

Implicaciones de los resultados de PLANCK para los modelos de inflación cosmológica

Trabajo de Fin de Grado realizado por

Rubén Gracia Abad

Bajo la dirección de

Dr. Manuel Asorey Caballeira

Universidad de Zaragoza

Diciembre 2016



Universidad
Zaragoza

Índice

Índice	I
1. Introducción	1
2. Cosmología del universo homogéneo e isotrópico	1
2.1. Estructura causal del universo	2
3. Inflación como solución a los problemas del Modelo Cosmológico Estándar	3
3.1. Problema de la planitud	3
3.2. Problema del horizonte	4
3.3. Problema de los monopolos	4
4. La inflación dirigida por un campo escalar	5
4.1. Dinámica del inflatón en un fondo FLRW	5
4.2. Régimen <i>slow-roll</i>	6
4.3. Magnitud de la inflación	7
5. Modelos inflacionarios	7
5.1. Breve historia de los modelos inflacionarios	7
5.2. Clasificación actual	8
5.3. Modelo de inflación de Starobinsky	9
6. Origen de las inhomogeneidades primordiales	11
6.1. Teoría de las perturbaciones cosmológicas	11
6.2. Perturbaciones escalares	15
6.3. Perturbaciones tensoriales: ondas gravitacionales	19
6.4. Espectro de potencias de las perturbaciones	20
6.5. Conexión de los parámetros observacionales con los parámetros <i>slow-roll</i>	21
7. Test observacional para los distintos modelos inflacionarios	21
7.1. Cálculo de los parámetros observacionales	21
7.2. Resultados de la misión Planck 2015	22
7.3. Implicaciones sobre los modelos	23
8. Conclusiones	24
Referencias	25

1. Introducción

El paradigma de la inflación cosmológica se desarrolló inicialmente con el objetivo de resolver tres de los problemas principales del Modelo Cosmológico Estándar (MCE) basado en el Big Bang. La gran revelación llegó cuando se descubrió que, además de resolver dichos problemas, la inflación servía como mecanismo para la generación de las inhomogeneidades primordiales que actuaron como semillas para la formación de estructuras. Es sin duda esto lo que la hacía atractiva frente a otros paradigmas.

Durante los últimos 35 años, la inflación ha ido ganando fuerza frente a otras teorías alternativas apoyándose en las observaciones astrofísicas. Sin embargo, un gran número de modelos inflacionarios han sido desarrollados durante esos años, de los cuales solo uno debe ser el correcto. A falta de una teoría completa sobre los aspectos microscópicos de la inflación, la única manera de buscar este modelo se basa en una mejora de las observaciones que nos den las pistas necesarias para forjarlo.

Recientemente la misión Planck ha realizado una recopilación de datos experimentales basados en mediciones de las anisotropías del fondo de microondas. Estos datos, aun siendo insuficientes para poder señalar un solo modelo como el correcto, pueden servir para dirigir las investigaciones futuras en la senda adecuada.

Motivados por los resultados de las mediciones, el objetivo de este trabajo será el de contrastar algunos de los modelos más característicos de la inflación con los datos arrojados por Planck.

En primer lugar se mostrarán algunos de los aspectos más generales de la inflación, para después adentrarnos en el universo inhomogéneo. Explicaremos brevemente algunos aspectos cuánticos que nos mostrarán la capacidad de la inflación para generar las inhomogeneidades primordiales que dieron lugar a las grandes estructuras.

Finalmente conectaremos los modelos con las observaciones a través de dos parámetros experimentales, el índice espectral y la razón tensor-escalar. Ambos nos permitan comparar y descartar modelos, y se verá como el modelo inflacionario original de Starobinsky, sale reforzado frente al resto de modelos históricamente posteriores.

2. Cosmología del universo homogéneo e isótropo

La cosmología actual se sustenta sobre las ecuaciones de Einstein. Éstas dan como única solución compatible con el universo homogéneo e isótropo que muestran las observaciones, la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [1], que en coordenadas comóviles¹ tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1)$$

donde k es la curvatura de las hipersuperficies espaciales que vale 1, 0 o -1 dependiendo de si el universo es elíptico, plano o hiperbólico respectivamente. El factor de escala $a(t)$ caracteriza el tamaño de las distancias en el universo y crece conforme éste se expande. Depende de t , que es el tiempo cosmológico.

¹Las coordenadas comóviles no tienen en cuenta la expansión del universo y por tanto, en estas coordenadas dos objetos del universo siempre están a la misma distancia a excepción de movimientos que puedan realizar uno respecto al otro. Una distancia comóvil se relaciona con una física multiplicándola por el factor de escala [3].

Combinando las ecuaciones de Einstein con (1) encontramos las ecuaciones de Friedmann que nos dicen cómo se expande el universo:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\rho}{3M_{Pl}^2} - \frac{k}{a^2} \quad (2)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6M_{Pl}^2}(\rho + 3p) \quad (3)$$

donde M_{Pl} es la masa reducida de Planck. ρ y p son la densidad de energía y presión del fluido cosmológico respectivamente. La conservación de energía-momento se traduce en la ecuación de continuidad [1]:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (4)$$

donde $H \equiv \dot{a}/a$ es el parámetro de Hubble.

Podemos caracterizar la materia del universo mediante el tensor de energía-impulso. En concreto la materia de un universo homogéneo e isótropo se caracteriza a través del tensor energía-impulso de un fluido perfecto [4]:

$$T^\mu{}_\nu = (\rho + p)U^\mu U_\nu + p\delta^\mu_\nu \quad (5)$$

donde U_μ es la cuadrivelocidad que se define como $U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$, con s tiempo propio. δ^μ_ν es la delta de Kronecker.

La evolución del universo queda determinada por (2) y (3) asumiendo que las propiedades del fluido del universo quedan representadas por una ecuación de estado del tipo $p = w\rho$. Esta w es característica del tipo de materia que consideremos: $w = 1/3$ para partículas relativistas y $w = 0$ no-relativistas.

Según el MCE, durante su historia el universo atravesó una primera etapa de dominio de la radiación en la cual el factor de escala creció como $a(t) \propto t^{1/2}$. Después dominó la materia y el factor de escala cambió según $a(t) \propto t^{2/3}$ [1][3].

Para cuantificar la contribución de cada componente de materia a la densidad energética total del universo se define el parámetro de densidad del componente i como [1][2][4]:

$$\Omega_{(i)} = \frac{\rho_0^{(i)}}{\rho_{cr}} \quad (6)$$

donde $\rho_0^{(i)}$ es la densidad de la componente i (bariones, fotones...) y ρ_{cr} es la densidad de energía crítica que corresponde con el valor que tiene que tener la densidad del universo para que sea espacialmente plano ($k = 0$).

Conviene reescribir la métrica usando el tiempo conforme τ , que se relaciona con el tiempo cosmológico t mediante $\tau = \int \frac{dt}{a(t)}$, permitiendo poner (1) como:

$$ds^2 = a^2(\tau) \left[-d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (7)$$

2.1. Estructura causal del universo

La estructura causal del universo viene determinada por la velocidad finita de la luz. Ésta permite definir el horizonte de partículas físico d_p como la máxima distancia física que la luz ha podido recorrer hacia un observador en la edad del universo. En términos comóviles se trata de la máxima distancia

comóvil χ_p que la luz puede recorrer desde el origen del universo hasta un tiempo dado. El horizonte de partículas comóvil se relaciona con el físico multiplicándolo por el factor de escala.

Por otro lado la expansión del universo viene gobernada por la ley de Hubble según la cual la velocidad a la que se separan dos objetos en el universo es proporcional a su distancia:

$$v = Hd \tag{8}$$

La constante de proporcionalidad es el parámetro de Hubble $H \equiv \dot{a}/a$ que cambia con el tiempo.

Esta ley permite definir el radio de Hubble físico H^{-1} (en unidades de $c = 1$, ver apéndice A para convenciones y unidades) como la distancia a partir de la cual los objetos se separan a velocidades mayores que la de la luz. Comúnmente se trabaja con el radio de Hubble comóvil $(aH)^{-1}$. Se llama esfera de Hubble centrada en un punto a la esfera cuyo radio es el radio de Hubble de un observador en ese punto.

Es importante pues hacer la siguiente distinción [4]. Dada una distancia comóvil λ entre dos puntos, si $\lambda > \chi_p$ los puntos no han estado nunca en contacto causal, mientras que si $\lambda > (aH)^{-1}$ los puntos no se encuentran en contacto causal ahora pero pudieron haberlo estado en el pasado.

Sin embargo, el radio comóvil de Hubble evoluciona en el tiempo dependiendo de cómo se expanda el universo. Esto implica que en un momento dado algunas zonas del universo que estuvieron en contacto causal puedan dejar de estarlo y al revés. Veremos en qué condiciones sucede esto.

3. Inflación como solución a los problemas del Modelo Cosmológico Estándar

El MCE anterior a los años 80 predecía con éxito fenómenos como el fondo cósmico de microondas (CMB) y la nucleosíntesis primordial. Sin embargo conciliar dicho modelo con las observaciones implicaba algunos problemas sobre las condiciones iniciales del universo [3]. En realidad, nada impedía partir de unas condiciones tan ajustadas como las que exige el MCE, pero resultaba más atractivo buscar unas condiciones iniciales más naturales. Es concreto se propone la inflación.

Se entiende como inflación, un periodo temprano de la historia del universo en el cual el factor de escala creció de manera acelerada en un intervalo de tiempo muy corto. Al acabar la inflación el universo se decelera y entra en la etapa de evolución estándar dominada por la radiación.

A continuación explicaremos brevemente los tres principales problemas del MCE preinflacionario y cómo son resueltos por inflación.

3.1. Problema de la planitud

Manipulando (2) llegamos a la siguiente expresión del parámetro densidad en función del radio comóvil de Hubble:

$$|\Omega - 1| = |k|(aH)^{-2} \tag{9}$$

La evolución del radio comóvil viene dada por:

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} \tag{10}$$

Según el MCE, hay un periodo de dominio de la radiación seguido de uno de dominio de materia. En ambos, $\ddot{a} < 0$ y entonces el radio comóvil de Hubble $(aH)^{-1}$ siempre crece. Por tanto según la expresión (9) Ω se aleja de uno. Se dice que $\Omega = 1$ es un punto inestable del modelo [2].

Por otro lado las observaciones actuales muestran que la densidad de energía es increíblemente cercana a la densidad crítica ρ_{cr} y por lo tanto Ω está muy próxima a uno [2]. Dado que se trata de un punto inestable, en el pasado tuvo que estar aún más cerca de uno. Sin embargo parece poco natural que el universo partiese de una condición inicial tan ajustada. Esto se conoce como problema de la planitud.

Un periodo de inflación soluciona este problema ya que un crecimiento acelerado del factor de escala implica según (10) un decrecimiento del radio comóvil de Hubble. Si este periodo de expansión acelerada es lo suficientemente largo lleva Ω tan cercana a uno que, aunque tras el periodo inflacionario sea de nuevo repelida, permanecerá muy cercana a uno hasta nuestros días. Entonces de alguna manera inflación borra cualquier rastro de curvatura independientemente de las condiciones iniciales.

3.2. Problema del horizonte

Las observaciones confirman que el universo era enormemente homogéneo (con desviaciones de 1 parte entre 100000 [7]) cuando se formó la CMB. Sin embargo el MCE concluye que en el momento en el que se formó no había transcurrido el tiempo necesario como para que se estableciese dicha homogeneidad [2][4]. En concreto ningún par de puntos separados más de 2° habrían estado en contacto causal en el instante de su formación [2]. Esto se conoce como problema del horizonte.

Si hubo inflación y ésta duró lo suficiente, se puede dar un escenario preinflacionario en el que todo el universo observable estuviese dentro de la esfera de Hubble y por tanto estuviese en contacto causal, estableciéndose la homogeneidad [4]. En un momento dado la inflación provocó que el radio de Hubble comóvil decreciese y sacó el universo observable de dicha esfera rompiendo el contacto causal. Tras la inflación el radio de Hubble vuelve a crecer y las escalas volvieron a entrar en el límite de Hubble.

En resumen, antes de la inflación el universo observable se encontraba en contacto causal y tras un periodo de expansión acelerada este contacto se rompe quedando los puntos aislados. La homogeneidad que existía anteriormente queda impresa al formarse la CMB.

3.3. Problema de los monopolos

El modelo actual de física de partículas predice que, como resultado de la ruptura espontánea de simetría que tuvo lugar cuando la temperatura del universo era del orden de $T \sim 10^{16} GeV$ [1], se produjeron monopolos magnéticos que a día de hoy, no solo deberían ser observables, sino que deberían gobernar el universo actual debido a su gran densidad que dominaría sobre la densidad total del universo. Estas reliquias no han sido observadas hasta la fecha.

Si hubo inflación, la rápida expansión producida diluye los monopolos, ya que la densidad de energía durante la inflación cae más lentamente que la densidad de reliquias. En concreto como a^{-2} veces más lenta [2]. Rápidamente la densidad de reliquias se vuelve despreciable y no domina.

4. La inflación dirigida por un campo escalar

Como hemos visto inflación implica $\ddot{a} > 0$, para lo que necesitamos según (3) un universo dominado por una materia cuya ecuación de estado $p = w\rho$ cumpla $1 + 3w < 0$, dando una presión lo suficientemente negativa.

Inicialmente se propuso como conductor de la inflación una constante cosmológica Λ cuya ecuación de estado es $p = -\rho$, que resulta en una expansión de tipo de Sitter, es decir, perfectamente exponencial, en la que H se mantiene constante:

$$a(t) \propto \exp(Ht) \quad (11)$$

Sin embargo esto no es deseable ya que Λ nunca decae y la inflación duraría para siempre sin poder llegar a un universo FLRW como el actual [5]. Para poder ligar con éxito ambos periodos es necesario que el parámetro de Hubble varíe ligeramente durante la inflación, cosa que no sucede en una expansión de de Sitter.

Esto se traduce en que la inflación debe estar conducida por una materia cuya ecuación de estado no sea exactamente igual que la de Λ pero que no se aleje más de un 1% de ésta con el objetivo de resolver con éxito los problemas [5], por lo que en muchas ocasiones de Sitter es una buena aproximación de orden cero.

El candidato natural para conducir la inflación es un campo escalar [5][4][1]. Este campo escalar recibe el nombre de inflatón. Se puede definir pues la inflación como un periodo en el que la densidad de energía estaba gobernada por un campo escalar $\phi(t)$, en concreto por su energía potencial. La contribución del resto de componentes es despreciable durante este periodo.

4.1. Dinámica del inflatón en un fondo FLRW

La dinámica del campo escalar en el caso mínimamente acoplado a la gravedad está gobernada por la acción [1]:

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) \right) \quad (12)$$

donde g es el determinante del tensor métrico, $g = \det(g_{\mu\nu})$. El inflatón en el sistema de unidades naturales tiene dimensiones de masa de Planck M_{Pl} .

Asumiendo que se comporta como un fluido ideal [1][2] y considerándolo homogéneo espacialmente, es decir, $\phi \equiv \phi(t)$, se encuentra que este campo está caracterizado por una densidad de energía y una presión dadas por:

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (13)$$

$$p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (14)$$

donde $\dot{\phi}^2$ se interpreta como un término cinético y $V(\phi)$ es el potencial del campo escalar. Este potencial se deja como una función libre a falta de un modelo de física de partículas que soporte la inflación desde un punto de vista microscópico [2][4]. Los diferentes modelos inflacionarios se corresponden con diferentes potenciales.

Las ecuaciones que gobiernan la dinámica del campo escalar y de la geometría en un universo FLRW

son:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0 \quad (15)$$

$$H^2 = \frac{1}{3M_{Pl}^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (16)$$

donde $V_\phi \equiv \frac{\partial V}{\partial \phi}$. $H\dot{\phi}$ se conoce como término de fricción. La primera es la ecuación de Klein-Gordon y la segunda es la ecuación de Friedmann (2) del campo en la cual se ha omitido el término de curvatura ya que rápidamente se hace despreciable una vez la inflación se ha desencadenado [2].

4.2. Régimen *slow-roll*

Definimos una w efectiva del campo² como el cociente entre presión y densidad:

$$w = \frac{p}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)} \quad (17)$$

Para tener $w \simeq -1$ como necesitamos, se debe cumplir que el término potencial sea mucho más grande que el término cinético, es decir, $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$.

Tendremos inflación siempre que el potencial domine. Esto implica que la forma del potencial debe ser lo suficientemente plana como para que domine el tiempo necesario para resolver los problemas, lo que se traduce en la condición añadida $\ddot{\phi} \ll V_\phi$ para que el término cinético no cambie más rápido que el potencial. El campo se deslizará lentamente por el potencial hasta alcanzar un mínimo en el cual la inflación acabará mediante un proceso de recalentamiento dando paso a la época de dominio de la radiación [2]. Estas condiciones se conocen como la aproximación *slow-roll*.

Ambas condiciones se plasman sobre las ecuaciones de movimiento (15) y (16) de la siguiente manera:

$$3H\dot{\phi} \simeq -V_\phi \quad (18)$$

$$H^2 \simeq \frac{1}{3M_{Pl}^2} V(\phi) \quad (19)$$

La aproximación *slow-roll* se cuantifica a través de los parámetros *slow-roll* [1]. El primero ϵ_V se obtiene de la condición sobre $\dot{\phi}^2$, el segundo η_V de la condición sobre $\ddot{\phi}$ [1][4]:

$$\epsilon_V \equiv \frac{M_{Pl}^2}{2} \left(\frac{V_\phi}{V} \right)^2 \quad (20)$$

$$\eta_V \equiv M_{Pl}^2 \frac{V_{\phi\phi}}{V} \quad (21)$$

ϵ_V mide la pendiente del potencial y η_V la curvatura. La presencia de la masa de Planck en ambos implica su adimensionalidad.

Para que se satisfaga la aproximación *slow-roll* debe cumplirse $\epsilon_V \ll 1$ y $|\eta_V| \ll 1$, lo que se traduce en que la pendiente y la curvatura del potencial deben ser lo suficientemente pequeñas. La inflación se acaba cuando $\epsilon_V \rightarrow 1$ y $|\eta_V| \rightarrow 1$.

²El campo no posee una ecuación de estado del tipo $p = p(\rho)$ ya que para un mismo valor de ρ puede haber varios de p en función de como se distribuye ρ en (13) entre la energía potencial y la cinética [3].

4.3. Magnitud de la inflación

Una manera de medir la cantidad de inflación es usar el número de *e-folds* que se define como $N \equiv \ln a$ [9]. En concreto definimos el número de *e-folds* entre un tiempo t y el final de la inflación como:

$$N \equiv \ln \left(\frac{a(t_{end})}{a(t)} \right) \quad (22)$$

Vemos que N es una función decreciente del factor de escala y se hace cero cuando se llega al final de la inflación.

Para resolver los problemas del MCE necesitamos un mínimo de $60 - 70$ *e-folds* de inflación [1][2][9]. Se estima que todas las escalas cosmológicas de interés salen del horizonte en un rango de 9 *e-folds* [3], siendo la más pequeña del orden de 1 *Mpc* y la más grande del orden del universo observable.

Podemos poner N en función del campo teniendo en cuenta que $dN = -d \ln a = -H dt = -(H/\dot{\phi}) d\phi$ y usando (18) y (19) [2]:

$$N \equiv \ln \frac{a(t_{end})}{a(t)} = - \int_t^{t_{end}} H dt \rightarrow N(\phi) \simeq \int_{\phi}^{\phi_{end}} \frac{V}{M_{Pl}^2 V_{\phi}} d\phi \quad (23)$$

5. Modelos inflacionarios

Veamos brevemente una clasificación de los modelos inflacionarios primero desde un punto de vista histórico, en función de como ha evolucionado el mecanismo que produce la inflación, y seguidamente desde el punto de vista del lagrangiano del campo.

5.1. Breve historia de los modelos inflacionarios

La idea original de los mecanismos inflacionarios fue introducida por Alexei Starobinsky en 1980. Su modelo se basó en correcciones cuánticas de la gravedad que modificaban la acción de Hilbert-Einstein produciendo inflación [14]. Starobinsky se centró solo en resolver el problema de la singularidad del MCE y su modelo incluía algunos problemas de condiciones iniciales. Por ello pasó desapercibido inicialmente.

Alan Guth propone en 1981 el primer modelo que se centra en los problemas del MCE. De él se deriva la familia de modelos conocida como inflación antigua basados en la referencia [6], que se fundamentan en una transición de fase de primer orden del campo [12][5] entre dos mínimos del potencial (ver Fig.1 izquierda). En estos modelos la inflación no acaba adecuadamente, como bien planteaba el propio Guth en el artículo original.

Como solución a la vieja inflación aparecen los modelos de la nueva inflación basados en transiciones de fase de segundo orden [5][11]. Estos modelos ya contaban con la aproximación *slow-roll* y estaban dirigidos por potenciales tipo Coleman-Weinberg (ver Fig.1 centro). Sin embargo estos modelos también tenían problemas (ver Ref.[12] para más detalle) que los llevaron a ser descartados.

Finalmente A. Linde en 1983 propone la inflación caótica [13][5]. Las condiciones iniciales en estos modelos eran mucho más naturales y no se basaban en transiciones de fase. Incluye prácticamente cualquier potencial con una zona lo suficientemente plana como para permitir régimen *slow-roll* (ver Fig.1 derecha).

Estos modelos se basan en la idea de que el universo parte de la era de Planck, inmediatamente después de la cual la densidad de energía, dominada por el inflatón, y compuesta además de por el término cinético y el potencial del campo escalar, por su gradiente³, es del orden de la densidad de Planck [12][21]:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\phi)^2 + V(\phi) \sim M_{Pl}^4 \quad (24)$$

Inicialmente el campo puede tomar valores muy distintos en distintas regiones del espacio con la única restricción de que (24) se cumpla. Por tanto el gradiente no es despreciable en principio.

Basta que en un momento dado, no muy posterior al tiempo de Planck t_{Pl} , en un dominio espacial de tamaño del orden de la longitud de Planck l_{Pl} , el campo alcance una zona lo suficientemente plana del potencial tal que $V(\phi) \sim M_{Pl}^4$, para que la inflación se desencadene [13]. En tal caso, teniendo en cuenta la condición (24) el término cinético y el gradiente se hacen despreciables frente al de potencial y se entra en el régimen *slow-roll*. Finalmente el campo cae en un mínimo y el universo alcanza la etapa de evolución estándar. El dominio inicial con tamaño del orden de la escala de Planck dará lugar tras el periodo inflacionario al universo observable.

Esta visión está muy aceptada por muchos de los modelos inflacionarios debido a que permite un universo nacido de unas condiciones iniciales enormemente naturales.

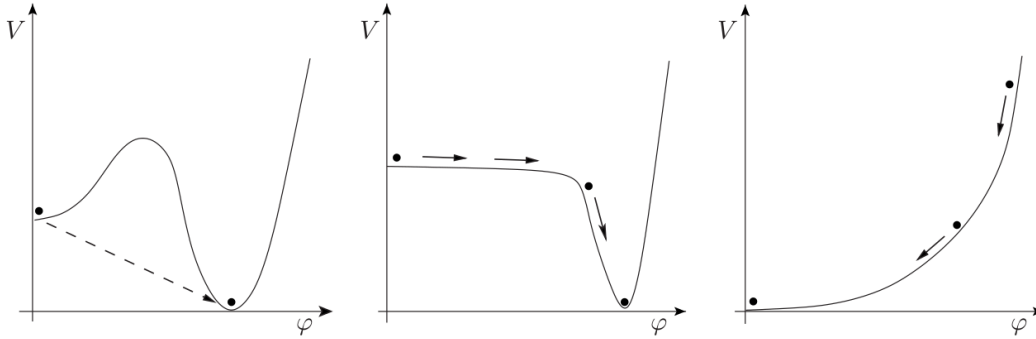


Figura 1: Transición de primer orden(izquierda), de segundo orden(centro) y caótico(derecha)(imagen Ref.[5]).

5.2. Clasificación actual

La clasificación actual se lleva a cabo en función de cómo es el potencial escalar. Nos limitaremos solo a los que involucran un solo campo escalar. Se pueden dividir en dos grupos en función de si la distancia que recorre el campo $\Delta\phi$ durante el periodo inflacionario es mayor o menor (medida en unidades de Planck) [1][4]:

- Modelos de campo débil: el campo se mueve sobre una distancia muy corta ($\Delta\phi < M_{Pl}$).

Generalmente el campo se desliza desde un punto inestable en $\phi = 0$ hacia un estado de vacío en $\phi = \mu$.

Los modelos de este tipo predicen que la amplitud de las ondas gravitacionales formadas durante la inflación⁴ es demasiado pequeña para ser detectadas [4].

³Cuando explicamos la dinámica de ϕ no consideramos el gradiente porque asumimos que el campo era homogéneo.

⁴Se verá posteriormente que las fluctuaciones del campo inflatón dan lugar a perturbaciones de la métrica que pueden propagarse en forma de ondas gravitacionales.

Dado que el campo se mueve por un punto inestable el parámetro η_V que depende de la curvatura del potencial, η_V es negativo. El parámetro ϵ_V es positivo por definición. En estos modelos generalmente exigir que se cumplan las condiciones *slow-roll* implica $\phi \ll \mu \lesssim M_{Pl}$.

- Modelos de campo fuerte: el inflatón comienza tomando valores con $\phi \gg M_{Pl}$ y se desliza hasta el mínimo en $\phi = 0$. Inflación acaba cuando las condiciones *slow-roll* dejan de satisfacerse. En este caso las ondas gravitacionales que se producen tienen mayor amplitud y podrían llegar a observarse en el futuro [4].

Los potenciales más típicos en este tipo de modelos y con los que principalmente trabajaremos son los monómicos:

$$V(\phi) = \lambda_n \phi^n \tag{25}$$

Generalmente se engloban en los modelos caóticos por lo que se tiene que inicialmente $V(\phi) \lesssim M_{Pl}^4$.

Sobre los parámetros *slow-roll* estas condiciones se traducen en η_V positivo y menor que ϵ_V .

Hay que comentar que los potenciales (25) en casos con n impar no tienen un mínimo definido. Son inestables y en principio la inflación nunca acaba. Para que acabe se requieren otros mecanismos adicionales que dañen el potencial [5][11].

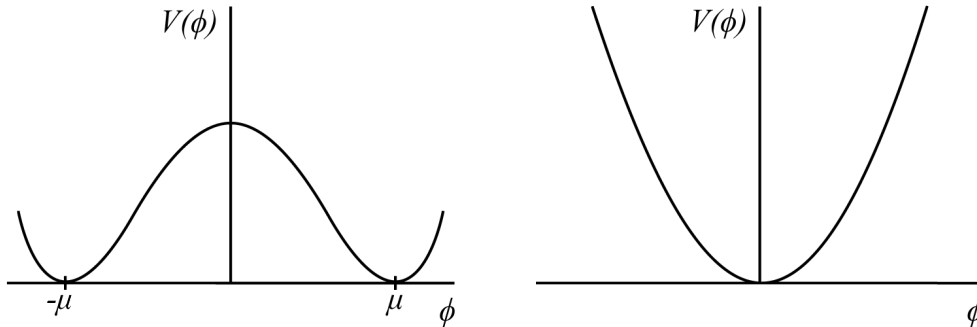


Figura 2: Ejemplos de $V(\phi)$ para campo débil(izquierda) y de campo fuerte(derecha)(imagen Ref.[1]).

5.3. Modelo de inflación de Starobinsky

Hacemos mención especial al modelo inflacionario de A. Starobinsky debido a su excepcionalidad. No entraremos en detalles sobre el modelo para lo que se recomiendan las referencias [14], [15] y [16].

Starobinsky introduce correcciones cuánticas de la gravedad durante la edad temprana del universo y esto le lleva a modificar la acción de Hilbert-Einstein añadiendo un término cuadrático en el escalar de curvatura. Este término bajo ciertas condiciones puede actuar como una constante cosmológica dando lugar a una expansión acelerada inestable que acaba decayendo dando paso a la evolución estándar del universo. En este caso no hay campo inflatón como tal, sino que hay un inflatón efectivo de origen puramente geométrico.

La acción modificada tiene la forma:

$$S = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{R^2}{6M^2} \right) \tag{26}$$

donde M es un parámetro del modelo con dimensiones de masa y R es el escalar de curvatura. Las ecuaciones de movimiento tienen una solución inflacionaria para $M \ll M_{Pl}$ [12].

Esta acción, a nivel clásico, es conformalmente equivalente a la de Hilbert-Einstein más un campo escalar efectivo [18]. A través de la transformación conforme de la métrica $g_{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu} = e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}}} g_{\mu\nu}$, llegamos a una acción equivalente con un potencial efectivo (ver Fig.3):

$$V_{ef}(\phi) = \frac{3}{4} M_{Pl}^2 M^2 \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}}} \right)^2 \quad (27)$$

En este caso el campo ϕ recibe el nombre de escalarón y juega el papel del inflatón. M se interpreta como la masa del escalarón. La diferencia es que este campo no supone un grado de libertad escalar adicional que se añade a la acción gravitatoria, como en el caso del inflatón, sino que es parte de ella.

En el límite $\phi/M_{Pl} \gg 1$ el potencial tiende al valor $V_0 = \frac{3}{4} M^2 M_{Pl}^2$, donde es lo suficientemente plano como para tener *slow-roll*. Por otro lado en el límite $|\phi|/M_{Pl} \ll 1$, es decir, cerca del origen, el potencial tiende al potencial armónico $V(\phi) = \frac{1}{2} M^2 \phi^2$. Esto nos indica que en el origen el potencial oscila dando lugar al recalentamiento. Finalmente decae.

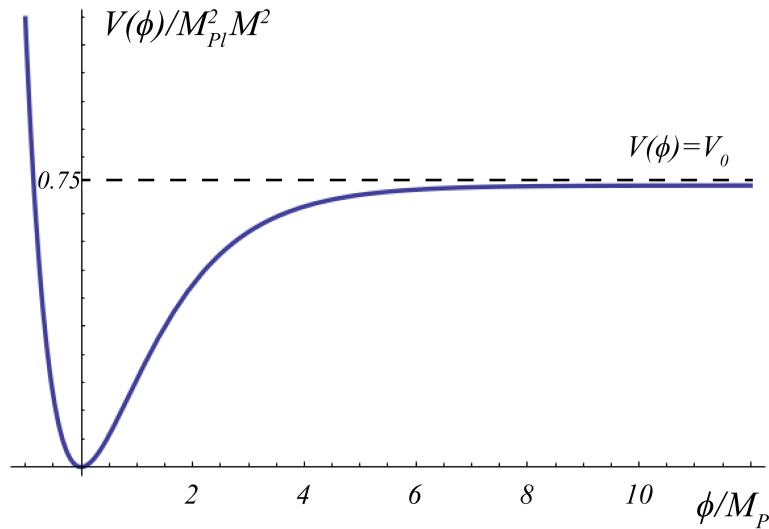


Figura 3: Potencial de Starobinsky.

La amplitud de las ondas gravitacionales predicha por este modelo es demasiado pequeña para ser observada, por lo que lo incluimos en los de campo débil.

Condiciones iniciales en el modelo de Starobinsky

Tal y como se comentó anteriormente, en la teoría de la inflación caótica se asume que el universo sale de la era de Planck e inmediatamente después, un pequeño dominio de tamaño del orden de l_{Pl} , alcanza una densidad de energía del orden de la densidad de Planck, y la inflación se desencadena.

La diferencia en el modelo de Starobinsky es que el potencial tiene una cota superior de valor $V_0 \ll M_{Pl}^4$ y por tanto plantea una inflación que tiene lugar a escalas de energía menores que la densidad de Planck, con un dominio preinflacionario del término cinético. Para que el potencial llegue

a dominar en una etapa posterior es necesaria una homogeneidad inicial a escalas mucho mayores que l_{Pl} [20][21].

Todo esto lleva a la conclusión de que millones de regiones en principio causalmente desconectadas tuvieron que ser muy similares inicialmente sin ningún tipo de causa dinámica, lo que limita la capacidad de la inflación de dotar al universo de unas condiciones iniciales naturales. En los modelos de inflación caótica esto no sucede y la homogeneidad inicial requerida es mínima.

6. Origen de las inhomogeneidades primordiales

Como hemos visto la inflación nos soluciona algunas piezas del puzzle del MCE, pero no es la única teoría que soluciona estos problemas (unos cuantos ejemplos se pueden encontrar en [11]). Lo que la hace más fuerte frente al resto de opciones es que además da una explicación a la formación de estructuras en el universo y a las pequeñas fluctuaciones de temperatura que se observan en la CMB.

6.1. Teoría de las perturbaciones cosmológicas

El marco dentro del cual se trata este aspecto de la inflación se conoce como teoría de las perturbaciones cosmológicas.

En muchos casos de la cosmología nos podemos restringir a un universo homogéneo e isótropo, pero esto solo es válido a escalas grandes ya que en realidad existen desviaciones que van creciendo conforme vamos a escalas más pequeñas. Las inhomogeneidades crecen, debido a la naturaleza atractiva de la gravedad. Esto implica que fueron más pequeñas en el pasado. En el momento en el que se formó la CMB estas inhomogeneidades eran del orden de 10^{-5} [4]. Debido a su pequeña amplitud podemos tratar dichas inhomogeneidades como perturbaciones del universo homogéneo e isótropo o universo FLRW, más concretamente como perturbaciones lineales [1].

Como consecuencia podemos separar todas las variables $X(t, \vec{x})$ que ahora dependerán de los puntos del espacio-tiempo, en una parte homogénea $\bar{X}(t)$ que depende únicamente del tiempo cosmológico, y una perturbación que contiene las variaciones y cumple $\delta X(t, \vec{x}) \ll \bar{X}(t)$ [1][4]:

$$X(t, \vec{x}) \equiv \bar{X}(t) + \delta X(t, \vec{x}) \quad X \equiv g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu} \dots \quad (28)$$

Los sectores perturbados son dos: por un lado tenemos las perturbaciones en la materia $\delta T_{\mu\nu}$ que durante la inflación, debido al dominio del inflatón sobre el resto de componentes se limitan fundamentalmente a fluctuaciones del campo escalar $\delta\phi$. Estas fluctuaciones generan por otro lado a través de las ecuaciones de Einstein fluctuaciones en la métrica, que a su vez producen mediante la ecuación de Klein-Gordon una reacción en las fluctuaciones del campo [19]. Por tanto ambas fluctuaciones están acopladas y deben ser tratadas al mismo tiempo.

1. *Perturbaciones en la métrica*

Como métrica de fondo usaremos la métrica de FLRW (1) y por simplicidad consideraremos un universo llano ($k = 0$) usando el tiempo conforme:

$$ds^2 = a^2(\tau) [-d\tau^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j] \quad (29)$$

La forma más general de una métrica perturbada linealmente es la siguiente [1][4]:

$$ds^2 = a^2 [-(1 + 2A)d\tau^2 + 2B_i dx^i d\tau + (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j] \quad (30)$$

donde A es un campo escalar, B_i un campo vectorial y h_{ij} un campo tensorial, todos funciones del tiempo y del espacio.

Dado que es un tensor simétrico de orden dos en un espacio-tiempo de dimensión 4, tenemos pues que la perturbación de la métrica se reparte en 10 grados de libertad.

Descomposición SVT

Las perturbaciones se clasifican en función de cómo transforman bajo operaciones del grupo de las rotaciones espaciales ($SO(3)$). A su vez una perturbación arbitraria se puede descomponer en elementos que transforman según las representaciones irreducibles de dicho grupo [4][9]. Según esto pueden descomponerse en una parte escalar, una vectorial, y una tensorial. Esto se conoce como descomposición SVT (*Scalar-Vector-Tensor*).

La ventaja de descomponer las perturbaciones de esta manera es que al ser el espacio-tiempo de fondo invariante bajo las operaciones del grupo $SO(3)$, las componentes escalares, vectoriales y tensoriales evolucionan independientemente siempre que nos restrinjamos a orden lineal en las perturbaciones [4]. Esto nos permite estudiarlas por separado.

Aplicar la descomposición SVT a la métrica perturbada (30) supone descomponer la parte vectorial B_i y la tensorial h_{ij} [1]. La parte escalar A ya transforma como una perturbación escalar y por tanto no hay que descomponerla.

La descomposición de la parte vectorial es simplemente el teorema de Helmholtz, según el cual podemos escribir el campo vectorial como suma de un gradiente y un rotacional:

$$B_i = \partial_i B + \hat{B}_i \quad \partial_i \hat{B}_i = 0 \quad (31)$$

donde ∂_i indica divergencia.

De la misma manera la parte tensorial:

$$h_{ij} = 2C\delta_{ij} + 2\partial_{(i}\partial_{j)}E + 2\partial_{(i}\hat{E}_{j)} + 2\hat{E}_{ij} \quad (32)$$

donde:

$$\partial_{(i}\partial_{j)}E \equiv \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2 \right) E \quad \partial_{(i}\hat{E}_{j)} \equiv \frac{1}{2} \left(\partial_i\hat{E}_j + \partial_j\hat{E}_i \right) \quad (33)$$

Las magnitudes con circunflejo encima tienen divergencia cero, es decir, $\partial_i\hat{E}_i = 0$ y $\partial^i\hat{E}_{ij} = 0$. La perturbación tensorial tiene traza cero: $\hat{E}^i{}_i = 0$. C y E son escalares.

No todos los tipos de perturbaciones tienen los mismos efectos [5][4][9]: las escalares dan origen a las inhomogeneidades que conducen a la formación de estructuras y a las fluctuaciones de temperatura de la CMB. Las vectoriales representan vorticidad y no son producidas por la inflación. Las tensoriales representan ondas gravitacionales que no afectan a la formación de estructuras pero que tienen su importancia a nivel observacional y a nivel teórico para la discriminación de modelos.

Resumiendo, hemos distribuido los 10 grados de libertad originales de la métrica (30) en 4 escalares: A, C, B, E , en 4 vectoriales: \hat{B}_i, \hat{E}_i y 2 tensoriales: \hat{E}_{ij} .

2. Perturbaciones en la materia

La perturbación del tensor energía-momento (5) a primer orden corresponde a (se puede encontrar una derivación en Ref.[4]):

$$\delta T^\mu{}_\nu = (\delta\rho + \delta p)\bar{U}^\mu\bar{U}_\nu + (\bar{\rho} + \bar{p})(\delta U^\mu\bar{U}_\nu + \bar{U}^\mu\delta U_\nu) + \delta p\delta^\mu_\nu + \Pi^\mu{}_\nu \quad (34)$$

donde hay una contribución del tensor de impulso anisótropo $\Pi^\mu{}_\nu$ que durante la inflación es cero ya que como veremos las perturbaciones del campo escalar no lo poseen, por lo que lo tomaremos cero desde el principio.

Tomando la forma explícita de la cuadrivelocidad perturbada y sustituyendo en (34) obtenemos [1][4]:

$$\delta T^0{}_0 = -\delta\rho \quad (35)$$

$$\delta T^i{}_0 = -(\bar{\rho} + \bar{p})v^i \quad (36)$$

$$\delta T^0{}_j = (\bar{\rho} + \bar{p})(B_j + v_j) \quad (37)$$

$$\delta T^i{}_j = \delta p\delta^i_j \quad (38)$$

donde $v^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ es la velocidad tridimensional del fluido.

Se pueden obtener las perturbaciones de un campo escalar tomando directamente el tensor energía-momento del inflatón y perturbándolo a primer orden [1] (una derivación se puede encontrar en Ref.[19]):

$$a^2\delta T^0{}_0 = -a^2\delta\rho = -\bar{\phi}'\delta\phi' - a^2V_\phi\delta\phi + \bar{\phi}'^2A \quad (39)$$

$$a^2\delta T^0{}_i = a^2q_i = -\bar{\phi}'\partial_i\delta\phi \quad (40)$$

$$a^2\delta T^i{}_j = -\delta^i_j(a^2V_\phi\delta\phi + \bar{\phi}'^2A - \bar{\phi}'\delta\phi') \quad (41)$$

donde la prima indica derivación respecto al tiempo conforme.

La última ecuación muestra que no hay tensor de impulso anisótropo para el campo escalar.

El problema de gauge

En relatividad general uno elige las coordenadas que mejor se adaptan a su problema. Cuando trabajamos con el universo homogéneo a gran escala, existen unas coordenadas preferentes dadas por (1) [4][3]. Sin embargo cuando tenemos perturbaciones la cosa cambia ya que no hay unas únicas coordenadas que se adapten a nuestro problema sino que hay infinitas siendo la única restricción, que las magnitudes no se alejen demasiado de su valor medio de modo que puedan seguir tratándose como perturbaciones lineales del universo de fondo.

El problema es que las perturbaciones van a depender de las coordenadas que elijamos, pero sabemos que cualquier efecto que se produzca como consecuencia de un cambio de coordenadas no es físico y por tanto esto puede suponer la aparición de perturbaciones ficticias. Esta ambigüedad se conoce como gauge en teoría de las perturbaciones cosmológicas. Algunos detalles más técnicos se pueden encontrar en el apéndice B.

La elección de unas coordenadas es la elección de un gauge y las transformaciones gauge corresponden a transformaciones de coordenadas infinitesimales del tipo:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(t, \vec{x}) \quad (42)$$

Si le aplicamos la descomposición SVT encontramos que la parte espacial de $\xi^\mu(t, \vec{x})$ se puede poner como $\xi^i = \partial^i \xi + \hat{\xi}^i$. Esto significa que un cambio de coordenadas de este tipo conlleva dos términos escalares ξ^0 y ξ y dos vectoriales $\hat{\xi}^i$. A nosotros nos interesan los dos escalares. Dado que no tiene parte tensorial las transformaciones de coordenadas de este tipo no afectan a las perturbaciones tensoriales que son por tanto invariantes gauge.

De aquí concluimos que existen dos estrategias para afrontar este problema, o bien utilizamos la libertad en la elección de las coordenadas para fijar un gauge, haciendo cero dos grados de libertad escalares, o bien trabajamos con magnitudes que sean invariantes gauge.

El primer tratamiento puede simplificar la matemática, pero no nos asegura trabajar con perturbaciones reales. El segundo aunque complique la matemática nos asegura que nuestras magnitudes representan perturbaciones reales.

Utilizaremos ambos a la vez formulando el desarrollo en términos de una variable invariante gauge pero con un gauge de fondo fijo. En concreto trabajaremos en el gauge longitudinal, que fija a cero E y B en la perturbación de la métrica.

Por otro lado tomamos las siguientes magnitudes invariantes gauge (para ver más, mirar apéndice B.3) formadas por combinaciones de perturbaciones de la métrica, llamadas potenciales de Bardeen [1]:

$$\Phi \equiv A + \mathcal{H}(B - E') + (B - E)' \quad \Psi \equiv -C - \mathcal{H}(B - E') + \frac{1}{3}\nabla^2 E \quad (43)$$

En el gauge longitudinal $A \equiv \Phi$ y $C \equiv -\Psi$ por lo tanto a partir de ahora tomaremos la métrica perturbada como:

$$ds^2 = a^2(\tau) [-(1 + 2\Phi)d\tau^2 + (1 + 2\Psi)dx^i dx^j] \quad (44)$$

La variable gauge invariante fundamental que utilizaremos es la perturbación comóvil de curvatura \mathcal{R} que en el gauge longitudinal toma la forma [4]:

$$\mathcal{R} = \Psi - \mathcal{H}v \quad (45)$$

donde v es la parte escalar de la descomposición SVT de v^i .

Podemos relacionar \mathcal{R} con las perturbaciones del inflatón teniendo en cuenta (37) y (40):

$$\mathcal{R} = \Psi + \mathcal{H} \frac{\delta\phi}{\phi'} \quad (46)$$

3. Ecuaciones de Einstein perturbadas

Las perturbaciones en la materia y en la métrica están relacionadas a través de las ecuaciones de Einstein perturbadas:

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu} \quad (47)$$

Si las perturbaciones son lo suficientemente pequeñas podemos restringirnos al régimen lineal.

El procedimiento es simple pero costoso al ser necesario perturbar el tensor de Einstein $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$. Una derivación completa se puede ver en [4]. Nos limitaremos a la ecuación de la parte

espacial ij con $i \neq j$ ya que es la única que nos interesa para el trabajo. El resto se pueden encontrar en Ref.[1][4][5]. Nos centraremos en la parte escalar, que en el gauge longitudinal toma la forma:

$$\partial_i \partial_j (\Phi - \Psi) = 8\pi G a^2 \Pi_{jL}^i = 0 \quad (48)$$

De esta ecuación se deduce que en el caso en el que no haya tensor de anisotropía, como es el caso del campo escalar, $\Phi = \Psi$.

6.2. Perturbaciones escalares

A continuación nos vamos a centrar en el estudio de las perturbaciones escalares. El tratamiento cuántico de las perturbaciones escalares da origen a las fluctuaciones de la CMB y a las perturbaciones en la densidad que sirvieron como semillas para la formación de las grandes estructuras.

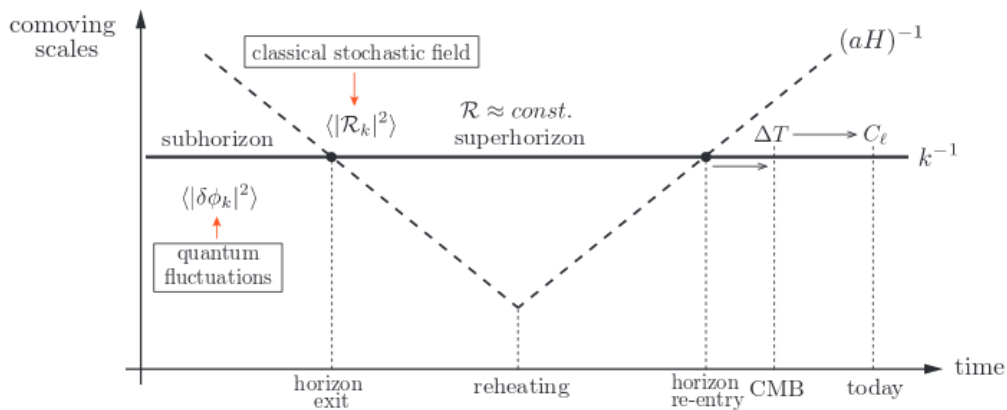


Figura 4: Evolución de la fluctuación y del radio comóvil(imagen Ref.[4]).

La idea básica es la siguiente [4][3]: desde el punto de vista clásico el campo se mueve lentamente a lo largo del potencial hasta alcanzar el mínimo de energía en el cual la inflación termina. A nivel cuántico aparecen fluctuaciones del campo $\delta\phi(t, \vec{x})$ que dependen del punto.

Inflación estira estas fluctuaciones y las lleva más allá del horizonte(ver Fig. 4) convirtiéndolas en clásicas [1][10][17]. Tras su final, el inflatón decae en otras especies y sus fluctuaciones quedarán plasmadas en perturbaciones de la densidad de energía $\delta\rho(t, \vec{x})$ de esas especies, que evolucionarán afectadas por la gravedad en el régimen no-lineal hasta dar lugar a las estructuras que hoy vemos. Por otro lado estas perturbaciones en la densidad dan lugar a fluctuaciones de temperatura que se quedarán impresas en la formación de la CMB.

Caracterización de las perturbaciones y análisis estadístico

Es conveniente estudiar las perturbaciones expresándolas en sus modos de Fourier comóviles:

$$\delta X_{\vec{k}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \vec{x} \delta X(t, \vec{x}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (49)$$

donde $(2\pi)^{-3/2}$ es un factor de normalización y k es el número de onda comóvil, que no cambia durante la inflación. k o la longitud de onda comóvil $\lambda = 1/k$ caracterizan el tamaño o la escala de la perturbación $\delta X_{\vec{k}}$. Si nos mantenemos a orden lineal los distintos modos de Fourier no se mezclan [4].

Por otro lado, una escala está dentro del horizonte⁵ cuando $k > aH$ y está fuera cuando $k < aH$. Las escalas de interés dejan el horizonte ($k \sim aH$) durante el periodo inflacionario tras el cual pasado un tiempo volverán a entrar (ver Fig.4).

Según inflación las perturbaciones primordiales de densidad $\delta\rho$ son el resultado de fluctuaciones cuánticas del inflatón durante el periodo inflacionario. Estas fluctuaciones son el resultado de un proceso aleatorio [5]. Por tanto necesitamos un análisis estadístico para estudiarlas. En concreto se asume que $\delta\phi$ es un campo gaussiano. Esto puede razonarse como sigue: en cada punto $\delta\phi$ es el resultado de una suma de ondas planas (49) con fase distribuida aleatoriamente. Por el teorema del límite central, la suma de todas ellas mostrará en cada punto una distribución gaussiana (un análisis estadístico completo se puede encontrar en [3]), y como consecuencia el resto de perturbaciones se consideran gaussianas.

En un campo aleatorio gaussiano toda la estadística queda completamente caracterizada por su función de correlación de dos puntos definida para un campo $X(\vec{x})$ como:

$$\xi_X(\vec{x}_i, \vec{x}_j) \equiv \langle X(\vec{x}_i)X(\vec{x}_j) \rangle = \int \mathcal{D}X Pr[X] X(\vec{x}_i)X(\vec{x}_j) \quad (50)$$

donde $Pr[X]$ es la distribución de probabilidad de las posibles configuraciones del campo y $\langle \dots \rangle$ indica promedio espacial en el caso clásico y valor esperado sobre un estado del sistema en el cuántico.

Dado que estamos en un background homogéneo e isótropo la estadística de las perturbaciones es invariante bajo traslaciones y rotaciones. Por tanto el correlador depende únicamente del módulo de la distancia r entre los dos puntos $\xi_X(\vec{x}_i, \vec{x}_j) \equiv \xi_X(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \equiv \xi_X(r)$ [4].

Ya que trabajamos en el espacio de Fourier usaremos el espectro de potencias $\mathcal{P}_X(k)$ que corresponde a la transformada de Fourier del correlador de dos puntos (desarrollo detallado en el apéndice C.1):

$$\langle X_{\vec{k}} X_{\vec{k}'} \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} \delta(\vec{k} + \vec{k}') \mathcal{P}_X(k) \quad \mathcal{P}_X(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r \xi_X(r) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (51)$$

que se hace cero a no ser que $\vec{k}' = -\vec{k}$. Dado que el campo que tratamos es real, $\delta X = \delta X^*$ y por tanto $\delta X_{\vec{k}}^* = \delta X_{-\vec{k}}$. Aplicando esto al espectro de potencias:

$$\mathcal{P}_X(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \langle X_{\vec{k}} X_{-\vec{k}} \rangle = \frac{k^3}{2\pi^2} \langle X_{\vec{k}} X_{\vec{k}}^* \rangle = \frac{k^3}{2\pi^2} \langle |X_{\vec{k}}|^2 \rangle \quad (52)$$

Si $r = 0$ el espectro de potencias nos da la varianza del campo:

$$\xi_X(r = 0) = \langle X^2 \rangle = \sigma_X^2(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathcal{P}(k) d^3k \quad (53)$$

Por tanto podemos interpretar físicamente el espectro de potencias como la contribución de las fluctuaciones de tamaño k a la varianza del campo X .

Dinámica de las perturbaciones

Las perturbaciones de materia están dominadas durante la inflación por las perturbaciones del inflatón $\delta\phi$. Éstas conviven con las perturbaciones de la métrica $\delta g_{\mu\nu}$, que si nos limitamos al caso escalar tiene la siguiente forma:

$$\delta g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -2\Phi & \partial_i B \\ \partial_j B & 2\Psi\delta_{ij} + 2\partial_{(i}\partial_{j)} E \end{pmatrix} \quad (54)$$

⁵Llamaremos horizonte al radio de Hubble, en este caso al radio comóvil $(aH)^{-1}$.

Tenemos pues las perturbaciones escalares repartidas en 5 grados de libertad. Dos pueden eliminarse utilizando la libertad gauge, quedando 3. Utilizaremos el gauge longitudinal que fija $E=B=0$. Tenemos aún 3 grados de libertad, pero según la ecuación (48), $\Phi = \Psi$. Nos quedan dos grados de libertad, uno de materia y otro de la métrica que están relacionados a través de la magnitud (45). Formularemos entonces nuestra teoría en términos de los modos de Fourier de esta variable.

Lo que hace fundamental esta variable es que la amplitud de sus modos se mantiene constante desde el instante en el que atraviesan el horizonte hasta que reentran (ver Fig.4), mientras que el inflatón decae [4]. Esto nos permite limitarnos a estudiar el observable justo cuando sale del horizonte durante la inflación. La física tras la reentrada es conocida y nos permite conectar las predicciones teóricas con las observaciones del espectro de la CMB.

Para describir la dinámica en función de \mathcal{R} debemos escribir la acción en función de la misma. A partir de ella podemos hallar la ecuación de movimiento de las perturbaciones, que serán tratadas como un campo $\mathcal{R}(\tau, \vec{x})$, que cuantizaremos, y sobre el cual calcularemos el espectro de potencias.

Para encontrar la acción de las perturbaciones empezamos con la acción del sistema conjunto campo escalar+gravedad mínimamente acoplado:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [M_{Pl}^2 R - g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 2V(\phi)] \quad (55)$$

Si queremos obtener la ecuación de movimiento de las perturbaciones lineales necesitamos desarrollar (55) hasta orden cuadrático en las fluctuaciones en torno al universo FLRW.

Tras un largo y complejo desarrollo (mostrado detalladamente en Ref.[10]) y utilizando las ecuaciones homogéneas (15), (16) y la aproximación *slow-roll*, se deduce que la acción a segundo orden para la parte escalar puede escribirse en términos de una sola variable:

$$u = a \left(\delta\phi + \frac{\bar{\phi}'}{\mathcal{H}} \Psi \right) \quad (56)$$

que mezcla perturbaciones de la métrica con perturbaciones del inflatón. Se puede probar que es invariante gauge por lo que representa un grado de libertad dinámico verdadero del sistema. De hecho es proporcional a \mathcal{R} :

$$u = a \frac{\bar{\phi}'}{\mathcal{H}} \mathcal{R} = z \mathcal{R} \quad z^2 = a^2 \frac{\phi'^2}{\mathcal{H}^2} = 2a^2 \epsilon_V \quad (57)$$

donde ϵ_V es el parámetro *slow-roll* (20).

La acción de segundo orden en función de esta variable tiene forma canónica:

$$S_u^{(2)} = \frac{1}{2} \int d\tau d^3x \left[u'^2 + \partial_i u \partial^i u + \frac{z''}{z} u^2 \right] \quad (58)$$

La acción es análoga a la de un campo escalar libre con una masa dependiente del tiempo a través de z . La masa dependiente del tiempo codifica la influencia del campo gravitacional sobre ϕ . El hecho de que la acción dependa del tiempo explícitamente muestra que el sistema no es conservativo y eso dará problemas en la cuantización [17].

Variando la acción (58) encontramos la ecuación de movimiento del campo u :

$$u'' - \partial_i u \partial^i u - \frac{z''}{z} u = 0 \quad (59)$$

Cuantización

A continuación procedemos a cuantizar el sistema utilizando la cuantización canónica⁶ sobre el campo $u(\tau, \vec{x})$, el cual promovemos a operador \hat{u} , al igual que su momento conjugado $\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'} = u' \rightarrow \hat{\pi}$, y sobre los cuales imponemos las reglas de conmutación en hipersuperficies de tiempo constante:

$$[\hat{u}(\tau, \vec{x}), \hat{u}(\tau, \vec{x}')] = [\hat{\pi}(\tau, \vec{x}), \hat{\pi}(\tau, \vec{x}')] = 0 \quad [\hat{u}(\tau, \vec{x}), \hat{\pi}(\tau, \vec{x}')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (60)$$

El operador \hat{u} satisface la misma ecuación de movimiento (59) que la variable clásica u y cuya solución general tiene la forma:

$$\hat{u}(\tau, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k [\hat{a}_{\vec{k}} u_k(\tau) e^{i\vec{k}\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger u_k^*(\tau) e^{-i\vec{k}\vec{x}}] \quad (61)$$

donde \hat{a} y \hat{a}^\dagger son los operadores de destrucción y creación y la función $u_k(\tau)$ reciben el nombre de función modal y satisface la ecuación:

$$u_k'' + w_k^2(\tau) u_k = 0 \quad w_k^2(\tau) \equiv k^2 - \frac{z''}{z} \quad (62)$$

Se trata de la ecuación de un oscilador armónico con una frecuencia dependiente del tiempo $w_k(\tau)$ que es consecuencia de tener a las perturbaciones en un espacio en expansión. No es una ecuación fácil de resolver analíticamente y se toma la aproximación de un background de de Sitter [4] en el cual \mathcal{H} y $\bar{\phi}'$ apenas cambian. Así pues el factor de escala evoluciona según (11) que en términos del tiempo conforme se expresa:

$$a(\tau) = -\frac{1}{\mathcal{H}\tau} \quad (63)$$

donde τ es negativo para que a sea positivo, y varía desde $-\infty$ a 0 durante la inflación. Por tanto $\frac{z''}{z} \simeq \frac{a''}{a} = \frac{2}{\tau^2}$, y la ecuación (62) toma la forma:

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{2}{\tau^2}\right) u_k = 0 \quad (64)$$

Para completar la cuantización es necesario definir el estado de vacío del sistema. El problema es que al tener un sistema no conservativo los autoestados del hamiltoniano dependen del tiempo y por tanto no podemos definir un estado permanente de vacío [17].

Sin embargo al ir lo suficientemente atrás en el tiempo conforme ($\tau \rightarrow -\infty$) encontramos que la frecuencia en (64) tiende a constante. Físicamente significa que las escalas que se encuentran muy adentro en la esfera de Hubble actúan como si no sintiesen la gravedad, es decir, como en un espacio de Minkowski. En tal caso el sistema es conservativo y se puede definir un vacío, conocido como vacío de Minkowski. La solución en tal caso para las perturbaciones toma la forma simple del oscilador armónico.

El vacío que se elige en el caso de un background de de Sitter como el nuestro se conoce como vacío de Bunch-Davies y se caracteriza por tender al vacío de Minkowski para $|k\tau| \gg 1$. En este vacío la solución final es [1][4](algunos detalles técnicos sobre la cuantización en espacios curvos se encuentran

⁶Recordemos que trabajamos en el sistema de unidades naturales y por tanto $\hbar = 1$ y no aparecera en las expresiones.

en el apéndice D):

$$u_k = \frac{1}{(2k)^{1/2}} e^{-ik\tau} \left(1 - \frac{i}{k\tau} \right) \quad (65)$$

6.3. Perturbaciones tensoriales: ondas gravitacionales

Nos centramos ahora en las parte tensorial de las perturbaciones \hat{E}_{ij} . Éstas al igual que las escalares tienen origen en las fluctuaciones del inflatón que dan lugar a perturbaciones en la métrica. A primer orden, dado que las perturbaciones en la materia no tienen parte tensorial, se propagan libremente en forma de ondas gravitacionales⁷ [4][5].

Para poder estudiar la dinámica de las perturbaciones necesitamos de nuevo la acción a segundo orden pero esta vez en la parte tensorial. Dado que la parte de materia no tiene parte tensorial no la incluimos en la acción. Se trata pues simplemente de desarrollar la acción de Hilbert-Einstein a segundo orden. Esta vez no nos preocupamos de trabajar en un gauge determinado ya que las propias perturbaciones tensoriales son invariantes bajo cambios de coordenadas. Encontramos el siguiente resultado [1][10]:

$$S_g^{(2)} = \frac{M_{Pl}^2}{8} \int d\tau d^3x a^2 \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \hat{E}_j^i \partial_\nu \hat{E}_j^i \quad (66)$$

donde $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ es el tensor métrico de Minkowski. Recordemos que \hat{E}_{ij} es un tensor 3×3 , sin traza $\delta_j^i E_j^i = 0$ y transversal $\partial_i E_j^i = 0$ lo que implica 2 grados de libertad. Estos dos grados de libertad representan las dos polarizaciones de ondas gravitacionales que denotaremos con $+$ y \times .

La descomposición de Fourier es la suma de las descomposiciones para las dos polarizaciones:

$$a \hat{E}_j^i(\tau, \vec{x}) = \sum_{\lambda=+,x} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} u_{\vec{k},\lambda}(\tau) \epsilon_j^i(\vec{k}; \lambda) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (67)$$

donde $\epsilon_j^i(\vec{k}; \lambda)$ es el tensor de polarización que cumple:

$$\epsilon_i^i(\vec{k}; \lambda) = 0 \quad \epsilon_j^i(\vec{k}; \lambda) \epsilon_j^i(\vec{k}; \lambda') = 2\delta_{\lambda\lambda'} \quad (68)$$

Reescribiendo la acción en términos de la variable canónica $f_{\vec{k},\lambda} \equiv \frac{aM_{Pl}}{2} u_{\vec{k},\lambda}$ obtenemos:

$$S_g^{(2)} = \sum_{\lambda=+,x} \frac{1}{2} \int d\tau d^3k \left[(f'_{\vec{k},\lambda})^2 - \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) (f_{\vec{k},\lambda})^2 \right] \quad (69)$$

Esta acción es la suma de dos acciones (58) lo que muestra que las ondas gravitacionales equivalen a dos campos escalares sin masa uno para cada polarización tal que $\phi_{\vec{k},\lambda} = \frac{f_{\vec{k},\lambda}}{2}$.

Las ecuaciones de movimiento resultantes son:

$$f''_{\vec{k},\lambda} + w_k^2(\tau) f_{\vec{k},\lambda} = 0 \quad w_k^2(\tau) = \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) \quad (70)$$

⁷Un tensor de orden dos transversal y sin traza como \hat{E}_{ij} es solución de la ecuación de vacío linealizada de Einstein que predice la existencia de ondas gravitacionales.

El proceso de cuantización es análogo al de las perturbaciones escalares y nos lleva al mismo resultado (65) para cada polarización [5].

6.4. Espectro de potencias de las perturbaciones

Procedemos ahora a calcular los espectros de potencias al salir del horizonte para los dos tipos de perturbaciones [1] [4] [3]. Por simplicidad se calculan sobre el estado de vacío del sistema.

- Espectro de potencias de \mathcal{R} :

El espectro de potencias del campo \mathcal{R} se relaciona directamente con el de \hat{u} . Obteniendo primero el espectro para \hat{u} y usando (57) encontramos en términos del tiempo cosmológico t (desarrollo en los apéndices C.2 y C.3):

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \simeq \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{H^4}{\dot{\phi}^2} \right)_{k=aH} \quad (71)$$

donde se han evaluado H y $\dot{\phi}$ cuando la escala de la perturbación sale del horizonte ($k \sim aH$).

- Espectro de potencias de las ondas gravitacionales:

Análogamente encontramos el espectro para las perturbaciones tensoriales:

$$\mathcal{P}_g(k) = 2 \times \frac{4}{M_{Pl}^2} \times \left(\frac{H}{2\pi} \right)_{k=aH}^2 = \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{H}{M_{Pl}} \right)_{k=aH}^2 \quad (72)$$

donde el factor 2 viene de las dos polarizaciones y el segundo se añade para renormalizar respecto a un campo escalar canónico.

Dependencia del espectro de potencias con la escala

Se define el índice espectral de las perturbaciones escalares como:

$$n_s(k) - 1 \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} \quad (73)$$

y se utiliza para caracterizar la dependencia del espectro con la escala. Se entiende n_s como una medida de lo que se aleja el espectro de la invariancia de escala. Para un espectro independiente de la escala tenemos $n_s = 1$, lo que significa que todas las escalas contribuyen igual a la varianza. Si n_s es constante tenemos que el espectro se modeliza mediante una ley de potencias [3]:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \propto k^{n_s - 1} \quad (74)$$

Una acción del tipo (58) predice una teoría invariante de escala salvo por el término que va con u^2 . Sin embargo este término es siempre muy pequeño por lo que existe aproximadamente invariancia de escala y así lo muestran las observaciones [8]. La desviación respecto a $n_s = 1$ se denomina *spectral tilt*. Se puede entender también como una consecuencia de que para que la inflación termine, H y $\dot{\phi}$ deben variar ligeramente lo que implica una pequeña inclinación en el espectro (71). Esperamos $n_s \lesssim 1$ ya que H disminuye [5].

En el caso de las perturbaciones tensoriales se define el índice espectral de la siguiente manera [1]:

$$n_t(k) \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_g}{d \ln k} \quad (75)$$

Al igual que en el caso escalar cuantifica cuánto se aleja el espectro de ser invariante de escala. De la misma manera se estima que $n_t \simeq 0$.

Razón tensor-escalar

Normalmente se normaliza la amplitud de las perturbaciones tensoriales respecto a las escalares, cuya amplitud ha sido medida ($A_s \sim 10^{-9}$) [4]. Por ello se define la razón tensor-escalar r como:

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_g}{\mathcal{P}_\mathcal{R}} \quad (76)$$

Este parámetro permite pesar las perturbaciones tensoriales que predice cada modelo respecto a las escalares.

6.5. Conexión de los parámetros observacionales con los parámetros slow-roll

Tanto n_s como r son parámetros que se relacionan directamente con las observaciones y servirán como discriminadores de unos modelos frente a otros.

Ambos se pueden escribir en función de los parámetros *slow-roll* (20) y (21): (desarrollo en el apéndice E.1):

$$n_s - 1 = 2\eta_V - 6\epsilon_V \quad n_t = -2\epsilon_V \quad (77)$$

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_g}{\mathcal{P}_\mathcal{R}} = 16\epsilon_V \quad (78)$$

donde los parámetros son evaluados en $k = aH$ cuando la escala sale del horizonte durante la inflación. Esta relación muestra que r tampoco es exactamente invariante de escala ya que ϵ_V tiene que cambiar ligeramente durante la inflación.

7. Test observacional para los distintos modelos inflacionarios

En esta sección calcularemos, aplicando los resultados del desarrollo teórico en aproximación *slow-roll*, los parámetros n_s y r para distintos modelos inflacionarios, para después compararlos con los datos experimentales obtenidos por el satélite Planck en 2015.

7.1. Cálculo de los parámetros observacionales

El objetivo es evaluar n_s y r en el instante en el que sale fuera del horizonte una escala de interés, en concreto la escala considerada por el experimento Planck para hacer sus medidas. Para evaluarlos es necesario poner estos parámetros en términos del número de *e-folds*. De esta manera los podemos evaluar en el número de *e-folds* N_* antes del final de la inflación, en el cual se cree que salió del horizonte dicha escala de interés. Los cálculos detallados de cómo se ha llegado a n_s y r en función de N se encuentran en el apéndice E.2.

Hemos elegido por un lado modelos tipo monómico (25) y el modelo de Starobinsky basado en el potencial efectivo (27). Las fórmulas halladas para el caso de potenciales monómicos son:

$$n_s = \frac{N - 1 - \frac{n}{4}}{N + \frac{n}{4}} \quad r = \frac{4n}{N + \frac{n}{4}} \quad (79)$$

Y para el modelo R^2 de Starobinsky:

$$n_s = 1 - \frac{2}{N} \quad r = \frac{12}{N^2} \quad (80)$$

En la tabla siguiente presentamos los resultados obtenidos para los modelos considerando una escala de $k_* = 0.002Mpc^{-1}$, que se estima que salió del horizonte 50 – 60 *e-folds* antes del final de la inflación. Hemos evaluado pues n_s y r para $N_* = 50$ y $N_* = 60$.

N_*	50		60	
$V(\phi)$	n_s	r	n_s	r
$\sim \phi^{2/3}$	0.973	0.053	0.978	0.044
$\sim \phi^1$	0.970	0.080	0.975	0.066
$\sim \phi^{4/3}$	0.967	0.106	0.972	0.088
$\sim \phi^2$	0.960	0.158	0.967	0.132
$\sim \phi^3$	0.951	0.236	0.959	0.198
R^2	0.960	0.005	0.967	0.003

Cuadro 1: Valores de los parámetros inflacionarios.

7.2. Resultados de la misión Planck 2015

Presentamos en la figura 5 los datos experimentales de la misión Planck realizados en 2015 [8]. En el eje horizontal queda el índice espectral n_s , en el vertical la razón tensor-escalar $r_{0.002}$ donde el subíndice indica el tamaño de la escala de referencia que ha tomado el satélite para recoger las medidas experimentales ($k_* = 0.002Mpc^{-1}$).

Por un lado las zonas coloreadas representan las zonas de más alta probabilidad para $(n_s, r_{0.002})$ según los datos experimentales. La zona roja son mediciones realizadas teniendo en cuenta solo correlaciones de la temperatura mientras que la zona azul tiene en cuenta correlaciones de temperatura, de polarización, y de temperatura con polarización. Dentro de cada color encontramos una región oscura y otra clara, indicando respectivamente un intervalo de confianza de 68 % y 95 % respectivamente.

Por otro lado encontramos puntos que señalan las predicciones en el plano de los modelos teóricos realizadas por el equipo del Planck. Éstas se han realizado tomando desde $N_* = 50$ a $N_* = 60$, esto quiere decir que se estima que la escala $k_* = 0.002Mpc^{-1}$ salió del radio de Hubble entre 50 y 60 *e-folds* antes del final de la inflación. Los valores hallados teóricamente en el trabajo (rodeados con un cuadrado en la imagen) están en perfecto acuerdo con los predichos por el experimento Planck.

Observamos que hay una línea sólida negra que atraviesa el plano y que lo divide en dos zonas, una con potenciales cóncavos y otra con potenciales convexos, en cuya frontera cae el potencial lineal. La línea discontinua simplemente muestra la tendencia de los potenciales monómicos.

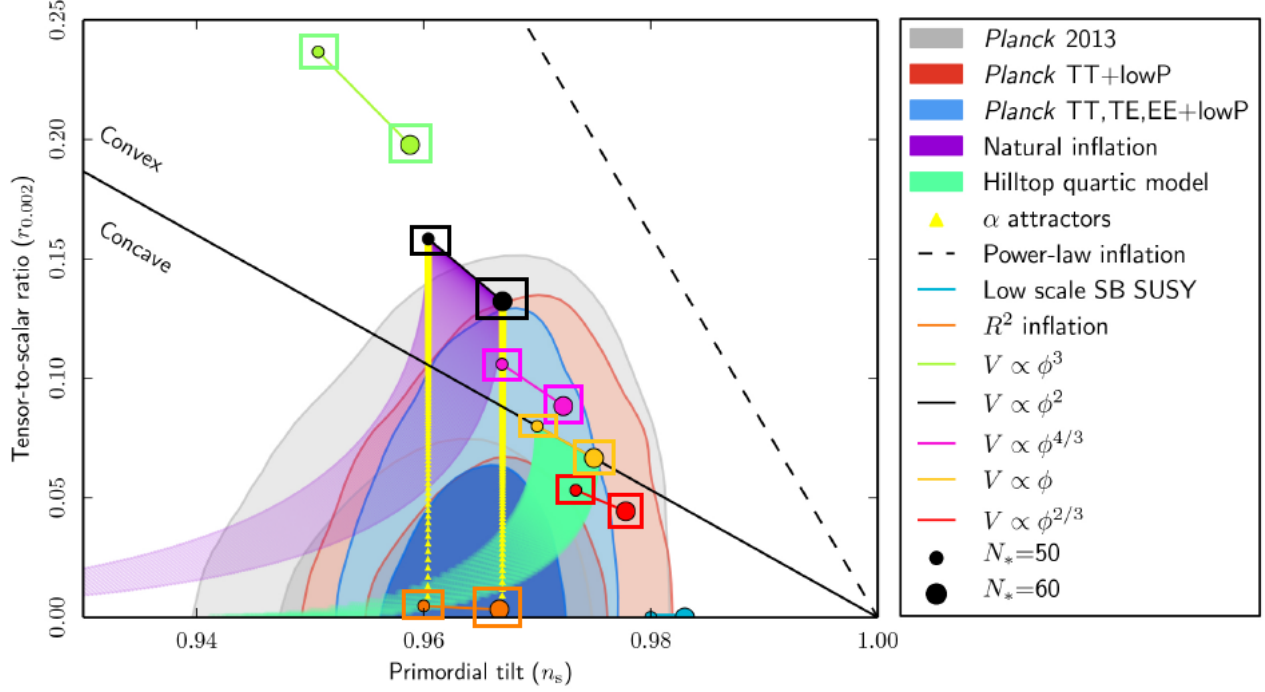


Figura 5: Plano (n_s, r) con datos de Planck y predicciones teóricas(imagen Ref.[8]).

7.3. Implicaciones sobre los modelos

La interpretación de las predicciones es la siguiente: un modelo tendrá más probabilidades de ser el correcto cuanto más cerca de la zona azul oscura esté. Fuera de la zona azul oscura la probabilidad cae a un 32% y fuera de la zona clara a un 5 y sigue decreciendo con la distancia.

En un primer vistazo se observa que los datos del Planck nos acotan mucho los valores para los parámetros: $r \lesssim 0.11$ y $0.95 \lesssim n_s \lesssim 0.98$. El primero nos indica claramente que la amplitud de las ondas gravitacionales generadas por las perturbaciones, de existir, es pequeña en comparación con la de las perturbaciones escalares. Esto hace que su observación sea prácticamente imposible, lo que favorece los modelos de campo débil. El segundo nos confirma lo que esperabamos antes, el espectro de perturbaciones escalares es casi invariante de escala, lo que denota una ligera disminución del parámetro de Hubble durante la inflación.

Vemos que los potenciales con forma cóncava durante la inflación están muy favorecidos frente a los convexos, algo que de nuevo favorece a los modelos de campo débil. Por otro lado los potenciales monómicos recorren una gran distancia en función de n . Para $n \geq 2$ los modelos quedan prácticamente descartados. El resto son compatibles con los datos experimentales en un gran rango de valores de N_* .

Lo que más llama la atención sin lugar a dudas es que el modelo más favorecido por los resultados es el R^2 de Starobinsky cayendo justo en el centro de la zona azul. Destaca el hecho de que sin ayuda de un campo escalar es capaz de dar predicciones correctas de los parámetros inflacionarios.

Finalmente comentar que en la imagen aparecen las predicciones de otros modelos que no hemos tratado detalladamente por estar fuera de los objetivos del trabajo.

8. Conclusiones

En primer lugar concluimos que el análisis teórico que se ha realizado a lo largo del trabajo sobre modelos de inflación en aproximación *slow-roll* con un solo campo escalar, está muy en acuerdo con las predicciones realizadas por el equipo de Planck.

A su vez, los datos experimentales que revela Planck en 2015 están muy en acuerdo con las predicciones teóricas y por tanto favorecen enormemente el paradigma inflacionario. Aunque no son concluyentes, dan numerosas pistas de por dónde se debe encaminar el estudio de los modelos en el futuro.

Los modelos caóticos basados en potenciales monómicos salen altamente desfavorecidos siendo ésta una mala noticia debido a que son potenciales de gran sencillez.

Por otro lado, la cota superior para la razón escalar-tensor es muy baja por lo que los modelos de campo débil salen reforzados. En concreto, el modelo original de Starobinsky, que inicialmente pasó desapercibido, es el que mejores predicciones otorga. El atractivo de este modelo es sin duda que resuelve los tres problemas principales del modelo sin necesidad de introducir algo nuevo y desconocido como un campo escalar. Sin embargo su éxito reabre el asunto de las condiciones iniciales comentado anteriormente, sobre la escala de energía a la que se produce inflación.

Añadir que, debido al hecho de que sean los modelos de campo débil los que se ajustan mejor a los datos de Planck, cabe señalar la escasa esperanza en la detección de ondas gravitacionales inflacionarias. Su detección ayudaría a consolidar aún más la inflación, a pesar de la ausencia de un modelo correcto que la describa.

La desviación de las perturbaciones de la gaussianidad es otro aspecto fundamental que se analiza a día de hoy [4]. La no-gaussianidad significa interacciones del inflatón y es necesaria una acción a tercer orden para estudiarla. Nosotros nos hemos limitado a perturbaciones puramente gaussianas, algo que está fuertemente apoyado por las observaciones. Hallazgos de no-gaussianidad ayudarían a averiguar el origen de la inflación, aunque como muestra J. Maldacena en la Ref.[22] la no-gaussianidad en modelos de un solo campo es muy pequeña.

En definitiva, aunque los datos de Planck hayan marcado en parte la senda a seguir, no parece que el final esté cerca. Se plantea muy complicado dado el gran abanico de modelos que hay, que futuras observaciones puedan decirnos cuál es el correcto, aunque son sin duda fundamentales para dar con él.

Referencias

- [1] D. LANGLOIS, *En Particle Physics and Cosmology: The Interface* (pp: 235-278), Springer, Netherlands (2005).
- [2] A. R. LIDDLE, [arXiv:astro-ph/9901124] (1999).
- [3] A. R. LIDDLE, D. H. LYTH, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press (2000).
- [4] D. BAUMANN, [arXiv:0907.5424] (2009)
- [5] V. MUKHANOV, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press (2005).
- [6] A. H. GUTH, *Phys. Rev. D*, 23(2), 347 (1981).
- [7] COBE Collaboration, CL Bennett et al., *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 90(11), 4766-4773 (1993).
- [8] Planck Collaboration, Ade, P. A. R. et al., *Astronomy & Astrophysics*, 594, A20 (2015).
- [9] J. LESGOURGUES, [arXiv:1302.4640] (2013).
- [10] V. F. MUKHANOV, H. A. FELDMAN & R. H. BRANDENBERGER, *Phys. Rep.*, 215(5-6), 203-333(1992).
- [11] M. A. CID MUÑOZ, *Perturbaciones en Modelos Cosmológicos Inflacionarios*, Tesis para la Universidad de Concepción, Chile (2010).
- [12] K. A. OLIVE, *Phys. Rep.*, 190(6), 307-403 (1990).
- [13] A. LINDE, *Phys. Let. B*, 129(3-4), 177-181 (1983).
- [14] A. A. STAROBINSKY, *Phys. Let. B*, Volume 91, Issue 1, p. 99-102 (1980).
- [15] A. KEHAGIAS, A. MORADINEZHAD, A. RIOTTO, *Physical Review D*, 89(4), 043527 (2014).
- [16] S. KANEDA, S. V. KETOV, N. WATANABE, *Physics Letters A*, 25(32), 2753-2762 (2010).
- [17] V. MUKHANOV & S. WINITZKI, *Introduction to Quantum Fields in Classical Backgrounds*, Lecture notes (2004).
- [18] B. WHITT, *Physics Letters B*, 145(3), 176-178 (1984).
- [19] A. RIOTTO, [arXiv:hep-ph/0210162] (2002).
- [20] A. LINDE, [arXiv:1402.0526] (2014).
- [21] I. DALIANIS, F. FARAKOS, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2015(07), 044 (2015).
- [22] J. MALDACENA, *Journal of High Energy Physics*, 2003(05), 013 (2015).