


Figura 2.7: Histograma obtenido para el modelo de ahorro aleatorio no dirigido con 7000 agentes comenzando todos con la misma cantidad de dinero.

Otra variación sobre el modelo puede ser la distinción entre el ahorro de un agente con el del otro, permitiendo que puedan ser valores diferentes, para el caso de intercambio no dirigido. Los cálculos y demostraciones siguen siendo análogas.

# Capítulo 3

## 3.1. La distribución del más rico

Durante muchos siglos, la persona más rica de una población era el rey o líder, al que pertenecía prácticamente todo, y medir su riqueza era medir la riqueza de la población. Sin embargo con el tiempo esto ha dejado de ser así. Aumenta el número de revistas y programas interesados en averiguar la persona más rica del mundo y en medir su riqueza. Por tanto, nuestro siguiente paso será considerar cual es la distribución del más rico de nuestros agentes.

Para ello consideraremos nuestra distribución de riqueza como una distribución de probabilidad  $p(x)$ , sobre la que realizaremos  $n$  muestreos, uno por agente, y nos interesaremos por la distribución del máximo de estos muestreos, a la que llamaremos  $P_n(x)$ . Seguiremos los pasos desarrollados en [12]:

Comenzamos considerando el caso más simple de determinar la distribución de probabilidad  $\Pi(X, x_0)$  del máximo de  $x_0$ , un valor fijo y  $x$  siguiendo una variable aleatoria con distribución de densidad  $p(x)$ . Denotemos este máximo como  $X$ . Definamos  $N(x)$  como la probabilidad de que  $x'$  sea menor que  $x$ :

$$N(x) = \int_0^x p(x') dx'$$

De esta forma la distribución de  $X$  es:

$$\Pi(X, x_0) = N(X) \delta(X - x_0) + p(X) H(X - x_0)$$

donde  $\delta(X - x_0)$  es la delta de Dirac que toma valor 1 en  $x_0$  y  $H(X - x_0)$  la función escalón de Heaviside. Obsérvese que puesto que  $N(\infty) = 1$ , se trata ciertamente de una medida de probabilidad:

$$\int_0^\infty \Pi(X, x_0) dX = 1$$

Para acercarnos más al resultado buscado consideremos ahora que  $x_0$  se elige aleatoriamente siguiendo una distribución de probabilidad  $q(x_0)$ . En consecuencia la distribución debe ser promediada entre los posibles valores de  $x_0$ :

$$P(X) = \int_0^\infty q(x_0) \Pi(X, x_0) dx_0 = N(X) q(X) + p(X) \int_0^X q(x') dx' \quad (3.1)$$

Obsérvese que la integración de  $\delta(X - x_0) q(x_0)$  entre todos los posibles valores de  $x_0$  nos da  $q(X)$  por las propiedades de integración la delta de Dirac y que la misma integración de  $q(x_0) H(X - x_0)$  resulta  $\int_0^X q(x') dx'$  por las propiedades de integración de la función de Heaviside. Además se puede comprobar que se trata de una medida de probabilidad integrando para  $x, x' > 0$ :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty P(X) dX &= \int_0^\infty q(X) \int_0^X p(x') dx' dX + \int_0^\infty p(X) \int_0^X q(x') dx' dX = \\ &= \int_0^\infty \int_{x'}^\infty q(X) p(x') dX dx' + \int_0^\infty p(X) \int_0^X q(x') dx' dX = \int_0^\infty p(x) dx \int_0^\infty q(x') dx' = 1 \end{aligned}$$

Sustituyendo ahora  $q(x_0)$  por el máximo de los anteriores muestreos en (3.1), podemos obtener la recurrencia:

$$P_{n+1}(X) = N(X)P_n(X) + p(X) \int_0^X P_n(x') dx' \quad (3.2)$$

donde  $P_n(X)$  es la distribución del máximo en  $n$  muestreos.

Si definimos ahora  $Q_n(X) = \int_0^X P_n(x') dx'$ , como  $P_n(X)$  toma valores en  $[0, \infty)$ , podemos reescribir (3.2) como:

$$\frac{dQ_{n+1}(X)}{dX} = N(X) \frac{dQ_n(X)}{dX} + \frac{dN(X)}{dX} Q_n(X)$$

Que puede ser integrada para obtener:

$$Q_{n+1}(X) = N(X)Q_n(X) + S_n$$

donde  $S_n$  es una constante de integración. Como  $Q_n(0) = 0$  pues es una integral de 0 a 0, despejamos  $S_n = 0 \forall n$ .

Puesto que:

$$Q_1(X) = \int_0^X P_1(x') dx' = \int_0^X p(x') dx' = N(X)$$

Tenemos:

$$Q_n(X) = \left( \int_0^X p(x') dx' \right)^n$$

Y así:

$$P_n(X) = np(X) \left( \int_0^X p(x') dx' \right)^{n-1}$$

Si suponemos que  $p(x)$  es una función suave que decae de manera continua a 0 cuando  $x$  tiende a infinito, algo que sucede con todas las distribuciones estacionarias a las que hemos llegado con nuestros modelos, podemos obtener una aproximación asintótica para valores  $n$  grandes. Para ello comencemos escribiendo  $P_n(X)$  de forma exponencial:

$$P_n(X) = e^{T(n,X)}$$

con

$$T(n,X) = \ln(n) + \ln(p(X)) + (n-1) \ln \left( \int_0^X p(x') dx' \right)$$

Centrémonos ahora en como será la distribución del más rico. Lo más lógico sería que se fuera concentrando alrededor de un cierto valor conforme  $n$  creciera. Este punto sería un máximo de  $P_n(X)$  y, puesto que la exponencial es continuamente creciente, un máximo de  $T(n,X)$ . Derivando esta función con respecto a  $X$  e igualando a 0 obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta T(n,X)}{\delta X} &= \frac{p'(X)}{p(X)} + (n-1) \frac{p(X)}{\int_0^X p(x') dx'} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -p'(X) &= (n-1) \frac{(p(X))^2}{N(X)} \quad \Leftrightarrow \quad n = 1 - \frac{p'(X)N(X)}{(p(X))^2} \end{aligned}$$

LLamamos  $X_n$  al punto que satisface esto para un  $n$  fijo. Considerando  $-\frac{p'}{p^2} = \frac{\delta(1/p)}{\delta X}$  y teniendo en cuenta que en todos nuestros casos  $p(x)$  es una función suave que decae mas rápido que  $X^{-2}$  para hacer el momento de primer orden convergente, concluimos que  $-\frac{p'}{p^2} = \frac{\delta(1/p)}{\delta X}$  crece mas rápido que  $X$  para  $X$  grandes. Como cuando  $X_n$  es grande,  $N(X_n) = \int_0^{X_n} p(x') dx' \approx 1$  determinamos que  $X_n$  crece a infinito a medida que  $n$  tiende a infinito, puesto que  $-\frac{p'}{p^2}$  es una función creciente y por tanto para igualar un crecimiento en  $n$ ,  $X_n$  ha de crecer.

Todo esto puede ser comprobado mediante simulación. Por ejemplo, para el caso de la distribución exponencial podemos comprobar como la aproximación obtenida es similar al resultado obtenido mediante simulación. Para obtener esta última aplicamos la función cuantil a la distribución uniforme en  $(0, 1)$ , ya que c++ solo representa distribuciones uniformes, obteniendo  $n$  muestras. Después buscamos el agente más rico de la muestra y lo incluimos en la población de agentes ricos, para luego representar esta última.

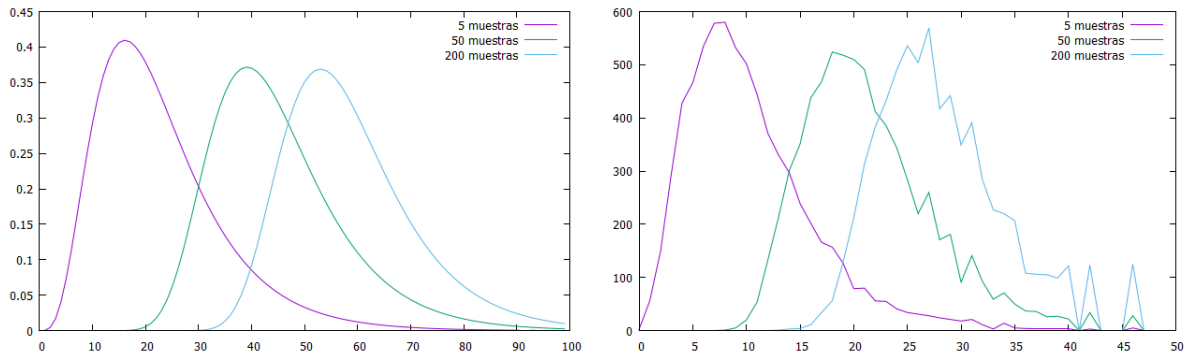


Figura 3.1: En la izquierda: representación de la aproximación obtenida para una distribución exponencial de media 1. A la derecha: resultados obtenidos mediante simulación para una distribución  $p(x) = e^{-x}$  con 7000 muestras y clasificados según su riqueza en 100 intervalos para obtener un histograma.



# Anexos

## 3.2. Anexo I

En este anexo explicaremos 2 cálculos importantes desarrollados en el Capítulo 2. El primero de ellos corresponde a:

$$\mathcal{L} \left[ \frac{1}{x} p(x) \right] (s) = - \int_0^s \widehat{p}(s') ds' + \int_0^\infty \frac{1}{x} p(x) dx$$

Por definición tenemos:

$$\mathcal{L} \left[ \frac{1}{x} p(x) \right] (s) = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{1}{x} p(x) dx$$

Luego:

$$\int_0^\infty \mathcal{L} \left[ \frac{1}{x} p(x) \right] (s') ds' = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s'x} \frac{1}{x} p(x) dx ds'$$

De esta forma:

$$\begin{aligned} \int_0^s \widehat{p}(s') ds' &= \int_0^s \int_0^\infty e^{-s'x} p(x) dx ds' = \int_0^\infty p(x) \int_0^s e^{-s'x} ds' dx = \int_0^\infty p(x) \left( \frac{1 - e^{-sx}}{x} \right) dx = \\ &= \int_0^\infty p(x) \frac{1}{x} dx - \int_0^\infty e^{-sx} \frac{p(x)}{x} dx = -\mathcal{L} \left[ \frac{1}{x} p(x) \right] (s) + \int_0^\infty p(x) \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

Para la segunda:

$$\mathcal{L} \left[ \int_x^\infty \frac{1}{v} p(v) dv \right] (s) = \frac{1}{s} \int_0^s \widehat{p}(s') ds'$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \int_x^\infty \frac{1}{v} p(v) dv \right] (s) &= \int_0^\infty e^{-sx} \int_x^\infty p(v) \frac{1}{v} dv dx = \int_0^\infty p(v) \frac{1}{v} \int_0^v e^{-sx} dx dv = \\ &= \int_0^\infty p(v) \frac{1}{v} \left( \frac{1 - e^{-sv}}{s} \right) dv = \frac{1}{s} \int_0^\infty p(v) \frac{1}{v} dv - \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-sv} p(v) \frac{1}{v} dv = \\ &= \frac{1}{s} \left( \int_0^\infty p(v) \frac{1}{v} dv - \mathcal{L} \left[ \frac{1}{x} p(x) \right] (s) \right) = \frac{1}{s} \left( \int_0^\infty p(v) \frac{1}{v} dv + \int_0^s \widehat{p}(s') ds' - \int_0^\infty \frac{1}{v} p(v) dv \right) = \\ &= \frac{1}{s} \int_0^s \widehat{p}(s') ds' \end{aligned}$$





# Bibliografía

- [1] VIKTOR M. YAKOVENKO, *Econophysics, Statistical Mechanics Approach to* en Encyclopedia of Complexity and System Science, R.A. Meyers (Ed.), Springer, 2009.
- [2] MARCO PATRIARCA & ELS HEINSALU & ANIRBAN CHAKRABORTY *The ABCDs of statistical many-agent economy models*, ArXiv:physics/0611245, 2006.
- [3] ADRIAN DRAGULESKU & VIKTOR M. YAKOVENKO, *Statistical Mechanics of Money* en The European Physical Journal, vol. 17, pág. 723-729, 2000.
- [4] ADRIAN DRAGULESKU & VIKTOR M. YAKOVENKO, *Exponential and power-law probability distributions of wealth as income in the United Kingdom* en Physica A, vol. 299, pág. 213-221, 2001.
- [5] RICARDO LÓPEZ-RUIZ & JAIME SAÑUDO & XAVIER CALBET, *A geometrical derivation of the Boltzmann factor* en American Journal Physics, vol. 76, pág. 780, 2008.
- [6] RICARDO LÓPEZ-RUIZ & JOSÉ LUIS LÓPEZ & XAVIER CALBET, *Exponential wealth distribution: A new approach from functional iteration theory* en EDP Sciences, vol. 36, pág. 189-196, 2012.
- [7] GUY KATRIEL, *Convergence to an exponential wealth distribution in a random market model* en Applicable Analysis, vol. 93, pág. 1256-1263, 2014.
- [8] ARUNABA MUKHERJEA & MURALI RAO & STEPHEN SUEN, *A note on moment generating functions* en Statistics Probability Letters, vol. 76, pág. 1185-1189, 2014.
- [9] JOHN ANGLE, *The surplus theory of social stratification and the size distribution of personal wealth* en Social Forces, vol. 65, pág. 293-326, 1986.
- [10] ISMAEL MARTÍNEZ-MARTÍNEZ & RICARDO LÓPEZ-RUIZ, *Directed Random Markets: Connectivity Determines Money* en International Journal of Modern Physics, vol. 24, 1250088(14 págs.) 2013.
- [11] GUY KATRIEL, *Directed Random Market: the equilibrium distribution* en Acta Applicandae Mathematicae, vol.139, pág. 95-103, 2014.
- [12] YVES POMEAU & RICARDO LÓPEZ-RUIZ, *Study of a model for the distribution of wealth* en Springer Proceedings in Mathematics Statistics, vol. 112, pág 1-12, 2015.
- [13] MARCO PATRIARCA & ANIRBAN CHAKRABORTY & KIMMO KASKY, *Statistical model with a standard  $\Gamma$  distribution* en Physical Review E, vol. 70, 016104(5), 2004.
- [14] MARCO PATRIARCA & ANIRBAN CHAKRABORTY & KIMMO KASKY, *Gibbs versus non-Gibbs distributions in money dynamics* en Physical A, vol. 340, pág 334-339, 2004.

