



**Universidad**  
Zaragoza

TRABAJO DE FIN DE GRADO  
GRADO EN FÍSICA

# Posibles efectos de la escala de Planck en la propagación de neutrinos de muy alta energía

Autor:

Luis Eduardo Suelves

Director:

José Manuel Carmona

Facultad de Ciencias  
Zaragoza, 28 de noviembre de 2016

# Índice general

1. Introducción y objetivos	4
2. Producción de pares	6
3. Desplazamiento al rojo de los neutrinos	11
4. Artículo de Stecker	16
5. Resultado analítico y conclusiones	19

# Lista de Acrónimos

- CC, charged current
- CMB, cosmic microwave background
- CPT, charge, parity and time reversal symmetry
- EFT, effective field theory
- FLRW, Friedman-Lemaître-Robertson-Walker
- GRB, gamma ray burst
- LIV, Lorentz invariance violation
- NC, neutral current
- NSpl, neutrino splitting
- Rsh, redshift
- SFR, star formation rate
- SME, standard model extension
- VPE, vacuum electron-positron pair emission
- $\Lambda$ CDM, lambda cold dark matter

# Capítulo 1

## Introducción y objetivos

Dentro de la física experimental, uno de los campos que mayores impedimentos técnicos encuentra para conseguir resultados concluyentes es aquel que se dedica a buscar pruebas de nueva física, es decir, en las que se manifiesten comportamientos físicos desconocidos respecto de las teorías actuales. Con teorías actuales nos referimos principalmente a la relatividad general en cosmología o al modelo estándar en física de partículas, que como sabemos es una teoría cuántica de campos. Los principales argumentos para la búsqueda de nueva física son principalmente dos: que ya nos hemos topado con física fuera de estos modelos, como la oscilación de neutrinos que implica el hecho de que la masa del neutrino sea no nula, masa que el modelo estándar no es capaz de explicar, y la aparente incompatibilidad entre la relatividad general y la mecánica cuántica. Esta segunda razón engloba un campo de estudio muy amplio, relacionado con la llamada Gravitación Cuántica [1, 2], en torno al que se han ideado multitud de teorías, como las teorías de cuerdas, entre muchas otras.

La confluencia de la gravedad con la física de partículas se da en sistemas donde la energía es tan grande y las distancias tan pequeñas, que la gravedad entre partículas es apreciable, lo cual se cumple en la llamada escala de Planck,  $\lambda_{Pl} = \sqrt{G\hbar/c^3}$  [3]. Intentando explicar la física a la escala de Planck es cuando la incompatibilidad es apreciable, y es un buen lugar para buscar procesos de nueva física. Sin embargo, nos topamos directamente con el principal obstáculo: la energía de la escala de Planck es demasiado grande para procesos entre partículas, inalcanzable con nuestros medios actuales. No se pueden hacer experimentos a estas energías y las detecciones de partículas más energéticas provenientes de la radiación externa tampoco se han acercado lo suficiente hasta la fecha. Lo que sí se puede hacer es buscar en nuestras medidas a energías más bajas consecuencias que se deban a posibles fenómenos a la escala de Planck, lo que se podrían llamar reminiscencias, resultados ponderables de procesos desconocidos.

A la hora de formular un modelo físico teórico, es fundamental la posibilidad de que este pueda ser demostrable experimentalmente. Los posibles procesos a la escala de Planck, si existiesen, no serían detectables directamente, sino que habría que encontrar sus consecuencias, con lo que la principal dificultad es que no se vean enmascaradas por otras causas. Si se hace la búsqueda a partir de detección de partículas cósmicas, cuanto mayor sea la capacidad de interacción de estas partículas, mayor será la pérdida de información, con lo que será una buena idea intentar detectar partículas con poca posibilidad de interactuar. Los neutrinos de altas energías son potencialmente una herramienta muy útil para la comprobación de las implicaciones fenomenológicas que puedan tener aquellos modelos que busquen explicar los fundamentos de la física a la escala planckiana, debido a su escasa probabilidad de colisión. Aunque esta reducida interacción dificulta su medición y los detectores de neutrinos actuales están limitados por una cota máxima en energías (en torno a los PeV en detectores como el IceCube), el desarrollo técnico está en constante evolución y existen proyectos muy sofisticados.

Las teorías de gravedad cuántica generalmente mezclan muy diferentes aspectos de la física moderna, desde descripciones del espacio-tiempo diferentes a las de la relatividad general, hasta

concepciones de nuevas partículas que no entran dentro del modelo estándar. Una de las posibles modificaciones de la estructura del espacio-tiempo que predicen algunas teorías a la escala de Planck, es la idea de que la invariancia Lorentz no sea una simetría exacta y que haya partículas que puedan viajar ligeramente por encima de la velocidad de la luz. Decimos ligeramente, porque una desviación muy grande sería algo demasiado evidente para que no se haya encontrado ningún indicio de ello hasta ahora. Una de las formas en que esta violación de la invariancia Lorentz (*Lorentz invariance violation, LIV*) se describe es una extensión del modelo estándar (*standard model extension, SME*), desarrollada en el contexto de teoría efectiva de campos (*effective field theory, EFT*) que hace posible dicha descripción. En ella, la relación de dispersión  $E^2 = p^2 + m^2$  de una partícula libre presenta un conjunto de nuevos términos, una serie de polinomios  $p^{n+2}/M_{Pl}^n$ , donde  $M_{Pl}$  es la masa de Planck. La relación de dispersión modificada queda (en unidades naturales  $c = \hbar = 1$ )

$$E^2 - p^2 = m^2 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{p^{2+n}}{M_{Pl}^n} \quad (1.1)$$

donde los coeficientes  $a_n$  son adimensionales. Las modificaciones del lagrangiano afectan a la física del neutrino de diferentes maneras. Aparecen correcciones a los elementos de matriz de las interacciones ya existentes, pero mucho más importante, la dinámica en el desplazamiento libre de las partículas se ve modificada, pues la nueva relación de dispersión permite desintegraciones del tipo emisión de un par fermión-antifermión para un neutrino libre [4]. Un ejemplo es la separación de neutrinos (*neutrino splitting, NSpl*),  $\nu \rightarrow \nu + \nu + \bar{\nu}$ , que en ausencia de LIV es una desintegración prohibida por no cumplirse conservación de energía y momento. Ocurre lo mismo con la emisión de pares electrón-positrón en el vacío <sup>1</sup>, (*vacuum electron-positron pair emission, VPE*)  $\nu \rightarrow \nu + e^+ + e^-$ . Estos serían los dos procesos donde se producen partículas de menor masa, y por tanto los más probables.

El objetivo del trabajo es llegar a comprender de qué manera afectaría la existencia de estos procesos a un flujo de neutrinos teórico, de naturaleza extragaláctica y de altas energías, lo que permitiría encontrar trazas de física en la escala de Planck sin tener que alcanzarla. En presencia de LIV, los neutrinos cosmológicos pierden energía debido a los procesos arriba indicados, VPE y NSpl, ausentes en la cinemática usual de relatividad especial, y a la propia expansión del universo, el llamado corrimiento al rojo (*Redshift, Rsh*). En el capítulo 2 hallaremos una ecuación diferencial para la evolución de la energía de un neutrino, considerando los procesos de VPE o NSpl, mientras que en el capítulo 3 haremos lo propio con el Rsh. La mayor dificultad está en combinar el Rsh y los procesos permitidos por la LIV. Esto fue realizado de manera numérica en 2015 por el científico de la NASA Floyd Stecker y colaboradores [7]. Dada una distribución de fuentes en función de la distancia a la Tierra y una distribución de energía de emisión, simuló la atenuación de los neutrinos a lo largo de su recorrido, obteniendo como resultado un espectro del flujo recibido. Dedicaremos el capítulo 4 de esta memoria a revisar los resultados obtenidos en esta simulación de Monte Carlo y las medidas experimentales de neutrinos de alta energía en que se apoya su estudio.

Nuestro principal interés, sin embargo, será resolver analíticamente el problema de juntar los procesos de violación de invariancia Lorentz con la pérdida de energía por Rsh. Esto nos proporcionará un mayor entendimiento de los ingredientes que constituyen el flujo de neutrinos detectado. En el capítulo 5 realizamos esta labor y obtenemos una expresión analítica para el flujo recibido. Este resultado original será la principal aportación de esta memoria. En una posible continuación de este TFG, podría emplearse dicha expresión (que necesita de integración numérica) para comparar esta aproximación analítica con la de Monte Carlo usada por Stecker et al. y llegar así a una mayor comprensión de las conclusiones obtenidas en esta y otras simulaciones similares.

---

<sup>1</sup>Puesto que las cotas de LIV para  $e^-$  son más estrictas que para neutrinos [5, 6], consideramos relaciones de dispersión modificadas solo para estos últimos.

## Capítulo 2

# Producción de pares

La principal suposición del trabajo, en torno a la que giran realmente todos los objetivos y resultados, es que los neutrinos incumplen la invariancia Lorentz y por ello pueden desintegrarse durante su trayectoria en el espacio, lo que implica que pierden energía. Para describir esto se emplea una teoría de campos efectiva dentro de la que se define el modelo estándar extendido SME, que incluye estas posibilidades [8]. El lagrangiano  $\mathcal{L}$  del SME incluye un muy amplio conjunto de nuevos términos respecto del modelo estándar, pero no vamos a entrar demasiado en formalismos de teorías cuánticas de campos, más que en las aproximaciones hechas y en las repercusiones de la relación de dispersión modificada de los neutrinos.

Estar hablando de que la relatividad especial no es correcta en este desarrollo hace preguntarse en qué sistema de referencia se podrá realizar nuestra descripción cinemática. Una referencia muy común y útil para teorías de este tipo es aquella en la que la radiación de fondo de microondas (*cosmic microwave background, CMB*) es isótropa, asumiendo el movimiento respecto a ella como despreciable. Además se puede mantener la invariancia rotacional como simetría básica, lo que simplifica bastante los términos del lagrangiano de la EFT usada, aunque en nuestro análisis los apliquemos sin analizarlos uno a uno. La conservación de energía y momento (cuadrimomento) se mantiene también como simetría válida, mediante la ley de composición ordinaria.

Como ya hemos dicho, una consecuencia es que los neutrinos puedan superar la velocidad de la luz, que sean superlumínicos. Podemos deducir esta posibilidad empleando la definición de velocidad en un espacio de fases canónico  $v = \partial E / \partial p$ . Agrupamos todos los términos en  $\epsilon(p)$ , sacando factor común  $p^2$  a la derecha de (1.1) y sin especificar la procedencia de sus contribuciones:

$$E^2 - p^2 = m^2 + \epsilon(p)p^2 \quad (2.1)$$

Despejamos primero  $E$  en función de  $p$ , sacando factor común y considerando solo términos dominantes en la masa del neutrino y en la desviación de relatividad especial:

$$E = [p^2 + m^2 + p^2\epsilon(p)]^{1/2} = p \left[ 1 + \frac{m^2}{p^2} + \epsilon(p) \right]^{1/2} \approx p + \frac{m^2}{2p} + \frac{p\epsilon(p)}{2} \quad (2.2)$$

y después resolvemos la velocidad

$$v = \frac{\partial E}{\partial p} = 1 - \frac{m^2}{2p^2} + \frac{\epsilon(p)}{2} + \frac{p\epsilon'(p)}{2} \quad (2.3)$$

Para momentos altos, como la masa del neutrino es muy pequeña, se puede despreciar la contribución  $m^2/2p^2$ . Los términos nuevos causan que el neutrino pueda exceder la velocidad de la luz de la forma:

$$v_\nu = 1 + \delta \quad (2.4)$$

En la ecuación (1.1) estamos teniendo en cuenta los términos de cualquier orden  $n$ , pero es lógico que pensar que uno de ellos será el dominante, de forma que los demás se puedan desestimar. Para todo elemento dominante de orden  $n$  se puede definir una desviación (que irá asociada a una  $\delta_n$  superlumínica):

$$\epsilon_n(p) = a_n \left( \frac{p}{M_{Pl}} \right)^n \quad (2.5)$$

A partir de aquí se consideran despreciables todos los términos de  $n > 2$ . Las velocidades superlumínicas para  $n = 0, 1$  y  $2$  son:

Orden dominante  $n = 0$

$$v = 1 + \frac{\epsilon_0}{2} + \frac{p \cancel{\epsilon_0}}{2} = 1 + \frac{\epsilon_0}{2} \Rightarrow \delta_0 = \epsilon_0/2 \quad (2.6)$$

Orden dominante  $n = 1$

$$v = 1 + \frac{a_1}{2} \frac{p}{M_{Pl}} + p \frac{a_1}{2} \frac{1}{M_{Pl}} = 1 + a_1 \frac{p}{M_{Pl}} \Rightarrow \delta_1 = \epsilon_1 \quad (2.7)$$

Orden dominante  $n = 2$

$$v = 1 + \frac{a_2}{2} \frac{p^2}{M_{Pl}^2} + p \frac{a_2}{2} \frac{2p}{M_{Pl}^2} = 1 + \frac{3}{2} a_2 \frac{p^2}{M_{Pl}^2} \Rightarrow \delta_2 = \frac{3\epsilon_2}{2} \quad (2.8)$$

Como se ha dicho en la introducción, esto solo lo vamos a considerar posible para partículas tan ligeras como los neutrinos, ni para electrones ni positrones [5, 6]. En neutrinos superlumínicos, el exceso de energía que proporcionan los nuevos términos dependientes de  $p$  posibilita las nuevas desintegraciones VPE y NSpl. Veamos el balance de conservación de la energía en la producción de un par electrón-positrón por un neutrino  $\nu \rightarrow \nu + e^+ + e^-$ . Definimos los momentos de las partículas implicadas, en nuestro sistema de referencia donde la CMB es isótropa: neutrino inicial  $p$ , neutrino final  $p_1$ , positrón  $p_+$  y electrón  $p_-$ . Despreciamos la contribución a la energía de la masa del neutrino  $m_\nu^2/2p$  y consideramos  $\epsilon(p)$  genérico:

$$p + p \frac{\epsilon(p)}{2} = p_1 + p_1 \frac{\epsilon(p_1)}{2} + \sqrt{m_e^2 + p_+^2} + \sqrt{m_e^2 + p_-^2} \quad (2.9)$$

Sin la presencia de la contribución LIV es claro que esta ecuación no tiene solución debido a la conservación del momento. En presencia de LIV, la ecuación sí tiene solución si la energía del neutrino inicial es suficientemente alta. Para calcular esta energía umbral, consideraremos que la reacción debe ser colineal, pues toda contribución al módulo del momento que no sea en la dirección de la partícula padre requerirá una mayor energía inicial:

$$p = p_1 + p_+ + p_- \quad (2.10)$$

Ahora bien, el caso límite para que sea posible es aquel en el que  $p_1 = 0$ , pues la contribución extra a la energía del momento del neutrino final desaparece y la del neutrino padre se ‘invierte’ únicamente en producir el par de partículas. En esta situación umbral, por conservación del momento:  $p_+ = p_- = p_e = p/2$ . Realizamos la aproximación  $\sqrt{m_e^2 + p_e^2} = p_e \sqrt{1 + m_e^2/p_e^2} \approx p_e + m_e^2/2p_e$  para la energía positrón/electrón. En cuanto a la energía del neutrino hijo, esta pasa a ser su masa en reposo  $m_\nu \approx 0$ . Despejamos el momento del neutrino en la conservación de la energía:

$$p + p \frac{\epsilon(p)}{2} = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} + \frac{m_e^2}{p} + \frac{m_e^2}{p} = p + \frac{2m_e^2}{p} \Rightarrow p\epsilon(p) = \frac{4m_e^2}{p} \Rightarrow p_{th}^2 = \frac{4m_e^2}{\epsilon(p)} \quad (2.11)$$

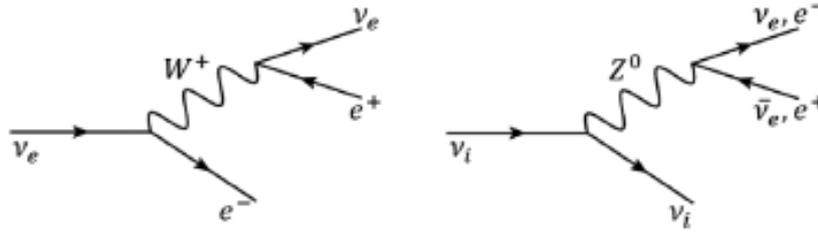


Figura 2.1: Derecha: proceso mediado por corriente cargada CC. Izquierda: procesos mediado por corriente neutra NC [7].

$p_{th}$  es el momento umbral para que un neutrino pueda desintegrarse por VPE. Como  $\epsilon(p)$  y la masa del neutrino son pequeñas,  $p \approx E$ , y por tanto hemos calculado la energía umbral  $E_* = p_{th}$ .

También vamos a introducir un denominador diferente a la masa de Planck. Las desviaciones respecto de la relación de dispersión de la relatividad especial no tienen por qué ser exactamente del orden de la escala de Planck y podrían aparecer a energías menores. En (1.1)  $a_n$  serían las variables que se ajustarían en función de ello, pero usando  $\Lambda$  podemos introducir esta escala en la propia relación de dispersión. Tendremos pues una relación diferente según el orden dominante sea  $n = 1, 2$ :

$$E^2 - p^2 = m^2 + \frac{p^{2+n}}{\Lambda^n} \quad (2.12)$$

Consideramos que la modificación en la relación de dispersión está producida por nueva física controlada por la escala  $\Lambda$ , con lo que descartamos el caso  $n = 0$ .

Cabe definir cierta masa efectiva, como masa en reposo modificada en la nueva relación de dispersión, que proporciona una conveniente forma de comprender el formalismo y aplicarlo. Se tendrá una diferente masa efectiva según el orden  $n$  dominante:

$$E^2 - p^2 = \tilde{m}_n^2(E) = m^2 + \epsilon_n(p)E^2 \quad (2.13)$$

Otro punto importante es que la relevancia de uno u otro término con diferente valor de  $n$  implica diferentes simetrías de la naturaleza. En el SME, las desviaciones de  $n$  impar implican la violación de la simetría CPT, al contrario que para  $n$  pares, donde se conserva CPT. Por tanto, que uno domine sobre el otro tendría como consecuencia la prevalencia o no de esta simetría. Una sutileza que presenta el proceso NSpl si no se conserva CPT, es que la propiedad de conjugación implica que si los neutrinos son superlumínicos, los antineutrinos serán sublumínicos de forma intrínseca, y viceversa, dando lugar a la necesidad de diferenciar neutrinos y antineutrinos y haciendo mucho más complicados los cálculos.

Descartaremos las diferencias según el sabor de los neutrinos, tomando la suposición de que los tres tienen los mismos coeficientes debidos a la LIV. Además, como estamos suponiendo energías relativistas muy altas  $p^2 \gg m^2$ , tampoco es relevante la diferencia de masa entre ellos, lo que es coherente con que hayamos despreciado la masa del neutrino en las ocasiones anteriores.

Respecto a los propios procesos NSpl y VPE, se trata de dos procesos débiles, mediados por los bosones de la interacción débil. La VPE es un proceso que puede debido a corriente cargada (*charged current, CC*) o a corriente neutra (*neutral current, NC*), mientras que el NSpl es mediado por NC. La imagen 2.1 representa varios diagramas de Feynman posibles: una VPE mediada por corriente cargada, y una VPE y un NSpl de neutrinos electrónicos mediadas por corriente neutra. En el caso de la VPE, los canales CC solo son cinemáticamente relevantes para neutrinos electrónicos  $\nu_e$ , para los muónicos  $\nu_\mu$  y tauónicos  $\nu_\tau$  se produciría un par  $\mu\bar{\mu}$  o  $\tau\bar{\tau}$  respectivamente, leptones de masas demasiado altas que, como hemos calculado al obtener (2.11), suponen una energía umbral mucho mayor. Debido a la oscilación de neutrinos, si estos se

propagan en largas distancias, 1/3 del camino el neutrino tiene sabor electrónico, única situación en la que un proceso CC es relevante. Ahora bien, como el proceso NC se puede dar para los tres sabores del neutrino, podemos despreciar en primera aproximación la contribución del proceso mediado CC frente al caso NC [7].

La anchura de desintegración de la VPE por corriente neutra NC obtenida en [9] es:

$$\Gamma = \frac{G_F^2 |\vec{p}|^5}{192\pi^3} \left[ (1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W^2)^2 \right] \left( \frac{|\vec{p}|}{\Lambda} \right)^{3n} \xi_n \quad (2.14)$$

Esta anchura nos proporciona una ecuación diferencial resoluble analíticamente a partir de la cual obtener la energía del neutrino en cualquier instante de tiempo, para unas condiciones iniciales. Pero antes de desarrollarla vamos a analizar primero la expresión. La constante  $G_F^2$  proviene de que la desintegración sea por interacción débil, el término con ángulo de Weinberg  $s_W^2$  es debido a la definición del bosón  $Z^0$  en la teoría electrodébil, y el cociente  $192\pi^3$  es un cociente cinemático propio de las reacciones a tres cuerpos.  $\xi_n$  es el elemento de matriz, proviene de la dinámica de la interacción, que debido a ser una dinámica asociada a los términos de la SME, no es trivial. Sus posibles valores vienen calculados en [9], y al igual que Stecker, elegiremos los del caso más sencillo, el primer ejemplo de esa referencia. El factor  $(\frac{|\vec{p}|}{\Lambda})^{3n}$  viene de la perturbación LIV de orden  $n$  al cubo. Esto se debe al exponente de la energía: la masa efectiva es  $\tilde{m}_n^2(E) \approx \epsilon_n(p)E^2$ , luego  $\epsilon_n(p)$  irá asociado a  $E^2$ . El cálculo requiere tomar el sistema de referencia del neutrino para una masa efectiva  $\sqrt{\epsilon_n(p)}E$ . Entonces, el factor de dilatación relativista necesario para volver al sistema de referencia CMB es  $\gamma^{-1} = \sqrt{\epsilon_n(p)}$ , y puesto que la energía va elevada a la 5, tenemos que  $E^5 \epsilon_n^{5/2}(p) / \sqrt{\epsilon_n(p)}$ , con lo que queda al final  $E^5 \epsilon_n^3(p)$  [10]. Ahora bien, el  $|\vec{p}|^5$  se ha obtenido por argumentos dimensionales.

Otra forma de argumentar estos valores se desarrolla más sencillamente buscando analogía con una desintegración conocida, demostrada experimentalmente y cuya probabilidad de decaimiento ha sido calculada y contrastada. Es el caso de la siguiente desintegración del muón:  $\mu^- \rightarrow \nu_\mu + \bar{\nu}_e + e^-$ , que con un factor de dilatación  $\gamma_\mu$ , de nuevo en el sistema de referencia en reposo del muón, tiene una probabilidad de:

$$\Gamma = \gamma^{-1} \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \quad (2.15)$$

Está claro que  $E^5 \epsilon_n^3(p)$  es análogo con el término de la masa del muón por el factor de dilatación:  $\gamma^{-1} m^5$ . Los términos con el ángulo de Weinberg  $s_W^2$  no salen porque el bosón mediador es el  $W^-$ , y el término dinámico  $\xi$  trivialmente tampoco aparece al no tratarse de un proceso superlumínico.

Volviendo a la energía umbral para esta desintegración, tenemos que la dependencia en  $\epsilon(p)$  hace que se necesite su valor para conocer  $E_*$ , sin embargo no es una medición posible. Al valor de  $\delta$  solo se le pueden poner cotas, en concreto  $\delta \geq 5.2 \times 10^{-21}$ , cota superior dada para los neutrinos en la referencia [11]. Este valor corresponde, dada una  $\delta$  genérica, a una energía umbral de VPE aproximada a  $E_* = 10$  PeV.

Nuestros cálculos serán válidos en el supuesto  $E_\nu \gg E_*$ . Por otro lado, también se está asumiendo colinealidad del neutrino entre antes y después de la desintegración, es decir, esta no provoca que su dirección se desvíe. El punto clave está en que ambas aproximaciones están ligadas. La colinealidad requiere que la desviación  $\epsilon(p)$  sea mucho menor que 1 y además la energía sea mucho mayor que la umbral, de forma que las masas de las partículas sean despreciables y dichas energías se puedan aproximar al módulo de sus momentos. La conservación de la energía será prácticamente la suma de los módulos de los momentos, llevando a ignorar términos no colineales. Así, si la energía no es suficiente para aplicar las probabilidades de desintegración aquí presentadas, se dará el caso de que el neutrino saliente cambiará su dirección, ya no vendrá hacia nosotros y no lo detectaremos [9]. En siguientes apartados será relevante indicar que estamos

tomando una distribución radial de fuentes, por consiguiente las trayectorias de llegada de los neutrinos también y despreciaremos el flujo de llegada por otras direcciones.

Dada  $\Gamma$  se obtiene la derivada temporal del momento lineal del neutrino, según la relación:

$$\frac{d|\vec{p}|}{dt} = -\frac{G_F^2 |\vec{p}|^6}{192\pi^3} \left[ (1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W^2)^2 \right] \left( \frac{|\vec{p}|}{\Lambda} \right)^{3n} \xi'_n \quad (2.16)$$

$$\frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial t} = -\alpha_n E^{5+3n} \quad (2.17)$$

donde  $\xi'_n$ , calculado en la referencia [9], es aproximadamente igual a  $\xi_n$  por la energía promedio perdida por interacción, puesto que  $\gamma$  da la probabilidad de interacción por unidad de tiempo. Es esta ecuación diferencial la que nos proporciona la pérdida de energía del neutrino por VPE en función del tiempo. La constante  $\alpha_n$  es:

$$\alpha_n = \frac{G_F^2 \xi'_n}{192\pi^3 \Lambda^{3n}} \left[ (1 - 2s_W^2)^2 + (2s_W^2)^2 \right] \quad (2.18)$$

La ecuación diferencial tiene solución conocida, una integral entre la salida del neutrino y su llegada a nuestro planeta, que se corresponden a energía y tiempos:  $E_e$ ,  $t_e = 0$  y  $E_d$ ,  $t_d$ .

$$\int_{t_e=0}^{t_d} dt = -\alpha_n \int_{E_e}^{E_d} E^{-6-3n} dE \quad (2.19)$$

Conocidas la energía inicial del neutrino  $E_e$  y la posición en la que se emite  $r_e$ , se puede calcular cuánto tiempo tarda en llegar  $t_d$  y con ello a qué energía  $E_d$  lo hace a partir de (2.19). Hay sin embargo una sutileza que como hemos dicho invalida esta resolución, cuando la energía del neutrino esté cercana al valor umbral dejará de perder energía por producción de pares. En nuestro formalismo, donde la energía cambia de forma diferencial con el tiempo, se puede aproximar que va perdiendo energía ininterrumpidamente hasta que alcanza el umbral. Si el trayecto del neutrino dura lo suficiente como para ‘atenuarse’ hasta  $E_*$ , cuando lo haga dejará de perder energía y llegará al detector con  $E_d = E_*$ . Dentro del formalismo, bastará con corregir la energía de llegada  $E_d = E_*$  si recorre una distancia tal que deja de producir pares electrón-positrón, es decir, la integral deja de ser aplicable fuera del rango umbral. Si no deja de producir pares se emplea el valor obtenido de  $E_d$ , y si se emite directamente por debajo del umbral es obvio que llegará con la misma energía  $E_d = E_e$ . Aunque el caso de un neutrino que solo presente VPE es sencillo, casos donde se combinan pérdidas por otros métodos no lo son tanto. Además, este es un primer indicio de lo importante que va a ser conocer la distancia a la que se encuentra la fuente del neutrino, tema en el que profundizaremos más adelante.

En cuanto al NSpl, nos encontramos con que para esta reacción no se ha calculado su anchura de desintegración  $\Gamma$ . Darle una forma diferencial a la pérdida de energía también sería más complicado, puesto que habría que añadir que en cada reacción se producen nuevos neutrinos. Además, entrando en el caso  $n$  impar, habría que diferenciar entre los neutrinos y antineutrinos producidos, provocando de nuevo la problemática de que unos fueran superlumínicos y los otros no. Aunque estos puntos quizá por sí solos puedan ser resueltos, el hecho de combinarlos con VPE y Rsh daría para un nuevo trabajo completo, y por tanto se deja para futuros estudios. Analizaremos la pérdida de energía por *redshift* en el siguiente apartado.

## Capítulo 3

# Desplazamiento al rojo de los neutrinos

El *redshift* es consecuencia de la expansión del universo, fenómeno explicado por la teoría de la relatividad general de Albert Einstein [12]. El objeto de estudio de la relatividad general son los fenómenos gravitatorios, interpretados como causa de la curvatura del espacio-tiempo que produce la presencia de materia y energía. A distancias por encima del tamaño de los cúmulos de galaxias, son apreciables consecuencias cosmológicas sobre la geometría [13]. La estructura a gran escala del universo viene dada por el llamado principio cosmológico: el universo es homogéneo e isótropo, todo observador lo percibirá igual independientemente de su posición y de la dirección a la que mire.

La estructura y composición del cosmos es explicada por el modelo cosmológico estándar  $\Lambda$ CDM (*lambda-cold dark matter*). Según  $\Lambda$ CDM todo se inició en el Big Bang [14], afirmación corroborada experimentalmente por el descubrimiento de la radiación cósmica de fondo [15] y por la expansión del universo, observada a partir del propio desplazamiento al rojo [16, 17]; e incluye además el principio cosmológico, así que enmarcaremos en él nuestro desarrollo. En síntesis, la geometría del universo presenta una expansión homogénea y acelerada [18].

En relatividad general el comportamiento del universo se modeliza a partir de su métrica. Para un universo homogéneo, isótropo, localmente plano y en expansión uniforme, esta viene definida por la llamada métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (*FLRW*) [19, 20]:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (3.1)$$

donde se han empleado las llamadas coordenadas *comoving*. Se trata de coordenadas situadas en el sistema de referencia de una galaxia considerada en reposo y con una elección apropiada de la variable temporal. En un universo en expansión, homogéneo e isótropo, se da la excepcionalidad de que en nuestra vecindad (la del observador) se puede tomar un tiempo de referencia privilegiado, de forma que este sistema es idóneo para modelizar la métrica [13], donde además la CMB es isótropa, lo que es coherente con la elección del apartado anterior. En la ecuación (3.1) encontramos los siguientes términos:  $r$  es la coordenada radial,  $t$  es el tiempo propio,  $s$  es el intervalo relativista,  $\Omega$  es el ángulo sólido en coordenadas esféricas,  $a(t)$  es el llamado factor de escala relativista, que marca la expansión del universo, y  $k$  es una variable que cambia según la forma del universo y que puede tener los valores  $k = -1, 0, +1$ . Los valores de  $k$  se corresponden respectivamente a universos hiperbólicos, planos o esféricos. El nuestro, además de localmente llano, también es prácticamente plano a gran escala.

La expansión se define a partir de la Ley de Hubble, según la cual para cierto observador la velocidad a la que se aleja un cuerpo y la distancia a la que se encuentra siguen una relación de proporcionalidad [13]:

$$v = Hd \quad (3.2)$$

donde  $H$  es el parámetro de Hubble, cuyo valor cambia con el tiempo y en la actualidad es aproximadamente  $H_0 = 67,6_{-0,6}^{+0,7} \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$  (obtenido por el *Sloan Digital Sky Survey-III* en 2016 [21]), conocido como la constante de Hubble.

El corrimiento al rojo es un aumento por efecto Doppler de la longitud de onda  $\lambda$  de las ondas (electromagnéticas) provenientes de fuentes que se están alejando con cierta velocidad de nosotros. Puesto que la expansión es uniforme, a mayor distancia mayor desplazamiento al rojo de forma proporcional [13]. El coeficiente de Rsh  $z$  es una magnitud adimensional que permite caracterizar la velocidad radial a la que se aleja una fuente, y por tanto su posición radial. El procedimiento fundamental para medir  $z$  es a partir de líneas espectrales bien caracterizadas cuya longitud de onda de emisión sea conocida. Para la deformación de la longitud de onda  $\lambda_e$  de un fotón emitido en un tiempo  $t_e$  que llega al observador en  $t_d$ , el coeficiente de Rsh  $z$  es:

$$z = \frac{\lambda_d - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a(t_d)}{a(t_e)} - 1 \quad (3.3)$$

que también está relacionado con el factor de escala en los momentos de emisión y recepción. El hecho de que la longitud de onda aumente implica que la energía del fotón disminuya, lo que se cumple para cualquier onda en recorrido libre por el cosmos, y es por eso que los neutrinos pierden energía mediante Rsh.

Sin embargo, estamos hablando del concepto de distancia de una forma clásica, en cosmología la expansión del universo hace que este concepto sea más ambiguo. Observemos que la distancia propia que recorre un fotón desde una fuente cosmológica hasta nosotros, no es la misma que la distancia que nos separaba de ella cuando el fotón se emitió, ni la misma que nos separa en la actualidad: la fuente se ha ido alejando con el tiempo. Esto es muy relevante para nuestro desarrollo, pues necesitamos calcular qué energía pierden los neutrinos, y para ello necesitaremos conocer las posiciones de las fuentes de las que provienen y la longitud de la trayectoria que han recorrido. Una muy buena forma de estudiar estas distancias es mediante el coeficiente  $z$ , pues “cuanto mayor sea la distancia, más rápido se alejará la fuente, y más acentuado será el aumento de  $\lambda$ ” [13]. Aunque  $z$  también depende de la velocidad relativa de las fuentes, a las distancias que estudiamos no conlleva incertidumbres apreciables, pues la componente más relevante será en la dirección radial.

Tomando coordenadas esféricas centradas en nuestro detector, consideramos dirección radial de los neutrinos hacia nosotros. Para empezar, el parámetro de Hubble y el factor de escala en un cierto momento  $t$  están relacionados:  $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ , donde el punto indica derivada temporal. Esto se calcula fácil, pues si la distancia se define como  $d = ra(t)$  y  $v = r\dot{a}(t)$ , al despejar en (3.2)  $r\dot{a}(t) = H(t)ra(t)$ .

En astronomía lo que se mide es el flujo que llega de una fuente, de forma que conocida la luminosidad que emite se puede hallar lo alejada que está de nosotros. La luminosidad de una fuente es la energía por unidad de tiempo que emite, y se puede relacionar con el flujo detectado  $\phi$  (energía por unidad de tiempo por unidad de superficie) como:

$$L = 4\pi d^2 \phi \quad (3.4)$$

Para distancias no cosmológicas, conocida la luminosidad y el flujo, se puede estimar la distancia real. Se define también la distancia luminosidad  $d_L$ , observable que los astrónomos pueden medir y que se describe como la longitud a la que se encontraría una fuente si estuviera en un universo euclídeo:

$$d_L = \left( \frac{L}{4\pi\phi} \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

Vamos ahora a elegir las coordenadas de la fuente, centrando el origen en ella y con el detector a una distancia  $r$ . Una fuente de luminosidad  $L$  emite de forma isótropa y esférica fotones de frecuencia  $\nu_e$  durante un intervalo de tiempo  $\delta t_e$ , cuando la coordenada temporal es  $t_e$  y llegan en  $t_d$ . El número total de fotones emitidos es:

$$N = \frac{L\delta t_e}{h\nu_e} \quad (3.6)$$

Ya alcanzado el detector por el flujo de fotones, el área propia de la esfera centrada en la fuente se define a partir de la integral:

$$\int_T a(t_d)^2 r^2 d\Omega^2 \quad \Rightarrow \quad A = 4\pi a(t_d)^2 r^2 \quad (3.7)$$

Al llegar, los fotones se han desplazado al rojo un factor  $(1+z) = a(t_d)/a(t_e)$ , la nueva frecuencia  $\nu_d$  es:

$$h\nu_d = \frac{h\nu_e}{(1+z)} \quad (3.8)$$

y llegan en un intervalo de tiempo mayor

$$\frac{\delta t_d}{(1+z)} = \delta t_e \quad (3.9)$$

Así el flujo que llega en ese intervalo, considerando el detector puntual frente a la inmensa esfera de propagación, es:

$$\phi_d = \frac{Nh\nu_d}{A\delta t_d} = \frac{L}{A(1+z)^2} \quad (3.10)$$

aplicando en la segunda igualdad el valor de la luminosidad (3.4) y la relación entre frecuencias e intervalos de tiempos de emisión y detección (3.8,3.9). La definición de distancia luminosidad queda

$$d_L = ra(t_d)(1+z) \quad (3.11)$$

Recordemos que esta distancia no es la que recorren los fotones, pero su definición es indispensable para relacionar el flujo medido con la distancia recorrida. En la métrica FLRW, para la línea de universo de los fotones  $ds^2 = 0$  y un desplazamiento radial  $d\Omega^2 = 0$ , podemos relacionar  $r$  y  $z$ :

$$\frac{dr}{(1-kr^2)^{1/2}} = -\frac{dt}{a(t)} = \frac{dz}{a(t_d)H(z)} \quad (3.12)$$

donde la segunda igualdad se ha obtenido al derivar la de  $z$  y los factores de escala en la ecuación (3.3) respecto del tiempo. El parámetro de Hubble depende del tiempo, y por ello también se puede encontrar una expresión dependiente de  $z$ , que se obtiene a partir de las llamadas ecuaciones de Friedman [22]:

$$H = H_0[\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2]^{1/2} \quad (3.13)$$

Los cuatro términos dentro de la raíz son las contribuciones de las diferentes componentes del universo, según su parámetro de densidad  $\Omega$ : densidad de materia  $\Omega_m$ , densidad de radiación  $\Omega_r$ , densidad de curvatura espacial  $\Omega_k$  y densidad del vacío o constante cosmológica  $\Omega_\Lambda$ . Aplicando las propiedades del modelo  $\Lambda$ CDM, nuestro universo es casi plano y la densidad de radiación despreciable, luego  $\Omega_k \approx \Omega_r \approx 0$ , el parámetro que usaremos será [23]:

$$H \approx H_0[\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda]^{1/2} \quad (3.14)$$

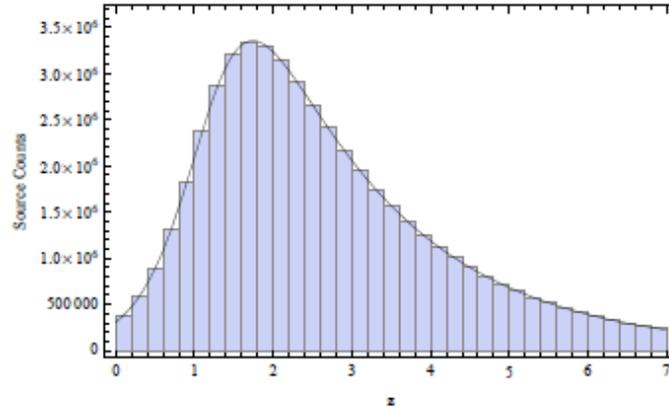


Figura 3.1: Distribución de fuentes en función del corrimiento al rojo, tomada de la referencia [11].

Volvamos al análisis sobre las distancias: la distancia actual entre fuente y detector ahora es  $a(t_d)r$ , y en el momento de la emisión era  $a(t_e)r$ . En un universo plano se pueden calcular a partir del parámetro de Hubble:

$$a(t_d)r = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad y \quad a(t_e)r = \frac{1}{(1+z)} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (3.15)$$

Como ya hemos indicado ninguna de estas distancias coincide con la recorrida durante el viaje  $D$ , pero se puede hallar a partir de la diferencia entre los tiempos de emisión y llegada. Empleando (3.12) se logra calcular:

$$D = c \int_{t_e}^{t_d} dt = - \int_z^0 \frac{dz'}{H(z')(1+z')} = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')(1+z')} \quad (3.16)$$

La pérdida de energía por corrimiento al rojo es  $E_d = E_e/(1+z)$ , de donde  $dE/E = dz/(1+z)$  y, con la segunda igualdad de (3.12), llegamos a la misma expresión que Stecker [7]:

$$-\frac{d \ln E}{dt} = H(z) \quad (3.17)$$

Modelizada la pérdida de energía, ahora hay que tener en cuenta que lo que mediremos será el flujo que llega a nosotros. Cambiamos el sistema de coordenadas a uno centrado en nuestra posición. Los cálculos anteriores tienen todos la misma validez, pues la expansión del universo es uniforme y no se realiza en una dirección privilegiada, ignorando además la velocidad relativa de las fuentes.

En todo caso, es necesario emplear una distribución de fuentes de neutrinos, a una cierta distancia y con cierto espectro de energías, en concreto la misma que Stecker. La distribución de fuentes elegida es aquella que se corresponde con la que sigue la tasa de formación de estrellas (*star formation rate*, *SFR*) del artículo [24]. Dicha distribución de fuentes viene mostrada en un artículo previo de Stecker [11], se corresponde a la figura 3.1, y es de ahí de donde hemos sacado la que hemos usado nosotros.

A partir de esta gráfica hemos calculado la expresión matemática de esta distribución de fuentes, como densidad radial de fuentes en función de la distancia a la Tierra. Puesto que el análisis de Stecker se limita a fuentes de valor  $z$  comprendido entre 0.5 y 2, el ajuste lo hemos limitado a dicho intervalo.

$$\rho_s(z_e) = e^{az^2+bz+c} \quad (3.18)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son parámetros del ajuste matemático de la gráfica.

Dada la distribución (3.18), el número de fuentes de una corona circular de espesor diferencial y radio  $a(t_d)r$  es  $dN_s = \rho_s 4\pi a^2(t_d)r^2 a(t_d)dr = \rho_s 4\pi a^3(t_d)r^2 dr$ . Así, con la definición del flujo (3.10):

$$\phi(E_d) = \int \frac{dNL}{4\pi a^2(t_d)r^2(1+z)^2} = \int \frac{\rho_s a(t_d)Ldr}{(1+z)^2} = \int \frac{\rho_s(z_e)Ldz}{H(z)(1+z)^2} \quad (3.19)$$

Tras aplicar la relación entre  $dr$  y  $dz$  (3.12) obtenemos la integral a todas las fuentes en función de la variable  $z$ . Esta integral contiene un cociente debido a la expansión del universo que a primera vista entorpece enormemente el cálculo de la integral. Los límites de integración indican para qué intervalo de  $z$  puede haber fuentes de neutrinos que contribuyan al flujo detectado.

El flujo es el que llega para una energía  $E_d$  dentro del intervalo espectral disponible; esto es importante, porque el cálculo debe ser necesariamente para una energía en concreto. Sea una fuente genérica a una distancia  $z$ , todo neutrino emitido con energía  $E$  llegará al detector con  $E/(1+z)$ , de modo que para el flujo  $\phi(E_d = E/(1+z))$  contribuirán los  $\nu$  emitidos por esa fuente con energía  $E$ , como también lo harán  $\nu$  de otra fuente a  $z'$  y  $E'$  tal que  $E/(1+z) = E'/(1+z')$ . Esto obliga a introducir una dependencia de la luminosidad dentro de la integral:

$$\phi(E_d) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho_s(z_e)L(E_e(z_e, E_d))dz_e}{H(z_e)(1+z_e)^2} \quad (3.20)$$

La contribución de la fuente será la de los  $\nu$  emitidos a  $E_e = (1+z)E_d$ , con lo que antes de calcular la integral será necesario evaluar la luminosidad en función de a qué energía se quiera calcular el flujo de llegada. A diferencia de en el caso de producción de pares, no hay energía umbral, y sea cual sea la energía emitida el comportamiento será análogo. Por último, el espectro de emisión de las fuentes ha sido elegido de forma que sigue una dependencia con  $E^{-2}$ , de acuerdo de nuevo con lo publicado por Stecker [7]:

$$L(E_e) = L_0 \left( \frac{E_e}{E_0} \right)^{-2} \quad (3.21)$$

## Capítulo 4

# Artículo de Stecker

El objetivo del trabajo pasa por averiguar una expresión analítica del mismo problema analizado en el artículo [7], por lo que parece necesario resumir sus resultados para poder compararlos con los nuestros. El artículo nos da ciertas bases sobre las que se ha realizado el trabajo y que nos han servido como punto de partida para nuestro modelo. Debe notarse que dicho trabajo presenta resultados obtenidos mediante simulaciones de Monte Carlo, mientras que nuestro enfoque será puramente analítico. La publicación comienza hablando del formalismo usado para caracterizar los procesos superlumínicos de pérdida de energía, y define la probabilidad de un proceso VPE de la misma manera que hemos hecho en el capítulo 2 (2.14). Sin embargo, para NSpl aplica la misma amplitud solo que un factor 3 veces superior, considerando que es un proceso similar que se puede dar para neutrinos de cualquier sabor. Explica después las últimas mediciones de neutrinos cósmicos realizadas por el detector IceCube [25]. Estas van a formar la referencia experimental para contrastar los resultados y analizar las limitaciones de su validez.

En IceCube se da la detección de neutrinos de cualquier tipo que llegan a él. Pueden haberse producido en la interacción de la radiación exterior con la atmósfera terrestre, en el Sol, en otras regiones de nuestra galaxia o en fuentes extragalácticas, los llamados neutrinos astrofísicos. El detector ha registrado  $87_{-10}^{+14}$  eventos de neutrinos astrofísicos por encima de los 10 TeV, cuya incertidumbre es para energías por debajo de 60 TeV, obtenida de la sustracción de los neutrinos atmosféricos [26]. El espectro para energías superiores de 60 TeV se aproxima a seguir  $E_\nu^{-2}$  [25, 26, 27]. La justificación de que estos eventos sean causados por neutrinos extragalácticos se argumenta a partir de cuatro razones: 1) La distribución de los 37 eventos registrados a  $E > 0.1$  PeV es consistente con la isotropía del universo, sin una mejora significativa en la dirección del plano galáctico [25], 2) la dirección de al menos uno de los neutrinos que alcanza los PeV viene de fuera del plano galáctico [25], 3) el flujo esperado de neutrinos galácticos difundidos es mucho menor, 4) los límites superiores para los destellos de rayos  $\gamma$  galácticos (*gamma ray burst*, *GRB*) difundidos en el rango de TeV y PeV no conllevan un flujo de neutrinos que explique las medidas dadas [28].

El espectro del flujo recibido puede describirse mediante  $E_\nu^2(dN_\nu/dE_\nu) = 10^{-8} \text{GeV cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ . Una tendencia más pronunciada que  $E_\nu^{-2}$  no se ajusta a los datos obtenidos en el rango de 60 TeV a 2 PeV, y no hay eventos a partir de 2 PeV como sería de esperar al extender el espectro desde lo medido hacia energías superiores. Pero hay algo que extraña aún más, la ausencia de eventos asociados a la resonancia de Glashow. Debido a una reacción  $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow W^- \rightarrow \text{shower}$ , en torno a la energía de esta resonancia teórica (unos 6 PeV) debería apreciarse un aumento de la sección eficaz de los antineutrinos electrónicos  $\bar{\nu}_e$ . Esto desembocaría en que el área efectiva de detección del IceCube en cuanto a  $\bar{\nu}_e$  y  $\nu_e$  aumentaría en un factor  $\sim 10$  [27]. Dadas las mediciones del IceCube, suponiendo el mismo número de  $\bar{\nu}_e$  y  $\nu_e$  y extendiendo el espectro  $E_\nu^{-2}$  a energía altas, deberían haber sido detectados en torno a 3 eventos correspondientes a la resonancia de Glashow entre 2 PeV y 6 PeV. Es más, incluso sin la resonancia de Glashow serían esperables más eventos por encima de los 2 PeV. En conclusión, la falta de estos neutrinos esperados podría

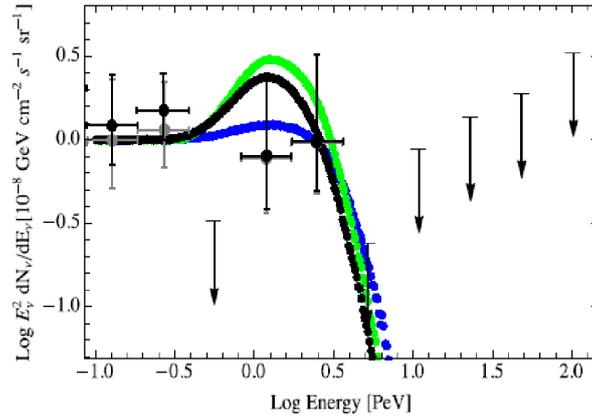


Figura 4.1: Espectro de neutrinos para  $n = 2$  (color online). En azul VPE + Rsh, en verde NSpl + Rsh y en negro los tres procesos. Energía umbral a 10 PeV. Incluido el espectro normalizado de los datos de IceCube, en gris incluyendo los neutrinos atmosféricos y en negro tras sustraerlos [25].

ser indicativa de un *cutoff* en el espectro de neutrinos [7].

El espectro de los neutrinos emitidos es tomado proporcional a  $E_\nu^{-2}$  entre 100 TeV y 100 PeV, y el flujo recibido viene normalizado siguiendo  $E_\nu^2(dN_\nu/dE_\nu) = 10^{-8}\text{GeVcm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{sr}^{-1}$ , valores consistentes con lo medido en el IceCube. Tras concretar el espectro se incluye el proceso Rsh y cómo es la pérdida que implica, junto a la distribución de fuentes y el intervalo de  $z$  en el que estas se encuentran.

Concretada ya la naturaleza de los neutrinos, se exponen los resultados obtenidos empleando métodos de Monte Carlo para conocer el posible efecto aleatorio de los procesos VPE y NSpl en el flujo de neutrinos superlumínicos. La energía umbral para la VPE se ha elegido entre 10 PeV y 40 PeV. Se han hecho por separado los casos donde predominan los términos que implican conservación ( $n = \text{par}$ ) o no ( $n = \text{impar}$ ) de la simetría CPT.

El caso mejor ajustado a las mediciones es el de  $n = \text{par}$ , conservación de CPT, con energía umbral de 10 PeV para el VPE, como se puede apreciar en la figura 4.1. Muestra el flujo recibido según la energía, tras la simulación de Monte Carlo de las pérdidas en el transcurso del recorrido cósmico, normalizado con el flujo detectado en IceCube. Los datos de IceCube, en negro y gris respectivamente, marcan los eventos normalizados estimando el flujo con y sin la sustracción de los neutrinos atmosféricos. Los tres espectros se corresponden a casos donde los procesos de pérdida de energía de los neutrinos son: en azul VPE + Rsh, en verde NSpl + Rsh y en negro los tres procesos; para los tres  $n = 2$  es el orden predominante.

El resultado es consistente con los datos de IceCube, en el sentido de que hay un corte de detección a partir de 2 PeV. El umbral  $E_* = 10 \text{ GeV}$  se corresponde a un  $\delta = 5,2 \times 10^{-21}$ . Cualquier cálculo para  $E_* \leq 10 \text{ PeV}$  no se corresponde con el *cutoff* supuestamente observado por IceCube, y por ello es descartado [11].

Los neutrinos llegados presentan un importante descenso del flujo hasta la energía umbral, y con una acumulación o *pileup* por debajo del entorno de esta energía, afectada por el corrimiento al rojo según la distancia  $z$  a la que producen el último par de partículas. Para el caso VPE + Rsh lo que ocurre es que los neutrinos más energéticos se propagan perdiendo energía. En NSpl + Rsh es aún más pronunciado, al producirse dos neutrinos nuevos en cada desintegración. Incluyendo las tres, la acumulación es algo menor. Esta acumulación sería un gran indicativo de que los términos para  $n = 2$  dominan sobre los demás, así, con una mayor estadística por encima de los 100 TeV que la observara, podría encontrarse una señal de física en la escala de Planck.

No tan esperanzador es el resultado para  $n = 1$ . La consecuencia principal de la violación de la simetría CPT es que, si un  $\nu$  es superlumínico, el  $\bar{\nu}$  será subluminal, y viceversa. Tanto

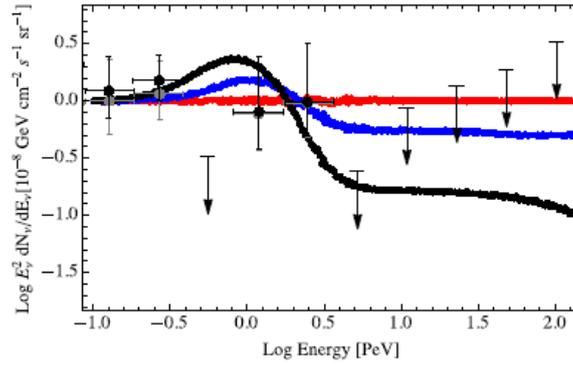


Figura 4.2: Espectro de neutrinos para  $n = 1$  (color online). En rojo 100 % sublumínicos, en azul 50 % de ambos tipos y en negro 100 % superlumínicos. Energía umbral a 10 PeV. Se muestra también el espectro normalizado de los datos de IceCube, en gris incluyendo los neutrinos atmosféricos y en negro tras sustraerlos [25].

en VPE como en NSpl se produce un par leptón-antileptón, una de las partículas hijas sería superluminal y la otra subluminal, una interactuaría y la otra no. Esto concierne también a las fuentes, pueden tener una diferente proporción de  $\nu$  o  $\bar{\nu}$ , si se emiten con el mismo espectro de energía pero unos no son superlumínicos, estos perderán energía únicamente por Rsh y no darán lugar al *cutoff*. IceCube no distingue entre  $\nu$  y  $\bar{\nu}$ , por lo que en el resultado de la simulación tampoco se diferencian. Sin embargo, esto sería una excepción si se hubieran registrado trazas de la resonancia de Glashow, pues esta solo se da para antineutrinos electrónicos  $\bar{\nu}_e$ .

En el resultado espectral de la imagen 4.2 se presentan los dos casos límite de que sean superlumínicos el 0 % de los neutrinos o el 100 % (en rojo y en negro respectivamente), y un caso más realista con 50 % neutrinos y 50 % antineutrinos (en azul). Para todas, al darse una pareja  $\nu - \bar{\nu}$ , salen uno superlumínico y el otro sublumínico.

La simulación en ausencia de LIV es más bien una comprobación, sólo se produce Rsh y por tanto la forma del flujo recibido será la misma que la del emitido. Con un 100 % de  $\nu$  (o de  $\bar{\nu}$ ), el caso más extremo, se da una reducción del flujo por encima del *cutoff*, pero sin llegar a haber un corte como en  $n = \text{par}$ , debido a que en un NSpl uno de los neutrinos hijos no volverá a dividirse y la energía de llegada será la energía con la que se ha emitido, reducida por el Rsh. Para 50 % de partículas y antipartículas, la disminución del flujo es menor, al haber una menor cantidad de partículas originalmente superlumínicas.

## Capítulo 5

# Resultado analítico y conclusiones

Hasta ahora hemos obtenido ecuaciones diferenciales que nos proporcionan la posibilidad de calcular la pérdida de energía de un neutrino por unidad de tiempo para los procesos VPE (2.17) y Rsh (3.17). Tenemos también una expresión del flujo detectado, solo que esta incluye únicamente el proceso Rsh (3.20). Hemos descartado la inclusión del NSpl al final del apartado segundo, al no ser un proceso con un estudio analítico previo e implicar nuevas dificultades no analizadas. Solo nos queda por tanto combinar VPE y Rsh. Para continuar, primero vamos a buscar una fórmula del espectro del flujo pero con pérdida por VPE. En este caso la ausencia de expansión del universo hace la integral mucho más simple, se prescinde del denominador de la ecuación (3.20). Así, el flujo para cierta energía detectada será<sup>1</sup>:

$$\phi(E_d) = \int_{r_1}^{r_2} \rho_s(r_e) L(E_e(r_e, E_d)) dr_e \quad (5.1)$$

Del mismo modo que con el Rsh se toma la luminosidad de la fuente según su distancia, y a la energía emitida que se corresponde con la energía del flujo de llegada que se quiere medir, con la VPE sucede lo mismo, siendo la relación entre ellos la solución de la ecuación diferencial (2.17) deducida en el capítulo 2. Si  $E_e \leq E_*$  tendremos que  $E_e = E_d$ , el neutrino está fuera del rango de validez de la ecuación; o si  $E_d = E_*$ , la contribución será de neutrinos de múltiples fuentes y energías tal que se alcance el umbral antes de llegar al detector.

Ahora bien, veamos el problema de juntar los dos procesos. Al perder energía por ambos simultáneamente, la ecuación diferencial resulta complicada e irresoluble analíticamente. Para llegar a ella, primero es necesario introducir la pérdida de energía por VPE (2.17) en función del parámetro  $z$ , para lo cual utilizamos (3.12):

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = -\frac{1}{E} \frac{dE}{dz} \frac{a(t_d)H(z)}{a(t_e)} = -\frac{1}{E} \frac{dE}{dz} \frac{(1+z)H(z)}{1} = -\alpha_n E^{5+3n} \quad (5.2)$$

de forma que la pérdida para ambos procesos, aplicando la ley de composición ordinaria, se obtendrá simplemente sumando (5.2) y (3.17), tras despejar  $dt$  en (3.12) de nuevo:

$$\frac{1}{E} dE = +\frac{\alpha_n E^{5+3n}}{(1+z)H(z)} dz + \frac{1}{1+z} dz \quad (5.3)$$

La ecuación se puede simplificar mucho si se hace un cambio de variable  $\tilde{E} = E/(1+z)$ , es decir,  $\tilde{E}$  es la energía desplazada al rojo por un *redshift* de parámetro  $z$ :

$$\frac{d\tilde{E}}{\tilde{E}^{6+3n}} = \frac{\alpha_n (1+z)^{4+3n} dz}{H(z)} \quad (5.4)$$

---

<sup>1</sup>Usamos  $r$  en vez de  $z$ , ya que aquí no consideramos el *redshift*.

La variable  $\tilde{E}$  es una energía efectiva que resulta ser invariante bajo el corrimiento al rojo, de modo que mientras  $E$  sí disminuye por Rsh,  $\tilde{E}$  solo lo hace por VPE. El elemento a la derecha de la ecuación final (5.4) no tiene solución analítica exacta, aunque se puede aproximar en varios tramos. Para simplificarlo se pueden hacer dos cambios de variable sencillos. El primero sería  $1 + z = x$ , donde despejando el parámetro de Hubble, queda:

$$\frac{d\tilde{E}}{\tilde{E}^{6+3n}} = \frac{\alpha_n x^{4+3n} dx}{H_0 \sqrt{\Omega_m x^3 + \Omega_\Lambda}} \quad (5.5)$$

y el segundo cambio es  $x^3 = t$ , con la consecuente diferencial  $3x^2 dx = dt$

$$\frac{d\tilde{E}}{\tilde{E}^{6+3n}} = \frac{1}{3} \frac{\alpha_n t^{4/3+n} t^{-2/3} dt}{H_0 \sqrt{\Omega_m t + \Omega_\Lambda}} = \frac{1}{3} \frac{\alpha_n t^{2/3+n} dt}{H_0 \sqrt{\Omega_m t + \Omega_\Lambda}} \quad (5.6)$$

Ya teniendo la ecuación diferencial simplificada, podemos pasar a calcular la forma del flujo por energía detectada  $\phi(E_d)$ , considerando cómo se desarrolla la pérdida de energía del  $\nu$  en función de dónde y con qué energía ha sido emitido. Si nos centramos en la dinámica de un neutrino, habrá tres casos posibles: emitido por debajo del umbral solo sufre pérdida de energía por (Rsh), emitido por encima del umbral de forma que alcanza el umbral antes de llegar al detector (Rsh + VPE / Rsh) y emitido por encima pero sin alcanzarlo antes de tiempo (Rsh + VPE). La diferencia principal será el método de cálculo de la luminosidad correspondiente, y aunque el primer caso es simple y el tercero no requiere más que de manejar (5.6), el segundo necesita introducir el concepto de  $z_*$ : la posición a la que un neutrino llega al umbral según  $z_e$  y  $E_e$ .

Ahora bien, si nos centramos en los parámetros con los que definimos cada neutrino en la integral, su posición  $z_e$  y energía de emisión  $E_e$ , tenemos cuatro posibilidades: que se emita por debajo del umbral (Rsh, igual para toda  $z_e$ ), que se emita de forma que no llegue al umbral para ninguna  $z$  permitida (Rsh + VPE, para toda  $z_e$ ), que para todas las fuentes llegue al umbral antes que al detector (Rsh + VPE / Rsh, para toda  $z_e$ ) o que para algunas fuentes llegue y para otras no (VPE + Rsh / Rsh, diferentes según  $z_e$ ). Si separamos estos cuatro posibles casos, tendremos cuatro intervalos de valores  $E_d$  para los que calcular el flujo recibido, cada uno con su correspondiente integral a las posiciones de las fuentes  $z_e$ .

Pasemos a la ecuación diferencial con Rsh y VPE (5.6) y su resolución por medio de una integral entre la emisión del neutrino y el final de la situación VPE + Rsh, que puede darse cuando alcanza el umbral o cuando llega al detector. El principal problema de esta ecuación es que el lado izquierdo solo puede ser integrado de forma numérica, aunque el derecho se trate una integral polinómica. Elegimos provisionalmente un límite inferior sin definir al que llamaremos “final”, indicado por un subíndice  $f$ . Veamos qué ocurre:

$$\int_{\tilde{E}_f}^{\tilde{E}_e} \frac{d\tilde{E}}{\alpha_n \tilde{E}^{6+3n}} = \frac{1}{-\alpha_n(5+3n)} \left( \frac{1}{\tilde{E}_e^{5+3n}} - \frac{1}{\tilde{E}_f^{5+3n}} \right) = \frac{1}{3} \int_{(1+z_f)^3}^{(1+z_e)^3} \frac{t^m dt}{H_0 \sqrt{\Omega_m t + \Omega_\Lambda}} \quad (5.7)$$

donde  $m = 2/3 + n$

Los límites inferiores cambiarán según llegue el neutrino al umbral antes de  $z = 0$  o no. Como puede llegar en dichos dos casos, se definen las dos siguientes integrales:

$$J(z_e) = \frac{1}{3} \int_1^{(1+z_e)^3} \frac{t^m dt}{\sqrt{\Omega_m t + \Omega_\Lambda}} \quad , \quad J(z_e, E_d) = \frac{1}{3} \int_{(E_*/E_d)^3}^{(1+z_e)^3} \frac{t^m dt}{\sqrt{\Omega_m t + \Omega_\Lambda}} \quad (5.8)$$

donde claramente  $J(z_e, E_d)$  es la que incluye la posibilidad de que se dejen de producir pares durante el recorrido, pues el límite inferior es  $z_* + 1 = E_*/E_d$ . Despejando de (5.7) las dos situaciones anteriores, dando el valor a la energía final  $\tilde{E}_f = \tilde{E}_*$  o  $\tilde{E}_f = \tilde{E}_d$ , y deshaciendo el

cambio de  $\tilde{E}$ , se obtienen dos definiciones de la energía de emisión con las que se podrá dar el valor de la luminosidad correspondiente:

$$E_e(z_e, E_d) = (1 + z_e)[E_d^{-5-3n} - J(z_e)((5 + 3n)\alpha_n)H_0^{-1}]^{-\frac{1}{5+3n}} \quad (5.9)$$

$$E'_e(z_e, E_d) = (1 + z_e)[E_d^{-5-3n} - J(z_e, E_d)((5 + 3n)\alpha_n)H_0^{-1}]^{-\frac{1}{5+3n}} \quad (5.10)$$

Veamos ahora las contribuciones del flujo para los cuatro intervalos definidos.

$E_d \geq E_*$ , el neutrino es emitido por encima del umbral para todas las fuentes. A lo largo de todo su recorrido se dan los procesos VPE y Rsh

$$\phi(E_d) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho_s(z_e)L(E_e(z_e, E_d))dz_e}{H(z_e)(1 + z_e)^2} \quad (5.11)$$

$E_*/(1 + z_1) \leq E_d \leq E_*$  (donde  $z_1 = 0.5$ ), para todos las fuentes el neutrino alcanza el umbral antes llegar al detector. Es posible VPE hasta que alcanza el umbral, entonces solo pierde por Rsh

$$\phi(E_d) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho_s(z_e)L(E'_e(z_e, E_d))dz_e}{H(z_e)(1 + z_e)^2} \quad (5.12)$$

$E_*/(1 + z_2) \leq E_d \leq E_*/(1 + z_1)$  (donde  $z_2 = 2$ ), dada  $E_e$  para neutrinos emitidos en una fuente en  $z$ , los que estén más alejados que  $z_*$  alcanzarán el umbral y los situados más cerca no lo harán. Habrá pérdida por VPE y Rsh en todo momento, salvo para los casos en que alcanzan el umbral, situación a partir de la cual dejarán de presentar VPE

$$\phi(E_d) = \int_{z_*}^{z_2} \frac{\rho_s(z_e)L(E'_e(z_e, E_d))dz_e}{H(z_e)(1 + z_e)^2} + \int_{z_1}^{z_*} \frac{\rho_s(z_e)L(E_d(1 + z))dz_e}{H(z_e)(1 + z_e)^2} \quad (5.13)$$

$E_d \leq E_*/(1 + z_2)$ , el neutrino es emitido por debajo del umbral. Se da únicamente corrimiento al rojo, con lo que se calcula empleando (3.20)

$$\phi(E_d) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\rho_s(z_e)L(E_d(1 + z))dz_e}{H(z_e)(1 + z_e)^2} \quad (5.14)$$

El hecho de que para resolver  $J(z_e)$  y  $J(z_e, E_d)$  sean necesarios métodos numéricos entorpece hacer estimaciones rápidas del flujo obtenido. De forma cualitativa, podemos ver claro que para energías por encima del umbral, la cantidad de neutrinos recibidos será menor a mayor energía, pues estos la irán perdiendo por dos métodos diferentes. Por otro lado, aquellos que alcancen el umbral pasarán a perder energía únicamente por Rsh. Es posible entender una acumulación por debajo de la energía umbral. Si no hubiese redshift, la acumulación se produciría exactamente a la energía umbral, debido a neutrinos de distintas energías y fuentes, que alcanzan esa energía umbral antes de llegar al detector; al incorporar el redshift, seguirá habiendo una acumulación, pero ahora por debajo de la energía umbral, aunque para entender su forma concreta habría que resolver las ecuaciones anteriores. La diferencia cualitativa entre  $n = 1$  y  $n = 2$  dependería de la proporción entre  $\nu$  y  $\bar{\nu}$ , superlumínicos o sublumínicos respectivamente o vicesversa. Si el 100 % fueran superlumínicos (caso ideal), el espectro recibido sería análogo. En todo caso, para conocer mejor los resultados obtenidos sería necesario resolver las integraciones numéricas y comprobar si se producen el *cutoff* y el *pileup*. La resolución y posterior análisis se dejan pendientes para futuros trabajos.

Una última estimación que sí se puede hacer es respecto al orden de magnitud del término  $\Lambda$ , según el cual se obtiene la escala a la que la LIV es apreciable. En Stecker et al. se le confiere a la energía umbral un valor  $E_* = 10$  PeV correspondiente a las cotas superiores de una posible contribución superlumínica  $\delta$ , y a partir de ello se puede calcular el orden de magnitud de  $\Lambda$ . A partir de la ecuación 2.11:

$$E_*^2 \left( \frac{E_*}{\Lambda} \right)^n = 4m_e^2 \Rightarrow E_* = (4m_e^2 \Lambda^n)^{\frac{1}{2+n}} = (4m_e^2 M_{Pl}^n)^{\frac{1}{2+n}} \left( \frac{\Lambda}{M_{Pl}} \right)^{\frac{n}{2+n}} \quad (5.15)$$

Se puede hallar un valor para  $\Lambda$  en función de la masa de Planck para  $n = 1$  y  $n = 2$ , dando valores a  $m_e = 0.5$  MeV,  $E_* = 10$  PeV y  $M_{Pl} = 1,2 \times 10^{19}$  GeV

$$n = 1 \rightarrow E_* = 2 \times 10^4 \text{ GeV} \left( \frac{\Lambda}{M_{Pl}} \right)^{1/3} \Rightarrow \Lambda \approx 10^8 M_{Pl} \quad (5.16)$$

$$n = 2 \rightarrow E_* = 10^8 \text{ GeV} \left( \frac{\Lambda}{M_{Pl}} \right)^{1/2} \Rightarrow \Lambda \approx \times 10^{-2} M_{Pl} \quad (5.17)$$

Un umbral  $\approx 10$  PeV como efecto de gravedad cuántica solo sería razonable para  $n = 2$ , ya que para  $n = 1$  la escala debería ser mucho mayor que la escala de Planck.

En conclusión, en este trabajo hemos analizado los mecanismos de pérdida de energía de neutrinos cosmológicos en un escenario de violación de invariancia Lorentz que da lugar a una relación de dispersión modificada para el neutrino, y teniendo en cuenta la expansión del universo (capítulos 2 y 3). Estos mecanismos fueron tenidos en cuenta mediante simulaciones de Monte Carlo de la propagación de estos neutrinos en el trabajo de Stecker et al. que hemos analizado en el capítulo 4. Nosotros, en cambio, hemos construido en el capítulo 5, en lo que constituye el resultado principal de este TFG, una aproximación analítica al problema, obteniendo expresiones matemáticas que permitirían obtener el flujo detectado. Este trabajo, que incluye la resolución numérica de las integrales obtenidas, y que permitiría realizar una comparación con los resultados de Stecker, queda para una futura extensión de lo aquí presentado. Dadas las medidas de IceCube, la simulación de Monte Carlo y nuestro análisis cualitativo, podemos decir que si la detección de neutrinos extragalácticos sigue dando cierto corte en el espectro para futuras mediciones por debajo del entorno de 10 PeV, la posibilidad de estar frente a fenomenología de la escala de Planck no es descartable. En todo caso, falta mucho trabajo y estudio de los procesos y cálculos que han quedado en segundo plano, lo que debe servir como incentivo para no dejar de lado esta investigación.

# Bibliografía

- [1] C. Rovelli, arXiv:gr-qc/0006061, ISBN 9789812777386 (2000).
- [2] R. P. Woodard, Rep. Prog. Phys. 72 (2009) 126002.
- [3] M. Planck, Mitt. Themordyn. Folg. 5 (1899).
- [4] S.R. Coleman and L.S. Glahow, Phys. Rev. D 59, 116008 (1999).
- [5] F.W. Stecker, Astropart. Phys. 56, 16 (2014).
- [6] G. F. Giudice, S. Sibiryakov, and A. Strumia, Nucl. Phys. B861, 1 (2012).
- [7] F.W. Stecker, S.T. Scully, S. Liberatti and D. Mattingly, Phys. Rev. D 91, 045009 (2015).
- [8] D. Calladay and V. A. Kostelecký, Phys. Rev. D 58, 116002 (1998).
- [9] J. M. Carmona, J. L. Cortés, and D. Mazón, Phys. Rev. D 85, 113001 (2012).
- [10] A. G. Cohen and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. 107, 181803 (2011).
- [11] F.W. Stecker and S.T. Scully, Phys. Rev. D 90, 043012 (2014).
- [12] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad.Wiss. Berlin, 844-847 (1915).
- [13] B. Schutz, *A first course in General Relativity*, p. 335 - 351.
- [14] G. Lemaître, Nature 127, 706 (1931).
- [15] A.A. Penzias and R.W. Wilson, Astrophys. J. 142, 419-421 (1965).
- [16] V. Slipher, Lowell Observatory Bulletin 58, vol II:56-57 (1913).
- [17] E.P. Hubble, Proc. Nat. Acad. Sci. 15, 168-173 (1929).
- [18] S. Perlmutter *et al.*, Astrophys. J. 517, 565–586 (1999); A.G. Riess, B.P. Schmidt *et al.*, Astron. J. 116, 1009–1038 (1998).
- [19] H.P. Robertson, Astrophys. J. 82, 284-301 (1935); *ibid.* 83, 187-201 (1936); *ibid.* 83, 257-271 (1936).
- [20] A.G. Walker, Proc. Lond. Math. Soc.(2) 42, 90-127 (1936).
- [21] J.N. Grieb *et al.*, ArXiv e-prints, (2016).
- [22] A. Friedman, Z. Phys. 10 (1), 377–386 (1922).
- [23] S.M. Carroll and W.H. Press, Anm. Rev. Astron. Atrphys. 30 499, p. 508 (1992).
- [24] P.S. Behroozi *et al.*, Astrphys. J. 770, 57 (2013).

- [25] M. G. Aartsen *et al.* (IceCube), Phys. Rev. Lett. 113, 101101 (2014).
- [26] M. G. Aartsen *et al.* (IceCube), Phys. Rev. D. 91, 022001 (2015).
- [27] M. G. Aartsen *et al.* (IceCube), Science 342, 1242856 (2013).
- [28] M. Ahlers and K. Murase, Phys. Rev. D 90, 023010 (2014).