Trabajo Fin de Grado

Situaciones aditivas: Análisis didáctico y propuesta de enseñanza de los algoritmos para primero de primaria

Aditive situations: Didactic analysis and a teaching proporal of algorithms for the first primary year.

Autor/es

Andrés García Castro

Director/es

Sergio Martínez Juste

FACULTAD DE EDUCACIÓN
2015-2016

Introducción

En este trabajo de fin de grado, último de la carrera de Magisterio en Educación Primaria, trataremos los algoritmos de la adición y la sustracción, el modo en que son trabajados y la elaboración de una propuesta didáctica original.

Debido a las dificultades que implica, la mayor parte de los maestros no se sienten cómodos ni con la enseñanza de las matemáticas ni trabajando en primero de primaria. La enseñanza de los contenidos y conceptos más básicos puede generar dificultades al docente por considerarlos obvios. Sin embargo, dichos conceptos presentan gran dificultad a los alumnos que no los consideran triviales. En concreto, las situaciones aditivas, tanto las concretas como las formales, son el eje central sobre el que giran todos los contenidos del primer curso de primaria y sobre el que se construyen todos los conocimientos aritméticos de los alumnos, por lo que una adecuada comprensión resulta determinante para el resto de la vida escolar de los alumnos. Todas estas razones hacen que considerara este tema como el que más podía enriquecer mi formación como maestro y prepararme para mi inminente entrada al mundo laboral.

Si nos centramos en los algoritmos de la suma y de la resta, un buen aprendizaje resulta fundamental ya que:

- Establece los cimientos para una buena comprensión de otros algoritmos aritméticos.
- Condiciona la relación emocional del alumno con las matemáticas formales ya que es la primera vez que se enfrentan a este tipo de representaciones.
- Se profundiza en la comprensión del valor posicional de las cifras, aspecto clave en toda la aritmética.

A lo largo de esta memoria trataremos los conceptos relacionados con el aprendizaje de la suma y la resta y los algoritmos, realizaremos un análisis de la instrucción y unas sesiones exploratorias y, finalmente, elaboraremos nuestra propuesta en función de los conocimientos que hayamos adquirido.

Los objetivos de este Trabajo Fin de Grado son:

O1: Delimitar los conceptos de algoritmo de la suma y de la resta y los aspectos relacionados con los mismos: elaboración de problemas y aprendizaje de la suma y la resta.

O2: Analizar parcialmente el estado actual de la instrucción de los algoritmos.

O3: Explorar los conocimientos y habilidades adquiridos de los alumnos de primero que estudian.

O4: Elaborar una propuesta didáctica parcial para el aprendizaje de los algoritmos de la suma y la resta. En el caso de la suma trabajaremos hasta las sumas de números de dos cifras con llevadas y en el caso de la resta sin llevadas.

La memoria de este trabajo se organiza en seis capítulos:

- En el primero desarrollaremos el marco teórico y metodológico utilizado para nuestro estudio. En él se habla del análisis de contenido como herramienta para la elaboración de propuestas didácticas, las entrevistas semi-estructuradas en la investigación en CCSS y el análisis de libros de texto.
- El segundo capítulo expone un análisis de contenido de las situaciones aditivas.
- En el tercer capítulo elaboramos un análisis cognitivo de las situaciones aditivas: Expectativas, dificultades, errores y oportunidades de aprendizaje.
- El cuarto capítulo realizamos un análisis de la instrucción actual de las situaciones aditivas. Para ello se realiza un análisis de libros de texto, se analiza una entrevista a una profesora y se realiza un análisis exploratorio de las capacidades y conocimientos de los alumnos.
- En el quinto capítulo se realiza un desarrollo argumentado de nuestra propuesta didáctica para primero de primaria estructurado en dieciséis sesiones.
- El sexto y último capítulo es una conclusión final.

Capítulo 1.

Marco teórico y metodológico

1.1 En análisis de contenido como herramienta para la elaboración de propuestas didácticas.

Si la enseñanza de las matemáticas de la escuela debe tener como finalidad preparar a los alumnos para afrontar diferentes problemas en contextos reales, los contenidos trabajados deben poseer utilidad y servir como herramientas al alumnado para la resolución de los mismos. Para el profesor esta concepción de la enseñanza implica la necesidad de diseñar las sesiones de forma cuidadosa. Así, se propone el análisis didáctico como una herramienta con la que el educador puede diseñar, poner en práctica y evaluar programaciones sobre temas matemáticos de una forma rigurosa. (Rico, 2008). Este autor propone cuatro componentes que se suceden de forma cíclica(ver gráfico 1): *Análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación.*

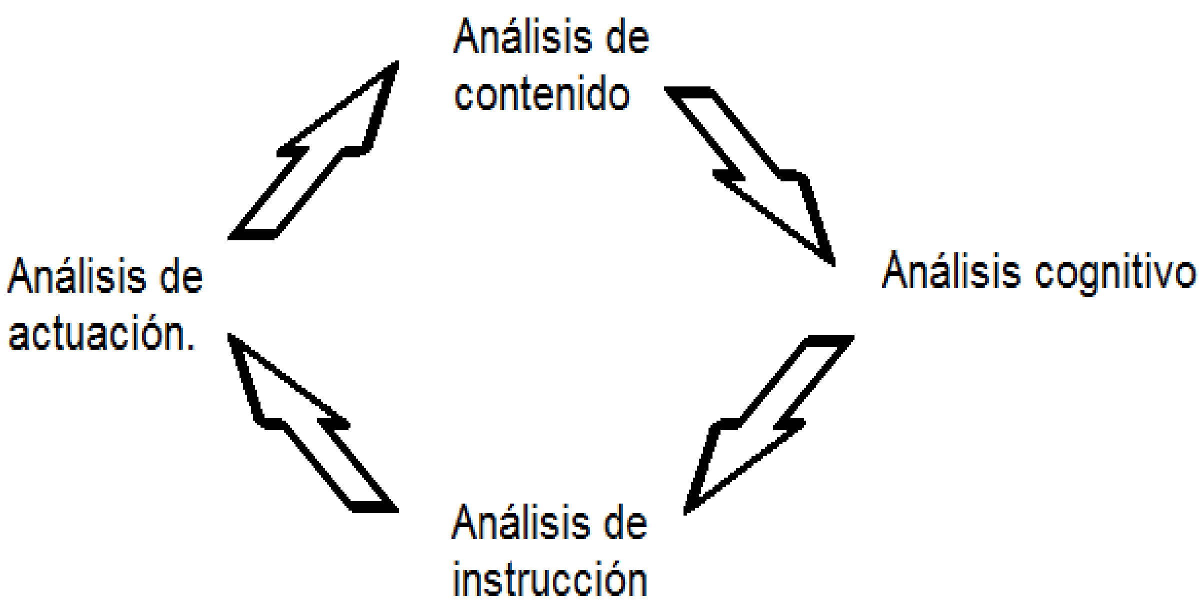


Gráfico 1. Cuatro componenentes que se suceden cíclicamente.

El análisis didáctico es una herramienta utilizada para la investigación en el área de la didáctica de las matemáticas. Se pueden encontrar múltiples ejemplos entre los que abundan los trabajos sobre el número racional (Mejía, 2004; Valdivé, 2004; Obando, 2003).

El *análisis de contenido* consiste en la selección y organización de los significados de los contextos y procedimientos de un tema que considera relevantes para la planificación. Se tratan estos contenidos, la forma en que suelen representarse y los fenómenos y problemas a los que responden estos contenidos. El análisis del contenido es realizado en torno a tres aspectos fundamentales.

- **Los sistemas de representación** (donde se consideran las diferentes maneras de representar el contenido). Se parte de la idea de que trabajar sobre la diversidad de sistemas de representación permite profundizar en el dominio de la estructura de los contenidos ya que contribuyen a estructurar el significado del contenido. (Rico, 2008) Así, estudiaremos las representaciones simbólicas, verbal, gráfica o mediante manipulaciones.
- **La fenomenología** (la cual considera los fenómenos que pueden dar sentido al contenido). El análisis fenomenológico trata las situaciones en las que los contenidos muestran su utilidad en el mundo real. Por ejemplo, desde el proyecto PISA, se proponen cuatro tipos de situaciones como criterio clasificador de las tareas: Personales, ocupacionales, sociales y científicas.

- **La estructura conceptual**, que considera las relaciones entre los conceptos y los procedimientos implicados. Es posible sintetizar toda la información estudiada (análisis de contenido, relación entre los mismos, sistemas de representación y funcionalidades en un mapa conceptual).

El *análisis cognitivo* aborda la cuestión del aprendizaje por parte de los alumnos. El profesor, en base al conocimiento sobre los contenidos y su aprendizaje, enuncia expectativas de aprendizaje sobre ese tema matemático. También analiza las limitaciones que pueden interferir en el aprendizaje. Se organiza el análisis en torno a tres aspectos fundamentales:

- **Las expectativas de aprendizaje:** lo que se espera que aprendan según los diferentes niveles. Hay diversas maneras de estudiar las expectativas, aunque Rico (2008) se centra fundamentalmente en dos: objetivos específicos y competencias. Con objetivos específicos nos referimos al desarrollo de capacidades que permiten realizar una acción concreta y para hacerlo se requiere el manejo en situaciones concretas de contenidos específicos. El término competencia es un término complejo y se refiere a un nivel de aprendizaje más amplio y con carácter integrador, para poder decir que se es competente se deben utilizar diversos conocimientos de forma integrada para abordar tareas complejas en situaciones abiertas

- **Análisis de las limitaciones**: Posibles errores y dificultades que pueden surgir. Muchas variables pueden ralentizar o dificultar el desarrollo cognitivo. El estudio de los errores busca proporcionar información al docente para que éste pueda adaptarse. Las dificultades pueden tener origen en la naturaleza teórica y formal de los conceptos **matemáticos**, la forma de representar los conceptos o el lenguaje, pero se manifiestan en forma de errores y ese debe ser el tema de estudio en nuestra propuesta.

- **Las oportunidades de aprendizaje** que el profesor brinda a sus escolares. Las tareas matemáticas son nuestra herramienta como docentes para proporcionar a los alumnos oportunidades de aprendizaje. Debemos realizar un análisis detallado de las tareas que planteamos. Cuando planteamos una tarea a los alumnos demandamos la movilización de sus conocimientos y habilidades para resolver el problema. Es posible, por lo tanto, diseñar o seleccionar tareas dirigidas a trabajar las dificultades de los alumnos (Rico, 2008) y que se encuentren en la Zona de desarrollo próximo (Vygotsky, 1999).

El *análisis de la instrucción* consiste en la selección y diseño de la secuencia didáctica. Se organizan las actividades, materiales y recursos que se van a emplear y delimitan los criterios, instrumentos y técnicas de evaluación. Se trata del análisis de las tareas propuestas teniendo en cuenta, además, organización de tiempos, espacios, materiales y recursos de evaluación.

Tras la puesta en práctica de la secuencia el docente recoge información y *analiza la actuación* acerca de: cuántas de las expectativas se han cumplido, si las tareas son adecuadas y funcionales o si las herramientas de evaluación son las idóneas. Cuando el docente se enfrente al diseño de una nueva secuencia tendrá una información útil que le guíe.

1.2 Entrevistas semi-estructuradas en la investigación en Ciencias Sociales y Didáctica de las Matemáticas

Martínez (2006) explica que la entrevista semi-estructurada consiste en un diálogo, que permite recabar información sobre diversas cuestiones, especialmente en el área de las ciencias sociales (didáctica de la aritmética, en nuestro caso) que no se pueden estudiar de otra manera. Al tomar la entrevista la forma de diálogo el entrevistador puede tener acceso a una cuestión crucial: la personalidad del interlocutor. La finalidad de la entrevista según Kvale (2006) sería acceder al mundo vivido por las personas entrevistadas para poder interpretar lo mejor posible la información que nos proporcione.

Esta metodología de investigación ha sido ampliamente utilizada en Didáctica de las Matemáticas. Por ejemplo, en los trabajos de Blázquez y Ortega (2001) para el concepto de límite, Badillo (2003) en su investigación sobre la derivada se realizan entrevistas semiestructuradas para ahondar en las concepciones de los alumnos. En otra línea, Ferrero y Montoro (2012) realizan entrevistas semiestructuradas a profesores como medio para extraer conclusiones sobre las concepciones de los alumnos sobre el número real.

1.3 El análisis de libros de texto.

Martínez y Sánchez (2013) en su análisis sobre las situaciones problemáticas a las que se enfrentaban los alumnos, concluyen que, en la mayor parte de los casos, los niños solo realizan los problemas de los libros de texto. Sin embargo, éstos dejan sin ofertar el 80% de las posibles situaciones problemáticas. Otra conclusión obtenida por los autores es que tampoco parecía que hubiera una secuenciación fundamentada del orden de presentación de los problemas.

Autores como Schubring (1987) aseguran que «los libros de texto determinan en la práctica la enseñanza más que los decretos de los distintos gobiernos». En la misma linea Astudillo (2004) considera que el análisis de los libros de texto es clave dado que la práctica viene determinada por estos antes que por otros factores. Es la herramienta predilecta de la mayor parte del profesorado e ineludiblemente va a impregnar todos los aspectos del proceso educativo. Así, dado que la metodología habitual consiste en la utilización indiscriminada del libro de texto parace necesario centrar nuestro análisis de la instrucción en el análisis de libros de textos.

Rodríguez (2011), resume las posiciones de diferentes autores y las diferentes categorizaciones de items a estudiar en los libros de texto: Bernard, Blázquez y Sevillano son los tres principales. El modelo de Bernard, uno de los autores nacionales pioneros en el tema, se basa en el estudio de:

- La meta o finalidad que se propone el libro: Transmitir conocimientos, desarrollar aptitudes, etc.
- Adecuación a las capacidades psicológicas de los alumnos.
- Las bases de programación empleadas: objetivos, contenidos, metodología, evaluación.
- La relación del texto con la legalidad.

El modelo de Blázquez por otro lado simplifica el estudio y se limita a nombrar la existencia de una docena de elementos y su relación con los que el considera los factores de aprendizaje importantes:

	FACTORES DE APRENDIZAJE AFECTADOS						
CARACTERÍSTICAS DEL TEXTO	MOTIVACIÓN	MANTENIMIENTO DE LA	DIRECCIÓN DE LA ATENCIÓN	ACCESIBILIDAD	COMPRENSIÓN	RETENCIÓN	TRANSFERENCIA
ORGANIZADORES PREVIOS			X		X	X	X
LECTURABILIDAD	X	X		X	X		
ESTILO DE LENGUAJE	X	X			X		
DENSIDAD DE INFORMACIÓN	X	X			X		
MATERIAL ACCESORIO	X				X	X	
ILUSTRACIONES	X		X		X	X	
PREGUNTAS			X			X	
FEED-BACK	X				X	X	
RESÚMENES					X	X	
TIPOS DE LETRAS		X	X			X	
USO DEL COLOR	X		X				
CARACTERÍSTICAS FÍSICAS				X			

Tabla 5. Modelos de Blazquez.

Sevillano propone estudiar los libros de texto en función de los objetivos y su capacidad de consecución. Parece tener una visión más pragmática al analizar los siguientes aspectos en función de lo que considera el como adecuado:

- Objetivos: Claros, variados y motivantes.
- Contenidos: Actualizados, completos y equilibrados. Con un lenguaje claro y progresivo. (evitar párrafos largos).
- Estilo: no debe ser rebuscado y debe ser claro.
- Estructura: División de contenidos ordenada.
- Ilustraciones: Una parte importante que aclara y hace atractivo el texto.
- Actividades: Su planificación debe estar en relación con el desarrollo de los contenidos. Variadas

- Adecuación al alumno: Importante tener presente las características de los alumnos a quienes van dirigidos.

Capítulo 2.

Análisis de contenido de las situaciones aditivas

2.1 Concepciones de la adición.

Para Segovia y Rico (2011) y Maza (1989) hay dos maneras de concebir la adición (ver tabla 1). Por un lado tenemos la concepción unitaria de la adición en la cual se ven involucradas tres cantidades, dos cantidades que se agregan (llamadas sumandos) y la cantidad resultante que se llama resultado. Desde este punto de vista la cantidad inicial se ve modificada porque se le añade una segunda cantidad. Desde la concepción binaria de la adición se presentan dos cantidades sobre las que no se realiza una acción. Se consideran conjuntos de elementos por separado y ambos tienen la misma función. Se unen los conjuntos y eso permite llegar al resultado. Este autor también postula que hay dos maneras de concebir la sustracción: la unitaria, según la cual, a una cantidad inicial, llamada minuendo, se le retira o segrega otra cantidad, llamada sustraendo, y el resultado es la cantidad obtenida al realizar la operación. La otra concepción es la binaria donde se presentan dos cantidades sin relación física y buscamos conocer la diferencia entre ambas cantidades.

Concepción unitaria	**Concepción binaria**
Adición	
Aumentar	Combinar/unir
Sustracción	
Disminuir	Comparar

Tabla 1. Concepciones de la adición.

2.1.1 Propiedades de la adición.

Segovia y Rico (2011) establecen las siguientes propiedades de la adición para los números naturales:

Clausura: $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{N} \rightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{N}$

Conmutatividad: $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{N} \rightarrow \alpha + \beta = \beta + \alpha$

Asociativa: $\forall\ \alpha, \beta, c \in \mathbb{N} \rightarrow (\alpha+\beta)+c = \alpha+(\beta+c)$

Elemento neutro: $\forall\ \alpha \in \mathbb{N} \rightarrow \alpha + 0 = \alpha$

La sustracción, por el contrario, no cumple las propiedades de clausura y conmutatividad ya que tenemos sustracciones entre números naturales que no pueden resolverse dentro de los números naturales como 5-7 (Sin embargo 7-5 si tiene solución dentro de los naturales). Para la resta debemos añadir as siguientes propiedades modificadas para la clausura y conmutatividad:

Clausura: Si b>a, a-b $\notin \mathbb{N}$

Conmutatividad: $a-b \neq b-a$ si a es diferente de b.

Sí cumple, sin embargo, las propiedades asociativas y de elemento neutro. Además de estas propiedades los autores proponen destacar la propiedad de compensación, que involucra la adición y sustracción.

Compensación: $\forall$ a, b, c € $\mathbb{N}$ a-b=(a+c)-(b+c)

Maza (1991) postula que el descubrimiento de estas propiedades debe estar basado en la experimentación sobre un gran número de casos y que cuando llegue el momento de explicitar las propiedades habrá que hacerlo de forma informal.

2.2 Situaciones aditivo-concretas.

Segovia y Rico (2011) realizan una primera clasificación de las situaciones aditivas atendiendo al número de etapas. Por un lado: se pueden diferenciar los problemas de un solo paso (problemas simples) que se resuelven con una única operación aritmética y problemas de varias etapas para los que hay que encadenar varias operaciones aritméticas para encontrar la solución. Los problemas de varias etapas se pueden reducir a problemas de una etapa encadenados.

2.2.1 Problemas de una etapa.

Para estos autores los problemas aditivos de una etapa pueden atender a los diferentes significados y concepciones de la adición.

Los problemas de cambio – Concepción unitaria : Son los que parten de la concepción unitaria de la adición y la sustracción. En ellas una cantidad inicial sufre una acción o transformación que la modifican dando lugar a una cantidad final. Se pueden plantear diferentes tipos de problemas si modificamos el lugar de la incógnita (estado inicial, transformación o estado final). Estos autores, además, consideran que los problemas de transformación son diferentes a los de igualación. Llaman a los problemas de igualación aquellos en los cuales se produce una acción física para que una cantidad sea igual a otra.

Ejemplo: María tenía 8 pelotas, le regalan 5. ¿Cuántas tiene ahora?

Problemas de combinación – Concepción binaria: En estos problemas hay dos cantidades que forman parte de un todo. Se parte de la concepción binaria y permite trabajar con problemas llamados parte-todo. La incógnita puede encontrarse en uno de los estados o en el estado total, cambiando así la naturaleza del problema y el camino para su resolución.

Ej: Manuel tiene tres caramelos, Sofía tiene dos. ¿Cuantos tienen en total?

Problemas de comparación – Concepción binaria: En estos problemas se presentan cantidades independientes que se relacionan mediante una comparación. Según Segovia y Rico (2011). Estos problemas parten de una concepción binaria de las operaciones. Hay tres cantidades: una de las cantidades (referente) y otra comparada (referido) y la diferencia. Al igual que en otros casos se puede alterar la naturaleza del problema cambiando la incógnita de lugar.

Ej: Hermenegildo tiene diez caramelos, si Herminia tiene tres más, ¿Cuantos caramelos tiene Herminia?

En el **método ABN** se maneja una clasificación equivalente a la planteada anteriormente: Cambio, combinación y comparación. Sin embargo, añaden una cuarta categoría, la de igualación, al considerar que son resueltos por los niños de forma diferentes y merecen su propia categoría

Problemas de igualación – Concepción binaria y unitaria: Desde este punto de vista existen diferencias notables entre comparación e igualación ya que aunque el segundo requiere una comparación se exige que posteriormente se conciba un cambio y esto seguramente condicione la manera con la que el niño manipula y representa el problema a la hora de solucionarlo.

Ej: José Hernando de la Concepción tiene tres caramelos. Si Manuel Adrián tiene seis caramelos, cuantos caramelos se tiene que comer para tener los mismos que José Hernando?

Cid (2003) propone una categorización que contiene a la de Segovia y Rico (2011) pero a la que añade otros tres tipos de problemas aditivos que los otros no habían considerado. Se podría argumentar que los propuestos pertenecen a sub-categorías de las manejadas anteriormente, pero lo cierto es que los otros autores no parecen considerar en ninguno de sus ejemplos todas estas situaciones y esta autora los considera suficientemente diferentes para crear su propia categorización. La clasificación de Cid apela al significado de los números naturales involucrados y no solo a la concepción aditiva necesaria para resolver el problema. Así, las cantidades involucradas se clasifican en Estados, Transformaciones o Comparaciones.

Las categorías de Segovia y Rico (2011) corresponderían a las categorías Estado-Transformación-Estado (problemas de cambio), Estado-Estado-Estado (problemas de combinación) y Estado-Comparación-Estado (problemas de comparación). La categoría de igualación del método ABN tampoco tiene traducción directa en esta clasificación.

Las categorías no incluídas en el trabajo de Segovia y Rico (2011), son las siguientes:

Problemas de *Transformación-Transformación-Transformación:* Podrían ser considerados problemas de combinación en los cuales el estado es una transformación o bien problemas de transformación donde los estados son transformaciones. Un objeto (desconocido) sufre dos transformaciones y otra cantidad que representaría la transformación total.

Ej: Juan ha ganado 7 canicas en una partida por la mañana y por la tarde ha perdido 5 ¿Cuántas canicas a ganado o perdido en total?

Problemas de *comparación-comparación-comparación:* Podrían ser considerados, de forma similar a los anteriores como problemas de combinación o como problemas de comparación. En estos problemas tenemos una comparación que representa la diferencia entre las cantidades del primer y segundo grupo, una comparación que representa la diferencia entre el segundo y tercer grupo y una comparación que representa la diferencia entre el primer y el tercer grupo.

Ej: Juan tiene 10 años más que María y María 7 años más que Julia. ¿Cuántos años más tiene Juan que Julia?

Problemas *comparación-transformación-comparación:* Podrían ser considerados (en la otra categorización) cómo problemas de transformación donde las comparaciones son estados. En estos problemas tenemos tres cantidades, una comparación entre dos cantidades (no necesariamente conocidas), una transformación de una de las cantidades y una comparación entre las cantidades después de la transformación.

Ej: Juan tiene 10 canicas más que Pedro. SI Juan pierde 8 canicas. ¿Cuántas canicas de más o de menos tiene ahora Juan que Pedro?

Una propuesta didáctica completa debería proponer a los alumnos situaciones de todo tipo para provocar más momentos de "insight" o dar la oportunidad de trabajarlas de una forma escalonada. (Martinez, 2013).

2.2.2 Los problemas de varias etapas.

Pueden ser Considerados como extensiones de los propuestos anteriormente, son una manera de aumentar la dificultad de los problemas al tener que relacionar varias acciones y demandan un mayor grado de abstracción y rigurosidad. (Segovia, 2011). El estudio de la complejidad de los problemas en varias etapas daría para otro apartado que no es tan relevante para la enseñanza de los algoritmos

2.3 Algoritmos de la suma y de la resta.

Hay varias maneras de resolver las operaciones. La forma sistemática que usa las representaciones simbólicas es mediante el uso de algoritmos. Segovia y Rico (2011) lo definen como *"una serie finita de pasos a aplicar en un determinado orden para llegar con certeza a un resultado".* Los algoritmos de la adición y sustracción que se enseñan en el sistema educativo, habitualmente son considerados un contenido prioritario sobre las estrategias de resolución de problemas.

El algoritmo de la adición para dos números cualesquiera requiere por parte del alumno la capacidad de sumar los números de una cifra, ya sea mediante técnicas de recuento, memorización de la tabla de sumar o combinaciones de ambas. Los pasos del algoritmo de la suma (Cid, 2003) serían los siguientes:

- Se describen los sumandos uno debajo de otro de manera que las unidades de un mismo orden de los diferentes números queden situadas en la misma columna.
- Se traza una raya horizontal debajo del último sumando.
- Se suman las cifras que se encuentran en la columna de la derecha.
- Si el resultado de la suma es menor que 10 se escribe en dicha columna debajo de la raya y se pasa a sumar la columna siguiente.
- Si el resultado de la suma es mayor o igual que 10 se escriben las unidades de la columna y la cifra de las decenas se suma a la columna siguiente.

- Se continua el procedimiento hasta llegar a la última columna.
- El número que aparece bajo la raya es la suma de los sumandos.

En el caso del algoritmo de la sustracción podemos hablar de dos algoritmos ampliamente utilizados y considerablemente diferentes. Por un lado, tenemos el algoritmo estándar y, por otro, el anglosajón. Los pasos a seguir para el algoritmo estándar serían los siguientes:

- Se escribe el minuendo y debajo el sustraendo de manera que las unidades de un mismo orden de los dos números queden situadas en la misma columna.
- Se traza una raya horizontal debajo del sustraendo.
- En la columna de la derecha, si la cifra del minuendo es mayor o igual que la del sustraendo se restan y el resultado se escribe en dicha columna debajo de la raya y se pasa a restar las cifras de la columna siguiente.
- Si la cifra del minuendo es menor que la del sustraendo se le suman a la primera diez unidades, se efectúa la resta, se escribe el resultado en dicha columna debajo de la raya y se aumenta en una unidad la cifra del sustraendo situada en la columna siguiente. Se pasa a restar las cifras de la columna siguiente.

En el caso del algoritmo anglosajón en vez de compensar añadiendo una cifra a la siguiente columna del sustraendo se compensa quitando una cifra a la siguiente columna del minuendo.

- Se continúa el procedimiento hasta llegar a la última columna.
- El número que aparece bajo la raya es la resta de los dos números dados.

Para autores como Maza (1989) los algoritmos deben ser la última fase del aprendizaje de las operaciones y representan un nivel de abstracción más elevado.

Hay otras maneras diferentes de trabajar la suma y la resta. El método ABN, por ejemplo, tiene una manera diferente de escribir las sumas y las restas (Martinez, Sanchez, 2011). En esencia se trata de obviar el algoritmo tradicional y recurrir a la escritura de algunas técnicas que Maza (1989) llama técnicas orales de cálculo. En el caso del algoritmo de la suma:

36 + 43		
AÑADO	QUEDA	SUMA
6	30	49
1	29	50
9	20	59
20	0	79

Ejemplo 1: Algoritmo de la suma ABN

La manera de resolver la suma tal y como mostramos en el ejemplo 1 consistiría en:

- Escribir la suma en el margen superior.
- Después se dibujan tres columnas.
- En una de ellas se escribe la cantidad de uno de los sumandos que se añade al otro sumando.
- En otra se pone la cantidad que queda en el primer sumando tras quitarle lo que se ha quitado.
- En la última se pone el resultado de las sumas parciales.

Las principales ventajas de este método son que permiten al alumno enfrentarse a la operación de diversas formas por lo que el proceso puede ser diferente en función del conocimiento que el alumno tenga de la secuencia numérica y de la tabla de la suma (ver ejemplos 2):

36 + 43		
AÑADO	QUEDA	SUMA
10	26	53
20	6	73
6	0	79

36 + 43		
AÑADO	QUEDA	SUMA
6	30	49
30	0	79

Ejemplos 2: Suma ABN.

Los defensores de este método defienden que esta manera de hacer las cosas evita los problemas relacionados con la llevada. También se plantea que al profundizar necesariamente en el valor posicional de las cifras se evita en gran medida los problemas relacionados con la mala colocación de las cifras. En el caso de la resta se utiliza un mecanismo similar:

437 - 248		
QUITO	QUEDAN POR QUITAR	RESTAN
200	48	237
30	18	207
7	11	200
10	1	190
1	0	189

Ejemplo 3: Resta con ABN

- Se escribe la operación arriba, luego se trabaja en las tres columnas.
- En una columna se escribe la cantidad que queda se va a sustraer en ese paso,
- En otra la cantidad que no se ha sustraído.
- En la última el resultado de las restas parciales.

Este mecanismo presenta las mismas ventajas que en el caso de la suma.

2.4 Representaciones de la suma y de la resta.

Recorremos en esta sección las diferentes representaciones de la suma y de la resta utilizadas:

Simbólica: Los símbolos utilizados por los adultos y enseñados en la escuela para resolver problemas aritméticos de suma y resta son, por un lado, los símbolos que hemos elegido para representar los números en el sistema decimal y, por otro, los símbolos de la estructura aditiva (tabla 2).

Símbolo	Operación/Relación	Lectura
+	Sumar	Más
-	Restar	Menos
=	Igualar	Igual

Tabla 2. Matemáticas para maestros de educación primaria (Segovia. 2011)

La principal ventaja de esta forma de representación es que permite escribir cualquier operación de una forma sencilla ya que muchas operaciones, como las de grandes cantidades, son difícilmente realizables con manipulaciones o iconos. Los modelos funcionales utilizan estos símbolos a la hora de realizar operaciones. Se considera un punto de partida inicial, una transformación (operador) y tras la operación se consigue un resultado o cantidad final.

Esta manera de representar las operaciones sólo cobra sentido de verdad cuando sirven para expresar una relación que se han tenido diversas experiencias previas con materiales y expresiones gráficas ya que si se plantea de este modo, para el niño el símbolo representa la expresión de una acción (Maza, 1989). Así, sin una base de experiencias en las que los niños hayan resuelto sumas y restas mediante diferentes estrategias de recuento, hayan utilizado materiales y representaciones la suma y la resta se convierte en un ejercicio mecánico carente de sentido.

Manipulativa: La representación manipulativa tiene que ver con diferentes objetos tangibles y manipulables (regletas, ábaco, etc.). Según Maza (1989) Los materiales con los que realizar adiciones y sustracciones se pueden clasificar en:

- Material real: Es el caso de materiales tangibles, manipulables que son objetos cotidianos no figurados (lapiceros, humanos, mesas, sillas, etc…).
- Material figurativo: Cromos, dibujos, que representan objetos reales y se utilizan para crear problemas.
- Material no figurativo: fichas, materiales que, en definitiva, no representan objetos reales.

Otros autores proponen una la distinción de diferentes materiales reales. Cid (2003) plantea diferenciar el material entre estructurado y no estructurado cuando hablamos de material real:

- El material estructurado consistiría de aquel material cuya naturaleza favorece realizar agrupaciones (billetes, ábaco, barras, regletas).
- El material no estructurado es todo aquel con el que se puede contar, pero cuya naturaleza no favorece intrínsecamente realizar agrupaciones, (canicas, lápices, sillas).

Icónica: La representación de la adición y la sustracción icónicamente consiste en dibujos o imágenes que se representan sobre el papel. Para Maza (1989) las acciones sobre material no figurativo son fácilmente representables por medio de diferentes tipos de esquemas y diagramas. Para este autor las representaciones icónicas sirven para aumentar el grado de abstracción esquematizando las acciones y relaciones del problema y permitiendo desarrollar estrategias de resolución de problemas.

Propone como ejemplos los diagramas de Venn, los diagramas de Fuson-Willis y la línea numérica y postula que es adecuado que se utilicen estos modos de representar las situaciones problemáticas como puente para generar paulatinamente una traslación de formas de representación más concretas a más abstractas. (Maza, 1991).

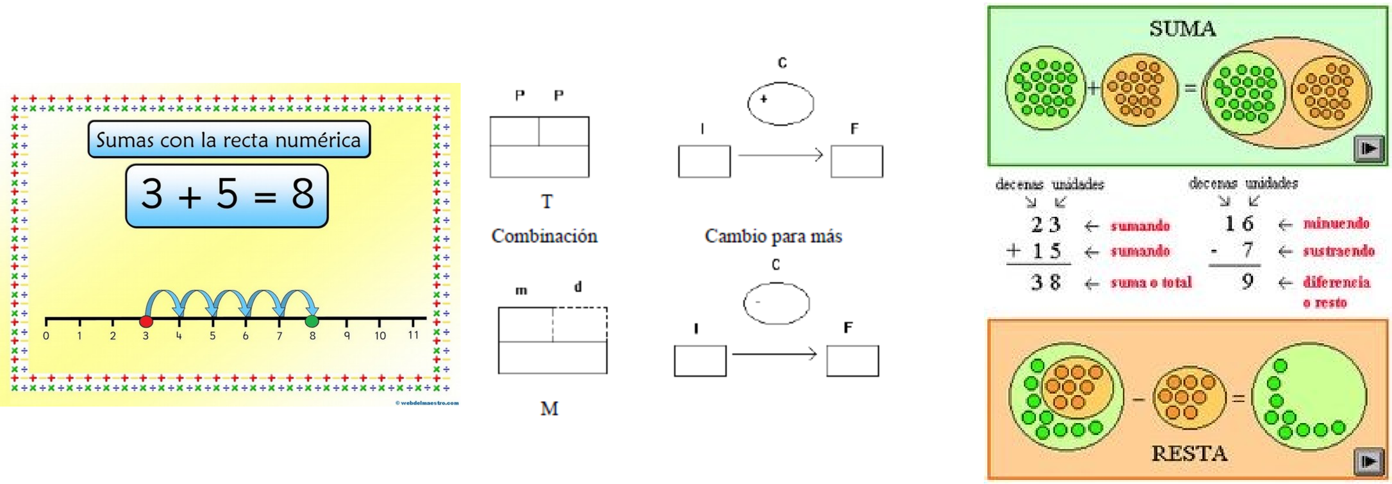


Imagen 1. Ejemplos de uso de las representaciones icónicas.

Fenomenológico: En el mundo real las operaciones aritméticas de adición y sustracción sirven para responder a situaciones problemáticas y surgen como medio para evitar tener que volver a realizar recuentos en situaciones parcialmente cuantificadas. (Cid, 2003). Cobran sentido en situaciones en las que las estrategias de modelización y conteo (Carpenter, 1999) son ineficientes. Las situaciones modelizables mediante asición y sustracción podrían clasificarse según la categorización de las situaciones aditivo concretas que hemos hecho en el apartado 2.2 de este capítulos y, resumiendo, corresponden a fenómenos de transformación, combinación y comparación de cardinales o cantidades de magnitud.

Capítulo 3.

Análisis cognitivo de las situaciones aditivas

3.1. Expectativas de aprendizaje.

En Aragón el currículo (O.ECD/850/2016, de 16 de Junio) nos indica que un niño al final del curso debe saber realizar operaciones con números naturales hasta la centena y utilizar los algoritmos estándar de suma y resta de números naturales hasta la centena.

t.MAT.2.8. Conocer y utilizar algoritmos estándar de suma y resta de ımeros naturales hasta la centena en la resolución de problemas en el ıtorno escolar y familiar.	CMCT CAA	Est.MAT.2.8.1.Utiliza algoritmos estándar de suma, resta de números naturales hasta la centena en la resolución de problemas en el entorno escolar y familiar.
		Est.MAT.2.8.2. Descompone de forma aditiva, números menores de la centena atendiendo al valor posicional de sus cifras.
		Est.MAT.2.8.3. Construye series numéricas (hasta la centena), ascendentes de cadencias 2, 10, a partir de cualquier número.
		Est.MAT.2.8.4. Descompone números menores de la centena atendiendo al valor posicional de sus cifras.
		Est.MAT.2.8.12. Utiliza estrategias personales de cálculo mental en cálculos simples relativos a la suma, resta en situaciones de la vida cotidiana.

Tabla 3. Objetivos y estándares de aprendizaje del currículum de educación primaria.

3.2 Dificultades.

Existe cierta relación entre las dificultades que pueden tener los alumnos y las competencias matemáticas: representar, comunicar, usar el lenguaje simbólico, formal y las operaciones, pero estas clasificaciones no son operativas para la cuestión del aprendizaje escolar de un tema concreto en matemáticas (Rico. 2008) ya que la información a la que tenemos acceso son las conductas observables y estas solo se manifiestan en forma de errores cometidos por los alumnos.

A medida que se desarrolle la expresión simbólica el niño resolverá más a menudo las situaciones problemáticas a las que se enfrenta eligiendo la operación adecuada y sin la necesidad de reproducir las acciones del problema. Simultáneamente disminuirá la dependencia de las estrategias de recuento en favor de recurrir a memorización de la tabla de la suma o lo que Maza (1991) llama recuperación de hechos numéricos, pero no es hasta el segundo o tercer curso de la educación obligatoria cuando este proceso da frutos visibles. A medida que se aumenta el grado de abstracción y complejidad de las situaciones problemáticas se hace necesario presentar los algoritmos matemáticos como herramienta para resolverlas. En el caso de los problemas matemáticos Maza (1989) distingue entre dos tipos de errores. Los de recuperación de hechos numéricos y los de elección de la operación adecuada (errores de comprensión) pero cuando las operaciones involucran números de más de dos cifras entran en juego el grado de manejo de los algoritmos y los posibles olvidos o despistes.

Los posibles errores algorítmicos pueden ser por despiste o por mala representación del procedimiento, sólo si se produce el mismo error de forma reiterada podemos plantearnos que sea lo segundo. Siempre que en una etapa el niño tenga una dificultad buscará realizar la tarea recurriendo a otras estrategias que si recuerde utilizando "mecanismo de reparación" (Maza, 1989). Pueden recurrir a:

- El salto: Ignora el problema y resuelve el resto del problema dejando en blanco aquello que le causa un impase.
- El abandono: Llega a una dificultad y abandona completamente el problema.
- Cambio de argumentos: usa los mismos números y prescinde de aplicar la regla con argucias como "restar el menor al mayor"
- Utilización del cero: Parecido al salto, coloca un 0 en el lugar en el que no sabe que responder.

Estas estrategias pueden ser utilizadas en cualquier etapa del algoritmo y en función de donde lo cometa podemos obtener información sobre qué proceso plantea dificultades al alumno.

La representación simbólica: Una de las dificultades que surge es respecto a la representación simbólica. Los signos de + y – pueden significar diferentes acciones muy diferentes: "reunir", "juntar", "sumar", "restar", "separar", "quitar". El término = representa una equivalencia numérica, pero para el niño, en los primeros años de escolaridad representa "Algo hecho", el resultado de una acción previa (Maza, 1991) por ello los niños tienen más dificultades en la resolución de expresiones no canónicas (donde la incógnita no se encuentre claramente en el estado final). En el caso de la simbolización, una de las dificultades, que es la comprensión del símbolo = puede ser trabajada si se le da el sentido explícitamente de que "es lo mismo que" (Maza, 1989).

3.3 Posibles errores de la ejecución de algoritmos de suma y resta.

Según Cid (2003) serían los siguientes:

- De colocación de los números: Justifican los números a la izquierda en vez de hacerlo a la derecha
- De orden de obtención de los hechos numéricos básicos. Se empieza sumando o restando por la columna de la izquierda y se avanza hacia la derecha. (esto ocurre porque se suele enseñar primero el algoritmo sin llevadas).
- De obtención de los hechos numéricos básicos. Se equivocan en los resultados de la tabla de sumar o restar o en las técnicas de recuento.
- Restar de la cifra menor de la mayor. Restar la menor a la mayor sin fijarse si es el minuendo o sustraendo.
- De colocación de un cero: cuando la cifra del minuendo es menor que la cifra del sustraendo ponen como resultado la cifra cero, es una manera de evitación.
- De lugar vació: Ante un lugar vacío no completan.
- De olvido de la llevada: no incorporan la llevada a la columna siguiente.
- De escritura del resultado completo: Cuando al operar obtienen un número de dos cifras lo escriben completo.

Respecto a la resolución de problemas hay diversas maneras de *aumentar la dificultad* de un problema, aunque sin tener en cuenta la operación necesaria para resolverlo:

Dentro de los *problemas de una etapa* se puede establecer una jerarquía de dificultad en función de la estructura del mismo.

Cid (2003) propone el siguiente orden:

- EEE (con la incógnita en el estado final o en uno de los parciales) y ETE (con la incógnita en el estado final o la transformación).
- ECE (con la incógnita en la transformación o en el *primer* término de la comparación).

- ETE (con la incógnita en el estado inicial y ECE (con la incógnita en el *segundo* término de la comparación).
- TTT (cuando las tres transformaciones tienen el mismo sentido).
- TTT (cuando las transformaciones tienen diferente sentido)
- CTC y CCC.

3.4 Oportunidades.

- A la hora de idear las sesiones deberemos cada autor tiene en cuenta diferentes aspectos que le parecen relevantes.
- Para Cid et al. (2003) es crucial que a la hora de la enseñanza del algoritmo la d*ificultad esté centrada en la operación*. Así, la estructura semántica será lo más sencilla posible (ETE o EEE) y la dirección de la operación preferiblemente debe ser directa.
- También considera clave la transición de *material estructurado, representación con dibujos, representación simbólica.* En eso coincide con los postulados del método ABN (Martínez, 2013).
- Se propone que se debe *contextualizar las situaciones,* sobretodo al inicio y que gradualmente se vayan des-contextualizando. Así, se propone una progresión: Primero situaciones de materiales presentes en el aula, luego situaciones hipotéticas contextualizadas con materiales para representar simbólicamente, más tarde situaciones hipotéticas sin materiales y, por último, situaciones formales. En esto también coinciden con el método ABN (Martínez, 2013).
- Para estos autores el tamaño de los datos que tenga el problema debe ir aumentando gradualmente. Primero datos que quepan en la mano, luego la tabla de la suma, más tarde resultados menores o iguales a 20 y problemas menores de 100 o mayores de 100.
- El método ABN (Martinez, 2013) hace una proposición parecida postulando que primero se deben presentar cálculos con dígitos, luego con decenas, luego de decenas completas y dígitos, centenas completas, etc.
- Por último, Cid et Al. (2003) proponen que se debe utilizar una diversidad de materiales ya que eso permite por un lado que se desarrollen diferentes estilos de aprendizaje y se facilita la generalización.

- Para Kammi y Joseph (1990) una de las cuestiones fundamentales es el trabajo sobre el valor posicional de las cifras. Postulan que es la base que ineludiblemente se debe trabajar, directa o indirectamente para poder aprender los algoritmos de la suma y la resta. Sobre esta cuestión también coincide Marta (Anexo 2).
- Para Maza (1991), una de las cuestiones que más puede inducir al error al principio y, por lo tanto, dificultar el aprendizaje de los algoritmos es el desconocimiento de lo que el llama, hechos numéricos (o sumas y restas de la tabla de la suma). Será crucial por lo tanto una buena base en este aspecto.

Capítulo 4.

Análisis de la instrucción actual de las situaciones aditivas

4.1 Análisis de libros de texto.

Cuando analicemos los libros de texto primero realizaremos un análisis cualitativo de los libros y después una síntesis atendiendo a los siguientes aspectos, después se expondrá la información de forma visual mediante la ayuda de una tabla.

Diferentes niveles de **representación** y abstracción de las situaciones planteadas.	- Se plantea la situación con materiales. - Se plantea la situación con la ayuda de representación icónica. - Se plantea la situación mediante la abstracción.
Grado de contextualización del problema.	- situaciones relacionadas con objetos del aula o materiales al alcance. - Situaciones de la vida cotidiana (no observable inmediatamente). - Situaciones abstractas no relacionadas con la vida cotidiana. (abstractas).
Tipos de problema planteados y donde se centra la dificultad.	- Naturaleza de la operación. - Estructura semántica. - Añadir etapas.
Momento y manera en la que se introduce la llevada en el caso de la adición.	-Momento aproximado.
Presencia de: los hechos numéricos básicos (tablas de sumar y restar)	-Si. -No.
Presencia de:las “técnicas orales de cálculo”/”método ABN”.”calculo mental” (dependiendo del autor).	-Si. -No
Presencia de: las técnicas escritas de cálculo.	-Si. -No.

Presencia de: las propiedades más importantes de dichas operaciones.	- Si. - No.

Tabla 6. Categorías estudiadas en el análisis de libros de texto.

4.1.1 Análisis del libro 1.

Editorial: edelvives.

Año: 2007

El libro está organizado en torno al tamaño de los números manipulados. “Los números del 0 al 5”, los números hasta el 9, los números hasta el 19, los números hasta el 29. Esto quiere decir que trabajan los conceptos de suma, resta, hechos numéricos y escritura del número dentro de esas franjas en cada tema.

En este libro se introduce la suma en la página 26. lo que lo colocaría alrededor de la tercera semana del curso (calculando que hagan dos páginas en cada clase de matemáticas).

Se introducen las sumas en el tema de las sumas, página 26 del libro, mediante el apoyo de representaciones icónicas. Los dibujos son apoyados con texto debajo “4 esponjas y dos esponjas son 6 esponjas. En un principio parece que se evita la representación formal de la operación en favor as técnicas orales. Se repiten ejercicios de este estilo, donde la dificultad no surge de la estructura semántica del problema sino de la naturaleza de la operación aunque en la página 31 ya se puede ver la primera situacion ETE. “luis tiene tres canicas, mara le da cinco. Ahora luis tiene…..” parece ser una excepción en un mar de EEE con la incógnita en el estado final. Parece que se trabaja la tabla de la suma pero únicamente hasta el número 9. La resta se introduce en la página 42 con ejercicios ETE y la incógnita en el estado final, la estructura semántica más sencilla para la resta. A partir de este momento no vuelve a haber restas hasta el siguiente tema. Página 51, 25 clases y cuatro semanas después del inicio se introduce el tema de las restas. El algoritmo de la suma y de la resta es introducido en este tema en la página 58 del mismo. Se trata de sumas o restas de números de una cifra a números de dos cifra, siempre sin llevadas. No se utiliza, en este caso, el apoyo de materiales que manipular, ni representaciones icónicas, recurriendo única y exclusivamente el lenguaje formal para resolverlo, además, se dice a los alumnos la operación que van a realizar al ser el título del ejercicio: SUMA, RESTA. Cabe destacar el último ejercicio de las actividades, tiene la *incógnita en la operación,* lo que requiere un nivel de abstracción aún mayor:

10+5= $\square$ 13+3= $\square$ 16+2= $\square$

$$\begin{array}{r} 1\ 2 \\ +\ \ 3 \\ \hline \square\square \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 5 \\ +\ \ 1 \\ \hline \square\square \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 3 \\ +\ \ 2 \\ \hline \square\square \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ 7 \\ +\ \ \square \\ \hline 1\ 9 \end{array}$$

9 – 5 = $\square$

5 – 3= $\square$ 8-2= $\square$

$$\begin{array}{r} 9 \\ -\ 3 \\ \hline \square \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ -\ 5 \\ \hline \square \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ -3 \\ \hline \square \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \\ -4 \\ \hline \square \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6 \\ -\square \\ \hline 1 \end{array}$$

En la página 60 se introducen las situaciones ECE con la incógnita en el estado final. Se sigue trabajando el algoritmo sin apoyo de materiales ni representaciones icónicas a lo largo del libro pero ya no se separan ejercicios de suma y resta mezclando las dos operaciones. Otro tipo de problemas que se ven a menudo son aquellos en los que se dan datos innecesarios.

Se puede observar un ejercicio en el que se pide a los alumnos que utilicen técnicas orales de cálculo aunque siempre sin llevada y en la fracción de números del tema: “Diez más seis son …………” “trece menos dos son………..”. En la página 78, semana de clase, se puede encontrar el primer problema de sumas y restas en el que se utiliza la representación icónica. Como apoyo. Con unos cerdos, conejos y gallinas dibujados se pregunta “ en la granja de Leo, las gallinas y los cerdos comen por la tarde. ¿cuantos animales comen por la tarde?” “si cuatro conejos no tienen hambre a la hora de comer, cuantos conejos comerán?”. El siguiente problema con unas características similares sería el que se encuentra en la página 108.

Además se dedicará un tema entero al trabajo sobre suma y resta de decenas completas a números de dos cifras.

La llevada de la suma es introducida en la página 150 con la suma de tres números.

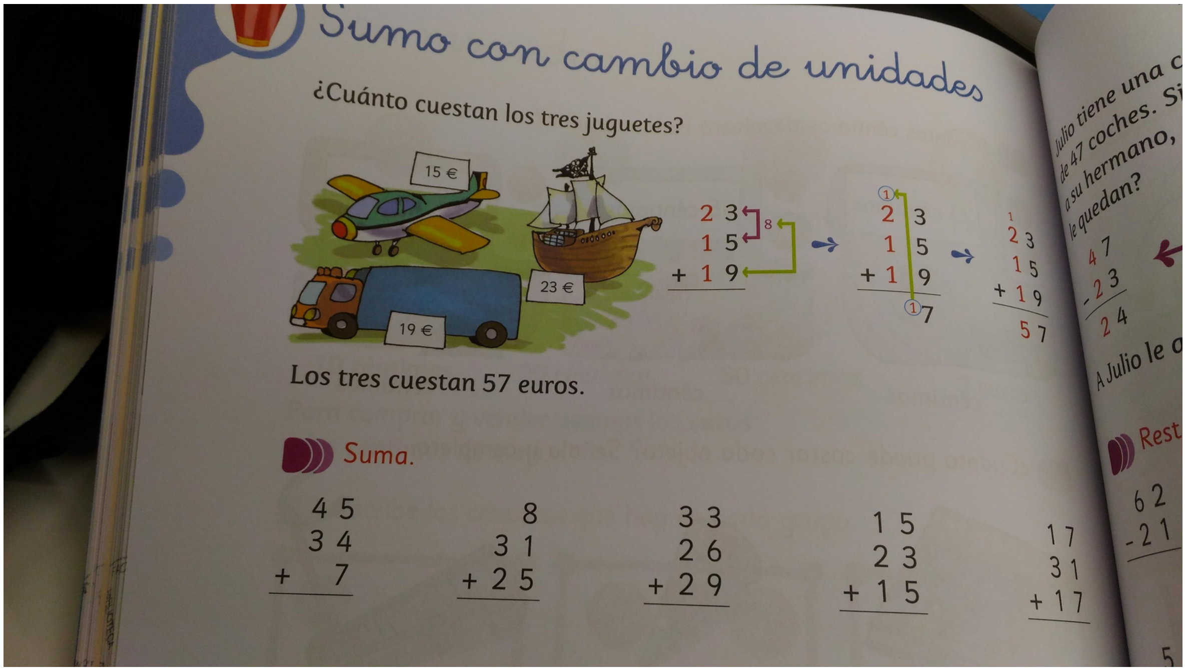


Foto 1. Introducción de la llevada.

Se pone un ejemplo (el de la foto) y luego se ponen varios ejercicios buscando que los niños practiquen. Este proceso se repite a lo largo del resto del libro de texto. No hay formas de representación diferentes (mediante materiales o imágenes), y no hay un trabajo sobre el valor posicional de las cifras. Se siguen planteando situaciones abstractas a lo largo del resto del libro y en el caso de los problemas se recurre al valor monetario como excusa para plantear la operación. No se introduce la llevada de la resta en ninguna parte.

<u>Síntesis del análisis del libro de Edelvives.</u>

¿Diferentes niveles de representación y abstracción de las situaciones planteadas?

De las situaciones problemáticas vistas, lo más habitual, en el 98% de los casos es una representación simbólica de la situacion. En algunos casos, algo más al inicio del curso, se proporcionan imágenes desde las que apoyarse para resolver los problemas, como ya hemos citado en el análisis.

¿Cual es el grado de contextualización del problema?

Cuando se trabaja con problemas se trata de problemas sin el uso de materiales, ya sean reales, figurativos o no figurativos. En los primeros temas, al tratar los números hasta el 29 parece que las situaciones son hipotéticas pero habituales en el contexto del niño al tratarse trata de problemas donde se da la importancia al recuento de unidades pero a partir del número 29 se empieza a plantear los problemas como situaciones de compra-venta principalmente. Convirtiendose, por lo tanto en situaciones descontextualizadas.

¿Donde se centra la dificultad en los problemas planteados?

En los problemas planteados se busca que la dificultad esté en la naturaleza numérica de la operación y únicamente se plantean situaciones EEE, ETE y alguna ECE con la incógnita en el estado final.

¿Donde y como se introduce la llevada?

A finales del segundo trimestre aproximadamente o al principio del tercero. Se introduce con un ejemplo, luego se plantean ejemplos.

¿Se trabajan los hechos numéricos básicos?

Se olvidan aproximadamente de la mitad de la tabla de la suma (a partir del 10).

¿Se trabajan las formas orales de cálculo?

Poco o muy poco. Solo en contadas ocasiones se ven ejercicios donde se busque favorecer el cálculo oral.

¿Se trabajan las técnicas escritas de cálculo?

Primordialmente esto es lo que se trabaja en este libro, de forma simbólica y descontextualizada

¿Se trabajan las características de estas operaciones?

No, ninguna.

Diferentes niveles de **representación** y abstracción de las situaciones planteadas.	- Se plantea la situación con materiales.	0%
	- Se plantea la situación con la ayuda de representación icónica.	≈ 25%, especialmente al principio.
	- Se plantea la situación mediante la abstracción.	≈ 75. Mayor cantidad al final del libro.
Grado de contextualización del problema.	- Situaciones relacionadas con objetos del aula o materiales al alcance.	0%
	- Situaciones de la vida cotidiana (no observable inmediatamente).	≈ 15%
	- Situaciones abstractas no relacionadas con la vida cotidiana. (abstractas).	≈ 85%
Tipos de problema planteados y donde se centra la dificultad.	- Naturaleza de la operación.	≈ 90%
	- Estructura semántica.	≈ 5%
	- Añadir etapas.	≈ 5%
Momento en el que se introduce la llevada en el caso de la adición.	-Momento aproximado.	≈ 55-65% del curso.
Presencia de: los hechos numéricos básicos (tablas de sumar y restar)	-Si. -No.	Hasta el 9, si. Luego, no.
Presencia de:las “técnicas orales de cálculo”/”método ABN”.”calculo mental” (dependiendo del autor).	-Si. -No	No
Presencia de: las técnicas escritas de cálculo.	-Si. -No.	Si
Presencia de: las propiedades más importantes de dichas operaciones.	- Si. - No.	No

2.1.2 Análisis del libro de texto 2.

Editorial Luis vives

Año: 2004.

Autores: Equipo Mural.

Este libro se organiza en torno al mismo concepto que el de edelvives, se basa en temas construidos al rededor de grupos de números (0 al 9), (10 al 19)….etc…. Las primeras sumas surgen en el primer tema en la página doce, y si no tenemos en cuenta la grafía de los números se presentan como “añadir” y se presentan en un lenguaje no simbólico.

“2 gomas y 1 goma son 3 gomas” “1 lápiz y 1 lápiz son 2 lápices”.

El segundo tema se llama “¿cuantas quedan?” y podemos imaginarnos que trata sobre la resta, siempre con números inferiores a diez. Prácticamente todas las actividades van acompañados de un dibujo que representa lo que están describiendo o pidiendo. Suelen ser situaciones que se pueden imaginar aunque sean hipotéticas como por ejemplo, : “en una bandeja tenemos cinco vasos, se nos caen dos, cuantos nos quedan?”. “ el tren largo tiene siete vagones, el corto, cuatro menos”

El cuarto tema dedicado única y exclusivamente a situaciones de comparación “¿del 6 al 8 escalón de una escalera hay? ….. escalones”. En este tema es donde se presenta por primera vez una situación en lenguaje exclusivamente simbólico. En la página 46. Cuando llevamos algo más de un mes de clase y es una actividad en un mar de actividades con apoyo de imágenes.

La primera vez que los alumnos se enfrentan a la representación formal simbólica de la suma es en el tema de las decenas, con unos problemas de la página 36. Uno de ellos, por ejemplo, consiste en un dibujo de un peral en que se han caido unas peras. “caen ….. peras y quedan …… peras. ¿Cuantas peras había?. Había ….. peras. Y al lado de la pregunta podemos ver lo siguiente:

$$\begin{array}{r} \square \\ + \square \\ \hline \square \end{array}$$

Las situaciones planteadas a partir de entonces son similares son parecidas.

A partir de este momento, empiezan a plantearse situaciones exclusivamente simbólicas aunque la proporción de ejercicios con apoyo gráfico es muy superior. En la página 66 hay una propuesta que busca resaltar el concepto de resta como diferencia. Así, plantean un sistema parecido al “ascensor que siempre sube”, que utiliza la profesora entrevistada (ver entrevista). Se plantean por lo tanto tareas del estilo “ del ocho al once tere da tres saltitos: 11-3=8”. Todo acompañado de un dibujo, por supuesto. Aunque no se produce la llevada y parece más un ejercicio de memorización de hechos numéricos. A partir de la página 80 más o menos la cantidad de situaciones en las que tengan apoyo visual disminuyen y se multiplican las situaciones representadas exclusivamente simbólicamente.

La primera vez que se enfrentan a la llevada en la suma es en la mitad del libro (y por lo tanto del curso, seguramente). Hay una diferencia entre este libro y el de edelvives y es que utilizan una fase de transición descomponiendo la suma:

$$\begin{array}{rcc} & D & U \\ & 1 & 6 \\ + & & 7 \\ \hline & 1 & 3 \\ & 2 & \end{array}$$

“Primero sumanmos las unidades: 6+7 = 13 una decena y tres unidades, luego las decenas: 1+1=2…. 23 piruletas.” En definitiva se están escribiendo las sumas parciales. En la siguiente página cambian su manera de presentarlo y se presenta la llevada tradicional. A partir de entonces y hasta el final del libro se trabajarán situaciones de suma de dos cifras con y sin llevada y situaciones de resta sin llevada. En la mayor parte de los casos descontextualizadamente y mediante el uso exclusivo de la representación simbólica.

Síntesis del libro de la editorial Luis Vives.

¿Diferentes niveles de representación y abstracción de las situaciones planteadas? ¿Cual es el grado de contextualización del problema?

La primera parte del libro tiene bastantes representaciones icónicas acompañando los problemas pero a medida que avanza el curso van disminuyendo en favor de representaciones simbólicas sin apoyo. Las situaciones planteadas también empiezan estando realcionadas con la vida real aunque sean hipotéticas aunque rápidamente se vuelve a preguntar prácticamente exclusivamente desde

¿Donde se centra la dificultad en los problemas planteados?

Los de Luis vives son más valientes en cuanto a las estructuras sintácticas que se atreven a plantear. Tratan más abundantemente las situaciones ETE y ECE e incluso de vez en cuando alteran la posición de la incógnita aunque lo habitual sigue siendo que se encuentre en el estado final. No se han visto casos de problemas con datos innecesarios, al contrario de los de Edelvives. Cuando se trataba las sumas y las restas y, en concreto, las sumas con llevadas, las estructuras sintácticas eran siempre de EEE. Para que la dificultad recaiga en la operación.

¿Donde y como se introduce la llevada?

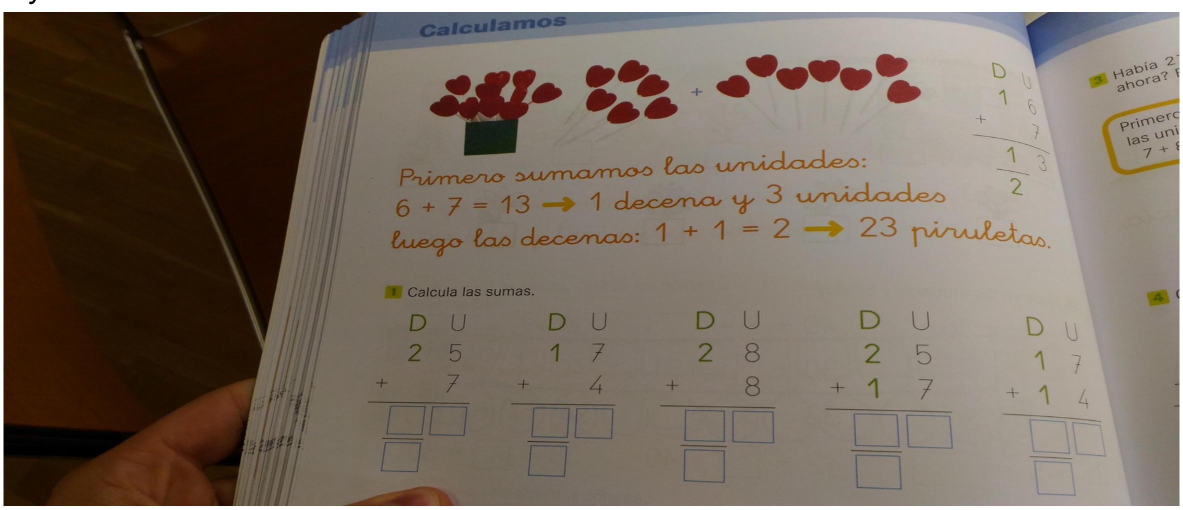


Foto 2. Introducción de la llevada

A finales del segundo trimestre aproximadamente o al principio del tercero. Se introduce con un ejemplo luego se plantean ejemplos.

¿Se trabajan los hechos numéricos básicos?

Algo más que en el caso de Edelvives al incluir sumas y restas hasta la franja de la decena (11-3, etc.) aunque incompleto sin duda. Los hechos numéricos apenas son trabajados.

¿Se trabajan las formas orales de cálculo?

Nada.

¿Se trabajan las técnicas escritas de cálculo?

Primordialmente esto es lo que se trabaja en este libro, de forma simbólica y descontextualizada

¿Se trabajan las características de estas operaciones?

No, ninguna.

Diferentes niveles de **representación** y abstracción de las situaciones planteadas.	- Se plantea la situación con materiales.	0%
	- Se plantea la situación con la ayuda de representación icónica.	≈ 40%, especialmente al principio.
	- Se plantea la situación mediante la abstracción.	≈ 60. Mayor cantidad al final del libro.
Grado de contextualización del problema.	- Situaciones relacionadas con objetos del aula o materiales al alcance.	0%
	- Situaciones de la vida cotidiana (no observable inmediatamente).	≈ 25%
	- Situaciones abstractas no relacionadas con la vida cotidiana. (abstractas).	≈ 75%
Tipos de problema planteados y donde se centra la dificultad.	- Naturaleza de la operación.	≈ 80%
	- Estructura semántica.	≈ 10%
	- Añadir etapas.	≈ 10%
Momento en el que se introduce la llevada en el caso de la adición.	-Momento aproximado.	≈ 65-75% del curso.
Presencia de: los hechos numéricos básicos (tablas de sumar y restar)	-Si. -No.	Hasta el 9, si. Luego, no.
Presencia de:las “técnicas orales de cálculo”/”método ABN”.”calculo mental” (dependiendo del autor).	-Si. -No	No
Presencia de: las técnicas escritas de cálculo.	-Si. -No.	Si
Presencia de: las propiedades más importantes de dichas operaciones.	- Si. - No.	No

4.2. Concepciones de los maestros en ejercicio.

Esta entrevista fue realizada el nueve de marzo de 2016 a una profesora de primero de primaria del colegio Juan XXIII durante el recreo.Hay que destacar que es una profesora joven, con ganas de hacer cosas y probar cosas nuevas y seguramente no represente una muestra representativa del gremio, pero su aportación parecía crucial, sobretodo teniendo en cuenta que es la maestra del grupo con el que trabajamos en las sesiones exploratorias.

Entrevista realizada el 09/03/2016 durante el recreo de 11:15 a 11:30.

Entrevistador: ¿Con qué tipo de actividades introduces los conceptos de sumas y restas en primero de primaria?

Profesora: Hacemos actividades donde tengamos que juntar, agrupar.

Entrevistador: entiendo que en estas situaciones se resuelve mediante el recuento.

Profesora: Si, se hacen para poder calcular el total sin hacer cálculos numéricos.

Entrevistador: ¿algún otro tipo?

Profesora: Actividades donde tengan que identificar y contar los elementos de los grupos, y el total o ver que objetos tenían, los que se añaden y los que tienen al final…..Además tenemos actividades donde usamos dibujos para poder ver lo que ha pasado, el proceso y el total. Una vez trabajado el concepto de la suma con este tipo de actividades, pasamos a la verbalizar la situación, y por último presentamos el algoritmo de la suma. Dos y tres son cinco. Dos más tres igual a cinco.

-mientras dice esto escribe en el papel-. 2 3 son 5. 2+3=5.

Entrevistador: Y en el caso de la resta?

Profesora: Bueno…. Pues situaciones del día a día en las que hay que calcular cuantos elementos quedan después de haber quitado algunos o que se hayan ido. Sin calculos numéricos al principio, como con la suma. Otras donde resolvemos restas dibujando el minuendo y tachando la cantidad del sustraendo. Así vemos que nos queda al final.

Entrevistador: He visto unas tablas que tienen los niños pegadas en la mesa que a veces usan cuando están en clase.

Profesora: eso es el ascensor que nunca puede bajar. Eso lo usamos para que vayan acostumbrándose a ir del sustraendo al minuendo y a ver cuantos van.

Entrevistador: Me imagino que los símbolos los introducís después.

Profesora: si.

Entrevistador: ¿Y cuáles son las dificultades más habituales sobre este tema?

Profesora: En general son conceptos que se comprender bastante bien de forma aislada sobretodo con números pequeños y haciéndolo de forma manipulativa. Pero las dificultades surgen cuando se tienen que enfrentar solos a la suma y a la resta. Algunos alumnos no saben que significa sumar o restar, y también van apareciendo más dificultades conforme los números son mayores.

Entrevistador: ¿ves muchas diferencias entre los alumnos a la hora de comprenderlo?

Entrevistador: Pues sí. Hay un grupo reducido de alumnos que no tienen problemas para comprender la suma y la resta e ir avanzando, otros tienen un ritmo más lento, aunque no tengan dificultades, y unos pocos muestran dificultades bastantes más serias.

Entrevistador: ¿Podrías ponerme un ejemplo típico de suma?

Profesora: Pedro tiene 12 cromos y su amiga Elena le da 5 cromos. ¿Cuántos tiene en total?

Entrevistador: ¿Y para la resta?

Profesora: María tiene 9 caramelos y le da 5 caramelos a su amigo Luis. ¿Cuántos caramelos le quedan?

Entrevistador: ¿Qué otros tipos de problemas propones para la suma y la resta en primero de primaria?

Profesora: Problemas de mas que, menos que. Obtener datos de una tabla. Problemas donde sobran datos. Inventar o completar problemas.

Entrevistador: ¿Qué materiales usáis en el aula?

Profesora: Pues impreso, manipulatirvo y digital.

Entrevistador: ¿Podrías ponerme un ejemplo de material manipulativo?

Profesora: Pues los lápices del estuche, las tabletas de Santillana…

Entrevistador interrumpiendo: ¿Tabletas de santillana?. Perdona por interrumpir.

Profesora: si, no te preocupes, son unas tiras de colores que vienen con el libro. Tienen diferente color según lo largas que sean y las ponemos unas al lado de otras para ver cuantas necesitamos para…. Para conseguir a las otras usando diferentes intentos en plan….. pues la roja que… que vale dos y la azul que vale tres son tan largas como la amarilla que vale cinco. ¿No?

Entrevistador: Podrías enseñármelas luego.

Profesora: Si, claro.

Entrevistador: Y en que momentos usáis esos materiales.

Profesora: sobretodo al principio de la clase, para, ya sabes….. acostumbrarles. Para mi es importante que el principio de la clase siempre sea interesante para ellos. Pero vamos, que luego están haciendo un ejercicio que les cuesta y les animo a utilizarlo para ayudarse, no somos rígidos con eso, creo que tienen que usarlo siempre que lo necesiten. ser al principio de la sesión y en los momentos de trabajo más individual, en función de las necesidades de cada alumno

Entrevistador: ¿En qué momento del curso introduces el algoritmo escrito de la suma?

Profesora: Durante el primer trimestre, pero sólo una vez que se ha trabajado la numeración hasta el 9.

Entrevistador: ¿Qué es lo que te parece más importante que los niños sepan a la hora de aprender el algoritmo escrito?

Profesora: Pues tienen que saber reconocer a través del signo de que operación se trata y colocar los números correctamente, eso siempre les cuestaaaa. Buff....

Entrevistado: ¿Y que otras dificultades ves que tienen?

Profesora: hombre lo más difícil es colocar los números, luego interpretar el signo y colocarlos. Ah, y cuando están con las dos cifras no empiezan por las unidades y luego por las decenas.

Síntesis y análisis de esta entrevista:

<u>Sobre las dificultades</u>*:* Una de las cosas que menciona la profesora, con sus propias palabras es que: "algunos alumnos no saben que significa sumar o restar". Esto nos muestra que se ha avanzado hacia la abstracción y la escritura de operaciones y algoritmos sin haber presentado anteriormente suficientes situaciones concretas. También cita que "lo más difícil es colocar los números, luego interpretar el signo y colocarlos" "y cuando están con las dos cifras no empiezan por las unidades y luego por las decenas". Esto denota que estos niños tienen poco interiorizado el valor posicional de las cifras, por otro lado, para ellos carece de sentido empezar por las unidades antes de las decenas ya que no se les ha presentado aún una situación en la que esto sea un problema, al haber postergado la presentación de las adiciones con llevada a finales del segundo cuatrimestre. Como veremos en las sesiones exploratorias hay una parte de la clase que no saben escribir los números de dos cifras.

<u>Sobre los tipos de problemas:</u>

Se habla de problemas ETE y ECE aunque también habla de otros problemas en los que la dificultad reside en que sobran datos. Hasta aquí coincide en gran parte con lo expuesto en la fundamentación, los otros tipos de problemas deben ser trabajados más tarde. Otra cuestión interesante es que en los dos problemas planteados tienen la incógnita en el estado final.

<u>Sobre la tabla de la suma:</u> en este aspecto coincide con lo que postulan los libros de texto y postula trabajar "la numeración hasta el 9" como una prioridad, y presentar el algoritmo de la suma inmediatamente después. Pero si se ha trabajado la numeración hasta el 9 no hay un trabajo previo sobre el valor posesional de las cifras.

4.3 Análisis exploratorio de conocimientos y capacidades de los alumnos.

La muestra con la que trabajamos es un grupo de primero de primaria en el segundo semestre del curso del colegio Juan XXIII. Nos encontramos con un grupo cuya característica principal es la diversidad.

De los veinticinco alumnos cuatro han nacido en España y tienen padres españoles. De estos cuatro uno de ellos ha sido diagnosticado con esquizofrenia y sufre ataques regularmente de modo que rompe el material o agrede tanto a sus compañeros y los profesores como a si mismo y otro de ellos es de etnia gitana. Diecisiete han nacido en España y tienen padres extranjeros, de estos cinco son de origen latinoamericano, por lo que la barrera del idioma es menor, tres son de origen subsahariano cuyo idioma materno es el inglés, tres son de origen marroquí, cuyos idiomas maternos son el francés y el árabe y el resto provienen de de Rumanía y han adquirido el idioma con facilidad. Cuatro no han nacido en España y han llegado siendo ya mayores. De estos cuatro dos no han adquirido más que las nociones más básicas de castellano. Tres de los niños reciben apoyo de las PT y tienen la etiqueta de ACNEE y otros tres reciben apoyos educativos tres veces por semana por parte de la profesora de la otra vía.

Respecto a las matemáticas. Desarrollamos algunas sesiones exploratorias para averiguar cuestiones relevantes. Aunque como es explicado por la profesora, hay un grupo de unos seis alumnos que avanza sin dificultades, otro grupo de 13 que avanzan lento pero avanzan y seis alumnos con muchas dificultades, que apenas son capaces de realizar un recuento y mucho menos un recuento por encima de diez. Hablando con la tutora nos explica que en los seis años que lleva enseñando en este colegio se trata de una clase estándar.

Primera sesión exploratoria: Técnicas de recuento.

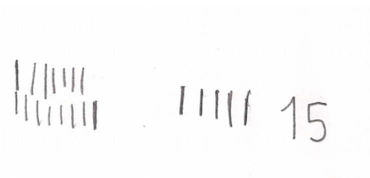
Desarrollo de la primera sesión:

Materiales: Proporcionamos palillos de dientes y gomas para poder juntarlos.

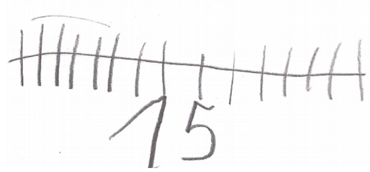
Primero, cada niño cuenta hasta diez palillos y los separa del resto después tiene que usar la goma para hacer un grupo (de diez palillos). Esto era el paso inicial para realizar el que yo pensaba que iba a ser el primer ejercicio pero se convirtió en el primer ejercicio ya que para cuatro de los alumnos esta tarea estaba fuera de sus posibilidades y tuvieron que recibir mi apoyo para poder realizarlo. El resto de los alumnos pudieron hacerlo y unos seis de ellos lo hicieron en unos segundos por lo que tuve que pedirles que ayudaran a los compañeros para que no estuvieran sin hacer nada mientras solucionaba lo de los 4 compañeros con dificultades.

Después se daba a los alumnos el siguiente enunciado: *Cogemos 15 palillos.*

La mayor parte de los alumnos se dedican a coger palillos uno a uno hasta llegar a quince, hay unos pocos (los mismos que acabaron antes) que cogen los diez que habían juntando antes y cinco más y hay otro grupo que miran lo que hacen los compañeros y empiezan a coger los palillos pero no cogen el número adecuado (algunos más, otros menos).



Ejemplo 1. escriben 15 pero no cogen quince palillos.



Ejemplo 2. cogen quince palillos sueltos.

Ejemplo 3. Agrupan en decenas.

Preguntamos de uno a uno a uno de los alumnos que habían usado los palillos agrupados como lo ha hecho para que lo explique a la clase:

- Respuesta: pues…. Ya tenía diez así que solo necesitaba cinco más para llegar a quince"
- Pregunta: ¿y tu sabías que necesitabas cinco o has ido contando desde diez".
- Respuesta: conté.

Después de que este niño explique a sus compañeros lo que ha hecho preguntamos si hay otra manera de coger quince palillos. Tras un silencio responde uno de los niños que si que había usado el grupo de diez, que podría haber cogido quince palillos sueltos pero que tardaba más.

Siguiente enunciado: *Busca todas las maneras que se te ocurran de coger 22 palillos. (solo se pueden hacer grupos de diez).*

Aquí los alumnos con dificultades ya desisten (indefensión aprendia) y ni siquiera lo intentan, tengo que acercarme y guiarles paso a paso, en mi cabeza esta actividad se ha convertido en una actividad de recuento para ellos y con que cuenten hasta 22 me doy por satisfecho.

Ejemplo 4 Coge dos grupos de diez y dos unidades.

Ejemplo 5. Coge 22 palillos sueltos.

14 alumnos, (un 52 por ciento de la clase) hay hallado dos soluciones

5 alumnos (20 por ciento de la clase) han hallado tres soluciones diferentes.

6 alumnos sólo han hallado una, cuatro de los cuales tuve que guiarles personalmente.

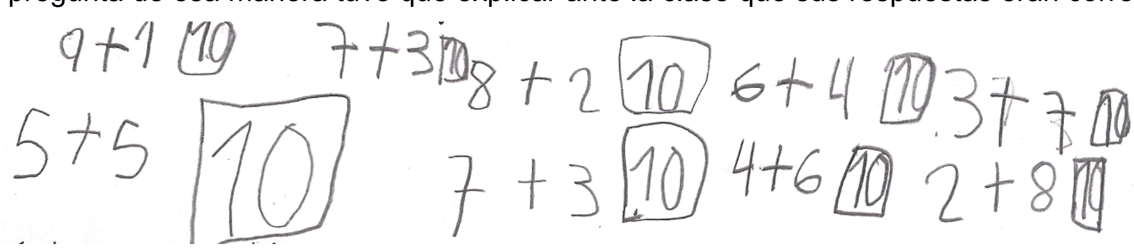
Ponemos en común las soluciones y doy por concluida la sesión. (la profesora me había dado quince minutos pero había usado ya 25)

Segunda sesión exploratoria: Complementarios del diez y del quince.

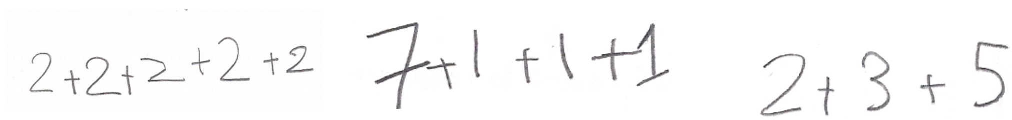
En esta sesión busco explorar los conocimientos sobre los hechos numéricos que tienen. Para ello les lanzo la pregunta:

A ver cuantas maneras de sumar 10 se os ocurren.

Muchos de ellos se pusieron a probar y fueron apuntando diferentes opciones pero ninguno recurrió a ningún objeto. Tras la sesión anterior yo había juntado a los 6 alumnos con más dificultades en un grupo de mesas y me había acercado. Cogimos diez lápices y los pusimos en medio de la mesa y probando entre todos hayamos todas las soluciones. Me sorprendió uno de los alumnos más aventajados que seguía escribiendo cuando los demás habían acabado y resulta que estaba buscando todas las maneras de sumar diez y no solo las que se consiguen con 2 números. (1+1+1+1+1+1+1….. etc.…). Dado que era evidentemente mi responsabilidad por plantear una pregunta de esa manera tuve que explicar ante la clase que sus respuestas eran correctas.



Ejemplo 6. Representación habitual.



Ejemplo 2. Representaciones del alumno que buscaba otras soluciones.

¿Cuantas maneras hay de sumar el número quince?

Aquí se les cambia la cara y la mayor parte de ellos empieza a usar el ascensor (un papel que tienen pegado a la mesa

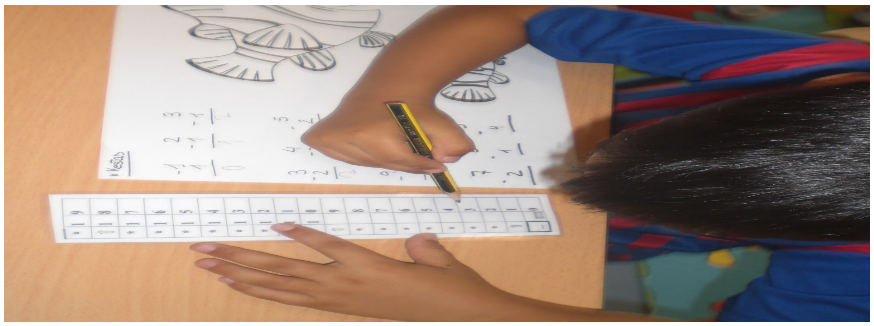
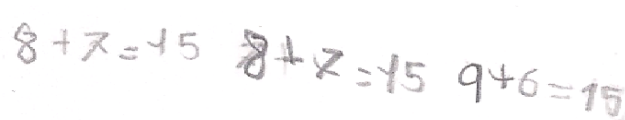


Foto 2. El ascensor de la resta.

Esta pregunta ya tiene mucha más dificultad y no son capaces de hallar todas las opciones más que un puñado de alumnos aunque una buena parte hallaron las posibilidades de números inferiores al diez, es decir. 6+9 y 7+8 .

Ejemplo 7. Respuesta bastante completa.



Ejemplo 9. Respuesta habitual.

Sesión 3. Sumando decenas completas.

Se presenta a los alumnos la siguiente situación:

Tenemos diez palillos, cogemos diez más. ¿cuantos tenemos?. ¿Y si a estos le añadimos diez más?

Así cuatro veces. La mitad de la clase aproximadamente es capaz de realizar esta tarea sin la ayuda de ningún material aunque hay varios que recurren al cuadro de los números del uno al cien y empiezan a contar desde diez.

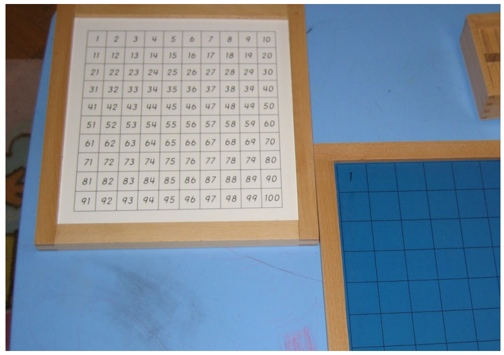


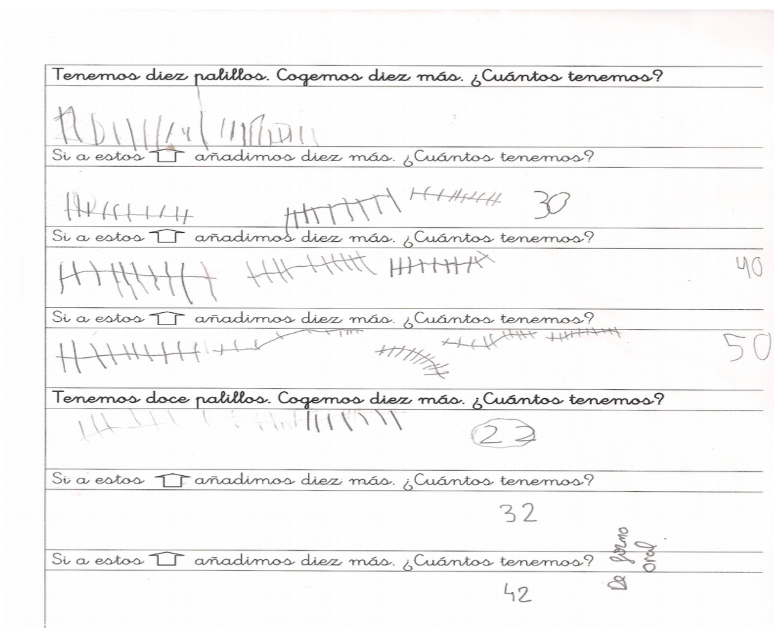
Foto 3. La tabla de los números hasta el cien

Con los 6 alumnos con dificultades, como siempre, se trata de una actividad de recuento para la memorización de la secuencia numérica.

Después se les presenta la siguiente cuestión:

Tenemos doce palillos. Añadimos diez más. ¿cuantos tenemos?, y si a estos les añadimos diez más?-….

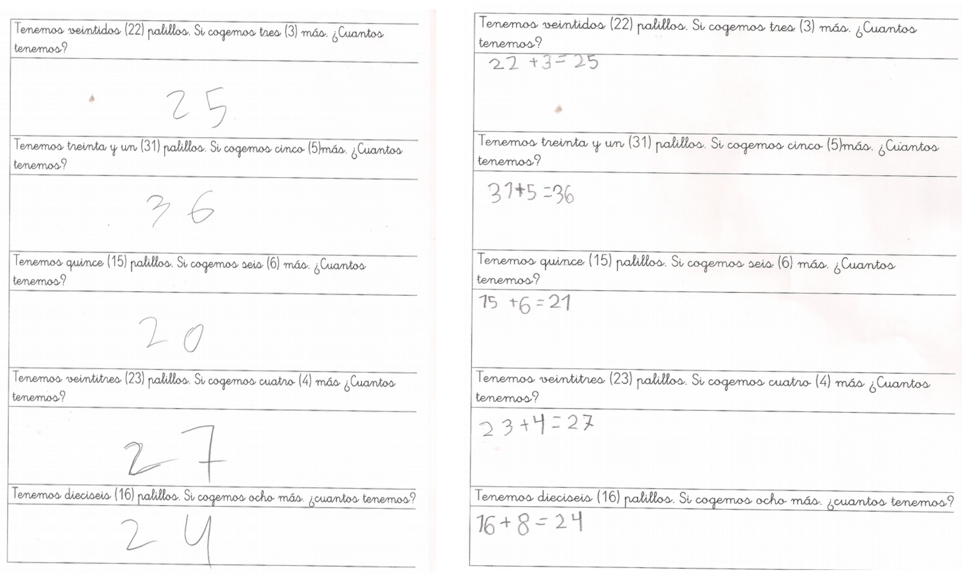
Este ejercicio representa algo más de dificultad para los alumnos pero la mayoría lo solucionan sin dificultad.



Ejemplo 10. Solución típica

Por último les presento por escrito las siguientes sumas por escrito:

22+3 31+5 15+6 23+4 16+8



Ejemplo 11. Diferentes maneras de solucionar las sumas. Uno de ellos lo hizo mentalmente.

Las dos sumas con llevadas fueron prácticamente el motivo de una revolución. Algún alumno llego a gritar que eso era muy difícil y que no tenía solución y hubo que calmar los ánimos. Les dije que si era muy difícil lo dejaran en blanco que no se preocuparan. Sólo hubo cinco alumnos que hicieron todas las sumas. Para ello recurrieron al cuadro con los números y contaron a partir del numero más grande.

Con los 6 alumnos con dificultades nos dedicamos a contar hasta 22 y luego tres desde ahí para llegar a 25, luego lo escribimos 22+3=25 aunque no nos dio tiempo a acabar. Y el resto de la clase pudo hacer las sumas sin llevada sin dificultad.

Si a esta evidencia sumamos la entrevista realizada con la profesora podemos concluir que tenemos tres grupos de alumnos cuyos aprendizajes van a un ritmo bastante diferenciado. Por un lado los alumnos aventajados que solucionan las cuestiones con facilidad, por otro los que tienen bastantes dificultades y, por último todos los demás que van a un ritmo más pausado pero sereno. Así, sera crucial que todas las tareas que propongamos ofrezcan posibilidades de éxito a todos los alumnos mientras que opción en mente para los aventajados en caso de que finalicen con demasiada celeridad.

Capítulo 5.

Desarrollo de la propuesta

5.1 Justificación.

La mayor parte de las ideas que tenía en mi cabeza mientras redactaba las sesiones se pueden encontrar en el apartado: oportunidades. A modo de síntesis:

Esta propuesta está pensada para principios del segundo cuatrimestre. Después de haber trabajado la secuencia numérica y las técnicas de recuento en situaciones aditivas con materiales y representaciones figurativas. Además, se habrá trabajado la escritura y lectura de números con dos cifras.

Las primeras actividades de escritura y lectura están pensadas con dos finalidades: Por un lado se busca acostumbrar a los alumnos a los materiales con un soporte propio, por otro reforzar una cuestión crucial para trabajar el algoritmo de las sumas que es el valor posicional de las cifras. Sin un trabajo en profundidad en este sentido introducir las operaciones escritas de adición y sustracción carece de sentido.

Las operaciones trabajadas son las de la tabla de la suma. Se busca en las primeras sesiones dar un repaso a toda la tabla de la suma y en la sesión 5 se propone completar una tabla entera, que se recortará y pegará en la mesa.

Sobre los materiales elegidos: Se utilizan dos materiales diferentes y no uno solo porque el autor considera que puede facilitar la generalización. Además, se han elegido palillos y ábacos porque son materiales baratos pero que son fácilmente convertibles en materiales estructurados en el caso de los palillos y estructurados en el caso de los ábacos.

La ley no nos permite no enseñar el algoritmo tradicional (ver LOMCE). Aunque un pudiera tener preferencia por otro tipo de algoritmo tiene que enseñar el algoritmo tradicional. Por ello propongo la variable en la que se descompone la suma en dos fases. Primero se suman las unidades, y luego las decenas, a las que se añaden los grupos de diez formados con las unidades. Lo bueno de esta manera de escribir la operación es que se parece mucho a lo que realizamos con los palillos. En el caso de la resta trabajamos sin llevadas, porque no lo exige la ley y porque es una tarea más compleja. Esta propuesta está mucho más enfocada a trabajar la adición aunque se ha incluido problemas de sustracción en todas las sesiones ya que así se evita que los alumnos vean cada sesión como “Sesión de sumas” o “sesión de restas”. Deberán en todo momento leer el problema y no les bastará con coger los dos números y sumarlos. El esquema de trabajo con los problemas es siempre el mismo:

1. Realizamos el problema con los materiales.
2. Lo dibujamos.
3. Lo escribimos.

Si un niño se siente capaz de saltarse el paso uno o dos no se le obligará a realizarlos pero este esquema permite a casi todos los niños resolver las cuestiones. Por otro lado, sabemos que la capacidad de abstracción a los seis años es muy limitada por lo que estamos dando sentido a estas operaciones.

Sesiónes 1,2,3.

Metodología: En esta sesión buscamos introducir los materiales que vamos a utilizar a lo largo de la propuesta , reforzar la escritura y lectura de números y el conocimiento de los hechos numéricos. En un principio se presenta a los alumnos una serie de palillos sueltos y gomas. Aunque más tarde muchos de los palillos ya se encontrarán agrupados de diez en diez buscamos que sean ellos los que realicen esas agrupaciones para que interioricen que se trata de grupos de diez. De echo, durante las dos primeras sesiones buena parte de los grupos de diez que formen los irán almacenando en unos recipientes de plástico que utilizan por parejas.

Los alumnos se encontrarán agrupados en 4 grupos. En uno de los grupos tendremos a los 6 alumnos que tienen dificultades para escribir números. En otro de los grupos tendremos a los 6 alumnos más avanzados, cuatro de los cuales son capaces de sumar números de una cifra mentalmente. Además de estos tenemos un grupo de 6 alumnos y uno de siete.

Se trabaja individualmente en un principio y se realiza una puesta en común dentro de los grupos una vez finalizada cada etapa de la sesión. El profesor ejemplificará el primer ejemplo para proporcionar una base visual que el alumno pueda utilizar.

Materiales utilizados:

- Palillos, gomas.
- Ficha 1 y Ficha 2.

Objetivos:

- Introducir los materiales.
- Reforzar los hechos numéricos, complementarios del nueve, diez y once.
- Trabajar la escritura y lectura de números de dos cifras.

Instrumentos de evaluación:

- Recogida de los ejercicios solucionados en copias la ficha 1.
- Cuaderno de registro anecdótico.

Tiempos.

- 30 minutos de trabajo individual.
- 25 minutos de puesta en común.

- **Ficha 1.** ¡Agrupamos todos los grupos de diez que podemos!

Número	Palillos sin agrupar.	Después de agrupar	Cantidad de grupos de diez (10)	Cantidad de palillos sueltos	Número
Doce			1	2	12
Quince					
Dieciséis					
Veintitrés					
Dieciocho					
Veinticinco					
Veintiuno					
Veintitrés					
Treinta y cuatro					

Resuelve las siguientes sumas y restas.

Leemos estos números.

Número	Decenas o grupos de diez	Unidades sueltas	Decimos el número en voz alta.
35	3 	 5	Treinta y cinco.
58			
46			
42			
28			
23			
72			
88			

Sesión 2.

Tenemos un palillo y añadimos ocho palillos más. ¿Cuantos tenemos? $1 + 8 = \square$

Tenemos nueve palillos y quitamos dos. ¿Cuantos tenemos? $\square - \square = \square$

Tenemos tres palillos y añadimos cinco más. ¿Cuantos tenemos? $\square + \square = \square$

Tenemos nueve palillos y quitamos cuatro. ¿Cuantos tenemos? $\square - \square = \square$

Tenemos tres palillos y añadimos ocho más. ¿Cuantos tenemos? $\square + \square = \square$

Tenemos once palillos, quitamos nueve. ¿Cuantos tenemos? $\square - \square = \square$

Tenemos cinco palillos, añadimos seis más. ¿Cuantos tenemos? $\square + \square = \square$

Tenemos once palillos, quitamos ocho. ¿Cuantos tenemos? $\square - \square = \square$

Tenemos cinco palillos, quitamos cinco. ¿Cuantos tenemos? $\square - \square = \square$

Tenemos diez palillos, quitamos seis. ¿cuantos tenemos? $\square - \square = \square$

Tenemos cuatro palillos, añadimos seis, ¿Cuantos tenemos? $\square + \square = \square$

¿Cuantos palillos hay?	Grupos de 10	Palillos sueltos	Número.
	1	3	13
			
			
			

Sesión 3. Ficha 2

Número	Palillos sin agrupar.	Después de agrupar	Cantidad de grupos de diez (10)	Cantidad de palillos sueltos	Número
Dieciséis					
Veinte					
Diecinueve					
Dieciocho					
Veintidós					
Veinticuatro					
Veintiséis					
Treinta y cinco					
Seis					

Calcula.

Tenemos once palillos. Quitamos cinco. ¿Cuantos tenemos?	11 – 5 =	
Tenemos tres palillos. Añadimos ocho más. ¿Cuantos tenemos?	3 + 8 =	
Tenemos once palillos, quitamos tres más. ¿Cuantos tenemos?	11 – 3 =	
Tenemos dos palillos, añadimos nueve más. ¿Cuantos tenemos?	2 + 9 =	
Tenemos dos palillos, añadimos siete más. ¿Cuantos tenemos?	2 + 7 =	
Tenemos diez palillos, quitamos siete. ¿Cuantos tenemos?	10 - 7=	
Tenemos nueve palillos, quitamos siete. ¿Cuantos tenemos?	9 - 7=	
Tenemos dos palillos, quitamos ocho. ¿cuantos tenemos?	2 + 8=	
Tenemos cuatro palillos. Añadimos cinco. ¿Cuantos tenemos?	4 + 5=	
Tenemos diez palillos, quitamos tres. ¿Cuantos tenemos?.	10 – 3=	
Tenemos nueve palillos, quitamos tres. ¿cuantos tenemos?	9 – 3=	
Tenemos un palillo y añadimos nueve. ¿Cuantos tenemos?	1 + 9=	

¿Cuantos palillos hay?	Grupos de 10	Palillos sueltos	Número.
			
			
			
			
			
			

Sesión 4

Metodología: En esta sesión buscamos introducir los materiales que vamos a utilizar a lo largo de la propuesta , reforzar la escritura de números y el conocimiento de los hechos numéricos.

Los alumnos se encontrarán agrupados en 4 grupos. En uno de los grupos tendremos a los 6 alumnos que tienen dificultades para escribir números. En otro de los grupos tendremos a los 6 alumnos más avanzados, cuatro de los cuales son capaces de sumar números de una cifra mentalmente. Además de estos tenemos un grupo de 6 alumnos y uno de siete.

Se trabaja individualmente en un principio y se realiza una puesta en común dentro de los grupos una vez finalizada cada etapa de la sesión.

Materiales utilizados:

- Ábacos
- Fichas de las sesiones 4 y 5.

Objetivos:

- Introducir los materiales.
- Reforzar los hechos numéricos. Complementarios del doce y el trece.
- Trabajar la escritura de números de dos cifras

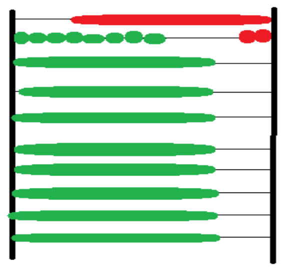
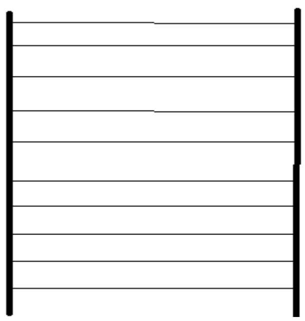
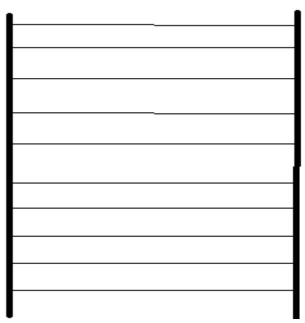
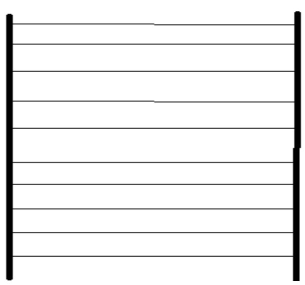
Instrumentos de evaluación:

- Recogida de los ejercicios solucionados en las fichas tres y cuatro.
- Cuaderno de registro anecdótico.

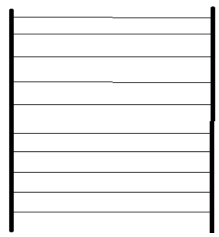
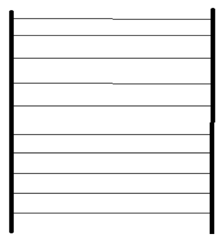
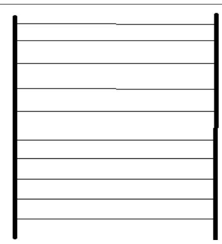
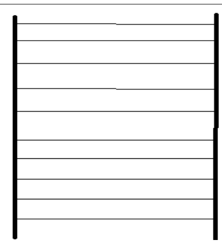
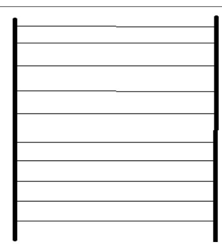
Tiempos:

- Trabajo individual: 30 minutos.
- Puesta en común: 20 minutos.

Sesión 4

Número	Representamos	Cantidad lineas completas.	Bolas sueltas.	Número
Doce		1	2	12
Cuarenta y cinco				
Veintiséis				
Trece				

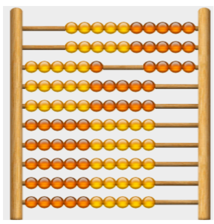
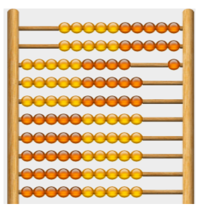
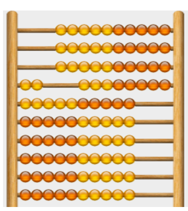
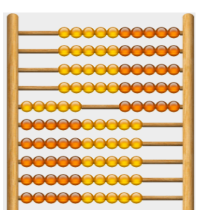
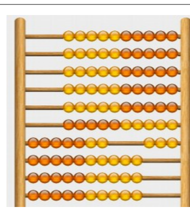
Número	Hazlo con el ábaco y,	Lineas completas	Unidades	Decimos o

	Dibuja, si quieres.		**sueltas**	**escribimos el número**
18				
25				
33				
46				
41				

Sesión 5.

Resuelve las siguientes sumas y restas.

3 + 9=	6 + 7=	13 - 7=
12 – 3=	13 – 4=	13 – 8=
4 + 8=	6 + 6=	12- 4=
12-8=	13 – 5=	5 + 8=
4 + 9=	5 + 7=	13- 6=
13 – 9 =		

¿Cuantos bolas hemos pasado de lado?	Filas completas	Bolas en la fila no completa	Número.
			
			
			
			
			

Sesión 6

Metodología: En esta sesión buscamos introducir los materiales que vamos a utilizar a lo largo de la propuesta , reforzar la escritura de números y el conocimiento de los hechos numéricos.

Los alumnos se encontrarán agrupados en 4 grupos. En uno de los grupos tendremos a los 6 alumnos que tienen dificultades para escribir números. En otro de los grupos tendremos a los 6 alumnos más avanzados, cuatro de los cuales son capaces de sumar números de una cifra mentalmente. Además de estos tenemos un grupo de 6 alumnos y uno de siete.

Se trabaja individualmente en un principio y se realiza una puesta en común dentro de los grupos una vez finalizada cada etapa de la sesión.

Materiales utilizados:

- Ábacos
- Ficha 4

Objetivos:

- Introducir los materiales.
- Reforzar los hechos numéricos. Complementarios de catorce, quince, dieciséis, diecisiete y dieciocho.
- Trabajar la escritura de números de dos cifras.

Instrumentos de evaluación:

- Recogida de los ejercicios solucionados en ficha 4.
- Cuaderno de registro anecdótico.

Tiempos.

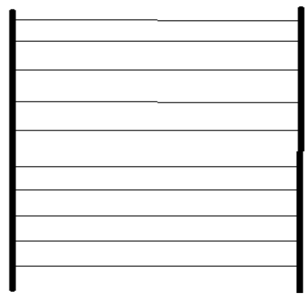
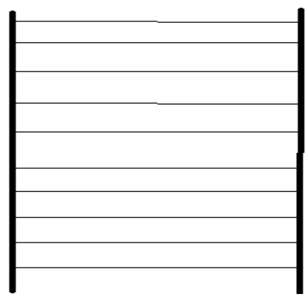
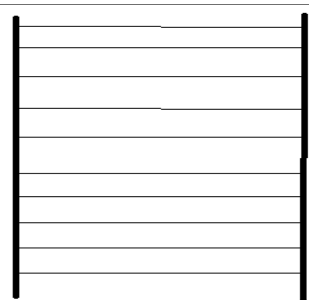
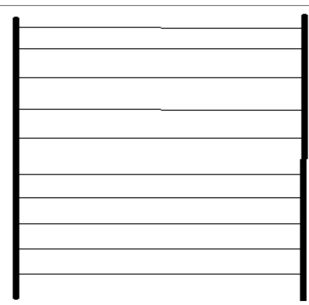
1. Trabajo individual

- Actividades de escritura: 25 minutos.
- Actividades de la tabla de la suma: 15 minutos

2. Puesta en común dentro del grupo: 15 minutos

- e la suma: 10 minutos.

Ficha 4

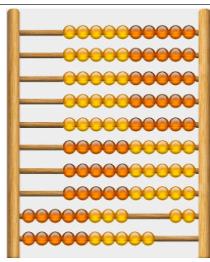
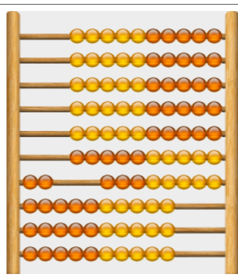
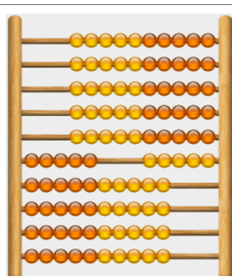
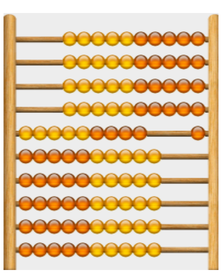
Número	Representamos	Cantidad lineas completas.	Bolas sueltas.	Número
Treinta y seis				
Cuarenta y siente.				
Treinta y tres				
Sesenta y ocho.				

Encuentra la solución.

7+7=
15-9=
6+9=
15-8=
14-5=
5+9=

6+8=
14-8=
7+8=
14-7=
15-6=
8+8=

17-9=
9+9=
8+9=
18-9=
14-6=
16-9=

¿Cuantos bolas hemos pasado de lado?	Filas completas	Bolas en la fila no completa	Número.
			
			
			
			

Sesión 7

Metodología: En esta sesión buscamos reforzar el conocimiento de los hechos numéricos y trabajar sobre la suma de números por decenas, sin dígitos. Se trabajará de forma individual a la hora de resolver la tabla y de resolver los problemas aunque tras la resolución de estos últimos se buscará favorecer una puesta en común con el resto del grupo.

Se propondrá que los problemas sean resueltos manipulando o figurativamente antes de realizarlo por escrito aunque se especificará que si alguien no lo necesita no tiene porqué recurrir a estas herramientas.

Materiales utilizados:

- Ficha 5

Objetivos:

- Reforzar los hechos numéricos.
- Sumar y restar números de dos cifras por decenas, sin dígitos.

Instrumentos de evaluación:

- Recogida de los ejercicios solucionados en ficha 5.
- Cuaderno de registro anecdótico.

Tiempos.

- Trabajo individual: 40 minutos. 20 para la tabla, 20 para los problemas.
- Puesta en común: 15 minutos.

Suma	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									

Sonia tiene veinte palillos. Manuela tiene treinta. ¿Cuántos tienen en total?

Sonia tiene cuarenta palillos. Manuela tiene diez palillos. ¿Cuántos tienen en total?

Sonia tiene treinta palillos. Manuela tiene otros treinta palillos. ¿Cuántos tienen en total?

Sonia tiene diez palillos. Manuela tiene sesenta. ¿Cuántos tienen en total?.

Sesión 8,9,10.

Metodología: En estas sesiones buscamos introducir la escritura de las operaciones de adición y sustracción acostumbrando a la estructura del esquema convencional, para ello se proporciona a los alumnos la varias copias de la ficha (ANEXO 1). En ella podemos encontrar múltiples elementos que no van a utilizar en esta sesión pero es la que utilizaremos a lo largo de toda la unidad didáctica y considero que es preferible a ir cambiando de formato. Las situaciones trabajadas serán ETE y se empezará con dígitos para simplificar todas las variables posibles aunque no distinguiremos entre sumas con llevada y sumas sin llevada ya que es una de las proposiciones iniciales de esta propuesta. Estas situaciones están pensadas, además, para que los alumnos con más dificultades puedan realizar al menos actividades de recuento y escritura de números. Por último, se presentan las preguntas de manera que no pueden distinguir por la forma de la pregunta si se trata de una adición y sustracción dado que también es una de las proposiciones de esta propuesta.

<u>En la sesión ocho</u> se trabaja primero individualmente y luego todo el grupo clase juntos. Dedicaremos toda la clase a hacer un ejercicio utilizando el Esquema de suma con compensación parcial.

<u>En la sesión nueve</u> primero los alumnos trabajarán por parejas (y un grupo de tres), después pondrán en común con las otras dos parejas del grupo en el que se encuentren. Por último un alumno del grupo diferente en cada ocasión deberá presentar ante la clase la solución a la que han llegado. En caso de haber diferencias o errores el profesor favorecerá un diálogo para intentar establecer la causa de la existencia de los mismos.

<u>En la sesión diez</u> se trabaja de manera individual antes de poner en común con el resto del grupo. Por último un alumno del grupo diferente en cada ocasión deberá presentar ante la clase la solución a la que han llegado. En caso de haber diferencias o errores el profesor favorecerá un diálogo para intentar establecer la causa de la existencia de los mismos.

En el caso probable de que los alumnos con menos dificultades realicen estas tareas fácilmente trabajarán con las mismas fichas por parejas, proponiéndose situaciones unos a otros.

Materiales utilizados:

- Palillos.
- Ábacos
- Anexo 1

Objetivos:

- Introducción al sistema de escritura tradicional de sumas y restas.
- Introducción a la escritura de la llevada en la suma.

Instrumentos de evaluación:

- Recogida de los ejercicios solucionados en copias de (Anexo 1).
- Cuaderno de registro anecdótico.

Tiempos.

1. En la sesión diez toda la clase será dedicada a trabajar un ejemplo en profundidad para que quede claro
2. En las sesiones once y doce:

- Trabajo por parejas: 25 minutos.
- Puesta en común y discusión: 25 minutos.

Sesión 10

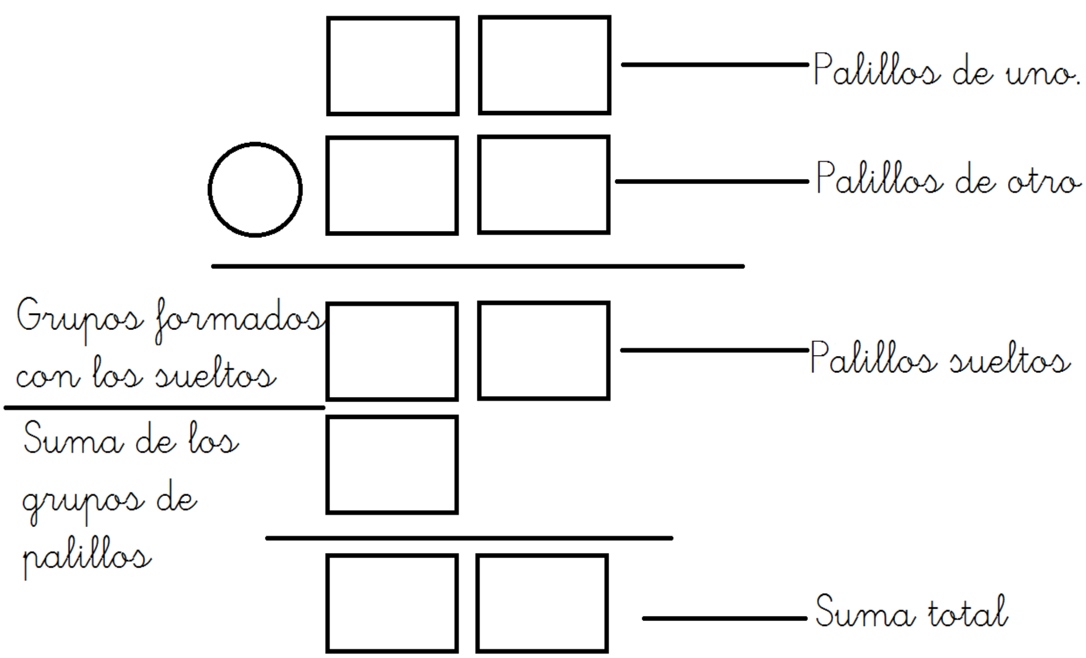
Manuel tiene 28 palillos. José tiene 15 palillos. ¿Cuantos palillos tienen entre los dos?

Palillos de Manuel:

1. Grupos de diez.
2. Palillos sueltos.

Palillos de José:

1. Grupos de diez.
2. Palillos sueltos.



Sesión 9

1. El de la derecha coge siete y el de la izquierda le da otros dos. ¿Cuantos palillos tiene al final el alumno de la derecha?

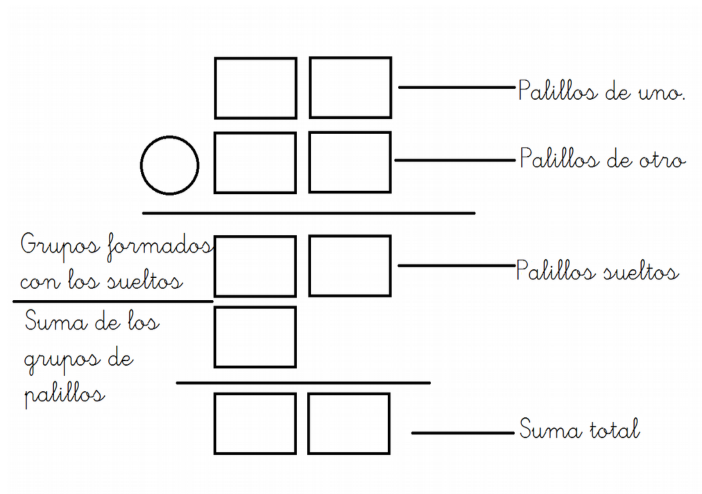
2. El de la derecha coge nueve palillos y el de la izquierda le da dos más. ¿cuantos palillos tiene al final el alumno de la derecha?

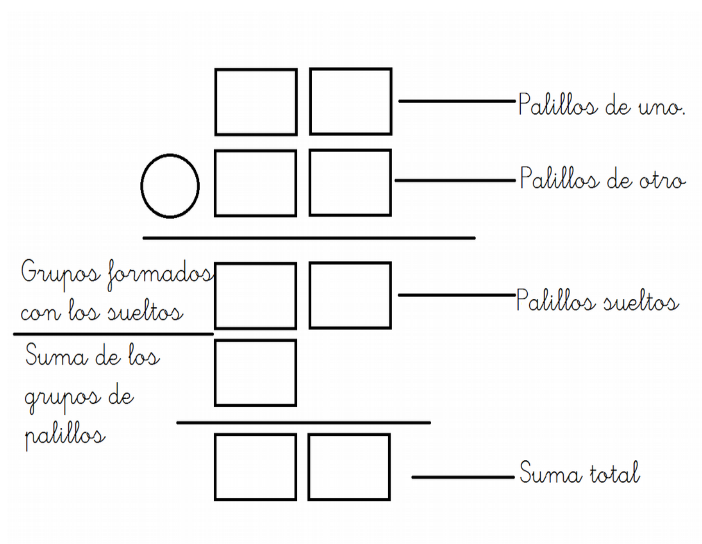
3. El de la izquierda coge seis palillos y el de la derecha le quita tres. ¿Cuantos palillos tiene al final el alumno de la izquierda?

4. El de la izquierda coge ocho palillos y el de la derecha le quita uno. ¿Cuantos palillos tiene al final el alumno de la izquierda?

5. El de la derecha coge nueve palillos y el de la izquierda le quita tres. ¿cuantos palillos tiene al final el alumno de la derecha?

6. El de la izquierda coge seis palillo y el de la derecha le da otros tres. ¿Cuantos palillos tiene al final el alumno de la izquierda.

Dibuja				Escribe
Palillos de uno		Palillos del otro		Resolvemos
Grupos	Unidades	Grupos	Unidades	
Grupos de 10 que podemos formar.		Palillos sueltos después de agrupar.		

DIBUJA				ESCRIBE
Palillos de uno		Palillos del otro		Resolvemos
Grupos	Unidades	Grupos	Unidades	
Grupos de 10 que podemos formar.		Palillos sueltos después de agrupar.		

Sesión 10

Primero movemos 9 bolas, luego movemos 5 más ¿Cuantas bolas hay al otro lado al final?

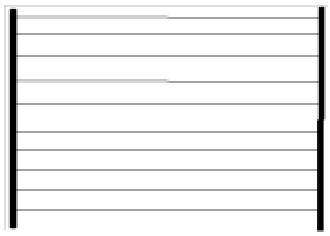
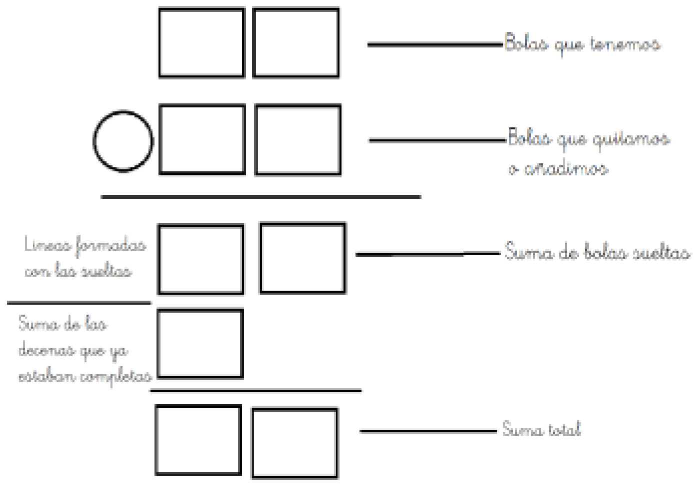
Primero movemos 7 bolas, luego quitamos 5 ¿Cuantas bolas hay al otro lado al final?

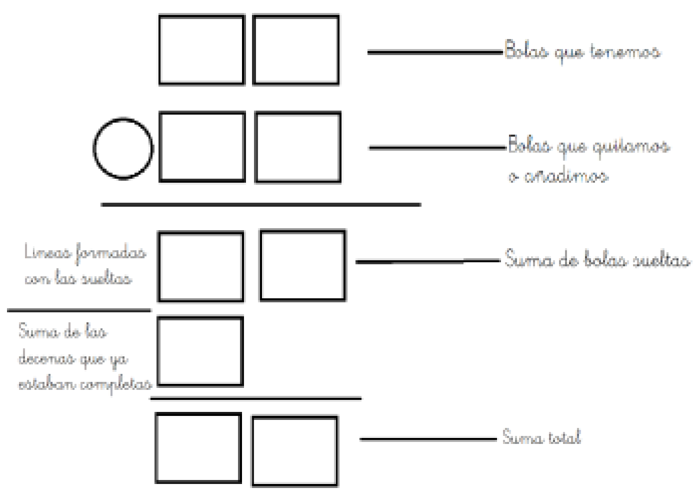
Primero movemos 3 bolas, luego 6 más. ¿cuantas bolas hay al otro lado al final?

Primero movemos 5 bolas, luego 7 más. ¿Cuantas bolas hay al otro lado al final?

Primero movemos 8 bolas, luego quitamos 3. ¿cuantas bolas hay al final?

Primero movemos 6 bolas, luego quitamos 5. ¿cuantas bolas hay al otro lado al final

DIBUJA		ESCRIBE
Las bolas que tenemos	Las bolas que quitamos o añadimos	Resolvemos
		
Bolas que tenemos al final. Intentamos formar el máximo número de líneas completas.		
		

DIBUJA		ESCRIBE
Las bolas que tenemos	Las bolas que quitamos o añadimos	Resolvemos
		
Bolas que tenemos al final. Intentamos formar el máximo número de líneas completas.		
		

Sesión 11,12,13

Metodología: Primero se proyectan las situaciones problemáticas pensadas para la sesión Para ello se permitirá que primero se recurra a la manipulación y la figuración antes de recurrir a la escritura aunque el material utilizado será elección del alumno (ábaco o palillos). Esta solución será plasmada en las fichas utilizadas anteriormente. Se trabaja por parejas antes de poner en común los resultados con el resto del grupo. Por último un alumno del grupo diferente en cada ocasión deberá presentar ante la clase la solución a la que han llegado. En caso de haber diferencias o errores el profesor favorecerá un diálogo para intentar establecer la causa de la existencia de los mismos.

En el caso probable de que los alumnos con menos dificultades realicen estas tareas fácilmente trabajarán con las mismas fichas por parejas, proponiéndose situaciones unos a otros.

Objetivos:

- Sumar dígitos y decenas a números de dos cifras con y sin llevada.
- Practicar e interiorizar el uso de los algoritmos.

Materiales:

- Anexo 1.
- Ábacos.
- Palillos.

Instrumentos de evaluación:

- Recogida de los ejercicios solucionados en copias de (Anexo 1).
- Cuaderno de registro anecdótico.

Tiempos.

- Trabajo por parejas: 25 minutos.
- Puesta en común: 25 minutos.

Sesión 11

1. Cogemos diecisiete palillos o bolas, y añadimos cinco más. ¿Cuantos tenemos al final?

2. Cogemos veinticinco palillos o bolas y quitamos cuatro. ¿cuantos tenemos al final?

3. Cogemos veinticinco palillos o bolas, y cogemos otros diez más. ¿cuantos tenemos al final?

4. Cogemos treinta y seis palillos o bolas, y agarramos veinte más. ¿cuantos tenemos al final?

5. Cogemos veintiocho palillos o bolas y quitamos seis. ¿cuantos tenemos al final?

6. Cogemos treinta y tres palillos o bolas y quitamos dos. ¿cuantos tenemos al final?dos

7. Cogemos quince palillos o bolas, y otros diez más. ¿cuantos tenemos al final?

8. Cogemos veintiún palillos o bolas y otros nueve más. ¿Cuantos tenemos al final.

Sesión 12

1. Cogemos veinticinco bolas o palillos, luego quitamos diez. ¿Cuantos tenemos?

2. Cogemos cuatro palillos o bolas y añadimos veinte más. ¿Cuantos tenemos?

3. Cogemos once palillos o bolas y añadimos treinta más. ¿Cuantos tenemos?

4. Cogemos treinta y dos palillos o bolas y quitamos dos. ¿Cuantos tenemos?

5. Cogemos diecinueve palillos o bolas y quitamos seis. ¿Cuantos tenemos?

6. Cogemos dieciocho palillos o bolas y añadimos siete. ¿Cuantos tenemos?

7. Cogemos veintidós palillos o bolas y cogemos nueve más. ¿Cuantos tenemos?

8. Cogemos diecisiete palillos o bolas y otras tres más. ¿cuantas tenemos?.

9. Cogemos dieciséis palillos o bolas y otras cuatro más. ¿cuantas tenemos?

Sesión 13

1. Cogemos quince bolas o palos, quitamos tres. ¿Cuantas tenemos?

2. Cogemos quince bolas o palos, añadimos siete. ¿Cuantos tenemos?.

3. Cogemos trece bolas o palos, añadimos ocho. ¿Cuantas tenemos?

4. Cogemos dieciocho bolas o palos, quitamos cinco. ¿Cuantas tenemos?

5. Cogemos veintiocho bolas o palos, retiramos seis. ¿Cuantas tenemos?

6. Cogemos doce bolas o palos, añadimos ocho. ¿Cuantas tenemos?

7. Cogemos once bolas o palos, añadimos nueve. ¿Cuantas tenemos?

8. Cogemos dieciséis bolas o palos, retiramos cuatro. ¿cuantas tenemos?.

9. Cogemos veintiséis bolas o palos, añadimos ocho. ¿cuantas tenemos?.

10. Cogemos veintiocho bolas o palos, añadimos siete. ¿cuantas tenemos?

Sesiones 14,15,16

Metodología:

Primero se proyectan las situaciones problemáticas pensadas para la sesión Para ello se permitirá que primero se recurra a la manipulación y la figuración antes de recurrir a la escritura aunque el material utilizado será elección del alumno (ábaco o palillos). Esta solución será plasmada en las fichas utilizadas anteriormente. Se trabajará por parejas antes de poner en común los resultados con el resto del grupo. Por último un alumno del grupo diferente en cada ocasión deberá presentar ante la clase la solución a la que han llegado. En caso de haber diferencias o errores el profesor favorecerá un diálogo para intentar establecer la causa de la existencia de los mismos.

En el caso probable de que los alumnos con menos dificultades realicen estas tareas fácilmente trabajarán con las mismas fichas por parejas, proponiéndose situaciones unos a otros.

Materiales:

- Anexo 1.
- Ábacos.
- Palillos.

Objetivos:

- Sumar pares de números de dos cifras con y sin llevada.
- Reforzar el aprendizaje del algoritmo.
- Restar números de dos cifras sin llevada.

Instrumento de evaluación:

- Recogida de los ejercicios solucionados en copias de (Anexo 1).
- Cuaderno de registro anecdótico.

Tiempos.

- Trabajo por parejas: 25 minutos.
- Puesta en común: 25 minutos.

Sesión 14

1. Tenemos treinta y seis palillos o bolas. Quitamos Cuatro. ¿Cuantos nos quedan?

2.Tenemos cuarenta palillos o bolas. Añadimos once. ¿Cuantos nos quedan?

3. Tenemos veinte palillos o bolas. Añadimos trece. ¿Cuantos nos quedan al final?

4. Tenemos veintiocho palillos o bolas. Quitamos ocho. ¿Cuantos nos quedan al final?

5. Tenemos veinticinco palillos o bolas. Cogemos otros quince. ¿Cuantos nos quedan al final?

6. Tenemos treinta y siete palillos o bolas. Cogemos otros quince. ¿Cuantos tenemos al final?

7. Tenemos cuarenta y ocho palillos o bolas. Añadimos veintiuna más. ¿cuantos tenemos al final?.

8. Tenemos cuarenta y cinco palillos o bolas. Quitamos cuatro. ¿Cuantos tenemos al final?.

Sesión 15

1. Cogemos treinta y nueve palillos o bolas y cogemos doce más. ¿cuantos tenemos?.

2. Cogemos treinta y nueve palillos o bolas y quitamos veintitrés. ¿cuantos tenemos?.

3. Cogemos treinta y ocho palillos y quitamos diecisiete. ¿Cuantos tenemos?

4. Cogemos treinta y ocho palillos y añadimos catorce. ¿Cuantos tenemos?

5. Cogemos treinta y cuatro palillos y añadimos once. ¿cuantos tenemos?

6. Cogemos treinta y dos palillos y añadimos dieciocho. ¿Cuantos tenemos?

7. Cogemos treinta y cinco palillos y añadimos catorce. ¿Cuantos tenemos?

8. Cogemos veintiún palillos y añadimos veintinueve.

Sesión 16

1. Cogemos veintiséis palilos o bolas y cogemos veinticinco más. ¿cuantos tenemos?

2. Cogemos dieciocho palillos o bolas y otros quince más. ¿cuantos tenemos?.

3. Cogemos dieciséis palillos o bolas y quitamos quince. ¿Cuantos tenemos?

4. Cogemos catorce palillos o bolas y diecinueve más. ¿Cuantos tenemos?

5. Cogemos veintiocho palillos o bolas y trece más. ¿Cuantos tenemos?

6. Cogemos treinta y cinco palillos o bolas y treinta y seis más. ¿cuantos tenemos?

7. Cogemos treinta y siete palillos o bolas y catorce más. ¿cuantos tenemos?

8. Cogemos dieciocho palillos o bolas y quitamos ocho. ¿Cuantos tenemos?

9. Cogemos veinticinco palillos y añadimos cinco más. ¿Cuantos tenemos?

Capítulo 6. Conclusiones

Elegí este tema porque consideré que un trabajo en el cual investigo sobre la mejor manera de enseñar un asunto y la elaboración de una propuesta sería lo más valioso para mi formación dada la inminente entrada al mundo laboral. En este sentido debo afirmar que no me había equivocado. Siempre he considerado que el primer curso de primaria era el mas importante dado que se trata del primer contacto que tienen los niños con la educación obligatoria por lo que la relación que establezcan con el conocimiento y cada ámbito del mismo se construye en gran parte en este momento. Por otro lado, la construcción de unas buenas bases es fundamental es demasiado importante para tomarlo a la ligera y, por último, en primero de primaria nos encontraremos con una diversidad que convierte trabajar con toda la clase en la zona de desarrollo próximo en una tarea prácticamente imposible.

A todas estas cuestiones hay que sumar el hecho de que la herramienta más utilizada en estos cursos sea el libro de texto. Dejando de lado cualquier otra consideración el hecho de usar un libro de texto cuando la mitad de la clase no sabe ni leer ni escribir ya debería ser suficiente para llamar la atención. Por otro lado, como pudimos observar cuando analizamos los libros están fundamentalmente construidos al rededor de la idea de que la dificultad de la adición y la sustracción reside en el tamaño de los números utilizados. Así, los libros se han construido en torno a esta cuestión olvidándose de el conocimiento de la secuencia numérica, la escritura de los números, del valor posicional de las cifras, los distintos niveles de abstracción del problema, las estructuras sintácticas y la utilización de representación icónica o materiales.

Sobre el cumplimiento de los objetivos del trabajo los trataremos de uno en uno:

- Delimitar los conceptos de algoritmo de la suma y de la resta y los aspectos relacionados con el mismo: elaboración de problemas y aprendizaje de la suma y la resta.

Se ha producido una profundización en la fundamentación y me atrevo a afirmar que este objetivo se ha cumplido.

- Analizar parcial estado actual de la instrucción de los algoritmos.

Este análisis consistiría en un principio en una leve base sobre la que fundamentar la propuesta aunque se ha convertido en una parte crucial del trabajo. Una profundización en este tema sería de agradecer aunque las condiciones objetivas no se han dado. A pesar de ello creo que lo mostrado y estudiado es muy enriquecedor y me considero satisfecho.

- Explorar los conocimientos y habilidades adquiridos de los alumnos de primero que estudian en el colegio Juan XXIII.

A través de la entrevista con la profesora, las sesiones de exploración y la observación hemos podido explorar estas cuestiones eficazmente. Hubiese estado bien poder realizar alguna entrevista adicional porque siento que esta profesora, que es joven, comprometida y que hace cosas nuevas, tal vez no sea la muestra más representativa del gremio. A pesar de eso creo que dadas las condiciones objetivas existentes se ha cumplido con holgura este objetivo.

- Elaborar una propuesta didáctica parcial para el aprendizaje de los algoritmo de la suma y la resta. En el caso de la suma trabajaremos hasta las sumas de números de dos cifras con llevadas y en el caso de la resta sin llevada.

La elaboración de la propuesta, teniendo en cuenta la fundamentación teórica, las diferentes capacidades de los alumnos, las posibilidades de agrupación, los tiempos ha sido realizado. Hubiera sido preferible poder poner a prueba al menos una parte de la propuesta aunque la ausencia de posibilidades para hacerlo estaba fuera de mi control.

Bibliografía

Aragón, Orden ECD/850/2016, de 16 de Junio de 2014, de la consejería de educación, universidad, cultura y deporte, por la que se aprueba el currículo de la educación primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la comunidad autónoma de Aragón (BOA de 20 de Junio de 2014).

Aristizabal, C. Aranda, M. Robledo, C. Tenorio, S. 2004. Matemáticas, primer curso. Madrid: Luis Vives.

Astudillo, M. T. G., & Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 22(3), 389-408.

Badillo, E. (2003). La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemática de Colombia. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. Aula 10, 117-133.

Carpenter, T., Fennema, E., Franke, M., Levi, L., & Empson, S. (1999). Las matemáticas que hacen los niños: La enseñanza de las Matemáticas desde un enfoque cognitivo.

Cid, E., del Carmen B, M., & Godino, J. D. (2003). Sistemas numéricos y su didáctica para maestros. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.

Correa, R. A. (2009). Construyendo sentido sobre las transiciones al inicio de la escolaridad. Universidad de Manizales.

Espinosa, L. R. P., & Pérez, F. C. (1988). Problemas aritméticos escolares. Síntesis.

Ferrero, M. y Montoro V. (2012). Consulta a profesores como medio de aproximación a las concepciones de los estudiantes acerca del número real. Revista de Educación Matemática. Vol .27.

Gómez, C. M. (1989). Sumar y restar: el proceso de enseñanza/aprendizaje de la suma y de la resta. Visor.

Kamii, C., & Joseph, L. (1990). La enseñanza del valor posicional y de la adición en dos columnas.Comunicación, Lenguaje y Educación, 2(6), 27-35.

Kvale, S. (2006). Dominance through interviews and dialogues. Qualitative inquiry, 12(3), 480-500.

Lupiáñez, J. L., & Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares.PNA.

Martínez, J., & Sánchez, C. (2013). Resolución de problemas y método ABN. Madrid: Wolters Kluwer.

Martínez, M. (2006). La investigación cualitativa (síntesis conceptual). Revista de investigación en psicología, 9(1), 123-146.

Maza, C. M (1991). Enseñanza de la suma y de la resta. Síntesis.

Mejía, M. F (2004). Análisis didáctico de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas.Otros tesis, Universidad del Valle.

Obando, G, (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. Revista EMA, 8(2), pp. 157-182.

Rico, L., & Segovia, I. (2011). Matemáticas para maestros de Educación Primaria. Pirámide. Madrid.

Rodriguez Pedrero, C. Almendáriz Pérez, G. Roman Gonzalez, J. A. (2007) Matemáticas, primero de primaria. Madrid: Edelvives.

Rodriguez, M. J. Pavez, M. Bermat,P.(2011). Criterios para el análisis de textos escolares.

Schubring, G. (1987). On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. For the learning of mathematics, 7(3), pp. 41-51.

Valdivé, C (2004). El dominio de las operaciones de adición y sustracción con fracciones. En Díaz, Leonora (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 131-137). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Vygotski, L. S. (1999). Pensamiento y lenguaje: teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas. Fausto.