Master Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, artísticas y deportivas

Especialidad de Matemáticas

Modalidad B

Trabajo Fin de Máster

Análisis didáctico de los contenidos de Álgebra Lineal en el currículum de Bachillerato

Autor: Nuria Begué Pedrosa

Directores: José María Muñoz Escolano

Sergio Serrano Pastor

Junio de 2015

Índice

Introducción

El presente trabajo corresponde a la modalidad B en la línea titulada "Análisis didáctico de los contenidos de Álgebra Lineal en el currículum de bachillerato". El objetivo de este trabajo radica en la investigación de las dificultades que presentan los alumnos en la transición de la enseñanza secundaria a la universidad con respecto a los contenidos de Álgebra Lineal.

El origen de este trabajo surge de un problema real y concreto detectado por amplios colectivos de la Escuela de Ingeniería y Arquitectura (EINA) de la Universidad de Zaragoza. Entre los que se hayan profesores que constatan que los estudiantes de nuevo ingreso presentan dificultades a la hora de afrontar contenidos matemáticos propios de la etapa de secundaria, lo cual conduce a un inadecuado aprendizaje del resto de asignaturas. Además, este fenómeno no es un caso aislado de la Universidad de Zaragoza, sino que existen estudios que corroboran su expresión en otras universidades del panorama nacional (Rojo, García y Ortega, 2010; Jiménez, Areizaga, 2001). En lo que respecta a la Universidad de Zaragoza, la formación matemática de las titulaciones de la EINA recae principalmente en el Departamento de Matemática Aplicada que imparte tres asignaturas en los primeros cursos de los Grados. Las dificultades de los estudiantes ante estas asignaturas son todavía más acusadas. Por tanto, los estudiantes suelen encontrar difícil superar los primeros años de carrera, y en especial el primero. La localización de estas asignaturas durante el primer curso de los estudios superiores no es al azar, ya que las Matemáticas constituyen un pilar fundamental, que ofrece un conjunto de competencias y destrezas necesarias para el progreso de los estudios científico-técnicos del alumnado. Por tanto, desde la dirección de la EINA se propone el desarrollo de un curso cero virtual de acceso libre que viene a cumplimentar un curso cero presencial que lleva en marcha desde 2006. El curso se diseña con el objetivo de facilitar la transición y adaptación del alumno al sistema educativo universitario. Este programa pretende que el alumno trabaje las técnicas y la resolución de distintos campos de problemas referentes a contenidos de Matemáticas de la enseñanza del Bachillerato en la modalidad científico-técnica.

Por otro lado, vamos a mostrar las competencias específicas recogidas en la Guía Didácticas del Máster que se alcanzan mediante el presente trabajo.

La primera competencia apunta la necesidad de comprender el marco legal e institucional, así como de una integración en los retos de la sociedad actual y los contextos sociales. Este documento lo aborda en tanto que esta problemática es reflejo de la sociedad actual. Y, su estudio exige un análisis del marco legal, así como de las instituciones implicadas.

Con respecto al segundo de los objetivos, podemos argumentar que la finalidad de nuestro trabajo es detectar las dificultades que surgen en la transición a la Universidad, con la objetivo de que se desarrolle un curso on-line que atienda a la necesidades generales de los estudiantes y profesores universitarios. Luego, es un modo de orientar académicamente a los estudiantes, haciéndoles conscientes de aquellos contenidos matemáticos que han de manejar con dominio y seguridad. En última instancia profesionalmente también, en cuanto que la formación matemática constituye la herramienta o la técnica que les va a permitir avanzar hacia técnicas más complejas y perfeccionadas necesarias para desenvolverse en su futura etapa profesional.

El tercero de los objetivos apunta la reflexión de lo expuesto siguiendo las teorías o principios más relevantes sobre el proceso de aprendizaje. En este sentido, el presente trabajo expone en el Capítulo 1 las ideas más relevantes desde los distintos enfoques teóricos que han abordado esta problemática. Por tanto, este trabajo queda fundamento mediante distintas teorías de entre las cuales destaca la Teoría Antropológica de lo Didáctico. La cual proporciona un marco teórico que fundamenta el estudio realizado en los siguientes dos capítulos.

Seguidamente, el cuarto de los objetivos exige la capacidad de planificar, organizar y desarrollar el programa y las actividades de aprendizaje y evaluación en las especialidades y materias de su competencia. La consecución de dicho objetivo se debe al desarrollo de unos criterios o indicadores de evaluación de los recursos electrónicos didácticos, con el objetivo de crear una herramienta o curso que minimice los errores o dificultades presentes en los estudiantes de nuevo ingreso, respondiendo a las necesidades que los profesores universitarios han expuesto.

Finalmente, el último de los objetivos exige que el alumno evalúe, innove e investigue sobre los propios procesos de enseñanza. En nuestro caso, el estudio de las causas de las dificultades del paso a la enseñanza universitaria nos invita a reflexionar acerca del proceso de enseñanza a escoger durante la enseñanza del Bachillerato con el objetivo de ayudar a nuestros alumnos en la transición hacia los estudios superiores.

En el Capítulo 1 se presenta un recorrido por los distintos enfoques teóricos desde los que se han analizado las dificultades que surgen en la transición de la enseñanza matemática entre la Secundaria y la Universidad. A continuación presentamos aquellas investigaciones que han centrado su estudio en el caso particular del Álgebra Lineal. Por tanto, este primer capítulo nos proporciona un marco teórico que fundamente el análisis que realizamos durante los siguientes dos Capítulos. Siguiendo el marco teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico observamos que nuestro problema se traduce en términos de una transposición didáctica. Por tanto, nuestro estudio pretende conocer el conjunto de transformaciones que sufre los contenidos del Álgebra Lineal hasta que son enseñados en las dos instituciones escolares.

Por tanto, el Capítulo 2 está centrado en la detección de las posibles dificultades o carencias que surgen en la enseñanza del Álgebra Lineal durante el segundo curso del Bachillerato. En primer lugar, hemos considerado lo expuesto en las leyes de educación vigentes en el panorama estatal para la asignatura de Matemáticas II del segundo curso del Bachillerato. Luego, hemos analizado la respuesta de los libros de textos lo cual nos proporciona una aproximación de cómo son presentados los contenidos a los alumnos. Por otro lado, como el segundo curso del Bachillerato se caracteriza por la existencia de la Prueba de Acceso a la Universidad, hemos considerado el análisis de las últimas doces pruebas con el objetivo de detectar el tipo de actividades que configuran el bloque de Álgebra.

El Capítulo 3 supone el estudio de la situación del Álgebra Lineal en los grados que se imparten en la EINA de la Universidad de Zaragoza. Para llevar a cabo dicho estudio, hemos analizado los planes de estudios de cada uno de los grados con el objetivo de determinar la formación matemática que reciben los estudiantes. Posteriormente, hemos detectado las materias que presentan aspectos del Álgebra Lineal para observar los contenidos que configuran la asignatura. El segundo apartado supone el análisis de los resultados obtenidos de un cuestionario realizado por los profesores universitarios del Departamento de Matemática Aplicada de la EINA, para conocer si existen desajustes entre la formación matemática que los alumnos deberían haber adquirido durante los cursos de Bachillerato, y lo observado en las asignaturas impartidas por dichos profesores.

Para finalizar, como el departamento de Matemática Aplicada de la EINA se ha propuesto el desarrollo de un curso on-line que proporcione al estudiante un material relacionado con los contenidos trabajados durante el Bachillerato. Luego, en el Capítulo 4 hemos elaborado un cuestionario guiado por las conclusiones elaboradas en los dos capítulos anteriores. Pretendemos que sirva como herramienta de selección de los recursos didácticos que existen en la red. A continuación, el Departamento de Matemática Aplicada de la EINA nos ha proporcionado un conjunto de recursos, los cuales hemos evaluado con la herramienta anterior constituyendo un ejemplo acerca de cómo se analizaría un recurso a través de la herramienta diseñada.

Las siguientes líneas suponen un agradecimiento a todas aquellas personas que han hecho posible la realización de este trabajo. En primer lugar, a mis directores José María y Sergio por su tiempo invertido en lecturas y correcciones, que han sido decisivas para la elaboración de este trabajo. Por otro lado, me gustaría agradecer al Departamento de Matemática Aplicada, en particular a Natalia y Esmeralda por su colaboración, facilitándome documentos que han sido esenciales para la la redacción de este trabajo. También, a mis compañeros del Máster, y en particular, a Noemí, por su ayuda en la búsqueda y aportación de los libros de textos.

Por último, agradecer a mi familia su apoyo durante estos meses de trabajo, y en especial, a Javier, porque me animó a que me embarcase en la realización de este trabajo.

Capítulo 1. Marco teórico

En este primer capítulo vamos a realizar un recorrido sobre las diferentes investigaciones que han tenido por objeto la determinación de las distintas variables que intervienen en la distancia que se produce entre la enseñanza de las Matemáticas de Secundaria y de Universidad.

Gueudet (2008) establece unas categorías que denomina: *Modos de pensamiento y organización del conocimiento, Transposición didáctica y el contrato didáctico, Demostración y comunicación*. Estas perspectivas suponen una ampliación de las establecidas por De Guzman, Hodgson, Robert y Villani (1998). Además, esta clasificación introducida por Gueudet (2008) guarda un cierto paralelismo con la propuesta por Bosch, Fonseca y Gascón (2004) que agrupan los estudios de esta problemática en dos corrientes: el *Programa Cognitivo, y* el *Programa Epistemológico.*

En el presente trabajo vamos a mostrar las investigaciones que se han desarrollado siguiendo los enfoques citados por Bosch, Fonseca y Gascón (2004). Además, incluimos un nuevo enfoque surgido de las investigaciones recientes que abordan esta problemática desde un enfoque caracterizado por la consideración de la *dimensión actitudinal* del estudiante.

1.1. La transición de la enseñanza matemática entre Secundaria y Universidad

1.1.1. Perspectiva actitudinal

Este enfoque de investigación en educación matemática se centra en las dificultades que surgen en el aprendizaje del estudiante cuyo origen se sitúa en la interacción cognición-afecto. Estas investigaciones parten de la tesis de que la actividad matemática como un comportamiento 'puramente cognitivo' es extremadamente rara (Schoenfeld, 1983). Ya en la primera mitad del siglo XX, matemáticos como Henri Poincaré y Jacques Hadamard reflexionaron acerca de la naturaleza de la actividad matemática y distinguieron aspectos que, en nuestros días, podrían considerarse adscritos al dominio afectivo. La siguiente cita de Polya (1945) recoge estas ideas:

> *Sería un error el creer que la solución de un problema es un "asunto puramente intelectual"; la determinación, las emociones, juegan un papel importante. Una determinación un tanto tibia, un vago deseo de hacer lo menos posible pueden bastar a un problema de rutina que se plantea en la*

> *clase; pero, para resolver un problema científico serio, hace falta una fuerza de voluntad capaz de resistir años de trabajos y de amargos fracasos* (Polya, 1945).

Según Gómez-Chacón (2009), las actitudes constituyen una variable en el estudio del dominio afectivo. En su trabajo distingue dos tipos de actitudes, actitudes hacia la Matemática y actitudes matemáticas, las cuales define de la siguiente manera:

- Las *actitudes hacia la Matemática* se refieren a la valoración y al aprecio de esta disciplina y el interés por esta materia y por su aprendizaje, y subrayan más la componente afectiva que la cognitiva. La componente afectiva se manifiesta en términos de interés, satisfacción, curiosidad, valoración, etc.
- Las *actitudes matemáticas*, por el contrario, tienen un carácter marcadamente cognitivo, y se refieren al modo de utilizar capacidades generales, como la flexibilidad del pensamiento, la apertura mental, el espíritu crítico, la objetividad, etc; que son importantes en el trabajo en matemáticas.

En relación con lo anterior el estándar 10 del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989/1991) para la secundaria afirma que:

> La actitud matemática es mucho más que una afición por las Matemáticas. A los alumnos podrían gustarles las Matemáticas, pero no demostrar el tipo de actitudes que se indican en este estándar. Por ejemplo, a los alumnos podrían gustarles las matemáticas y, a la vez, creer que la resolución de problemas constituye siempre la búsqueda de una respuesta correcta de manera correcta. Estas creencias, a su vez, influyen sobre sus acciones cuando se enfrentan a la resolución de un problema. Aunque estos alumnos tengan una disposición positiva hacia las matemáticas, no muestran, sin embargo los aspectos esenciales de lo que venimos llamando actitud matemática (NCTM, 1991, p.241).

Siguiendo esta línea de investigación, los trabajos elaborados tanto por Mohammad-Yusof y Tall (1994) como por Gómez-Chacon (2009) centran su estudio en identificar cómo las actitudes matemáticas y hacia las Matemáticas influyen en el conocimiento y desempeño matemático de los estudiantes que inician sus estudios universitarios. Así como en presentar propuestas universitarias que contemplan el desarrollo de actitudes positivas en los dos niveles citados. Por tanto, las investigaciones citadas (Mohammad-Yusof, y Tall, 1994; Gómez-Chacon, 2009) consideran la necesidad de que los estudiantes de nuevo ingreso muestren una actitud positiva hacia las Matemáticas, y en particular hacia la resolución de problemas.

Gómez-Chacon (2009) apunta que la metodología del profesor es clave para permitir a los alumnos el desarrollo de una actitud que beneficie el proceso de aprendizaje del alumno. Así como la adquisición de determinadas habilidades por el estudiante tales como la autorregulación y la conciencia. En relación con el primer aspecto, Gómez-Chacon (2009) apuesta por una metodología activa que favorezca la inmersión de las actitudes matemáticas mediante experiencias que permitan inculturar al estudiante en las formas del propio quehacer matemático. Haciendo énfasis en la diferencia de las actitudes hacia la matemática y las actitudes matemáticas. Esta metodología facilita que el estudiante tome conciencia de que su propia conciencia está siendo educada, lo cual produce una sensación de crecimiento personal.

En este sentido, la EINA oferta un curso cero presencial que pretende la mejora de alguna de estas actitudes matemáticas vía la resolución de problemas.

1.1.2. Enfoque cognitivo

El enfoque cognitivo o *Programa Cognitivo* como es denominado por Bosch, Fonseca y Gascón (2004) fundamenta su trabajo en la siguiente hipótesis: los fenómenos relativos a la enseñanza y al aprendizaje de las Matemáticas pueden ser expresados mediante características de los sujetos (cognitivas, lingüísticas, psicológicas, etc.), las cuales constituyen la llave de acceso para actuar sobre los mismos. El análisis se focaliza en la reflexión sobre las dificultades que surgen en el estudiante cuando se enfrenta al aprendizaje de contenidos matemáticos, para ser capaces de entender cómo se organiza el conocimiento (Gueudet, 2008). Desde el Programa Cognitivo se derivan diversas teorías entre las que se localizan las denominadas perspectivas proceptualistas. Actualmente estas últimas perspectivas se integran en la teoría APOS (*Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas (Schemas)*), la cual vamos a desarrollar con más detalle.

La teoría APOS fue adaptada por Arnon et. al. (2013) de la teoría piagetiana, con el objetivo de explicar la construcción del *conocimiento matemático avanzado*. El análisis teórico corresponde a la construcción de un modelo que permita explicar la construcción mental que puedan desarrollar los estudiantes para aprender un determinado concepto matemático. Dicho modelo recibe el nombre de *descomposición genética*. El cual está constituido por: *acciones*, *procesos*, *objetos y esquemas*.

Una acción es una transformación de objetos matemáticos realizada por el individuo, obedeciendo a un estímulo externo. Cuando el individuo reflexiona sobre las acciones se dice que el individuo transforma las acciones en procesos mediante un proceso de interiorización que no requiere de estímulos externos. Finalmente, cuando el estudiante reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un objeto y es consciente de dicho proceso, así como de las transformaciones válidas para dicho objeto, se dice que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. Estos últimos se organizan en esquemas que permiten dar sentido a las situaciones y la resolución de problemas.

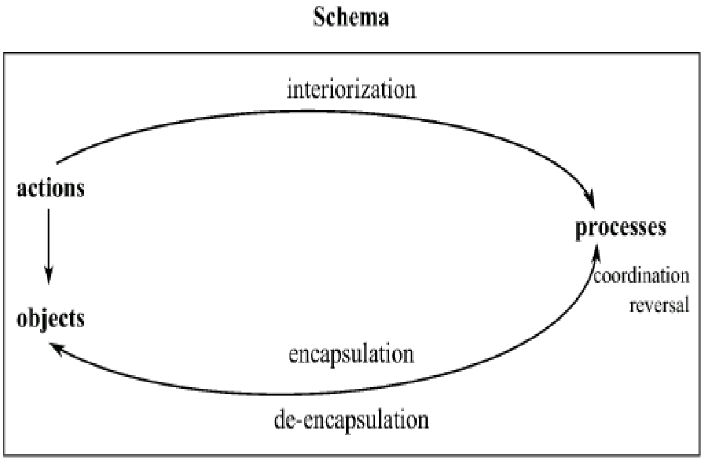


Fig. 1. Estructuras mentales y mecanismos para la construcción de conocimiento matemático (Arnon et. al. 2013).

A continuación mostramos la construcción del esquema para el caso del objeto espacio vectorial siguiendo las fases que constituyen la *descomposición genética*. Esta construcción requiere, a su vez, de cuatro esquemas: el de axioma, el de operación binaria, el de función, y el de conjunto. En primer lugar, el estudiante realiza una acción sobre los elementos de un conjunto concreto, según las operaciones binarias definidas previamente. Por tanto, esta acción obedece a un estímulo externo constituido por el profesor. Este trabajo realizado por el estudiante le permite interiorizar los axiomas que definen dicho espacio vectorial concreto. Al generalizar estas acciones sobre distintos espacios, éstas pueden ser interiorizadas y posteriormente encapsuladas en un objeto llamado espacio vectorial, cuya estructura viene dada por las propiedades que lo definen (Oktaç, Trigueros, 2010).

Este enfoque proceptualista identifica las dificultades de la transición de la Secundaria a la Universidad en términos de un paso del *Pensamiento Matemático Elemental* (EMT) hacia el *Pensamiento Matemático Avanzado* (AMT). El EMT se caracteriza por la descripción y el convencimiento mientras que el AMT radica en la definición formal y las demostraciones. Edwards, Dubinsky, y Mc Donald (2005) define la AMT como un pensamiento que requiere razonamientos deductivos y rigurosos sobre nociones matemáticas que no son accesibles completamente a través de los cinco sentidos.

Según Tall (1991), muchas de las actividades de matemáticas del AMT se localizan en el EMT, pero existen diferencias entre ambos niveles. Entonces, la transición desde la educación secundaria a la terciaria se caracteriza en términos de un cambio en el modo de pensamiento (Gueudet, 2008). Las investigaciones realizadas señalan que las actividades matemáticas presentes en el EMT se caracterizan por la rigidez de unas técnicas estandarizadas, mientras que las correspondientes al AMT consideran la utilización flexible de los mismos objetos matemáticos.

Luego, desde este enfoque se demanda la necesidad de diseñar dispositivos didácticos con el objetivo de que el estudiante pueda construir un esquema que le permita desarrollar el pensamiento matemático avanzado adecuadamente. Por tanto, Dubinsky (1997) determina que es fundamental un acercamiento a la enseñanza basado en el análisis previo de las construcciones mentales que el alumnado elabora a la hora de aprender los conceptos matemáticos.

1.1.3 Enfoque epistemológico

Existen otras investigaciones que tratan de explicar de manera más detallada la manera en que el conocimiento es enseñado, tanto en la etapa de la secundaria como en la etapa terciaria. Estos estudios abordan el tema desde el marco teórico de la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD). En primer lugar, este enfoque concibe la Matemática como un conocimiento cultural, describiendo “el conocimiento matemático en términos de organizaciones o praxeologías matemáticas cuyos componentes principales son: los tipos de tareas, las técnicas, las tecnologías, y las teorías. Desde este punto de vista, las organizaciones matemáticas se componen de un bloque práctico o 'saber hacer', formado por los tipos de tareas y las técnicas, y por un bloque teórico o 'saber' formado por el discurso tecnológico-teórico que describe, explica y justifica la práctica docente”(Chevallard, 1992).

Siguiendo a Chevallard (2002), el estudio de las dificultades que surgen en el paso de la enseñanza secundaria a la enseñanza universitaria puede traducirse como un fenómeno de *transposición didáctica*. La transposición didáctica es el conjunto de transformaciones que sufre un contenido de saber sabio que ha sido designado como saber a enseñar. A su vez, tiene lugar una nueva transposición didáctica cuando el saber a enseñar sufre un conjunto de transformaciones que lo convierten en saber enseñado.

El proceso de transposición didáctica se inicia con la elección del saber sabio que se desea transmitir en la instituciones escolares. Entonces, tiene lugar un proceso de deconstrucción y reconstrucción para que el objeto matemático sea enseñado. Los sujetos responsables de este proceso reciben el nombre de *noosfera.* La nooesfera está constituida por los responsables en diseñar e implementar los planes de estudios, los matemáticos o científicos productores del conocimiento matemático, los miembros del sistema de enseñanza, los cuales están adscritos a unas condiciones históricas e institucionales que son complicadas de entender (Bosch, Gascón ,2007).

En el caso particular del paso de la enseñanza de secundaria a la universitaria, las transposiciones didácticas que sufre el objeto de saber son debidas a distintos actores. Por un lado, la institución administrativa del Ministerio encargada de elaborar las leyes de educación se encarga de definir qué contenidos del saber sabio se convierten en saber a enseñar. Este saber a enseñar se expresa a través de los contenidos que aparecen en los libros de textos. Posteriormente, el saber a enseñar sufre una nueva transformación protagonizada por los profesores, la cual conduce al saber enseñado en la institución escolar de secundaria. Por otro lado, en la institución universitaria el proceso es análogo puesto que el saber sabio, depositado en la institución de investigadores, es transformado en saber enseñado. A diferencia del caso anterior, este proceso es llevado a cabo por los actores que comunican los objetos de saber, es decir, los investigadores.

La siguiente figura constituye un esquema sobre la transposición didáctica que tiene lugar sobre el saber de un objeto matemático:

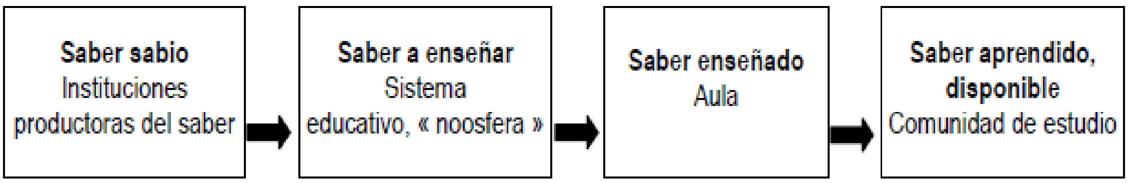


Fig.2. El proceso de transposición didáctica (Bosch, Gascón ,2007)

Por otro lado, Gascón (1997) centra su estudio en el cambio que experimenta el contrato didáctico durante la transición de la enseñanza secundaria a la enseñanza universitaria. En su artículo, Gascón (1997) pone de manifiesto hasta qué punto las cláusulas del contrato didáctico están ligadas a las características específicas de la organización matemática vigente en cada una de las instituciones, y hasta qué punto, los fenómenos didácticos dependen del tipo de actividad matemática que tiene lugar en cada institución. Así, según este estudio una vez situados en una institución escolar determinada, para analizar el proceso de estudio es clave la noción de contrato didáctico que fue introducida en didáctica por Brousseau (1986). Podemos considerar que el contrato didáctico (a nivel de institución escolar) viene determinado por el conjunto de reglas de carácter fuertemente implícito que asignan las obligaciones recíprocas de los miembros de la comunidad de estudio en lo que hace referencia al proceso de estudio de un objeto de saber matemático. Las cláusulas son relativas tanto a la institución como a la organización matemática.

Gascón (1997) hace referencia a los siguientes cambios del contrato didáctico, mediante la interpretación de los cambios de la actividad matemática que tiene lugar en las dos instituciones escolares.

- El paso de una actividad matemática mostrativa basada en recordar, ordenar y sistematizar conocimientos a una actividad matemática demostrativa que requiere una reflexión sobre la posibilidad en la construcción de nuevos conocimientos.
- El paso de una actividad matemática atomizada a una actividad matemática más globalizada. Esta última actividad está relacionada con la carga teórica que en la institución de la secundaria es prácticamente inexistente.
- El paso de una actividad matemática evaluable instantáneamente a una actividad evaluable a medio o largo plazo. Donde la responsabilidad sobre el proceso de estudio va cambiando de protagonista.
- El paso de una actividad matemática tecnicista centrada en la explicación de un conjunto de técnicas simples, visibles y algorítmicas, a una actividad matemática teoricista .
- El paso de una actividad matemática prealgebraica, a una actividad plenamente algebrizada.

Luego, podemos constatar que dichos cambios en el contrato didáctico quedan descritos en términos de cambios en la actividad matemática, por lo que van a estar asociados a la aparición de ciertos obstáculos epistemológicos del proceso de estudio.

En investigaciones posteriores, Bosch, Fonseca y Gascón (2004) detallan mucho más las características de la actividad matemática en Secundaria, las cuales afectan a los cambios del contrato didáctico entre las instituciones de Secundaria y Universidad. En su investigación proponen un conjunto de conjeturas en las que juega un papel muy importante la noción de "contrato didáctico" citada anteriormente. Estas conjeturas son relativas a la rigidez y automatización de la actividad matemática que tiene lugar en la enseñanza secundaria. Las conjeturas que plantean analizar son:

1. *Dependencia de nomenclatura asociada a una técnica*. La enseñanza secundaria se caracteriza por la rigidez de las organizaciones matemáticas. Por tanto, un cambio en la notación habitual con la que se presenta un objeto matemático conduce a confusión e incapacidad de reconocerlo .
2. *Aplicar una técnica no incluye interpretar el resultado*. En la enseñanza secundaria debido a la escasa incidencia del bloque tecnológico-teórico, no se exige generalmente la interpretación del resultado. Es decir, la interpretación del resultado que se obtiene al aplicar una técnica no es una de las responsabilidades que el contrato didáctico institucional asigna a los alumnos de secundaria.
3. *No existen dos técnicas diferentes para resolver una misma tarea*. En la secundaria las técnicas son muy rígidas y se presentan de manera aislada. Es decir, aunque existan dos técnicas diferentes para resolver una misma tarea, no forma parte de la responsabilidad del alumno, decidir para cada tarea concreta cuál de las dos técnicas es la más pertinente. Además, es común que una de las técnicas se imponga sobre las otras, adquiriendo un carácter autotecnológico.
4. *Ausencia de técnicas para realizar una tarea "inversa".* Este aspecto constituye uno de los más importantes en cuanto a la rigidez que caracteriza la enseñanza secundaria. En términos del contrato didáctico podemos afirmar que durante la secundaria no forma parte de la responsabilidad matemática del alumno de modificar una técnica con el objetivo de realizar la tarea inversa.
5. *Ausencia de situaciones abiertas de modelización.* Los problemas que se presentan tanto en secundaria como en la universidad raramente exponen una situación abierta que requiera por parte del estudiante una reflexión y discusión. Además, la ausencia de técnicas explícitas de modelización convierte a la modelización matemática en una de las actividades más problemáticas y menos reguladas.

Para el análisis de estas conjeturas, Bosch, Fonseca y Gascón (2004) realizan un cuestionario en el que participan una amplia muestra de estudiantes, a la vez que consideran la "respuesta de los libros de texto" al citado cuestionario. El estudio experimental pone de manifiesto la importancia de las restricciones que pesan sobre la matemática escolar, afirmando que los obstáculos surgen por una incompletitud matemática debida a una débil realización de algunos momentos del proceso de estudio y por la ausencia de un cuestionamiento inicial o razón de ser que motive la introducción de las organizaciones matemáticas en el aula. Este hecho es la causa del origen de las discontinuidades didácticas que aparecen en el paso de la enseñanza secundaria a la universidad, provocando que la distancia entre ambas sea realmente acusada.

En resumen, hemos presentado los factores que tratan de explicar las dificultades que surgen en el paso de la enseñanza matemática desde la institución escolar secundaria a la universitaria desde distintas perspectivas o fundamentaciones teóricas. A continuación, consideramos el análisis de las investigaciones que contemplan los contenidos del Álgebra Lineal.

1.2. El caso particular del Álgebra Lineal

Como este trabajo se centra en el análisis de los contenidos matemáticos referentes al bloque de Álgebra del segundo curso de Bachillerato de la modalidad científica-tecnológica. Las siguientes líneas muestran las conclusiones de investigaciones referidas para el caso concreto del Álgebra Lineal, algunas de ellas exponen algunos de los factores anteriormente descritos.

En primer lugar, situándonos en el marco de la TAD, podemos analizar las diferencias entre las organizaciones matemáticas del Álgebra que se desarrollan en las dos instituciones. Según Gascón (1997), se constata una presencia muy débil del instrumento algebraico, señalando que la actividad matemática en secundaria presenta un carácter prealgebraico. Además, lista un conjunto de rasgos que caracterizan la presencia de dicho carácter como: la utilización de fórmulas como simples algoritmos de cálculo, en lugar de emplearlas como modelos algebraicos capaces de producir conocimientos sobre el sistema modelizado. Así como la separación existente entre el lenguaje funcional y el lenguaje algebraico, lo cual supone el origen de dificultades en el manejo de funciones. En resumen, la práctica algebraica se interpreta como una actividad casi aritmética, hasta el punto de intentar aritmetizar los objetos algebraicos que aparecen. Este hecho no permite al alumno reflexionar sobre las diferencias existentes entre el quehacer aritmético y algebraico. En cierto sentido esta aritmetización constituye una trivialización o desnaturalización del Álgebra que está asociada a la interpretación de ésta como una especie de aritmética generalizada (Gascón, 1994-95). Por el contrario, en la organización matemática universitaria el instrumento algebraico se utiliza de una manera transparente (Gascón, 1997).

Este abismo entre las dos maneras de interpretar el Álgebra, en Secundaria y en la Universidad, supone la constatación de una ruptura abrupta entre ambas instituciones.

Desde otra perspectiva, un análisis epistemológico de la historia del Álgebra Lineal nos permite revelar posibles fuentes que explican las dificultades de los estudiantes. Siguiendo a Dorier (2003), observamos que centra su investigación en la última parte de la génesis de la teoría de los espacios vectoriales, cuyos inicios datan de finales del siglo XIX. La cual condujo a la axiomatización del Álgebra Lineal. Según Dorier (2003), la teoría axiomática no era una necesidad absoluta, excepto para problemas de dimensión infinita, pero se convirtió en una manera de pensamiento y de organización del Álgebra Lineal. Como consecuencia, una de las dificultades más destacada es el proceso de abstracción que tiene lugar durante el aprendizaje de los conceptos unificados y generalizados. Además, este obstáculo se hace más significativo por el hecho de que los alumnos vienen de una actividad matemática atomatizada centrada en el aprendizaje de un conjunto de técnicas, donde la carga teórica es prácticamente inexistente (Gascón, 1997).

Según Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000), una manera de abordar esta dificultad sería mediante el diseño de actividades en las que el profesor utilice un discurso que haga patente la relevancia de la introducción de conceptos de la teoría general, remarcando su carácter generalizado y unificado, los tipos de métodos con los que pueden abordar la actividad. Estas actividades se denominan *actividades de nivel superior* o *metal level activities*.

Desde el enfoque cognitivo se cita otra de las principales dificultades en el aprendizaje del Álgebra Lineal la cual se debe a la variedad del lenguaje, es decir, los registros semióticos de representación a través de los cuales pueden ser representados los objetos de Álgebra Lineal. Duval (1995) define las representaciones semióticas como producciones construidas por el uso de signos pertenecientes a un sistema de representación, el cual tiene su propio significado y funcionalidad. Además, son absolutamente necesarias en la actividad matemática, debido a que juegan un papel fundamental en el desarrollo de representaciones mentales, la consecución de diferentes funciones cognitivas, y la producción de conocimiento.

Otros autores exponen que una característica central de la enseñanza de los conceptos del Álgebra Lineal es debida a que muchos de los conceptos pueden cambiar de estatus de acuerdo con el contexto (De Vleechouver, Gueudet 2011). Estos autores explican, por ejemplo, que una matriz puede estar asociada a una función lineal, o también puede ser vista como un elemento de un vector del espacio. Su estudio versa sobre la enseñanza de la dualidad en Álgebra Lineal. Estos autores intentan dar respuesta a esta dificultad mediante la introducción de dos términos *macro nivel* y *micro nivel* en el aula. Este vocabulario específico permite al alumno ser consciente del estatus que adquiere el objeto matemático en cada contexto en función de si el objeto matemático puede ser visto como parte de un proceso operacional (micro nivel), o constituye el propio proceso (macro nivel). Estas habilidades cognitivas son denominadas bajo el nombre de *flexibilidad cognitiva* (Dorier, 2003). Luego, la rigidez de las tareas presentes en la enseñanza de la secundaria dificultan al alumno desarrollar esta habilidad característica de la actividad matemática, y presente en el Álgebra Lineal en particular.

1.3. Conclusiones

En conclusión, este capítulo ha realizado un recorrido por las distintos trabajos que han analizado la cuestión que da nombre a este trabajo. Además, la lectura de las distintas investigaciones nos proporciona diversas perspectivas desde las que enfocar nuestro estudio posterior. En este sentido, vamos a situarnos en el marco teórico de la TAD para elaborar un análisis que nos ayude a detectar los obstáculos que aparecen en el paso de la enseñanza del Bachillerato a la Universidad dentro del bloque de Álgebra Lineal. En particular, este problema didáctico lo podemos entender en términos de una transposición didáctica. Como hemos comentado, el saber matemático, tal como lo producen los matemáticos y otros investigadores, sufre una serie de transformaciones por los sujetos que constituyen la noosfera hasta convertirse en saber a enseñar. Luego, nuestro análisis posterior se centra en detectar las dificultades que surgen de las transformaciones a las que es sometido el saber sabio para convertirse en saber a enseñar.

Capítulo 2. Análisis del Álgebra Lineal en la enseñanza del Bachillerato

El marco teórico presentado en el capítulo anterior nos invita a la reflexión acerca del enfoque teórico sobre el que vamos a sustentar nuestro análisis. Desde el enfoque epistemológico, el paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad lo podemos traducir como un fenómeno de transposición didáctica debido a que la actividad matemática sobre un mismo objeto matemático se articula desde dos instituciones escolares distintas.

Entonces, nuestro objetivo versa sobre la detección de las causas acerca de las dificultades u obstáculos que se producen en la enseñanza de los contenidos de Álgebra Lineal en el tránsito de la secundaria a la universidad siguiendo el marco teórico de la TAD. Para lograrlo, este capítulo está enfocado en un primer análisis de la actividad matemática mediante la descripción de la estructura de la organización del Álgebra Lineal durante el segundo curso del Bachillerato de la modalidad científico-tecnológica. Mientras, que el Capítulo 3 articula el panorama del Álgebra Lineal en la Universidad.

El desarrollo de este capítulo sigue un marco metodológico basado en un primer estudio del objeto matemático en los currículos oficiales. Seguidamente, siguiendo un análisis similar al realizado por Bosch, Fonseca y Gascón (2004) consideraremos la respuesta de los libros de texto, porque nos permiten reflexionar acerca de cómo se presenta el objeto matemático en el aula. Para concluir este capítulo, examinaremos el tipo de ejercicios que forman parte del bloque de Álgebra en la Prueba de Acceso a la Universidad.

2.1. Análisis de los textos oficiales para el currículum de Bachillerato de la modalidad científico-tecnológica.

El primer estudio versa sobre los contenidos matemáticos referidos al bloque de Álgebra presentes en el currículo oficial del Bachillerato de la modalidad científico-tecnológica. Como estamos ante en un momento de inestabilidad educativa, debido a un cambio de la ley educativa actual. Vamos a considerar en nuestro estudio la lectura de los siguientes textos oficiales:

- La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOE) recogida tanto en el Boletín Oficial del Estado (BOE) como en el Boletín Oficial Autonómico (BOA).
- La Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa

(LOMCE) redactada tanto en el Boletín Oficial del Estado (BOE) como en el Boletín Oficial Autonómico (BOA).

2.1.1. Objetivos

Los objetivos que presentamos corresponden al currículo estatal, BOE, de la LOE para la enseñanza de la materia de Matemáticas I y II de la modalidad científico-tecnológica.

LOE (Orden de 2 de noviembre 2007, BOE de 6/11/2007, pp. 45450, 45451)
1. Comprender y aplicar los conceptos y procedimientos matemáticos a situaciones diversas que permitan avanzar en el estudio de las propias matemáticas y de otras ciencias, así como en la resolución razonada de problemas procedentes de actividades cotidianas y diferentes ámbitos del saber.
2. Considerar las argumentaciones razonadas y la existencia de demostraciones rigurosas sobre las que se basa el avance de la ciencia y la tecnología, mostrando una actitud flexible, abierta y critica ante otros juicios y razonamientos.
3. Utilizar las estrategias características de la investigación científica y las destrezas propias de las matemáticas (planteamiento de problemas, planificación y ensayo, experimentación, aplicación de la inducción y deducción, formulación y aceptación o rechazo de las conjeturas, comprobación de los resultados obtenidos) para realizar investigaciones y en general explorar situaciones y fenómenos nuevos.
4. Apreciar el desarrollo de las matemáticas como un proceso cambiante y dinámico, con abundantes conexiones internas e íntimamente relacionado con el de otras áreas del saber.
5. Emplear los recursos aportados por las tecnologías actuales para obtener y procesar información, facilitar la comprensión de fenómenos dinámicos, ahorrar tiempo en los cálculos y servir como herramienta en la resolución de problemas.
6. Utilizar el discurso racional para plantear acertadamente los problemas, justificar procedimientos, encadenar coherentemente los argumentos, comunicarse con eficacia y precisión, detectar incorrecciones lógicas y cuestionar aseveraciones carentes de rigor científico.
7. Mostrar actitudes asociadas al trabajo científico y a la investigación matemática, tales como la visión critica, la necesidad de verificación, la valoración de la precisión, el interés por el trabajo cooperativo y los distintos tipos de razonamiento, el cuestionamiento de las apreciaciones intuitivas y la apertura a nuevas ideas.
8. Expresarse verbalmente y por escrito en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, comprendiendo y manejando términos, notaciones y representaciones matemáticas.

Los objetivos presentes en el BOA de la LOE son muy similares a los recogidos en la tabla anterior, por lo que no son expresados en este documento. Además, no aparecen los objetivos con relación a la LOMCE de la versión autonómica, porque son análogos a los propuestos en la LOE del currículum estatal. En el caso de la LOMCE nacional no se expresan los objetivos, aunque se redactan las finales educativas de la etapa de Bachillerato. Por tanto, podríamos comentar que si los objetivos no cambian sustancialmente, podemos esperar que los aspectos que se analizan a continuación sean semejantes.

En cuanto a la definición de los objetivos, es interesante comentar algunos de los aspectos que los alumnos de Bachillerato deberían alcanzar al finalizar sus estudios de la asignatura. En primer lugar, el alumno no solamente aplique conceptos y procedimientos, sino que además sea capaz de comprender. Complementando la idea anterior, el documento destaca la necesidad de que el alumno sea capaz de elaborar argumentaciones razonadas, así como de conocer la existencia de la demostración. Por tanto, se busca que el alumno aprenda a pensar y a expresar de manera razonada esos pensamientos, en términos de la TAD, el alumno tiene que ser capaz de elaborar un discurso tecnológico que justifique la validez de la técnica aplicada.

Por otro lado, es deseable que el alumno perciba el potencial de las Matemáticas como herramienta de modelización de una situación real. Y no las perciba como un proceso estático, aislado de otras áreas del saber.

2.1.2. Contribución de la materia para la adquisición de las competencias clave

En primer lugar, las competencias fueron incluidas en la LOE en los currículos de la ESO, bajo la denominación de competencias básicas. La LOMCE las incluye por primera vez en el currículo de Bachillerato, bajo la denominación de competencias clave. La introducción de las competencias es coherente con el hecho de que desde la entrada de los Grados en la Universidad también aparecen en los planes de estudio de las titulaciones. Al resultar una novedad de la nueva ley de educación, exponemos a continuación a qué se refiere el BOA cuando habla de competencias.

La competencia se define como la capacidad de poner en práctica de forma integrada los conocimientos adquiridos, las habilidades, aptitudes, actitudes y rasgos de la personalidad que permiten enfrentarse con éxito y eficazmente a situaciones diversas para la realización personal, la inclusión social y la vida laboral (Orden de 15 de mayo 2015, BOA de 29/05/2015, p. 18522).

A continuación expresamos la contribución de la materia, Matemáticas I y II, para la adquisición de las competencias claves (Orden de 15 de mayo 2015, BOA de 29/05/2015, pp. 18522-18524):

- *Competencia en comunicación lingüística*. La resolución de problemas favorece la lectura comprensiva de los enunciados y la expresión tanto oral como escrita de los procesos y razonamientos seguidos. Además, subraya la importancia del lenguaje matemático como vehículo de comunicación.
- *Competencia matemática y competencias básicas en ciencias y tecnología.* Se trabaja de manera transversal en los bloques de contenidos.
- *Competencia digital.* Dicha competencia está presente como apoyo en la resolución de problemas y la comprobación de la solución.
- *Competencia de aprender a aprender.* Hace referencia a los contenidos vinculados con la autonomía, la perseverancia, y el esfuerzo para abordar situaciones complejas, la sistematización, la mirada crítica y la habilidad para comunicar. Luego, la manera en que las Matemáticas fomentan su adquisición se debe a la elección de una metodología caracterizada por actividades creadoras por el alumnado, que inciten su labor investigadora, etc.
- *Competencias sociales y cívicas.* El objetivo es que el alumno tome conciencia de la vida social de su entorno y participe de forma activa. Por tanto, se pueden utilizar las Matemáticas para describir fenómenos sociales. Además, el profesor puede reforzar una actitud abierta mediante el trabajo en equipo.
- *Competencia de sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.* Esta competencia se puede trabajar desde la resolución de problemas, porque tiene, al menos, tres vertientes complementarias asociadas al desarrollo de esa competencia: la planificación, la gestión de recursos y la valoración de los resultados.
- *Competencia de conciencia social y expresiones culturales*. El currículo apunta que las Matemáticas cultivan la sensibilidad, la creatividad, el pensamiento divergente, la autonomía y el pensamiento estético.

Las competencias se incluyen en el currículo porque se aboga por un sistema educativo que vaya más allá del "saber" o del "saber hacer", incluyendo el "saber ser" y el "saber estar". El documento afirma que el pensamiento matemático ayuda a la adquisición tanto de las competencias como al desarrollo de la formación intelectual del alumnado.

2.1.2.1 Contribución del Álgebra Lineal para la adquisición de las competencias clave

En el caso particular del aprendizaje de los contenidos del bloque de Álgebra, el currículum oficial expone que éstos favorecen en la consecución de las siguientes competencias clave: la competencia en comunicación ligüística (CCL), la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT), y la competencia digital (CD) .

2.1.3 Contenidos

Para abordar el análisis de los contenidos referentes al bloque de Álgebra, vamos a analizar las diferencias generales que presentan los dos currículos oficiales a nivel estatal y autonómico. En el caso de los textos nacionales, dicha información queda recogida en la siguiente tabla:

LOE (Orden de 2 de noviembre 2007, BOE de 6/11/2007, p.45450)	**LOMCE (Orden de 26 de diciembre de 2014, BOE de 3/1/2015, p.421)**
Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos.	Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos.
Operaciones con matrices. Aplicacion de las operaciones y de sus propiedades en la resolucion de problemas extraidos de contextos reales.	Clasificación de matrices. Operaciones. Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales.
Determinantes. Propiedades elementales de los determinantes. Rango de una matriz.	Determinantes. Propiedades elementales. Rango de una matriz. Matriz inversa.
Discusion y resolucion de sistemas de ecuaciones lineales.	Representación matricial de un sistema: discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss. Regla de Cramer. Aplicación a la resolución de problemas

Por otro lado, vamos a exponer lo recogido en el currículo aragonés (Orden de 1 de julio de 2008, BOA de 17/7/2008, p. 14079),

—Matrices. Matrices de números reales. Tipos de matrices. Operaciones con matrices:

transposición, suma, producto por escalares, producto. Aplicación de las operaciones de matrices y de sus propiedades para manejar y operar con datos estructurados en tablas provenientes de problemas extraídos de contextos reales. La matriz inversa: obtención por el método de Gauss. Rango de una matriz: obtención por el método de Gauss.

—Sistemas de ecuaciones. Sistemas de ecuaciones lineales. Solución de un sistema. Sistemas equivalentes. Representación matricial de un sistema. Discusión y resolución de un sistema lineal por el método de Gauss. Traducción al lenguaje algebraico de problemas reales que puedan resolverse con sistemas de ecuaciones lineales. Sistemas homogéneos. El teorema de Rouché-Frobenius. Discusión y resolución de sistemas dependientes de un parámetro.

—Determinantes. Definición inductiva de los determinantes. La regla de Sarrus. Propiedades elementales de los determinantes. Aplicación de las propiedades al cálculo de determinantes. Utilización de los determinantes para calcular el rango de una matriz. Cálculo de la matriz inversa con determinantes. Utilización de los determinantes en la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales: la regla de Cramer.

Como el currículo aragonés de la LOMCE no incluye ningún cambio en la redacción de los contenidos con respecto al currículum estatal de esta ley, no los incluimos en esta sección. No obstante, cuando hablemos de la LOMCE nos estamos refiriendo tanto a la versión estatal como autonómica.

Un análisis comparativo de la LOE del BOE y de la LOMCE nos muestra que la LOMCE incluye la redacción de la matriz inversa, así como la especificación de los métodos de resolución de sistemas lineales que el alumno ha de conocer. Sin embargo, estos contenidos están recogidos en documento de la LOE a nivel autonómico. De hecho, este documento redacta los contenidos más detalladamente, especificando en mayor grado los métodos que el alumno tiene que conocer para resolver una tarea determinada.

En conclusión, la LOMCE no incluye cambios sustanciales a nivel de contenido. Además, una característica que no aparece con la versión autonómica de la LOMCE es la concreción de los contenidos recogidos en la estatal.

2.1.4 Criterios de evaluación

Los apartados anteriores recogían los objetivos de etapa, o finalidades que se han de alcanzar mediante el proceso de estudio de la materia, así como los contenidos que estructuran el bloque de Álgebra Lineal. En este momento es necesario exponer qué vamos a observar para determinar que dichos contenidos han sido adquiridos por nuestros alumnos, y han alcanzado los objetivos marcados inicialmente. En definitiva, vamos a exponer los criterios de evaluación que los textos oficiales piden que se tengan en cuenta por los profesores.

Uno de los aspectos a destacar previamente lo protagoniza la nueva ley de educación que incorpora el concepto de estándar de aprendizaje evaluable. Estos estándares pretenden especificar o redactar de manera más detallada la información del criterio de evaluación correspondiente.

La siguiente tabla recoge la información que aparece en los boletines estatales:

LOE (Orden de 2 de noviembre 2007, BOE de 6/11/2007, pp. 45450, 45451)	**LOMCE (Orden de 26 de diciembre de 2014, BOE de 3/1/2015, p.421)**	
Criterios de evaluación	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables
1. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices y determinantes como instrumento para representar e interpretar datos y relaciones y, en general, para resolver situaciones diversas. Este criterio pretende comprobar la destreza para utilizar el lenguaje matricial como herramienta algebraica, útil para expresar y resolver problemas relacionados con la organización de datos; especialmente, si son capaces de distinguir y aplicar, de forma adecuada al contexto, operaciones elemento a elemento, operaciones con filas y columnas, operaciones con submatrices y operaciones con la matriz como objeto algebraico con identidad propia.	Crit.MA.2.1. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices para describir e interpretar datos y relaciones en la resolución de problemas diversos.	Est.MA. 2.1.1. Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales, tanto de forma manual como con el apoyo de medios tecnológicos adecuados. Est.MA.2.1.2. Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente, de forma manual o con el apoyo de medios tecnológicos.

3. Transcribir problemas reales a un lenguaje gráfico o algebraico, utilizar conceptos, propiedades y técnicas matemáticas especificas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación de las soluciones obtenidas ajustada al contexto. Este criterio pretende evaluar la capacidad de representar un problema en lenguaje algebraico o gráfico y resolverlo aplicando procedimientos adecuados e interpretar críticamente la solución obtenida. Se trata de evaluar la capacidad para elegir y emplear las herramientas adquiridas en álgebra, geometría y análisis, y combinarlas adecuadamente.	Crit.MA.2.2.Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas (matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones), interpretando críticamente el significado de las soluciones.	Est.MA.2.2.1. Determina el rango de una matriz, hasta orden 4, aplicando el método de Gauss o determinantes. Est.MA.2.2. Determina las condiciones para que una matriz tenga inversa y la calcula empleando el método más adecuado. Est.MA.2.3. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos. Est.MA.2.4.Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, estudia y clasifica el sistema de ecuaciones lineales planteado, lo resuelve en los casos que sea posible, y lo aplica para resolver problemas.

A continuación, indicamos los criterios de evaluación que aparecen en el BOA según la Orden del 17 de julio de 2008, p.14080:

> 6. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices y determinantes como herramienta útil para representar e interpretar situaciones diversas y para resolver problemas relacionados con la organización de datos, sistemas de ecuaciones y la geometría analítica.
>
> Este criterio pretende comprobar que los alumnos utilizan correctamente la notación matricial para representar datos, relaciones y sistemas de ecuaciones. Asimismo, que son capaces de usar las operaciones con matrices y determinantes para analizar las situaciones representadas y que valoran la sencillez que supone esta notación.
>
> 7. Utilizar diversos procedimientos del álgebra matricial o de los determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Se trata de averiguar si los alumnos son capaces de clasificar un sistema de ecuaciones (con un máximo de tres incógnitas) de acuerdo con el tipo de sus soluciones y resolverlo cuando esto sea posible. También se pretende conocer si saben discutir sistemas de ecuaciones dependientes de un parámetro, resolviéndolos en

función de éste cuando sea posible.

Los estudiantes deben demostrar que conocen tanto el método de Gauss como la regla de Cramer o el uso de la matriz inversa para resolver los sistemas, y que saben elegir el más conveniente para cada problema.

Sin embargo, no incluimos los referentes al currículum autonómico de la LOMCE, porque son análogos a los expuestos en la versión estatal. Por tanto, en el análisis posterior cuando nos refiramos a la LOMCE entenderemos el currículum oficial tanto estatal como autonómico.

En cuanto a la redacción de los criterios de evaluación, si comparamos la LOE estatal con la LOMCE, la diferencia más relevante se debe a que la LOMCE expone de manera más detallada las técnicas que el alumno ha de conocer para resolver determinadas tareas. Por ejemplo, el Crit.MA.2.2. expone las técnicas que el alumno ha de conocer para la resolución de problemas. Sin embargo, la LOMCE no gana en especificidad a la LOE del BOA, la cual expone el conjunto de tareas que el alumno ha de saber aplicar de más detallada que en los dos textos anteriores. Por ejemplo, la LOE de la versión autonómica contempla como criterio de evaluación la discusión de sistemas de ecuaciones dependientes de un parámetro, resolviéndolos cuando sea posible, y este aspecto no se refleja en la LOMCE.

Uno de los aspectos que aparece como criterio de evaluación con la LOMCE es el empleo de la herramienta tecnológica como apoyo en la realización de determinadas operaciones.

El aspecto más relevante que introduce como novedad la LOMCE son los denominados estándares de aprendizaje evaluables, los cuales detallan el contenido del criterio de evaluación al que se refieren. No obstante, algunos de estos estándares exponen las técnicas que el alumno ha de conocer para resolver algunas tareas, como es el caso del cálculo del rango de una matriz o la resolución de un problema, mientras que en otras, como el cálculo de la matriz inversa, solamente indica que el alumno ha de escoger el método que considere más adecuado.

En el caso de la LOE, esta especificidad en relación a las técnicas que el alumno ha de conocer aparece exclusivamente en el texto autonómico. Puesto que la versión estatal solamente indica que el alumno tiene que conocer una serie de técnicas matemáticas, y ser consciente del potencial del Álgebra como herramienta de modelización y resolución de problemas.

En conclusión, las diferencias se deben a pequeños matices relacionados con la especificidad en la redacción de determinadas tareas. Destacar que la LOMCE introduce como novedad los estándares de aprendizaje y, a su vez, la relación de éstos con las competencias clave que se alcanzan. De la lectura de la relación de las competencias con los estándares de aprendizaje nos llama la atención el encaje de la CCL, puesto que éste no se asocia con la resolución de problemas. Cuando el primer punto que un alumno debe plantearse cuando se le presenta un problema es la comprensión del mismo, e interpretación de las soluciones con el contexto del enunciado una vez que lo ha resuelto.

2.1.5 Orientaciones metodológicas

Este aspecto aparecía en el currículum de la Educación Secundaria Obligatoria bajo el nombre de orientaciones didácticas. La LOMCE lo contempla por primera vez en el currículum del Bachillerato bajo el nombre de orientaciones metodológicas. El currículum oficial de la LOMCE, tanto estatal como autonómico, contempla unas orientaciones metodológicas de etapa generales, y posteriormente las propias a cada materia que se imparte en la etapa.

En el caso de las Matemáticas I y II (Orden de 15 de mayo 2015, BOA de 29/05/2015, pp. 18524-18525), las orientaciones metodológicas nombran las tres funciones asociadas a la educación matemática introducidas en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria (Orden de 9 de mayo de 2007, BOA de 1/06/2007, pp. 8984, 8985) de la LOE. Dichas funciones son:

- *Función formativa*. Relacionada con el desarrollo de las capacidades de razonamiento y abstracción.
- *Función instrumental*. Esta función se identifica con la posibilidad de permitir la continuidad de futuros aprendizajes tanto en el área de las Matemáticas como en otras áreas.
- *Función funcional.* Hace referencia a la posibilidad que brindan las Matemáticas para la comprensión y resolución de problemas de la vida cotidiana.

Además, el documento subraya que la toma de conciencia de la nueva realidad social exige un cambio fundamental en el papel que realiza el profesor, dejando de ser un mero transmisor de conocimientos para convertirse en un orientador, promotor, motivador y facilitador del desarrollo competencial del alumnado. Con estas premisas el documento presenta una serie de orientaciones metodológicas, de las cuales citamos las siguientes:

- Favorecer la realización de tareas o situaciones-problemas. Es decir, se promueve el planteamiento de problemas. Señala que una buena didáctica de resolución de problemas exige que el profesor explique los procesos mentales que tienen lugar a la hora de resolver un problema.
- Diferenciar la resolución de problemas de los ejercicios mecánicos. Cuando el alumno sabe

cómo resolver una situación problemática y alcanza la solución a través de un algoritmo de cálculo automatizado, estamos ante un ejercicio de aplicación y no ante una situación de resolución de problemas. La automatización de estrategias y algoritmos, siendo importante, adquiere sentido sólo después de la comprensión a través de la manipulación real de objetos y situaciones, la verbalización de lo observado y su transcripción a lenguaje gráfico y simbólico.

- Potenciar el desarrollo íntegro y competencial del alumno mediante un aprendizaje transversal basado en el trabajo coordinado de distintas materias o áreas.

En primer lugar, consideramos reseñable que el currículo contemple la necesidad de cambio de la labor docente, exigida por el contexto social presente. Siguiendo a Beltrán (1998), el texto comenta que el profesor tiene que convertirse en una ayuda para que el alumno realmente aprenda a desarrollar al máximo su capacidad de interpretar la realidad, de interpretarse a sí mismo y de construir a través de esas interpretaciones.

Por otro lado, el texto expone la diferencia entre la definición de problema y ejercicios. Además, las propiedades que caracterizan a ambos son análogas a las presentadas por la TAD. Puesto que dicha teoría identifica las actividades que exigen la búsqueda de una solución poniendo en práctica una técnica que ha sido determinada de antemano como ejercicios. Mientras que los problemas suponen la búsqueda de un modelo matemático. Luego, el currículum incita a llevar al aula tareas que planteen situaciones problemáticas al alumno que estimulen el desarrollo de habilidades como la comprensión, la reflexión, la búsqueda de estrategias en la resolución de problemas, es decir, todo un conjunto de habilidades propias del quehacer matemático.

2.1.6. Conclusiones

En líneas generales, la lectura de los cuatro currículos oficiales nos muestra que las diferencias de los distintos apartados que aparecen en las dos leyes de educación se deben a matices, sin introducir cambios sustanciales. Como hemos comprobado, el cambio más relevante se debe a la inclusión de un nuevo instrumento para la evaluación, los denominados estándares de aprendizaje evaluables, que buscan concretar lo recogido en el criterio de evaluación correspondiente. No obstante, se pierde especificidad si los comparamos con los criterios de evaluación redactados en la versión autonómica de la LOE. También, hemos observado una pérdida de especificidad en cuanto a la redacción del contenido de la asignatura, si comparamos los dos textos oficiales correspondientes a la Comunidad de Aragón.

Por otro lado, hemos detectado la presencia en el currículum del Bachillerato de dos nuevos apartados: la contribución de la materia para la adquisición de las competencias clave, y la descripción de las orientaciones metodológicas tanto de etapa como de la materia. Estas últimas abogan por un cambio en el modo de hacer del docente acorde con el momento en el que nos encontramos.

Finalmente, la LOMCE remarca la necesidad de trabajar en torno a la resolución de problemas. Esta idea se incluye tanto en las orientaciones metodológicas y como en el bloque "Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas". Este bloque debe desarrollarse de forma simultánea al resto de bloques de contenidos, y es el eje fundamental de la asignatura; se articula sobre procesos los básicos e imprescindibles que definen el quehacer matemático como son: la resolución de problemas, los proyectos de investigación matemática, la matematización y modelización, las actitudes adecuadas para desarrollar el trabajo científico y la utilización de medios tecnológicos.

2.2. Análisis de la organización matemática escolar en la institución escolar secundaria mediante el estudio de libros de texto

Este apartado supone un estudio acerca de la actividad matemática escolar con el objetivo de detectar los distintos fenómenos didácticos que surgen y que pueden conducir a la justificación de la presencia del problema presentado. Es decir, el análisis acerca del modo en que se presenta el objeto matemático en la institución escolar secundaria nos puede ayudar a comprender las dificultades u obstáculos que los alumnos van a experimentar en la etapa escolar siguiente.

Por tanto, analizaremos algunos de los dispositivos didácticos disponibles para la enseñanza de las Matemáticas. Siguiendo a Bosch, Fonseca y Gascón (2004), hemos escogido dos libros de texto, uno de la editorial Anaya y el otro correspondiente a la editorial SM. Con el objetivo de analizar cómo se presentan los contenidos asociados al bloque de Álgebra para la materia de Matemáticas II de la modalidad científico-tecnológica del Bachillerato.

Para la realización de este análisis hemos considerado los contenidos del bloque de Álgebra recogidos en la Orden de 1 de julio de 2008, BOA de 17/7/2008, p. 14079). Para cada uno de los cuales presentamos la respuesta del libro de texto. Señalamos que en algunas ocasiones solamente se incluye la imagen de uno de los dos libros de textos, esta decisión es debida a que el otro libro de texto no introduce ninguna aportación nueva que tengamos que tener en cuenta. Luego, las observaciones que llevemos a cabo serán válidas para ambos libros.

I. Matrices

- **Matrices de números reales.** El objeto matemático matriz se define como una tabla numérica rectangular o tabla de elementos, como podemos observar en la siguiente figura correspondiente al libro de texto de la editorial Anaya:

◆ Las matrices son tablas numéricas rectangulares:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esta es una matriz de m filas y n columnas.
Es de **dimensión** $m \times n$.
Los elementos, a_{ij}, son números reales ($a_{ij} \in \mathbb{R}$).

Al designar una matriz genérica, como la anterior, cada término tiene dos subíndices que indican la fila y la columna a las que pertenece. El término a_{23} es el que está en la segunda fila y tercera columna. Para simplificar, la matriz anterior se puede designar así:

$(a_{ij})_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,m}$ o bien $A = (a_{ij})_{m,n}$ o, simplemente, (a_{ij})

Desde la imagen, advertimos que el objeto matemático se define con cierto formalismo y apoyándose en una nomenclatura abstracta. De hecho, señalamos que la notación que aparece en el libro de texto coincide con la notación que se utiliza en la Universidad.

Por otro lado, esta introducción del objeto matemático no muestra las necesidades de la introducción del objeto matemático que configuran la razón de ser del mismo. Entonces, estamos ante un ejemplo de monumentalismo didáctico, ya que los libros de textos describen a los alumnos el objeto.

- **Tipos de matrices.** Los tipos de matrices que se describen en los dos libros de textos son:
  - Matrices iguales.
  - Matriz fila.
  - Matriz columna.
  - Matriz cuadrada.
  - Matriz traspuesta.
  - Matriz simétrica.
  - Matriz regular.
  - Matriz unidad.

El libro de la editorial Anaya no define las siguientes matrices:

- Matriz antisimétrica.
- Matriz diagonal.

Los dos libros de textos caracterizan las matrices mediante un lenguaje comprensible por el alumno. En la mayoría de las definiciones aparece una caracterización formal de cada tipo de matriz atendiendo al tipo de elementos que la conforman, como observamos en la siguiente imagen del libro de texto de la editorial Anaya en la que se describe al alumno el concepto de matriz traspuesta:

> ◆ Se llama **traspuesta** de una matriz $A = (a_{ij})_{m,n}$ a otra matriz $A^t = (a_{ji})_{n,m}$ que se obtiene al cambiar en A las filas por las columnas y las columnas por las filas.

El análisis de las distintas definiciones revela que los libros de texto muestran al alumno el lenguaje abstracto asociado al estudio del objeto matemático, las matrices. Sin embargo, esta abstracción conlleva, quizás, la decisión de traducir el lenguaje formal a expresiones verbales más sencillas para favorecer al alumno.

El caso más llamativo lo protagoniza la definición de matriz triangular. Debido a que el libro de la editorial Anaya la define como se muestra en la siguiente imagen:

> ◆ $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ Esta matriz se llama **triangular** porque es cuadrada, y todos los elementos que están debajo de la diagonal principal son iguales a cero.

Según la definición dada por el libro de texto, una matriz triangular inferior, no es una matriz triangular.

- **Operaciones con matrices: transposición, suma, producto por escalares, producto.** Los dos libros de texto presentan las distintas operaciones, explicando la técnica asociada a cada una de ellas. Además, la redactan tanto en lenguaje formal, en función de cómo afecta la operación a los elementos que constituyen la matriz, así como en un lenguaje cercano al alumno, lo cual supone la traducción del lenguaje abstracto utilizado. Como ejemplo, hemos seleccionado cómo el libro de texto de la editorial Anaya muestra al alumno la definición de la suma de matrices, donde

Suma de matrices

Para que dos **matrices** puedan **sumarse**, es necesario que tengan la misma dimensión. En tal caso, se suman término a término:

$$(a_{ij})_{m,n} + (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$$

Sin embargo, los libros de textos no recogen un discurso tecnológico asociado a la técnica. Además, en ambos libros de textos se especifican:

- Las propiedades de la suma de matrices. Para la definición del elemento opuesto para la suma, el libro de texto incluye un discurso tecnológico recogido en la siguiente imagen:

4. Toda matriz, A, **tiene una opuesta,** $-A$: La opuesta de $A = (a_{ij})$ es $-A = (-a_{ij})$, pues $(a_{ij}) + (-a_{ij}) = (a_{ij} - a_{ij}) = (0) = \mathbf{0}$.

- Las propiedades del producto de un escalar por una matriz.
- Las propiedades del producto de matrices.
- Las propiedades simplificativas.
- Las propiedades del producto de matrices.

Luego, los dos libros de texto presentan las propiedades sin un discurso tecnológico que las justifique, salvo para un caso particular.

En el caso del libro de texto de la editorial de Anaya se introducen las propiedades de las operaciones con matrices, hablan de estructuras algebraicas, mostrando conceptos teóricos cercanos a la Universidad. Además, esta introducción se realiza en los márgenes del libro como notas para que el alumno tenga en cuenta, como se muestra en la imagen del margen derecho.

NOMENCLATURA

Se llama **grupo abeliano** a un conjunto entre cuyos elementos hay definida una operación que cumple las propiedades:

- Asociativa.
- Conmutativa.
- Elemento neutro.
- Elemento opuesto.

Además, tras la explicación de las propiedades anteriores este libro de texto incluye un apartado en el que se les muestra al alumno dos nuevos conceptos: **operaciones internas** y **operaciones externas**, y en un cuadro recoge toda la información anteriormente citada pero teniendo en cuenta la clasificación de operación interna y operación externa.

Finalmente, mostramos la siguiente tabla que recoge el número de actividades relacionas con las operaciones con matrices para cada uno de los libros de texto:

	ANAYA	SM
Número de ejercicios sobre la operación con matrices.	18	19
Número de ejercicios relacionados con cuestiones teóricas	3	7

Entre las actividades que presenta el libro nos llama la atención la tarea que exige el cálculo de la potencia n-ésima de una matriz. Para el desarrollo de dicha tarea se requiere que el alumno conozca y aplique el método de inducción. Por tanto, esta tarea exige de un discurso tecnológico para su realización. Sin embargo, los libros de texto muestran una escasa presencia de las tecnologías asociadas a la técnicas que presentan.

- **Aplicación de las operaciones de matrices y de sus propiedades para manejar y operar con datos estructurados en tablas provenientes de problemas extraídos de contextos reales.** En el caso de la editorial Anaya aparecen 3 ejercicios, mientras que en la editorial SM aparecen 6. La mayoría de las actividades plantean situaciones en las que el alumno determina la matriz asociada a un grafo. El libro de texto de la editorial SM introduce explícitamente un apartado donde se le presenta al alumno cómo calcular la matriz asociada a un grafo (ver Anexo I), y otro referido a la cadenas de Markov (ver Anexo II).
- **La matriz inversa: obtención por el método de Gauss.** No aparece esta técnica en ninguno de los libros de texto.
- **Rango de una matriz: obtención por el método de Gauss.** Antes de expresar el concepto de rango de una matriz, los dos libros de texto introducen el concepto de dependencia lineal de las filas o columnas de una matriz. En el caso del libro de texto de la editorial Anaya, inicialmente ha presentado un apartado con el título de “Complementos teóricos para el estudio de matrices”, en el que se explica la dependencia lineal de los elementos de un espacio vectorial.

  Posteriormente, los libros de texto definen el concepto de rango de una matriz. En ambos textos, el lenguaje empleado es análogo. Sin embargo, el de Anaya presenta el concepto como Teorema (ver la figura que exponemos a continuación), junto con su demostración para una matriz genérica de dimensión 5 x 4.

Teorema

En una matriz, el número de filas L.I. coincide con el número de columnas L.I. Según esto, el **rango de una matriz** es el número de filas o de columnas L.I.

Las transformaciones a las que se somete una matriz cuando aplicamos el método de Gauss no modifican el rango, es decir, se conservan las relaciones de dependencia o independencia lineal de la fila transformada con las restantes. Por tanto, para hallar el rango de una matriz, podemos proceder a "hacer ceros" como en el método de Gauss. El rango de la matriz escalonada final es, obviamente, el número de filas distintas de (0 0 ... 0).

Los dos libros de texto exponen que la tecnología asociada a la técnica está basada en la realización de transformaciones elementales de las filas o columnas. Sin embargo, la elección de la operación que se aplica no debe dejarse en manos del azar sino que hay que escoger aquellas que nos permitan obtener una matriz escalonada.

Las siguientes imágenes muestran como los dos textos definen el método de Gauss para el cálculo del rango de una matriz. La primera imagen se corresponde al libro de texto de la editorial de SM:

El siguiente esquema (los asteriscos son números cualesquiera) muestra cómo se puede pasar de una matriz a otra escalonada donde el número de filas indica el rango de la matriz.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}}_{\textbf{Rango 4}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix}}_{\textbf{Rango 3}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{pmatrix}}_{\textbf{Rango 2}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \end{pmatrix}}_{\textbf{Rango 1}}$$

Un esquema semejante puede hacerse para columnas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xRightarrow[F_3 - F_2]{F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xRightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Rango 2

La siguiente imagen corresponde al libro de texto de la editorial Anaya para mostrar al alumno cómo se aplica el método de Gauss sobre una matriz, que este caso está asociada a un sistema de ecuaciones lineales:

b) Dos filas iguales o proporcionales. Corresponden a ecuaciones equivalentes y podemos prescindir inmediatamente de una de ellas:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 6 \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{15} & \cancel{-6} & \cancel{18} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

Desde las imágenes observamos que los libros de texto cuando presentan el método de Gauss exponen que durante el proceso si aparecen filas o columnas equivalentes, pueden eliminarlas dejándo una de ellas.

Desde la Universidad de Zaragoza, los profesores nos han comentado que esta decisión conlleva la aparición de futuros errores, porque los estudiantes eliminan una fila o columna sin reflexionar sobre el contexto en el que aparece esta matriz.

Finalmente, la tabla siguiente muestra el número de actividades que demandan el cálculo del rango por el método de Gauss:

	ANAYA	SM
Número de matrices en los que se pide el cálculo del rango de una matriz numérica mediante el método de Gauss	10/15	3/7
Número de matrices para calcular del rango de una matriz dependiente de parámetros mediante el método de Gauss	5/15	4/7

II. Sistemas de ecuaciones

- **Sistemas de ecuaciones lineales.** La única diferencia radica en que el libro de la editorial Anaya presenta inicialmente la definición de ecuación lineal. Sin embargo, el libro de la editorial SM no la contempla.
- **Solución de un sistema.** Por un lado, el libro de la editorial de SM define el concepto de vector solución de un sistema como muestra la figura:

Una **solución** del sistema [1] es un conjunto ordenado de números reales (s_1, s_2, s_3, ..., s_n) tales que, al sustituir las incógnitas x_1 por s_1, x_2 por s_2, x_3 por s_3, ..., x_n por s_n, se satisfacen a la vez las m ecuaciones.

Podemos suponer que utiliza el término ordenado, porque en la primera unidad introduce el concepto de matriz como una estructura matemática útil para ordenar datos.

Por otro lado, el otro libro de texto no caracteriza el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales. Si no que habla directamente de la existencia o no de solución en un sistema de ecuaciones lineales.

- **Sistemas equivalentes.** Ambos documentos recogen la definición de sistema equivalente. En el caso del libro de texto de la editorial de Anaya, primero introduce la definición de ecuación equivalente, y luego traslada el concepto para un sistema de ecuaciones.

  Una vez que han definido el concepto, introducen las operaciones que conducen a un sistema equivalente al dado, bajo la denominación de transformaciones válidas o criterios de equivalencia. Los libros no justifican mediante un discurso tecnológico las operaciones que muestra al alumno.

- **Representación matricial de un sistema.** En primer lugar, el libro de texto de la editorial Anaya comienza el bloque de Álgebra con la unidad correspondiente a la resolución de sistemas de ecuaciones mediante el método de Gauss. Este hecho conduce a que se presente de manera aislada la notación matricial de un sistema para la explicación de dicho método. Sin embargo, el alumno no conoce todavía el concepto de matriz.

  Por otro lado, la organización del libro de la editorial SM es diferente, introduciendo la unidad referente a la resolución de ecuaciones lineales una vez explicado el tema de matrices. En este caso, el libro de texto introduce la notación matricial asociada a un sistema de ecuaciones lineales una vez que define el concepto de sistema de ecuaciones lineales.

- **Discusión y resolución de un sistema lineal por el método de Gauss.** En el caso del libro de la editorial Anaya este método de resolución de sistemas se presenta en el primer tema del Bloque de Álgebra.

  En cuanto a la presentación de la técnica al alumno, es similar en ambos casos. Los libros de texto la presentan como una técnica basada en las transformaciones elementales de un sistema de ecuaciones con el fin de obtener un sistema escalonado. Los libros de texto únicamente señalan que el alumno tiene la responsabilidad de escoger en cada paso los dos pares de ecuaciones más adecuadas para eliminar una incógnita en una de las dos ecuaciones escogidas. Luego, esta técnica no presenta un algoritmo claro ya que depende de las decisiones que tome el alumno, este hecho dista de la técnica que presentan los profesores universitarios bajo el nombre de método de Gauss.

  Las siguientes figuras corresponden a ejercicios resueltos en ambos libros de texto bajo el método de Gauss. La primera figura corresponde al libro de texto de la editorial Anaya:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 3 & 4 \\ \boxed{1} & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1^a)-2\cdot(2^a) \\ (2^a) \\ (3^a)-5\cdot(2^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & \boxed{1} & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 11 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} (1^a) \\ (2^a) \\ (3^a)-2\cdot(1^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La siguiente figura corresponde al libro de texto de la editorial SM.A pesar de que el libro de texto introduce la notación matricial de un sistema de ecuaciones lineales, muestra un ejemplo donde se aplica el método de Gauss sin utilizar esta notación.

2. Resolver el sistema $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$

Se elimina la incógnita x eligiendo las ecuaciones 1.ª-2.ª y 1.ª-3.ª Multiplicando por números adecuados, se tiene:

$$\begin{cases} -2x - 2y - 2z = -4 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x + 5y - 6z = -29 \end{cases}$$

Sumando: $y + 3z = 7$ $\qquad 6y - 5z = -27$

Sistema de dos ecuaciones: $\begin{cases} 6y + 18z = 42 \\ -6y + 5z = 27 \end{cases}$

Sumando: $23z = 69$

Se obtiene el sistema triangular: $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y + 3z = 7 \\ 23z = 69 \end{cases}$

De donde $z = 3$

Sustituyendo: $y + 9 = 7$ de donde $y = -2$

Sustituyendo: $x - 2 + 3 = 2$ de donde $x = 1$

Solución: $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$

La siguiente tabla recoge el número de ejercicios que demandan esta tarea en cada uno de los textos:

	ANAYA	SM
Número de actividades en las que se demanda la discusión y resolución de un sistema lineal por el método de Gauss.	16*	0**

* El libro de texto presenta un conjunto de ejercicios que demandan la misma tarea pero no determina la técnica que el alumno tiene que aplicar.

** El libro de texto no presenta acitivades en las que se presente esta tarea. Aunque existe un conjunto de ejercicios que demandan la discusión y resolución de un sistema de ecuaciones lineales sin especificar la técnica.

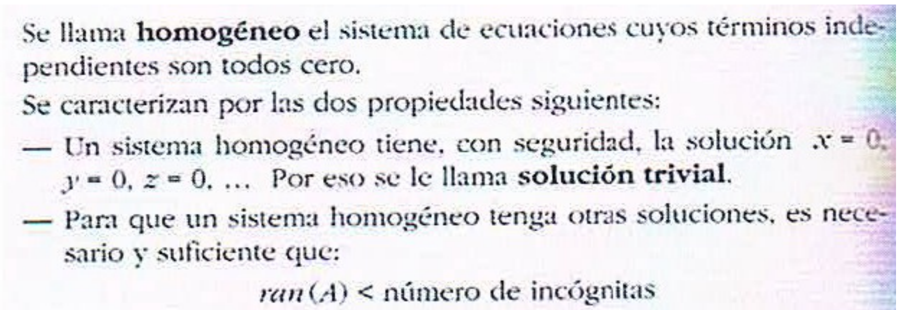
- **Traducción al lenguaje algebraico de problemas reales que puedan resolverse con sistemas de ecuaciones lineales.** Es interesante comentar esta tarea porque está relacionada con la capacidad de las Matemáticas como actividad modelizadora, y permite al alumno ser consciente del potencial de las mismas.

Además, esta actividad modelizadora conlleva la puesta en marcha de un conjunto de habilidades o destrezas cognitivas relacionadas con la capacidad de traducir un enunciado en lenguaje algebraico. El análisis de los enunciados de las actividades que se presentan al alumno nos muestra que la mayoría hacen referencias a sistuaciones relacionadas con la economía. Tienen menor presencia aquellos referidos a situaciones físicas, cálculo de edades, o determinación de un conjunto de números. Algunos de los problemas que se presentan están asociados a la teoría de Cadenas de Markov, de manera que el alumno determina la matriz estocástica asociada al problema.

La tabla que presentamos a continuación recoge el número de actividades que presenta cada libro en los que se demanda la traducción al lenguaje algebriaco de una situación referente a la vida real:

	ANAYA	SM
Número de ejericicios que demandan la traducción al lenguaje algebraico de una situación real.	11	12

- **Sistemas homogéneos.** El libro de texto de la editorial Anaya explica detalladamente el concepto de sistema homogéneo:



Se llama **homogéneo** el sistema de ecuaciones cuyos términos independientes son todos cero.

Se caracterizan por las dos propiedades siguientes:

— Un sistema homogéneo tiene, con seguridad, la solución $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, ... Por eso se le llama **solución trivial**.

— Para que un sistema homogéneo tenga otras soluciones, es necesario y suficiente que:

$$ran(A) < \text{número de incógnitas}$$

Por tanto, el libro introduce dos propiedades que caracterizan el objeto matemático, pero no se justifican mediante un discurso tecnológico.

El libro de texto de la editorial SM, presenta los sistemas homogéneos como un caso particular de un sistema de ecuaciones lineales, es decir, es un sistema de ecuaciones lineales con los términos independientes nulos. A diferencia del caso anterior, este libro de texto no expone ninguna reflexión sobre las propiedades que cumplen este tipo de sistemas de ecuaciones lineales.

- **El teorema de Rouché-Frobenious.** Los dos libros de texto enuncian el teorema como técnica para el estudio de la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales. A continuación presentamos cómo recoge el libro de la editorial de SM el teorema, puesto que es análoga al otro libro de texto:

Un **sistema** es **compatible** si el rango de la matriz de los coeficientes de las incógnitas es igual al rango de la matriz ampliada con la columna de los términos independientes, y recíprocamente.

Sistema compatible $\Leftrightarrow$ rango M = rango M*

El teorema proporciona un criterio para determinar si es un sistema compatible o no y se basa en el cálculo del rango de la matriz de los coeficientes, y el cálculo del rango de la matriz ampliada.

Tras el enunciado del teorema, ambos documentos recogen la demostración del mismo. A continuación, incluimos el discurso tecnológico asociado al teorema de Rouché-Frobenious. La primera de las figuras corresponde al libro de texto de la editorial Anaya, mientras que la segunda se corresponde con el de la editorial SM:

Demostración

Podemos poner el sistema como una relación lineal entre los vectores columna:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \dots \\ a_{m3} \end{pmatrix} x_3 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Se ve claro que, si el sistema tiene solución, existen unos números, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, que permiten poner la columna de los términos independientes como combinación lineal de las columnas de la matriz A. Por tanto, al añadir la columna (c_i) a la matriz A, esta no aumenta su rango. Es decir, si el sistema tiene solución, entonces: $ran(A') = ran(A)$.

El argumento recíproco es similar: si $ran(A') = ran(A)$, es porque la columna (c_i) es combinación lineal de las restantes y, por tanto, existen unos números, $x_1, x_2, \dots, x_n$, que multiplicados por los vectores $(a_{i1}), (a_{i2}), \dots, (a_{in})$, dan como resultado el vector (c_i). De modo que esos números $x_1, x_2, \dots, x_n$ son solución del sistema.

Observamos que la demostración se basa en la definición de combinación lineal de vectores. Este saber no queda recogido en el currículum oficial para el bloque de Álgebra de la materia de Matemáticas II. Sin embargo, el libro de texto lo usa ya que lo ha introducido como complemento teórico para el estudio de matrices en la segunda unidad.

Por otro lado, exponemos en la siguiente imagen la demostración recogida por el segundo libro de texto :

Para demostrar este teorema escribiremos el sistema en la notación por columnas:

$$C_1 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2 + C_3 \cdot x_3 + \ldots + C_n \cdot x_n = B$$

Supongamos que el sistema es compatible

En este caso existe al menos una solución $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ tal que

$$C_1 \cdot s_1 + C_2 \cdot s_2 + C_3 \cdot s_3 + \ldots + C_n \cdot s_n = B$$

luego la columna B depende de las columnas $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$.

Por tanto,

$$\text{rango } (C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n) = \text{rango } (C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, B)$$

es decir,

$$\text{rango } M = \text{rango } M^*$$

Supongamos que rango M = rango M*

La igualdad de rangos de las matrices significa que

$$\text{rango } (C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n) = \text{rango } (C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, B)$$

Por tanto, la columna B depende de las restantes columnas; es decir, existen números reales $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ tales que

$$C_1 \cdot s_1 + C_2 \cdot s_2 + C_3 \cdot s_3 + \ldots + C_n \cdot s_n = B$$

De esta relación se deduce que $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ es una solución del sistema y, por tanto, es compatible.

En este caso el argumento es análogo, sin embargo el libro de texto no hace referencia al concepto de combinación de lineal de vectores, puesto que no la introducido con anterioridad. Sin embargo, salva este hecho exponiendo que va a escribir el sistema por su notación por columnas.

Posteriormente, el libro de la editorial SM presenta un apartado que expone la relación entre el número de incógnitas con el rango de la matriz de coeficientes para determinar cuándo el sistema es compatible indeterminado. Sin embargo, no expone una relación similar para el caso en el que el sistema es incompatible. Por otro lado, el libro de Anaya únicamente recoge la relación entre el rango de las dos matrices para el caso en el que el sistema es incompatible, pero no la caracterización para determinar que un sistema es compatible indeterminado.

Es relevante señalar que el libro de la editorial de Anaya presenta este teorema en la última unidad que constituye el bloque de Álgebra, cuyo título es Resolución de sistemas mediante determinantes. Sin embargo, en la primera unidad presenta la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss sin introducir este teorema. Este hecho conduce a que en la primera unidad apareciera la tabla que mostramos en el Anexo III. Esta tabla establece un criterio para determinar la existencia de solución, y en caso afirmativo el número de soluciones, en función del sistema escalonado resultado de aplicar el método de Gauss.

- **Discusión y resolución de sistemas dependientes de un parámetro.** Vamos a contabilizar el número de veces que aparece esta tarea en cada uno de los libros de texto:

  En el libro de texto, Anaya, aparecen 22 sistemas de ecuaciones lineales en la unidad 1 en los que se demanda dicha tarea mediante el método de Gauss. Además, este tipo de tarea aparece de nuevo en la unidad 4, con el matiz que ahora el alumno conoce más técnicas que permiten dar respuesta a esta tarea. En este caso, el número de sistemas de ecuaciones lineales es 25.

  En el libro de texto de la editorial SM son 29 los sistemas de ecuaciones lineales sobre los que se pide realizar la tarea descrita sin determinar la técnica para abordar la tarea del cálculo del rango de la matriz.

III. Determinantes

- **Definición inductiva de los determinantes.** En ambos libros de textos la secuencia es bastante similar. En primer lugar, introducen los siguientes objetos matemáticos: "menor" de una matriz, "menor complementario" y "adjunto". Luego, introducen la definición por recurrencia de un determinante. En el caso del libro de texto de la editorial Anaya la introduce como una propiedad para el cálculo de determinantes:

Vamos a estudiar dos nuevas propiedades de los determinantes. La primera resultará muy útil para calcular determinantes de orden mayor que 3.

11. Si *los elementos de una fila o columna* de una matriz cuadrada *se multiplican por sus respectivos adjuntos y se suman los resultados*, se obtiene el determinante de la matriz inicial. Se dice entonces que el determinante está **desarrollado** por los elementos de esa línea.

Además, el libro de texto incluye la demostración para el caso de una matriz genérica de orden 3, como se muestra en la siguiente imagen:

Demostración

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} =$$

$$= a_{21}\,(a_{32}\,a_{13} - a_{12}\,a_{33}) + a_{22}\,(a_{11}\,a_{33} - a_{31}\,a_{13}) + a_{23}\,(a_{31}\,a_{12} - a_{11}\,a_{32}) =$$

$$= a_{21} \cdot (-1) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23} \cdot (-1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{21}\,A_{21} + a_{22}\,A_{22} + a_{23}\,A_{23}$$

Por otro lado, el libro de texto de la editorial SM enuncia la definición para el caso particular de una matriz de orden 4. Luego, generaliza la definición

El **determinante de una matriz cuadrada** es igual a la suma de los elementos de una fila o columna multiplicados por sus adjuntos correspondientes.

El valor del determinante es independiente de la fila o columna elegida para su desarrollo.

El proceso de recurrencia se termina cuando se llega a los determinantes de orden 3, que se calculan directamente por la regla de Sarrus.

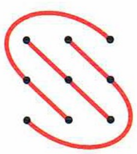
En este caso, el libro de texto no introduce un discurso tecnológico.

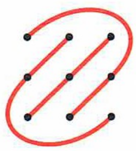
- **La regla de Sarrus.** Los dos libros de texto introducen la fórmula para el cálculo del determinante de una matriz de orden 3, carente de cualquier discurso tecnológico que la sustente. Sin embargo, ambos textos muestran la regla mnemotécnica para la memorización de esta técnica. La primera imagen recoge como el libro de texto de la editorial Anaya presenta al alumno la técnica para calcular el determinante de una matriz de orden 3:

El determinante de una matriz 3×3 se obtiene del siguiente modo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - \\ - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$$

- **En cada producto hay un factor de cada fila y uno de cada columna.** Para comprobarlo, observamos que en cada producto hay tres elementos. Los primeros subíndices (filas) son, siempre, 1 2 3. Los segundos subíndices son también 1 2 3, ordenados de diversas formas.
- **Están todos los posibles productos con un factor de cada fila y uno de cada columna,** pues los subíndices de las columnas son todas las permutaciones de 1, 2, 3. Hay $3! = 6$.
- La mitad de los sumandos tiene **signo +** y la otra mitad **signo –**. Estos seis sumandos se recuerdan fácilmente con la siguiente regla mnemotécnica, llamada **regla de Sarrus**:





La siguiente figura corresponde al libro de texto de la editorial SM:

Es fácil recordar el desarrollo del determinante de tercer orden mediante el procedimiento conocido como **regla de Sarrus:**

— Los productos **con signo más** (+) están formados por los elementos de la diagonal principal, y los de las dos diagonales paralelas, con su correspondiente vértice opuesto.

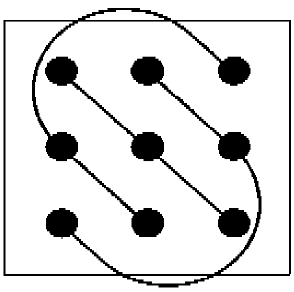
— Análogamente se forman los productos **con signo menos** (–), pero tomando ahora como referencia la diagonal secundaria.

— Si designamos por F_1, F_2, F_3 las filas de la matriz A, el determinante se puede indicar también por la expresión

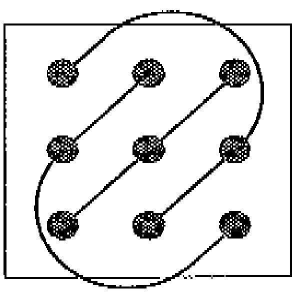
$$\mathbf{det\, A = det(F_1, F_2, F_3)}$$

— Análogamente, si C_1, C_2 y C_3 son las columnas de la matriz A, se tiene:

$$\mathbf{det\, A = det(C_1, C_2, C_3)}$$



Productos con signo +



Productos con signo –

Observamos que los dos libros de texto introducen la técnica de manera similar.

- **Propiedades elementales de los determinantes**. Esta tecnología queda recogida en los dos libros de textos que estamos analizando, sin embargo la secuencia que siguen es diferente. Por tanto, hemos decido estudiar este apartado para cada uno de los libros de texto.

  Por un lado, el libro de texto correspondiente a la editorial Anaya introduce nueve propiedades, bajo el título: Propiedades de los determinantes de orden 2. Por tanto, el alumno puede pensar que solamente son válidas para matrices de orden 2. Algunas tienen asociada la demostración para el caso de una matriz genérica de orden 2, mientras que otras propiedades las "demuestran" comprobando que se cumple para un matriz concreta, como muestra el siguiente ejemplo:

  1. El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

  Por ejemplo: $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -5 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 7 \cdot 11 - (-5) \cdot 4 = 97$

  Posteriormente, se enuncian las mismas propiedades para el caso de matrices de orden 3. Análogo que para el caso de orden 2, algunas de las propiedades son demostradas.

  Por otro lado, el segundo libro presenta las propiedades una vez que se ha dado la definición del determinante de una matriz de orden cualquiera. Por tanto, no hay ambigüedad en la validez de las propiedades para cualquier matriz cuadrada. Las distintas propiedades se presentan bajo un lenguaje pseudo-formal. Tras la definición, el libro muestra la propiedad en el caso de matrices de orden 3 genéricas, pero solamente una de las diez propiedades que enuncian tiene asociada una demostración. El libro propone al alumno la comprobación de la propiedad para matrices de orden 3, desarrollando el determinante de las matrices que recoge el libro de texto, es decir, plantea al alumno la tarea de comprobar la relación expuesta desarrollando los dos determinantes de ambos lados de la igualdad. Como en el ejemplo de la figura:

  Si se multiplican todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

  $$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ f & g & n \\ m & n & p \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

  Comprobar esta relación desarrollando los determinantes.

- **Aplicación de las propiedades al cálculo de determinantes.** Situándonos en el marco de la antropología de lo didáctico, este ítem se traduce en que el alumno sea capaz de aplicar las propiedades de los determinantes para resolver una determinada tarea. Por tanto, la siguiente tabla muestra el número de veces que el alumno puede trabajar la tecnología según el libro de texto.

	ANAYA	SM
Número de matrices que requieren el cálculo de su determinante mediante la aplicación de las propiedaes de los determinantes.	24	19*

*Algunos de estos ejercicios no especifican que había que utilizar las propiedades de los determinantes. Sin embargo, el análisis de los mismos muestra que el alumno tiene que darse cuenta de que es necesario su aplicación, aunque el ejercicio no lo determine implícitamente.

13 Calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

- **Utilización de los determinantes para calcular el rango de una matriz.** En primer lugar, los dos libros de texto relacionan la dependencia lineal de las filas o columnas de la matriz con el hecho de que su determinante sea nulo. Además, los dos textos expresan que esta relación entre la dependencia lineal y el valor nulo del determinante es recíproca.

  A continuación, introducen un método para calcular el rango de una matriz a partir de sus menores. La tecnología que sustenta esta técnica queda fundamentada a través de la relación explicada anteriormente aplicada al caso de los menores de una matriz. Ambos libros de texto describen el método. La diferencia radica en que el libro de texto de la editorial SM, lo aplica sobre una matriz de dimensión cualquiera con elementos genéricos, mientras que el libro de texto de la editorial Anaya muestra el procedimiento para una matriz de dimensión 4x5 con coeficientes numéricos.

  Finalmente, la tabla que mostramos a continuación muestra el número de ejercicios que exigen la aplicación del procedimiento descrito:

	ANAYA	SM
Determinar el rango de una matriz cuyos elementos son números.	11	0
Determinar el rango de una matriz según el valor de un parámetro.	14	3

- **Cálculo de la matriz inversa con determinantes.** Ambos textos presentan la técnica algorítmica para el cálculo de la matriz inversa basada en el cálculo de determinantes. La imagen corresponde al libro de texto de la editorial Anaya, no exponemos la del otro libro de texto porque es análoga, salvo porque emplea la notación de adjunto en la fórmula.

Para que una matriz cuadrada, A, sea regular, es decir, tenga inversa, A^{-1}, es necesario y suficiente que su determinante sea no nulo. En tal caso A^{-1} adopta la siguiente expresión:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

La siguiente figura corresponde al libro de texto de la editorial Anaya y muestra cómo el documento redacta una receta para ayudar al alumno en la memorización de los pasos para el cálculo de la matriz inversa por determinantes:

Regla práctica para calcular la inversa de una matriz

Para hallar la inversa de una matriz sugerimos que se realicen los siguientes pasos:

$$(a_{ij}) \xrightarrow{(1)} (\alpha_{ij}) \xrightarrow{(2)} (A_{ij}) \xrightarrow{(3)} (A_{ji}) \xrightarrow{(4)} A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji}) = \left(\frac{A_{ji}}{|A|}\right)$$

(0) Hallamos $|A|$ y solo si es no nulo seguimos adelante.

(1) Formamos una nueva matriz con los menores complementarios de cada elemento.

(2) Cambiamos el signo alternativamente para obtener los adjuntos.

(3) Trasponemos la matriz: $(A_{ji}) = (A_{ij})^t$

(4) Dividimos cada elemento por $|A|$. Si no son divisibles, es más cómodo sacar factor común $\frac{1}{|A|}$.

En el caso de libro de texto de la editorial de Anaya aparece un discurso tecnológico que demuestra la fórmula para el caso de una matriz de orden 3, apoyándose en la regla de Cramer (ver Anexo IV).

La siguiente tabla expone el número de actividades presentes en los libros de textos que conllevan el cálculo de la matriz inversa:

	ANAYA	SM
Calcular la matriz inversa de una matriz con elementos numéricos	12	9
Calcular la matriz inversa de una matriz dependiente de un parámetro	4	1
Estudiar el valor del parámetro para el cual existe matriz inversa	8	11

- **Utilización de los determinantes en la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales: la regla de Cramer**. Las siguientes figura muestra cómo enuncia el libro de texto de la editorial de Anaya la regla de Cramer:

Enunciado. Tenemos un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t = c_3 \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t = c_4 \end{cases} \quad \text{con } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \neq 0$$

Puesto que $|A| \neq 0$, $ran(A) = 4 = ran(A')$. Por tanto, el sistema es compatible.

Su solución es: $x = \dfrac{|A_x|}{|A|}$, $y = \dfrac{|A_y|}{|A|}$, $z = \dfrac{|A_z|}{|A|}$, $t = \dfrac{|A_t|}{|A|}$

siendo A_x la matriz que resulta de sustituir en la matriz A la columna de los coeficientes de x por la columna de los términos independientes. Y, análogamente, A_y, A_z, A_t se obtienen sustituyendo en A la columna de los coeficientes de la incógnita correspondiente por la de los términos independientes.

En el caso del otro libro de texto, la presentación difiere en la notación empleada. Los dos documentos presentan una demostración que se basa en las propiedades de los determinantes con relación a la suma y al producto por un número de filas y columnas.. A continuación prestamos la demostración que aparece en el libro de la editorial SM, ya que difiere del otro libro de texto en la notación empleada, la cual se haya en relación con la presentación de esta técnica:

Puesto que el sistema de Cramer es compatible, existe una solución $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ tal que

$$C_1 \cdot s_1 + C_2 \cdot s_2 + C_3 \cdot s_3 + \ldots + C_n \cdot s_n = B$$

Calculemos s_1:

$$\begin{aligned}\mathbf{det(B, C_2, C_3, \ldots, C_n)} &= \det(C_1 \cdot s_1 + C_2 \cdot s_2 + \ldots + C_n \cdot s_n, C_2, C_3, \ldots, C_n) = \\ &= s_1 \cdot \det(C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n) + \\ &+ s_2 \cdot \det(C_2, C_2, C_3, \ldots, C_n) + \ldots + \\ &+ s_n \cdot \det(C_n, C_2, C_3, \ldots, C_n) = \\ &= \mathbf{s_1 \cdot det(C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)}\end{aligned}$$

ya que todos los demás determinantes son nulos por tener dos columnas iguales.

Por tanto:

$$x_1 = s_1 = \frac{\det(B, C_2, C_3, \ldots, C_n)}{\det(C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n)}$$

Análogamente se calcula el valor de las restantes incógnitas.

La siguiente tabla muestra el número de veces que los libros de texto demandan esta tarea:

	ANAYA	SM
Número de sistemas de ecuaciones lineales cuya solución se tiene que obtener aplicando la regla de Cramer	6*	18**

*Aunque el número es inferior al del otro texto, tenemos que señalar solamente hemos contabilizado aquellos ejercicios que indicaran explícitamente la técnica de la regla de Cramer para la búsqueda de la solución del sistema. Por otro lado, la secuenciación de los temas conlleva que la regla de Cramer se introduzca en la última unidad del bloque de Álgebra que versa sobre la resolución de sistemas mediante determinantes, por tanto podemos suponer que los sistemas que se presenten están destinados a trabajar la regla de Cramer aunque no se especifique la técnica a utilizar. Si tenemos en cuenta este apunte, entonces el número de la tabla no refleja el número de actividades que presenta la unidad para trabajar la técnica.

** En este caso, recordamos que el libro de texto no presenta ejercicios en los que tenga que realizar la misma tarea mediante el método de Gauss.

2.2.1. Conclusiones

El análisis sobre cómo presentan los contenidos de Álgebra Lineal los libros de texto determina que los distintos objetos matemáticos son introducidos al alumno sin exponer situaciones que constituyan una razón de ser del mismo. En muchas ocasiones los introducen mediante un lenguaje formal, y a continuación traducen la notación empleada a un lenguaje cercano al alumno. Por tanto, los libros de textos utilizan un lenguaje pseudo-formal, con el objetivo de ayudar al alumno en la comprensión del contenido que se muestra. Además, el estudio revela una leve presencia de las tecnologías que fundamentan las técnicas o métodos presentados. Solamente quedan recogidas de manera explícita en aquellos casos que hemos señalado, como son: el Teorema de Rouché-Frobenious, la regla de Cramer, etc.

En cuanto al conjunto de actividades que los libros de textos presentan, los clasificamos en ejercicios, según el marco teórico de la TAD. Porque no exigen la búsqueda de un modelo matemático para su resolución, sino que el alumno tiene que aplicar una técnica que ha sido introducida con anterioridad. Luego, las tareas planteadas están destinadas a que el alumno adquiera destreza sobre el manejo de la técnica. Por otro lado, los dos documentos presentan al final de cada unidad un conjunto de actividades que se corresponden con cuestiones teóricas. Éstas exigen una reflexión acerca de la teoría trabajada en el tema. Otra de las tareas que destacamos son aquellos enunciados relacionados con la teoría de grafos. No obstante, un análisis versaría en identificar el grado de impacto que tienen estos dos tipos de preguntas en el aula.

Siguiendo el marco teórico propuesto por la TAD, podemos concluir que la secuencia didáctica que presentan ambos textos no favorece que en el aula tenga lugar el momento de primer encuentro, ni el momento exploratorio. De hecho, la presentación del contenido conlleva que el proceso de enseñanza se inicie a través del momento de institucionalización, puesto que los libros de texto muestran tanto el bloque tecnológico como las técnicas sin favorecer la reflexión de las mismas antes de su presentación.

Uno de los contenidos que cabe destacar es el método de Gauss. Ambos libros de textos presentan esta técnica como un método de reducción que tiene por objeto obtener una matriz escalonada, sin embargo no muestra un algoritmo sistematizado análogo al que se explica en la Universidad. Por tanto, observamos una ruptura entre las dos instituciones escolares. Además, en el análisis anterior hemos detectado que una ecuación sea combinación lineal de las otras el libro de texto tacha o elimina dicha ecuación. Esta decisión conlleva que los estudiantes de nuevo ingreso decidan eliminar una fila o una columna nula de una matriz sin reflexionar lo que dicha matriz representa. Por tanto, esta acción conduce a vicios que se convierten en dificultades cuando el alumno inicia sus estudios universitarios.

Por otro lado, hemos detectado que ninguno de los textos contempla el cálculo de la matriz inversa mediante el método de Gauss, cuando es un contenido que aparece en los currículos oficiales.

En relación con el análisis del libro de texto de la editorial Anaya, la secuenciación de las unidades didácticas no favorece el proceso de aprendizaje del alumno. Es decir, la primera unidad versa sobre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante el método de Gauss, mientras que la última contempla la resolución mediante determinantes. Además, la no introducción de determinados objetos matemáticos conlleva que el Teorema de Rouché-Frobenious aparezca en la última unidad. Este hecho provoca que los autores del libro de texto redacten explicaciones menos rigurosas desde el punto de vista matemático.

Sin embargo, este libro de texto es muchos más completo desde el punto de vista teórico que el libro de texto de la editorial SM. Además, el número de ejercicios para trabajar las distintas tareas es mayor que el segundo. No obstante, el libro de la editorial SM estructura las unidades de manera más adecuada que el de Anaya.

2.3. Análisis de la Prueba de Acceso a la Universidad

El final de la etapa del Bachillerato queda caracterizada por la una prueba de evaluación para determinar junto con la nota del Bachillerato, la nota de acceso a la Universidad. Por tanto, este apartado queda caracterizado por el estudio acerca de las características y estructura de esta prueba. A continuación, analizaremos la parte de la prueba correspondiente a la asignatura de Matemáticas II. En particular, observaremos el tipo de tareas que constituyen el bloque de Álgebra Lineal, así como los criterios de evaluación otorgados por el armonizador, cuya figura se explica de manera más detallada en el apartado correspondiente.

2.3.1 Análisis de las características de la Prueba de Acceso a la Universidad

La Prueba de Acceso a la Universidad (PAU) tiene como finalidad valorar, con carácter objetivo, la madurez académica del estudiante, así como los conocimientos y capacidades adquiridos en el Bachillerato y su capacidad para seguir con éxito las enseñanzas universitarias (Real Decreto 1892/2008, de 14 de noviembre, BOE de 24/10/2008, p. 46934).

Según el Artículo 8.1 (Real Decreto 1892/2008, de 14 de noviembre, BOE de 24/10/2008, p.

46934), la prueba de acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de Grado se estructura en dos fases denominadas respectivamente fase general y fase específica. La fase específica se caracteriza por ser de carácter voluntario. Su finalidad es la evaluación de los conocimientos y la capacidad de razonamiento en unos ámbitos disciplinares concretos relacionados con los estudios que se pretenden cursar y permite mejorar la calificación de la nota en la fase general. La fase general está constituida por cuatro ejercicios. Tres de los cuales tienen carácter general y consisten sobre contenidos comunes a todas las modalidades del bachillerato. Solamente uno de los cuatro ejercicios versará sobre los contenidos de una materia de modalidad de segundo de Bachillerato. En el caso de alumnos que cursen la modalidad científico-tecnológica tienen que escoger una de las siguientes asignaturas: Matemáticas II, Dibujo técnico II, Física, Química, Biología, Geología. Por tanto, los profesores de la Universidad se pueden encontrar con alumnos que no hayan realizado la prueba de Matemáticas II.

Nos situamos bajo la hipótesis de que la evaluación tiene una función reguladora sobre los saberes y conocimientos adquiridos por los alumnos, es decir, un examen guía en las decisiones que los estudiantes toman sobre la gestión de su estudio. Por tanto, concluimos que el grado de interés y destreza sobre una materia estará condicionado por la presencia o no de una prueba que evalúe sus conocimientos adquiridos. En un análisis más exhaustivo de este hecho, habría que determinar en qué grado, la decisión de no realizar la prueba correspondiente a Matemáticas II, influye en la formación matemática inicial del alumnado que ingresa en un grado de ingeniería.

2.3.2. Análisis de la presencia del Álgebra Lineal en el ejercicio correspondiente a Matemáticas II

En cuanto a la estructura de la prueba correspondiente a la materia de Matemáticas II, ésta se divide en tres bloques: Álgebra, Geometría y Análisis. A cada uno de estos tres bloques se le concede un peso de 25%, 25%, 50% respectivamente. Por otro lado, a partir del año 2010 la estructura cambia, puesto que ya no existen dos opciones para cada uno de los bloques, sino que existen dos modelos de examen.

En las siguientes líneas hemos realizado un análisis de la prueba de acceso a estudios universitarios del ejercicio referido a Matemáticas II para el bloque de Álgebra. Para lo que hemos considerado los exámenes correspondientes a las convocatorias de junio y septiembre de los años 2009-2014, es decir, en un total de doce pruebas.

a) Tipo de tareas

En primer lugar, exponemos el tipo de tareas que aparecen. Así como, remarcamos el número de ejercicios que hacen referencia a cada tarea en el conjunto de exámenes que hemos analizado. Esta información queda recogida en la siguiente tabla:

Tipo de tarea	Número de tareas
Operar matrices	11
Calcular el rango de una matriz	6
Calcular la matriz inversa	11
Calcular el determinante de una matriz	15
Discusión y resolución de sistemas dependientes de un parámetro	8
Planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones lineales	3
Traducción al lenguaje algebraico de enunciados referentes a una situación de la vida real que pueden resolverse con sistemas de ecuaciones lineales.	1
Resolución de sistemas de matrices	5

En aquellas tareas que se pueden resolver mediante distintas técnicas o procedimientos como por ejemplo, el cálculo del rango de una matriz, el enunciado no exige una ténica concreta, sino que esta elección o responsabilidad depende del alumno.

De los datos recogidos en la tabla, podemos concluir que hay dos tipos de técnicas predominantes que se demandan específicamente: calcular el determinante de una matriz, y calcular la matriz inversa. Siendo la primera, una tarea auxiliar de otro tipos de tareas.

Otra de las tareas que se repite con cierto grado de frecuencia es la discusión y resolución de sistemas dependientes de un parámetro.

b) Conceptos teóricos

En relación con los contenidos teóricos que se demandan en la prueba se sitúan los siguientes:

- Tipos de matrices: Matriz simétrica, matriz opuesta, matriz identidad.

- Propiedades elementales de los determinantes.
- Propiedades de las operaciones con matrices.
- Tipos de sistemas lineales en función del tipo de solución.
- Teorema de Rouché-Frobenius.

Las cuestiones teóricas tienen un leve impacto en los exámenes de la PAU, en general, son tareas auxiliares para justificar determinados pasos asociados en la aplicación de una técnica. Como por ejemplo el cálculo de un determinante mediante las propiedades elementales de los determinantes.

c) Análisis específico de algunas tareas

Algunas de las tareas que hemos recogido en la tabla anterior requieren una mayor especificación sobre el contenido de las mismas, y el objetivo concreto de la tarea.

1. Calcular la matriz inversa

En el cálculo de la matriz inversa son característicos dos tipos de ejercicios:

• Determinar los valores del parámetro para los cuales la matriz tiene inversa, y calcularla cuando sea posible. El número de ejercicios que demandan este cálculo son 4.

• Determinar la matriz inversa cuando el valor del parámetro toma un valor numérico concreto. O, dada una matriz de números reales, calcular su inversa. Son 7 los ejercicios que consisten en determinar la inversa de una matriz dada.

En alguna de las actividades se especificaba que el alumno justificase si la matriz tiene inversa. Para lo cual, el alumno tiene que conocer la condición que tiene que cumplir una matriz para que tenga inversa.

2. Calcular el determinante de una matriz

• Ejercicios en los que se pide calcular un determinante mediante la aplicación de las propiedades elementales de los determinates: 10

• Ejercicios en los que se pide el cálculo de un determinante sin indicar una técnica concreta: 5.

3. Discusión y resolución de sistemas dependientes de un parámetro

Aunque hemos detectado ocho ejercicios en los que se recoge de alguna manera la tarea anterior, las siguientes líneas detallan el tipo de ejercicios que aparecen en la PAU.

- En dos de los ocho ejercicios que hemos contabilizado la tarea consiste en la resolución del sistema de ecuaciones lineales para un valor concreto del parámetro.
- En dos de los ocho ejercicios se demanda la discusión del sistema pero sin la resolución del mismo.

4. Planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones lineales

Incluímos uno de los ejercicios que tienen como objetivo plantear un sistema de ecuaciones lineales y su posterior resolución.

b) (1.25 puntos) Estudiar para qué valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un único polinomio $P(x) = a + bx + cx^2$ que satisface $P(0) = \alpha$, $P(1) = 0$, $P(-1) = 0$.

5. Traducción al lenguaje algebraico de enunciados referentes a una situación de la vida real que pueden resolverse con sistemas de ecuaciones lineales

Como aparece en la tabla, el único ejercicio que hemos detectado queda reflejado en la siguiente imagen:

b) Dos hermanos de tercero y cuarto de primaria iban camino del colegio con sus mochilas cargadas de libros todos del mismo peso. Uno de ellos se lamentaba del peso que transportaba y el otro le dijo: *"¿De qué te quejas? Si yo te cogiera un libro, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio si te diera un libro, tu carga igualaría a la mía."*
¿Cuántos libros llevaba cada hermano? *(1 punto)*

El enunciado corresponde a una situación bastante artificial de la vida.

6. Resolución de sistemas de matrices

La imagen muestra el tipo de actividad asociada a esta tarea:

a) *(1,5 puntos)* Sean A y B matrices 2×2. Determine dichas matrices sabiendo que verifican las siguientes ecuaciones:

$$A + 3B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$
$$2A - B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La hemos incluido porque este tipo de actividades exigen la aplicación de las propiedades de las operaciones con matrices.

2.3.3. Análisis de los criterios de evaluación determinados por el armonizador

Otro de los puntos que consideramos interesantes para este análisis son los criterios de evaluación específicos del examen. Estos criterios son redactadados por la figura del armonizador. El armonizador es la persona encargada de coordinar el ejercicio de la PAU de su especialidad . Por tanto, es la persona de referencia para los profesores de secundaria ante las posibles cuestiones o dudas sobre los contenidos matemáticos que pueden incluirse en el examen, y los criterios de evaluación asociados a las actividades.

A través de la lectura de los criterios de evaluación redactados para el bloque de Álgebra, destacamos las indicaciones para aquellos ejercicios que pueden resolverse por más de una técnica o procedimiento. El armonizador indica que el alumno puede abordar la tarea con libertad. También expone que hay técnicas que son más eficientes que otras, pero no hay que considerar como fallo la elección no adecuada de la técnica puesto que el alumno se penaliza en cuánto al tiempo destinado a la realización de dicha tarea.

2.3.4. Conclusiones

Siguiendo el marco teórico propuesto por la TAD, las tareas que constituyen la PAU las consideramos ejercicios, ya que son cuestiones que exigen la aplicación de una técnica que el alumno conoce de antemano. De hecho, no aparece ninguna actividad que exija la búsqueda de un modelo matemático y de unas técnicas que permitan hallar la solución. Es decir, la presencia de verdaderos problemas es nula. Y, aunque las premisas del documento oficial aboguen por una prueba que ponga de relieve la capacidad de razonamiento del alumno, el hecho de que no existan verdaderos problemas conduce a que dicha capacidad quede reducida a la elección adecuada de la técnica y las justificaciones que elabora en la aplicación de determinadas propiedades.

En relación al tipo de ejercicios que configuran la prueba, la tabla anterior nos muestra la preferencia por unas tareas. Estas tareas son el cálculo de determinantes, operar con matrices, y el cálculo de la matriz inversa. Además, hemos observado que el armonizador expone que la técnica basada en los determinantes es más eficiente para el cálculo de la matriz inversa. Por tanto, dos de las tareas que tienen un mayor impacto en las pruebas marcan una tendencia hacia el uso de técnicas que contemplen el cálculo de determinantes.

En conclusión, el tipo de tareas que configuran la prueba, y el tipo de técnicas más frecuentes para abordarlas conduce a que el alumno de segundo de Bachillerato alcance un grado de destreza en el manejo de las técnicas y , en particular, en aquellas que envuelven el cálculo de un determinante. Finalmente, en el caso de aquellas tareas que presentan más de una técnica o procedimiento es responsabilidad del alumno la elección de la misma.

2.4. Conlusiones generales

En primer lugar, el análisis del Bloque de Álgebra mediante el estudio tanto de la respuesta del libro de texto como de la PAU vislumbra una enseñanza matemática reducida a la exposición de un conjunto de técnicas o métodos destinados a la resolución de unas determinadas tareas, donde el planteamiento de verdaderos problemas queda reducido a su mínima expresión, lo cual queda reflejado, sobre todo, en las actividades que constituyen las PAU. No obstante, los currículum oficiales abogan por una metodología basada en la resolución de problemas como queda recogido en las líneas que expresamos a continuación:

El papel del docente como orientador, promotor, motivador y facilitador del desarrollo competencial en el alumnado se puede enfocar a la realización de tareas o situaciones-problema (Orden de 29 de mayo de 2015, BOE de 6/11/2007, p.18524-18525).

La resolución de problemas tiene carácter transversal y será objeto de estudio relacionado e integrado en el resto de los contenidos. Las estrategias que se desarrollan constituyen una parte esencial de la educación matemática y activan las competencias necesarias para aplicar los conocimientos y habilidades adquiridas en contextos reales. (Orden de 2 de noviembre 2011, BOE de 6/11/2007, p.45449).

La lectura de estas líneas se haya en sintonía con las ideas que recoge el marco teórico de la TAD. Luego, se vislumbra una contradicción entre cómo se debería enseñar las Matemáticas y lo qué finalmente es evaluado.

En general, la evaluación posee una función reguladora, marcando los contenidos que el alumno ha de demostrar que conoce. En el caso particular del Bachillerato, las PAU adoptan dicha función. Por tanto, si el Bachillerato tiene por objeto que los alumnos pasen, con éxito, un examen; entonces son estas tareas las que determinen los contenidos que van a configurar la materia de Matemáticas II. Luego, si las actividades que se plantean en las pruebas de acceso a la universidad se reducen a que alumnos demuestren que conocen un conjunto de técnicas, que aplican sin un razonamiento crítico y reflexivo. Entonces, esperamos que el objetivo del Bachillerato esté constituido por la muestra de un conjunto de objetos matemáticos, y tareas o ejercicios mecánicos que se traducen en el desarrollo de un algoritmo de cálculo automatizado. Este tipo de tareas distan de la resolución de problemas. Por tanto, la actividad matemática realizada durante el Bachillerato se aproxima a una actividad matemática tecnicista centrada en el estudio de un conjunto de técnicas simples, visibles y algorítmicas. Recordando lo expuesto en el Capítulo 1, esta afirmación se encuentra en correspondencia con las ideas formuladas por Gascón (1997).

Por otro lado, el análisis nos revela la existencia de un conjunto de técnicas destinadas a resolver una misma tarea. Hemos detectado los distintos tipos de tareas junto con las técnicas que el alumno llega a conocer según el análisis tanto de los currículos oficiales como de los libros de textos considerados. Esta información queda recogida en la siguiente tabla:

Tareas	**Técnicas**
Calcular el rango de una matriz	Método de Gauss
	Método a partir del cálculo de los menores
Calcular la matriz inversa	Método de Gauss.
	Expresión de adjuntos de la inversa de una matriz.
	Planteamiento del sistema de ecuaciones: AX=I, donde X, es la matriz inversa de A.
Calcular el determinante de una matriz	Propiedades elementales de los determinantes.
	- Fórmula para el cálculo del determinante de una matriz cuadrada de orden 2. - La regla de Sarrus, para el cálculo del determinante de una matriz cuadrada de orden 3.
	Cálculo de determinantes de orden mayor por adjuntos.
Resolución de un sistema de ecuaciones lineales	Método por igualación
	Método por sustición
	Método por reducción
	Método de Gauss
	Regla de Cramer
	Método de la matriz inversa
Resolución de sistemas de matrices	Aplicación de las propiedades de las operaciones con matrices.

La tabla nos muestra que para la mayoría de las tareas existe más de una técnica con un grado de eficiencia distinto. Sin embargo, en ningún libro de texto hemos detectado ningún discurso ponderando qué técnica es más efectiva para resolver una determinada tarea. Solamente algunos de los criterios de evaluación redactados por el armonizador hace algún tipo de consideración sobre la elección adecuada de una determinada técnica.

Además, los libros de textos estructuran los bloques en unidades didácticas que introducen las técnicas en relación con los objetos matemáticos que aparecen en esa unidad. Este compartimento de los contenidos propicia que los alumnos no se enfrenten a un problema que suscite la reflexión sobre la elección de la técnica.

Sin embargo, los textos oficiales exponen la necesidad de reflexión como puede leerse a continuación.

"...Los estudiantes deben demostrar que conocen tanto el método de Gauss como la regla de Cramer o el uso de la matriz inversa para resolver los sistemas, y que saben elegir el más conveniente para cada problema." (Orden de 1 de julio de 2008, BOA de 17/7/2008, p. 14080)

En el caso de la LOMCE, el currículo aragonés incluye el siguiente criterio de evaluación, junto con el correspondiente estándar de aprendizaje.

Crit.MA.1.12. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, valorando su eficacia y aprendiendo de ellas para situaciones similares futuras.

Est.MA.1.12.1. Reflexiona sobre los procesos desarrollados, tomando conciencia de sus estructura,; valorando la potencia, sencillez y belleza de los métodos e ideas utilizados, aprendiendo de ello para situaciones futuras; etc. (Orden de 15 de mayo de 2015, BOA de 29/5/2015, p. 18542)

Notemos que las palabras subrayadas son reflejo de la necesidad de que el alumno sea capaz de escoger la técnica más adecuada en la resolución de una tarea.

En conclusión, siguiendo a Bosch, Fonseca y Gascón (2004), aunque existan más de una técnica para la resolución de una misma tarea el alumno no posee la responsabilidad de decidir qué técnica es más adecuada. Este hecho no beneficia al alumno en la realización del examen de acceso a los estudios superiores.

Finalmente, las conclusiones o reflexiones que hemos señalado en las anteriores líneas nos conducen a afirmar la ausencia de situaciones abiertas de modelización, los cuales exigen la reflexión y discusión en el aula (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004). Sin embargo, el currículum expone:

Crit.MA.1.9. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.

Est.MA 1.9.1. Reflexiona sobre el proceso y obtiene conclusiones sobre los logros conseguidos, resultados mejorables, impresiones personales del proceso, etc.

Crit.MA.1.8. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones de la realidad.

Est.MA.1.8.3. Usa, elabora o construye modelos matemáticos adecuados que permitan la resolución del problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.

Estas líneas exponen una forma de entender las Matemáticas que se aproximan a la interpretación que sustenta el marco teórico de la TAD. Esta teoría interpreta la actividad matemática como una actividad de modelización, bien externa o bien interna a las propias matemáticas. Sin embargo, a la vista del análisis de la respuesta de los libros de texto y los exámenes de las PAU, hemos detectado que la actividad matemática que se muestra al alumno del segundo curso de Bachillerato y en nuestro contexto en el ámbito del Álgebra Lineal dista de la concepción introducida por la TAD, y por el propio currículum oficial.

Capítulo 3. Análisis del Álgebra Lineal en los Grados de Ingeniería

Durante este capítulo nos centramos en el análisis del Álgebra Lineal en la institución universitaria. En primer lugar, realizaremos un análisis de los planes de estudios correspondientes a las distintas titulaciones universitarias que se ofertan en la Escuela de Ingeniería y Arquitectura (EINA) de la Universidad de Zaragoza, con el objetivo de centrarnos en el caso particular del contenido referente al Álgebra Lineal. Posteriormente, presentaremos el cuestionario elaborado desde el Departamento de Matemática Aplicada, sobre los contenidos que el currículum contempla para la materia de Matemáticas I y II del Bachillerato científico-tecnológico. El cuestionario se ha diseñado para conocer el grado de desajuste entre el nivel de adquisición que muestran los estudiantes con respecto a un contenido y el nivel de necesidad que los profesores demandan del mismo.

3.1. Análisis de los planes de estudios de los Grados de Ingeniería

Este apartado no tendría sentido sin antes hablar de la aprobación del Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales. Durante la progresiva armonización de los sistemas universitarios exigida por el proceso de construcción del Espacio Europeo de Educación Superior, iniciado en 1999 con la Declaración de Bolonia (Orden de 29 de octubre, BOE de 30/10/2007, p. 44037), hasta su implantación en el 2010, la Universidad ha vivido un conjunto de transformaciones para cumplir con los requisitos derivados del llamado Plan Bolonia. Por otra parte, la nueva organización de las enseñanzas universitarias responde no sólo a un cambio estructural sino que además impulsa un cambio en las metodologías docentes, que centra el objetivo en el proceso de aprendizaje del estudiante, en un contexto que se extiende ahora a lo largo de la vida (Orden de 29 de octubre, BOE de 30/10/2007, p. 44037).

Aunque el documento oficial aboga por una transformación del proceso de enseñanza y aprendizaje universitario centrado en el alumno, el cambio más significativo queda reflejado en el número de horas destinadas, en términos de créditos europeos o ECTS, que se han destinado a los antiguos planes de estudios. En este sentido, las antiguas licenciaturas son las que se han visto más perjudicadas, disminuyendo la carga de créditos, y por tanto, de materias en su transformación en los actuales grados. Y, esta disminución afecta en mayor o menor medida en los contenidos matemáticos que contemplan las nuevas titulaciones.

Por tanto, el análisis de los planes de estudios nos da una aproximación de la presencia de contenido matemático en los nuevos estudios de grado. Esta información queda recogida en la siguiente tabla, la cual refleja el número de asignaturas de Matemáticas presentes en cada uno de los grados. Aunque en la tabla la materia recibe el mismo nombre en distintas titulaciones, señalamos que no significa que se imparta los mismos contenidos, como veremos en el estudio del caso del Álgebra Lineal.

	Matemáticas I	Matemáticas II	Matemáticas III
Grado en Estudios de Arquitectura	Sí	Sí	No
Grado en Ingeniería en Diseño Industrial y Desarrollo del Producto	Sí	No	No
Grado en Ingeniería Eléctrica	Sí	Sí	Sí
Grado en Ingeniería Mecánica	Sí	Sí	Sí
Grado en Ingeniería Química	Sí	Sí	Sí
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales	Sí	Sí	Sí
Grado en Ingeniería Informática	Sí	Sí	No
Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicaciones	Sí	Sí	Sí

Además, si observamos la distribución de estas asignaturas en el plan de estudios, concluimos que la carga matemática se localiza en los primeros años de los estudios universitarios, siendo mayor en el primer curso del Grado. Por tanto, las posibles dificultades u obstáculos surgirán durante su primer año académico universitario, determinando su capacidad para superar con éxito estas asignaturas. A continuación redactamos un conjunto de puntualizaciones que la tabla anterior no contempla.

En primer lugar, comentar que el Grado de Ingeniería y Desarrollo del Producto es el grado que presenta menos carga de contenidos Matemáticos, solamente 9 ECTS que se imparten en el primer curso de la titulación. Desde la EINA se ha procedido a la revisión del plan de estudios que entre otras modificaciones, conduce a un cambio en el que el nuevo plan de estudios constará de dos asignaturas de Matemáticas: Matemáticas I y II de 6 ECTS cada una.

Por otro lado, la revisión de los planes estudios de las distintas titulaciones muestra que la mayoría de éstas presentan una asignatura denominada Estadística, excepto el Grado en Estudios en Arquitectura, el Grado en Arquitectura, Grado en Ingeniería en Diseño Industrial y Desarrollo de Producto; y el Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación. Sin embargo, el Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicación recoge, en su lugar, otra asignatura denominada Probabilidad y procesos. En el caso del Grado de Ingeniería Informática no contempla en su plan de estudios la asignatura de Matemáticas III, pero presenta una asignatura denominada Matemática Discreta.

En relación con la carga matemática que presentan los citados grados, el Departamento de Matemática Aplicada elaboró un informe sobre la formación matemática que, con el plan de estudios actual, reciben los estudiantes de grado, así como una comparativa con la formación matemática que reciben los estudiantes en otras universidades del panorama nacional. El informe expone que la Universidad de Zaragoza es la única, junto con la Universidad de Cádiz, en dedicar 18 ECTS en el desarrollo de los siguientes conocimientos: Álgebra Lineal, Geometría, Geometría Diferencial, Cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales, y métodos numéricos. A diferencia del resto de las universidades españolas que dedican, en promedio, 26 ECTS en asignaturas obligatorias que contemplan los conocimientos citados .

3.1.1. Análisis de la presencia del Álgebra Lineal en el plan de estudios de cada titulación

Durante este apartado nos planteamos las siguientes cuestiones, ¿en qué materia aparecen contenidos referentes al Álgebra Lineal?, ¿qué contenidos constituyen dicha materia?, ¿cuáles son las características de la misma (curso, semestre, duración, créditos)?, ¿qué aspectos resultan a destacar de la lectura de la guía docente de la materia o módulo?

Para poder dar respuesta a las tres primeras cuestiones planteadas hemos analizado las guías docentes de aquellas materias relacionadas con la formación matemática que contienen aspectos referentes al Álgebra Lineal. Esta información queda recogida en la siguiente tabla para cada una de las titulaciones anteriormente citadas.

Grado en Estudios de Arquitectura	Matemáticas 1 Curso:1, Semestre:1, Créditos: 6.0 Descripción del contenido 1. Álgebra • Estructuras algebraicas. Grupo, anillo, cuerpo. • Espacios vectoriales. Propiedades fundamentales. • Aplicaciones lineales. Representación matricial. • Diagonalización de matrices. Aplicaciones. 2. Geometría afín y euclídea. 3. Cálculo de funciones de una variable
Grado en Ingeniería en Diseño Industrial y Desarrollo del Producto	Matemáticas Curso:1, Semestre:1, Créditos: **9.0** Descripción del contenido Bloque I. Álgebra Lineal y Geometría. • Matrices. Definiciones y operaciones. • Sistemas de ecuaciones lineales y sus métodos numéricos. • Determinantes. • Espacios vectoriales. • Espacios euclídeos. • Valores y vectores propios. Diagonalización. • Secciones cónicas. Bloque II. Cálculo Diferencial e Integral.
Grado en Ingeniería Eléctrica	Matemáticas II Curso:1, Semestre: 2, Créditos: 6.0 Descripción del contenido: Parte 1: Álgebra Lineal • Matrices y resolución de sistemas lineales. • Espacios vectoriales y transformaciones lineales. • Valores propios y vectores propios. Parte 2.Geometría Parte 3.Geometría Diferencial.

Grado en Ingeniería Mecánica	Matemáticas II Curso:1, Semestre: 2, Créditos: 6.0 Descripción del contenido: Bloque 1. Álgebra Lineal • Matrices, determinantes y rangos • Sistemas de ecuaciones lineales y métodos numéricos. • Espacios vectoriales. • Aplicaciones lineales. • Diagonalización. Bloque 2. Geometría
Grado en Ingeniería Química	Matemáticas II Curso: 1, Semestre:1, Créditos: 6.0 Descripción del contenido: • Matrices y determinantes. • Resolución de sistemas. • Espacios vectoriales. • Aplicaciones lineales. • Matrices diagonalizables. • Formas cuadráticas. • Espacios con producto escalar. • Geometría.
Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales	Matemáticas II Curso: 1, Semestre: 1, Créditos: 6.0 Descripción del contenido: • Matrices • Sistemas de ecuaciones lineales • Estructuras algebraicas • Espacios vectoriales • Aplicaciones lineales • Diagonalización de matrices • Formas cuadráticas • Espacios euclídeos • Introducción geometría diferencial

<table>
<tr>
<td>Grado en Ingeniería Informática</td>
<td>Matemáticas II
Curso: 1, Semestre: 1, Créditos: 6.0
Descripción del contenido:
Lenguaje: Conjuntos, aplicaciones y relaciones. Cuerpos.
Álgebra lineal: Sistemas de ecuaciones lineales. Matrices. Espacios vectoriales. Dependencia e independencia lineal.
Transformaciones lineales. Valores propios. Ortagonalidad.
Anillo de polinomios. Cuerpos finitos de característica 2.
Álgebra lineal numérica: Factorización de matrices. Resolución aproximada de ecuaciones lineales. Cálculo aproximado de valores propios.</td>
</tr>
<tr>
<td>Grado en Ingeniería de Tecnologías y Servicios de Telecomunicaciones</td>
<td>Matemáticas II
Curso: 1, Semestre: 1, Créditos: 6.0
Descripción del contenido:
1. Estructuras algebraicas
2. Álgebra Lineal
2.1. Espacios vectoriales
Espacios vectoriales abstractos.
Subespacios vectoriales.
Dependencia lineal, sistemas generadores y bases.
Coordenadas. Cambios de base.
2.3. Aplicaciones lineales
Transformación de subespacios y bases.
Núcleo e imagen. Aplicación a sistemas de ecuaciones.
Matriz coordenada. Matrices equivalentes y semejantes.
2.4. Diagonalización
Valores y vectores propios.
Polinomio característico. Multipilicidad algebraica.
Subespacios propios. Multiplicidad geométrica.
Diagonalización de endomorfismos y matrices.
2.5 Ortogonalidad
Producto escalar. Norma, distancia, ángulo.
Bases ortogonales y ortonormales. Método de Gram-Schmidt.</td>
</tr>
</table>

	• Subespacio ortogonal. • Proyección ortogonal. Aplicación a problemas de mejor aproximación.

En cuanto a los contenidos que constituyen la materia, observamos que la información recogida en la tabla muestra una cierta homogeneidad para el bloque de Álgebra Lineal. Además, estos contenidos están acompañados por conceptos geométricos.

Cabría destacar que el Grado en Estudios de Arquitectura, el Grado en Ingeniería Informática y el Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales incluyen un bloque de contenidos relacionado con estructuras algebraicas. Cabe destacar que el Grado en Estudios de Arquitectura incluye un tercer bloque referido al Cálculo de funciones de una variable.

Por otro lado, desde la lectura de las guías docentes de las asignaturas hemos seleccionado los distintos aspectos que comentamos a continuación:

- *Recomendaciones para cursar esta asignatura.* En las guías docentes se expone el deseo de que los alumnos que se hayan matriculado en esta asignatura posean conocimientos y destrezas adquiridos en las asignaturas de Matemáticas I y II de Bachillerato, preferiblemente orientación científico-tecnológica.

  En algunos casos se puntualiza además que los estudiantes hayan superado aquellas asignaturas previas específicas de Matemáticas que constituyen la titulación.

- *Contexto y sentido de la asignatura en la titulación.* Exponemos las ideas más interesantes y generalizadas que quedan recogidas en las distintas guías docentes:

  - La asignatura constituye una materia básica para la formación posterior del estudiante en la rama de la Ingeniería.
  - La asignatura tiene por objeto proporcionar un conjunto de conceptos y métodos de cálculo destinados a la resolución de problemas.
  - La asignatura busca la aplicación de los contenidos mediante la presentación de problemas que permitan ver las Matemáticas como una actividad de modelización.
  - La asignatura promueve el pensamiento crítico, así como la selección de técnicas y estrategias disponibles.
  - Con carácter más general, las actividades que se realizan llevan implícito el

desarrollo de habilidades de razonamiento, la solución de problemas y pensamiento crítico (Grado en Ingeniería de Tecnologías Industriales).

3.1.2. Conclusiones

El análisis de los planes de estudios de los grados que se ofertan en la EINA pone de relieve la presencia de la carga matemática durante los primeros años de los estudios. Sin embargo, la formación matemática de las estudios técnicos de la Universidad de Zaragoza presentan 8 ECTS menos que en la mayoría de la universidades españolas que dedican 26 ECTS, en promedio.

Por otro lado, la metodología adoptada por los profesores universitarios se apoya en las clases magistrales, clases o prácticas en el ordenador, y el diseño de actividades de exposición o grupales, que exijan la observación de destrezas relacionadas con la expresión verbal y el uso correcto del lenguaje formal. Además, las guías docentes conceden importancia en que el estudiante vea la actividad matemática como una actividad de modelización enfocada hacia la rama de la ingeniería que ha escogido. Por tanto, la resolución de problemas constituye una actividad relevante para el conjunto de los estudios universitarios, como aparece en la redacción de las guías docentes.

3.2. Análisis de los resultados del cuestionario

El objetivo de crear un curso cero virtual de Matemáticas requiere de una previa reflexión antes de seleccionar los contenidos que van a constituir el curso. Por tanto, profesores del Departamento de Matemática Aplicada han recabado información sobre la formación matemática adquirida durante los cursos de Bachillerato de la modalidad científico-técnica. Esta información ha sido organizada en ocho bloques:

Bloque 1: Habilidades, capacidades y actitudes matemáticas.

Bloque 2: Álgebra lineal.

Bloque 3: Conjuntos numéricos.

Bloque 4: Funciones reales de variable real.

Bloque 5: Cálculo diferencial.

Bloque 6: Cálculo integral.

Bloque 7: Geometría analítica.

Bloque 8: Geometría vectorial en el plano y en el espacio.

Una vez que ha sido seleccionada la información, se ha diseñado una encuesta con el objetivo de observar si existen desajustes entre el perfil deseado para iniciar unos estudios de grado en la EINA y el perfil observado en las asignaturas de Matemáticas.

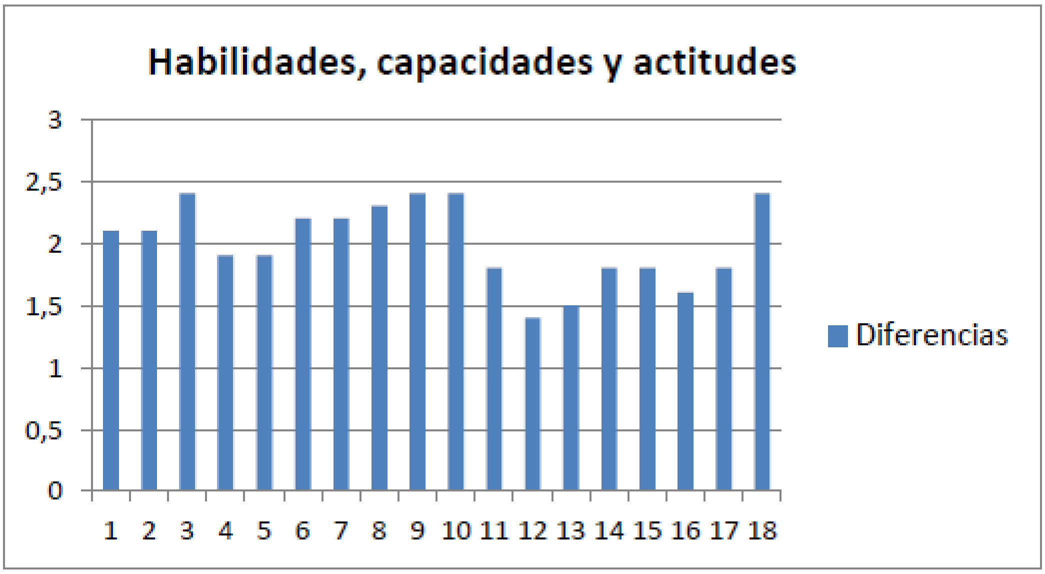
La encuesta se estructura de manera que se recoja información acerca del nivel de necesidad y el nivel de adquisición de los distintos tópicos o ítems que constituyen los bloques anteriormente expresados. Los tópicos que se presentan tienen que ser evaluados mediante una escala de valoración, de tal manera que las posibles respuestas son:

- Nivel muy bajo = 1 punto.
- Nivel bajo = 2 puntos.
- Nivel medio = 3 puntos.
- Nivel alto = 4 puntos.
- Nivel muy alto = 5 puntos.

Los profesores que han desarrollado la encuesta nos han proporcionado los resultados de la misma. En el marco en que se encuadra este trabajo, consideramos de especial interés la discusión de los resultados obtenidos en los primeros dos bloques. La elección del primer bloque viene motivada por las características del mismo. Es decir, es un bloque transversal que recoge las características específicas del quehacer matemático. Por tanto, el nivel de adquisición de las mismas nos informa sobre la capacidad de los alumnos a enfrentarse a situaciones enmarcadas en un contexto matemático. El segundo bloque se ha escogido porque son los contenidos matemáticos sobre los que versa este trabajo, por tanto consideramos relevante conocer las opiniones y/o impresiones que los profesores universitarios tienen con respecto a la formación matemática adquirida por sus estudiantes. En concreto, el conjunto de contenidos que aparecen en el cuestionario corresponden al Bloque de Álgebra de la materia de Matemáticas II.

A continuación, presentamos los resultados correspondientes a las cuestiones de los bloques (ver Anexo V y Anexo VI), junto con un análisis tanto cualitativo como cuantitativo de los aspectos más reseñables de los datos o resultados obtenidos.

3.2.1. Análisis de los resultados del bloque 1: Habilidades, capacidades y actitudes matemáticas



a) Diferencias

En general, el análisis cualitativo de la comparación de las dos gráficas muestra un claro desfase evidente entre el nivel de necesidad y de adquisición.

- Los niveles de adquisición de los aspectos consultados en este bloque pertenecen al intervalo [1.4, 2], es decir, a un nivel bajo.
- Los niveles de necesidad, por el contrario, oscilan entre 3.2 y 4.3 puntos.

Además, si analizamos la media de ambos obtenemos los siguientes valores:

- El nivel medio de necesidad es de 3.7 puntos.
- El nivel medio de adquisición es de 1.7 puntos.

Por tanto, hay una diferencia media significativa de 2 puntos, entre lo que los profesores de universidad requieren de sus estudiantes, y la adquisición que éstos últimos poseen.

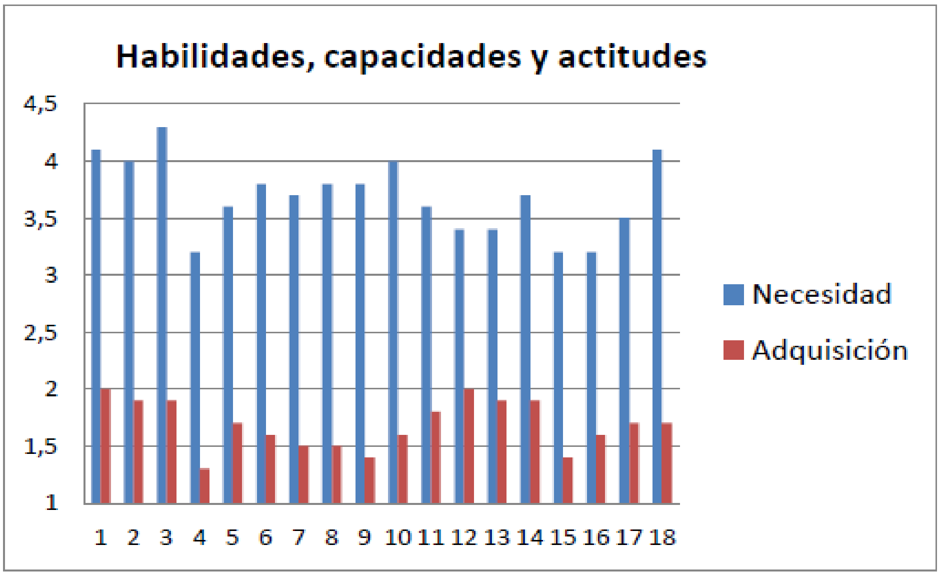
Por otro lado, el análisis de las diferencias máximas y mínimas entre ambos niveles corresponde a 2.4 puntos en el primer caso, y 1.4 puntos en el segundo. A continuación vamos a analizar las preguntas donde se alcanzan los extremos.

El máximo desajuste de 2.4 puntos se alcanza en las siguientes cuestiones:

- Pregunta 3. Los estudiantes no reflexionan sobre la validez de los resultados obtenidos en relación al contexto en el que se presentan estos últimos. Además, no suelen plantearse la existencia de otros métodos que permitan resolver el problema, ni relacionar con otros problemas análogos. Por otro lado, no reproducen propiedades o hechos que surgen de la realización del problema planteado.

- Pregunta 9. Los alumnos no presentan destreza en la aplicación de métodos de demostración en Matemáticas y la realización de razonamientos encadenados.
- Pregunta 10. Los estudiantes presentan dificultades para elaborar respuestas donde apliquen el razonamiento deductivo e inductivo.
- Pregunta 18. Los profesores han observado que los alumnos no muestran confianza sobre sus propias capacidades, lo cual obstaculiza el desarrollo de unas actitudes adecuadas necesarias para afrontar las dificultades que surgen en el proceso científico.

La mínima diferencia corresponde a la pregunta 12. Los estudiantes presentan un grado de capacidad en la manipulación de los datos, y su estructuración mediante gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. Por el contrario, los profesores universitarios no conceden a esta habilidad una importancia relevante. Razón por la cual el mínimo se alcanza en esta pregunta.



b) Necesidad

Los niveles de necesidad oscilan entre los 3.2 y 4.3 puntos. Por lo tanto, estos aspectos se consideran bastante necesarios para superar las asignaturas que imparten.

Análogo al estudio anterior, vamos a considerar en qué preguntas se alcanzan los extremos.

En primer lugar, el máximo valor de necesidad lo protagoniza la pregunta 3, la cual hace referencia a la capacidad relacionada con el análisis reflexivo de las soluciones y resultados obtenidos en la resolución de problemas y aplicación de métodos. Recordemos que en esta pregunta se alcanza el valor máximo de la distancia entre el nivel de adquisición y de necesidad.

Por otro lado, el menor nivel de necesidad se localiza en las preguntas 4, 15 y 16, las cuales reciben un valor de 3.2, es decir, un nivel de necesidad medio-alto. Estas cuestiones se corresponden con la realización de investigaciones matemáticas a partir de contextos de la realidad o contextos del mundo de las matemáticas, el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas y la elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos.

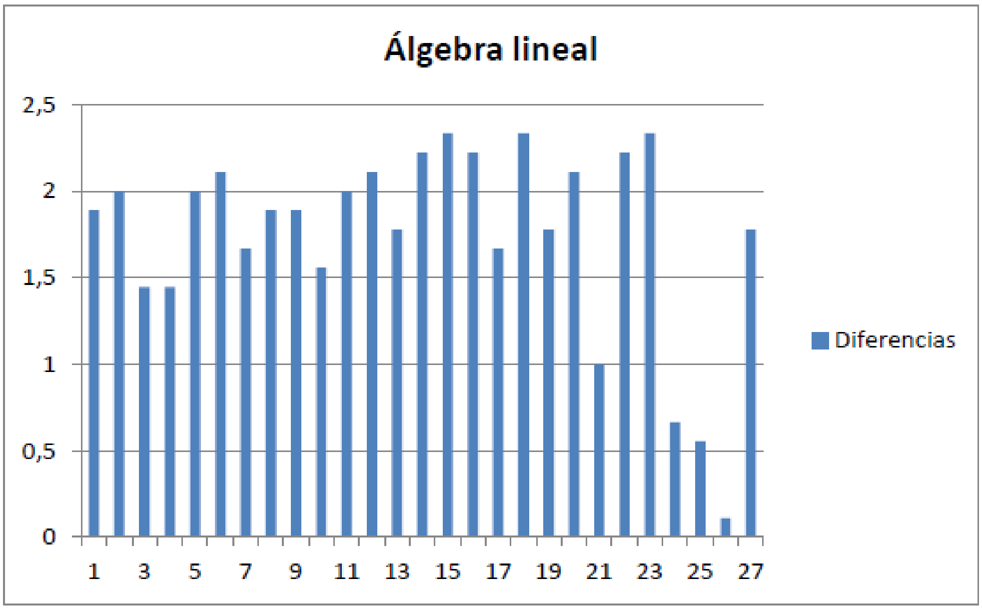
c) Adquisición

Los niveles de adquisición de los aspectos preguntados oscilan entre 1.4 y 2 puntos, luego los niveles de adquisición toman valores muy bajos, no llegando al aprobado.

El mayor nivel de adquisición se alcanza en las preguntas 1 y 2, tomando un valor de 2 puntos. Estas preguntas versan sobre la planificación del proceso de resolución de problemas (pregunta 1) y la recogida ordenada y la organización de los datos (pregunta 12).

Por otro lado, las preguntas 9 y 15 corresponden a aquellos aspectos que los profesores de universidad valoran con un nivel de adquisición más bajo, 1.4 puntos, por parte de sus estudiantes. Dicha cuestiones se corresponden con el diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas y métodos de demostración, respectivamente.

3.2.2. Análisis de los resultados del bloque 2: Álgebra Lineal



a) Diferencias

Los niveles de diferencias muestran una tendencia más heterogénea que en el caso anterior. Observamos un desfase entre el nivel de necesidad y el de adquisición que oscila entre 0.1 y 2.3 puntos.

El máximo desajuste es de 2.3 puntos y se alcanza en varias cuestiones:

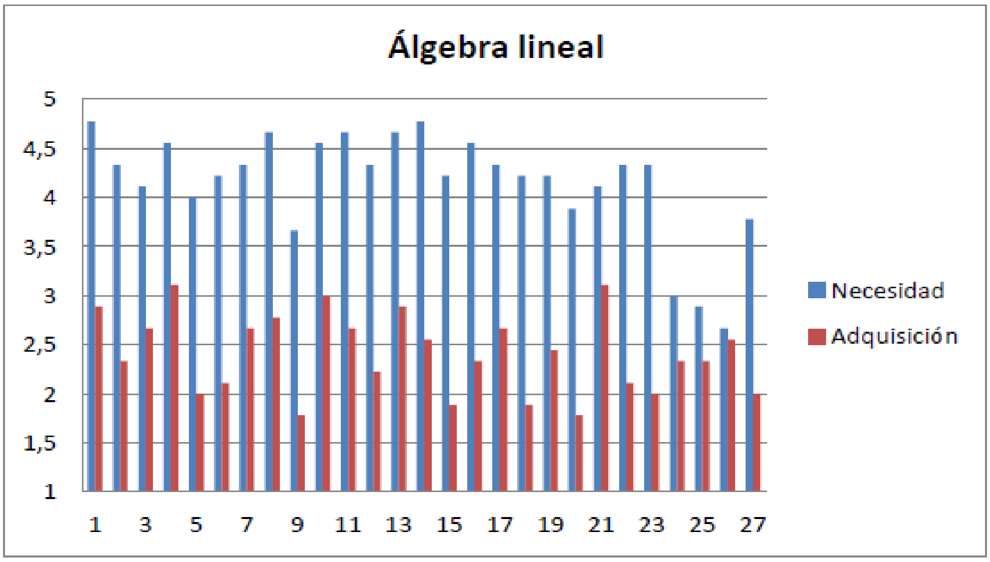
- Pregunta 15. Los estudiantes presentan dificultades con la traducción al lenguaje algebraico de problemas reales que pueden resolverse con sistemas de ecuaciones lineales.
- Pregunta 18. No tienen soltura en la discusión y resolución de sistemas dependientes de un parámetro.
- Pregunta 23. Suelen tener dificultades con la aplicación de las propiedades al cálculo de determinantes.

Por otro lado, el mínimo es de 0.1 puntos y se alcanza en la pregunta 26. Esta pregunta se corresponde con la utilización de los determinantes en la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales: la regla de Cramer. Cabe destacar que los profesores consideran este aspecto el menos relevante, sin embargo coincide con que los estudiantes conocen y aplican la técnica. Es decir, los niveles de adquisición y necesidad toman un nivel medio-bajo que conduce a una compensación que minimiza el valor de la distancia entre ambos.

Otro de los aspectos que cabe señalar del análisis del gráfico son las preguntas 24 y 25, las cuales toman un valor de 0.50 puntos.

- Pregunta 24. Los estudiantes muestran cierta destreza en la utilización de los determinantes.
- Pregunta 25. Presentan cierta capacidad en la tarea de calcular la matriz inversa con determinantes.

La justificación de que estas preguntas muestren un nivel de desajuste menor es análoga al caso anterior. Por tanto, podemos determinar que los profesores de universidad muestran preferencia por unas técnicas, y una clara indiferencia en el empleo de aquellas que involucren la aplicación de determinantes.



b) Necesidad

Los valores de necesidad oscilan entre 4.8 puntos y 2.6 puntos. Las preguntas que mostramos a continuación son aquellas que han recibido un nivel muy alto de necesidad, es decir, por encima de los 4.5 puntos. Por tanto, estos aspectos se consideran muy necesarios para continuar con los estudios de grado en la EINA.

- Pregunta 1. Los profesores señalan la necesidad de que los estudiantes sean capaces de emplear las matrices en contextos diversos, no solamente como representación y resolución de sistemas de ecuaciones. Es reseñable que esta pregunta tome el valor máximo de 4.8 puntos.
- Pregunta 4. Los profesores demandan una mayor destreza en la realización de operaciones con matrices: transposición, suma, producto por escalares, producto.
- Pregunta 8. Los profesores apuntan que los alumnos tienen que adquirir una mayor habilidad con los sistemas de ecuaciones lineales.
- Pregunta 10. Los profesores señalan necesario el conocimiento de la definición de sistemas de ecuaciones lineales. Aunque otorgan un nivel alto de necesidad, los estudiantes muestran un nivel de adquisición medio.
- Pregunta 11. Esta cuestión señala la necesidad de trabajar el concepto de solución de un sistema.
- Pregunta 13. Los profesores otorgan un nivel de necesidad alto a la representación matricial de un sistema. No obstante, los alumnos presentan un nivel de adquisición medio sobre esta

cuestión.

- Pregunta 14. Esta pregunta alcanza el valor máximo, 4.8 puntos. Por lo que los profesores consideran necesario que el estudiante adquiera una mayor destreza en la tarea que envuelve la discusión y resolución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss.
- Pregunta 16. Los profesores muestran la necesidad de que los estudiantes trabajen los sistemas homogéneos.

Por otro lado, el menor nivel de necesidad se localiza en las preguntas 24, 25 y 26. Estos resultados revelan que los profesores no necesitan en tanta medida que los estudiantes utilicen como técnica los determinantes en la realización de determinadas tareas como el cálculo del rango de una matriz, el cálculo de la inversa y la regla de Cramer en la resolución de problemas.

c) Adquisición

Los valores de adquisición oscilan entre 1.8 puntos y 3.1 puntos. El mayor nivel de adquisición se halla en la preguntas 4 y 10. La pregunta 4 hace referencia a operar con matrices. Recordamos que a esta pregunta se le asigna un nivel de necesidad alto, por tanto el grado de destreza que los estudiantes presentan no satisface las necesidades de los profesores de universidad. Por otro lado, la pregunta 21 señala que los estudiantes presentan cierto manejo en el cálculo de determinantes aplicando la Regla de Sarrus.

A continuación describimos aquellas preguntas que han sido valoradas con un nivel de adquisición bajo, menor o igual que 2. Por tanto, podemos afirmar que los estudiantes durante la etapa del Bachillerato deberían adquirir una mayor destreza sobre las siguientes cuestiones:

- Pregunta 5. Aplicación de las operaciones de matrices y de sus propiedades para manejar y operar con datos estructurados en tablas provenientes de problemas extraídos de contextos reales.
- Pregunta 9. Problemas de programación lineal con dos variables: planteamiento y resolución gráfica.
- Pregunta 15. Traducción al lenguaje algebraico de problemas reales que puedan resolverse con sistemas de ecuaciones lineales.
- Pregunta 18. Discusión y resolución de sistemas dependientes de un parámetro.
- Pregunta 20. Definición inductiva de los determinantes.
- Pregunta 23. Aplicación de las propiedades al cálculo de determinantes.

- Pregunta 27. Aplicación a la resolución de problemas.

3.2.3. Conclusiones

El análisis anterior nos permite concluir que los profesores del Departamento de Matemática Aplicada de la EINA de la Universidad de Zaragoza esperan que sus alumnos razonen de manera crítica, reflexionen acerca de los procedimientos que aplican, y además sean capaces de interpretar los datos que obtienen. Este conjunto de habilidades del pensamiento es expuesto de manera transversal en el bloque de contenidos del currículum oficial. Sin embargo, hay una evidencia de que la mayoría de los alumnos no lo adquiere durante su paso por la enseñanza Secundaria, según los resultados obtenidos del cuestionario.

Por otro lado, los profesores universitarios consideran relevante la presencia de habilidades relacionadas con la dimensión afectiva o actitudinal, y por tanto, su carencia conduce a una incapacidad de asumir la tarea propuesta. Siguiendo estas ideas, Gómez-Chacon (2009) centraba su estudio en el diseño de propuestas didácticas que considerasen la dimensión actitudinal para conseguir que los estudiantes se volvieran más capaces en la resolución de problemas. Puesto que consideraba la falta de actitud como una variable que explica la dificultad que presentan los alumnos de nuevo ingreso en superar con éxito las asignaturas de la Universidad.

Otro de los resultados que nos llama la atención lo protagoniza la pregunta 4, la cual ha alcanzado el valor mínimo del nivel de necesidad. Esta pregunta corresponde a la realización de investigaciones matemáticas a partir de contextos de la realidad o contextos del mundo de las matemáticas. Observamos que la idea que subyace está relacionada con la forma de entender la Matemática que expone la TAD. Debido a que este marco teórico considera la actividad matemática como una actividad de modelización, bien externa o bien interna de las propias matemáticas. Suponemos que esta pregunta recibe un nivel de necesidad bajo porque los profesores perciben el concepto de investigación como un concepto complejo que empieza al final o después de los estudios universitarios.

En relación con los resultados obtenidos para el bloque de Álgebra Lineal, detectamos que los profesores universitarios muestran una preferencia sobre unas técnicas otorgándoles un nivel de necesidad mayor. Es decir, los profesores se inclinan por la aplicación de la eliminación gaussiana antes que la técnica que engloba el cálculo de determinantes para la resolución de una misma tarea. No obstante, es relevante que los estudiantes de nuevo ingreso muestren un mayor nivel de adquisición sobre la segunda técnica. Aunque una primera explicación a este hecho puede hallarse en el análisis del ejercicio de Matemáticas II de la PAU. Porque el conjunto de actividades que aparecen con mayor frecuencia son aquellas que demandan la aplicación del cálculo de un determinante.

Por otro lado, los profesores apuntan que los alumnos deberían adquirir mayor destreza sobre aquellos aspectos que exigen una reflexión y comprensión del enunciado del problema como son la traducción al lenguaje algebraico de problemas contextualizados, lo cual se encuentra en relación con las primeras líneas de este apartado. También demandan una mayor habilidad sobre la discusión y posterior resolución de sistemas dependientes de parámetros; y con los sistemas lineales homogéneos.

3.3. Conclusiones generales

En primer lugar, las guías docentes de las asignaturas que contemplan los contenidos de Álgebra Lineal exponen como recomendación al estudiante de nuevo ingreso haber cursado la modalidad científico-tecnológica del Bachillerato. Porque los contenidos que constituyen las asignaturas de Matemáticas I y II de los currículos oficiales otorgan un perfil adecuado para superar con éxito las asignaturas del área de matemáticas. Sin embargo, los resultados del cuestionario ponen de relieve la presencia de aspectos que alcanzan un nivel de necesidad alto, concedido por los profesores, el cual dista del nivel de adquisición que muestran los alumnos sobre el mismo. Es decir, los estudiantes que inician sus estudios universitarios no han desarrollado un conjunto de destrezas transversales requeridas para obtener una buena concepción y aprendizaje de los nuevos contenidos, así como de determinadas técnicas estudiadas en el bloque de Álgebra Lineal. Por tanto, existe una ruptura entre la enseñanza secundaria no obligatoria y la universitaria.

Capítulo 4. Diseño de un cuestionario para la evaluación de recursos educativos electrónicos

En el presente capítulo nos proponemos dar una primera respuesta a las necesidades que surgen desde la enseñanza universitaria. Estas necesidades son debidas a las carencias que presentan los estudiantes de nuevo ingreso en los Grados de Ingeniería. Como ya hemos comentado, desde la EINA se plantea el diseño de un curso en moodle en el que se presente material para que el alumno conozca sus necesidades educativas, es decir, qué contenidos matemáticos necesita reforzar o recordar. Y poder disponer de un material que permita alcanzar dicho objetivo.

4.1. Las TIC en el panorama educativo

En primer lugar, la evolución de Internet y el creciente desarrollo de las Tecnológicas de Información y la Comunicación (TIC) han transformado el panorama educativo, dando lugar a la creación de nuevos espacios que tienen como denominador común la virtualidad y el factor digital. La inclusión de estas herramientas ha transformado el proceso de enseñanza y aprendizaje tradicional, puesto que facilitan el proceso de renovación de los métodos pedagógicos y educativos en todos los niveles de enseñanza, y en particular en la Universidad. Las directrices de Bolonia proponen nuevos modelos educativos basados en competencias y habilidades que deben reemplazar a los antiguos modelos basados en la enseñanza vertical del profesorado y el estudio pasivo por parte del alumno. Entre las premisas básicas de Bolonia se encuentran la individualización del aprendizaje y la responsabilidad del estudiante ante su propio aprendizaje como cuestiones que deben ser asumidas en la renovación de los métodos pedagógicos. Luego, las líneas anteriores abogan por una educación centrada en el aprendizaje del alumno, siendo el protagonista del proceso. Este cambio supone que la figura del docente se trasforma, convirtiéndose en un mediador. Estas ideas quedan recogidas en la LOMCE citada en el segundo capítulo. Y la introducción de las herramientas tecnológicas tienen cabida en este cambio, puesto que potencian el desarrollo de una educación caracterizada por una mayor flexibilidad y dinamismo, dando lugar a espacios abiertos e interactivos.

Según Pinto y Gómez-Camarero (2011), para que los procesos de enseñanza y aprendizaje puedan tener lugar en estos entornos virtuales es necesaria una gran diversidad de elementos, entre ellos, los *recursos educativos electrónicos* que van a ser utilizados por los docentes y estudiantes. Estos recursos quedan caracterizados por su interactividad, su inmaterialidad, su instantaneidad y su interconexión. Además, permite un aumento de la cantidad de información a la que se puede tener acceso, así como la facilidad para establecer intercomunicaciones entre los distintos actores que intervienen en el proceso educativo. Por tanto, las TIC favorecen el autoaprendizaje, a la vez que facilitan al profesor la supervisión de las acciones de los alumnos mediante la selección del material, facilitando determinadas experiencias de aprendizaje (Molina y Salvador, 2009).

Aunque la incorporación de las TIC permite la transformación del proceso educativo aportando una serie de características que enriquecen y aumentan las oportunidades de dicho proceso, la presencia y utilización de las TIC en la educación puede no conllevar dicho cambio. Por lo tanto, es necesario reflexionar sobre el diseño de una evaluación que permita al docente realizar una selección de los materiales on-line para garantizar la consecución de los objetivos didácticos.

Por tanto, el curso de carácter virtual que quiere desarrollar la EINA tiene cabida en el contexto social y político en el que se encuentra el sistema educativo. Entonces, nuestro objetivo se traduce en el diseño de unos criterios que nos permitan determinar la calidad de un recurso educativo electrónico. Por ello, consideramos ineludible especificar lo que se entiende por recurso educativo electrónico.

4.2. Concepto de recurso educativo electrónico

Como hemos terminado señalando, el objetivo es el diseño de una herramienta de evaluación aplicable sobre el material que circula por Internet. Por tanto, primero vamos a explorar lo que se entiende cuando hablamos de recurso educativo electrónico.

El material digital de aprendizaje recibe diferentes nombres tales como, o*bjeto digital de aprendizaje, recurso digital educativo, material educativo electrónico*,... Generalmente, se suele utilizar el concepto de *"objeto de aprendizaje", objeto educativo u objeto digital educativ*o (Fernández-Manjón), traducción del inglés *learning object* (LO), como unidad básica a partir de la cual pueden construirse estructuras y elementos de contenido más complejo.

Según Rehak y Mason (2003), las cualidades básicas de los objetos de aprendizaje son las cuatro siguientes:

- *Reutilizables*. Los objetos pueden ser modificados y reutilizados en diferentes contextos.
- *Interoperables*. Los objetos operan en distintas plataformas o espacios virtuales.
- *Duraderos*. Debido a que son flexibles y fáciles de actualizar.
- *Accesibles*. Porque son fáciles de localizar y recuperar en una base de datos en cualquier

sistema de almacenamiento de contenidos educativos, gracias a estar normalizados por metadatos.

Sin embargo, no existe una unanimidad en los modelos o estructuras diseñados en los repositorios del contenido educativo de las distintas instituciones educativas. Es decir, la estructura de los distintos cursos es muy heterogénea.

Por otro lado, existe un fenómeno de crear y compartir Recursos Educativos Abiertos (Open Educational Resource, OER) entendidos como aquellos materiales en formato digital que se ofrecen de manera gratuita y abierta para educadores, estudiantes y autodidactas para su uso y re-uso en la enseñanza, el aprendizaje y la investigación" (UNESCO, 2002). Siguiendo esta filosofía podemos encontrar los denominados "Open Course Ware" (OCW), los cuales están constituidos por los recursos u objetos de aprendizaje que los profesores universitarios utilizan en sus prácticas educativas, y que pueden ser programas docentes, ejercicios, actividades propuestas en clase. Además, existen cursos universitarios destinados a los estudiantes de nuevo ingreso con el objetivo de facilitar su inicio a la vida universitaria.

La institución más representativa en este caso es el Massachussets Institute of Technology (MIT) que en 2001 puso en marcha su proyecto de almacenar y difundir de manera pública sus contenidos docentes universitarios. El OCW del MIT ha sido un ejemplo para otras instituciones universitarias, teniendo lugar la constitución de un consorcio denominado OCW Consortium que engloba a más de cien instituciones universitarias de América, Europa, África y Asia, interesadas en la producción y colaboración de recursos educativos abiertos. En el caso de España, ha surgido una iniciativa por parte de las universidades españolas junto con las iberoamericanas bajo el nombre de Universia.

4.3. Análisis del estudio sobre los criterios o indicadores para la evaluación de los recursos educativos electrónicos

Una vez que hemos asentado las ideas que sustentan el concepto de recurso educativo electrónico, deberíamos reflexionar sobre el conjunto de criterios de evaluación que nos van a permitir determinar la calidad de dichos recursos y garantizar un proceso educativo adecuado.

Teniendo en cuenta que los recursos educativos electrónicos requieren de una interacción con el ordenador, se ha desarrollado una disciplina denominada usabilidad. Según Manchón y Eduardo (2003), la usabilidad es la disciplina que estudia la interacción entre personas y ordenadores con la finalidad de que el intercambio de información resulte eficiente, disminuyendo la frustración y en definitiva que las tareas que implican al par anterior sean más productivas. Sin embargo, autores como Coll, Mauri y Onrubia (2008) apuestan por la selección de unos criterios que tengan en cuenta la *interactividad tecnológica* (Colomina, Onrubia y Rochera, 2011), pero sin olvidar la *interactividad pedagógica o instruccional*. La interactividad pedagógica hace referencia al diseño de un conjunto de criterios que evalúen el proceso de enseñanza y aprendizaje, realizando un análisis acerca de la capacidad de lograr los objetivos didácticos propuestos.

En este sentido, Nokelainen (2006) crea una herramienta de evaluación constituida por 10 dimensiones y que hace operativas 56 subdimensiones. Estas diez dimensiones son: 1. control del alumno, 2. actividad del alumno, 3. aprendizaje cooperativo, 4. orientación y objetivos, 5. aplicabilidad, 6. valor añadido, 7. motivación, 8. valoración del conocimiento previo, 9. flexibilidad y 10. feedback. Esta herramienta es muy completa y analiza aspectos como la responsabilidad del alumno ante su propio aprendizaje, la utilización de fuentes de información ante las actividades, los mecanismos de comunicación síncronos y asíncronos[1] presentes para facilitar el trabajo en grupo, la labor del docente como facilitador del aprendizaje, etc.

Las investigaciones más recientes se caracterizan por englobar una nueva dimensión afectiva en la evaluación de las aplicaciones e-learning. En este sentido Zaharias (2009) desarrolla un cuestionario de evaluación que incluye la motivación como una nueva dimensión de la usabilidad. Sus parámetros de medida de la usabilidad son pues los siguientes: 1. contenido, 2. aprendizaje y apoyo, 3. diseño visual, 4. navegación, 5. accesibilidad, 6. interactividad, 7. autoevaluación y facilidad del aprendizaje y 8. motivación.

Por otro lado, Pinto y Gómez-Camarero (2011) han diseñado la herramienta EVALUA-REED basada en un enfoque tanto cualitativo como cuantitativo. Debido a que está constituida por un conjunto de criterios e indicadores de dos tipos: estimados por expertos humanos y programados en una sonda automática. El checklist está formado por 44 indicadores agrupados en torno a 9 criterios que se refieren a la calidad del contenido, los objetivos y metas de aprendizaje, el feedback, la usabilidad, la motivación, la accesibilidad, los requerimientos técnicos, la propiedad intelectual y la efectividad del recurso en torno al logro de las metas de aprendizaje por parte de estudiantes y docentes.

Finalmente, desde la Universidad Complutense de Madrid han diseñado una rúbrica (ver Anexo VII) para la evaluación de la calidad de los materiales educativos digitales (Domínguez, E.;

1 Se dice del proceso o del efecto que no ocurre en completa correspondencia temporal con otro proceso u otra causa (Real Academia Española).

F-Pampillón; de Armas, I. 2013). La rúbrica está constituida por 10 indicadores que analizan: los objetivos y coherencia didáctica, calidad de los contenidos, capacidad de generar aprendizaje, adaptabilidad e interactividad, motivación, formato y diseño, usabilidad, accesibilidad, reusabilidad, interoperabilidad. Además, los autores incluyen una tabla de verificación básica de la accesibilidad bajo la indicación de que algunos de los puntos que la constituyen precisan de un determinado conocimiento informático.

4.4. Diseño de los indicadores o criterios para la evaluación de los materiales didácticos

Tras la lectura anterior, debemos reflexionar sobre la elaboración de los criterios o indicadores de evaluación del material. Esta reflexión nos va a permitir seleccionar un material adecuado y en definitiva el diseño de un curso que cumpla con los objetivos y expectativas propuestas desde la EINA.

Por otro lado, el estudio llevado a cabo durante los Capítulos 2 y 3, ha de estar presente en el proceso de selección con el objetivo de seleccionar un material que permita al estudiante minimizar, en cierto grado, las carencias en relación a la formación matemática que presenta en el inicio de sus estudios científico-técnicos en la Universidad. Y, en particular en el contenido del bloque de Álgebra. Creemos conveniente señalar que el análisis realizado en el Capítulo 2 hemos observado que, por encima de las diferencias de nivel en los contenidos, existe una ruptura en las competencias de razonamiento. Sin embargo, somos conscientes que solucionar ese hecho a través de un curso virtual sería muy complejo. Para ello, existe un curso cero presencial que trabaja en esa línea.

El cuestionario que hemos diseñado consta de dos partes. La primera está destinada a la evaluación de aspectos generales, tales como el diseño, la adaptabilidad, etc (ver Anexo VIII). Mientras que el segundo está destinado al análisis del contenido desde el punto de vista de la corrección matemática, teniendo en cuenta los objetivos marcados para el cuso.

Para la elaboración de la primera herramienta de evaluación nos hemos basado en las herramientas diseñadas por Gómez-Camarero (2011), Domínguez, E.; F-Pampillón; de Armas, I. (2013), las cuales han sido citadas en el apartado anterior. Es decir, las preguntas seleccionadas han sido adaptadas a las características especificas del curso. Es necesario anotar que el formato escogido por Domínguez, E.; F-Pampillón; de Armas, I. (2013) se corresponde con una rúbrica. La formulación de preguntas obtenidas del estudio de dicha rúbrica se ha fundamentado en el análisis de las características que corresponden a la máxima valoración del indicador.

Luego, la estructura de la plantilla es similar a la propuesta dada por Gómez-Camarero (2011). Puesto que los indicadores se presentan en formato pregunta, cuya valoración se realiza a través de una escala 0-4, o preguntas de respuesta Sí o No.

En definitiva, el cuestionario que hemos elaborado está constituido por siete indicadores: calidad del contenido, feedback, capacidad de generar aprendizaje, adaptabilidad, usabilidad, formato y diseño; y motivación. Estos criterios evalúan aspectos generales del recurso didáctico electrónico.

Por otro lado, el segundo cuestionario tiene como finalidad analizar cómo presenta el recurso los contenidos de Álgebra Lineal. Una primera parte del cuestionario considera los ítems que formaban parte del cuestionario dirigido a los profesores del Departamento de Matemática Aplicada de la EINA. Como el objetivo del curso es proporcionar al alumno un recurso que le sirva como apoyo en la adquisición y/o repaso de los contenidos que tenía que haber adquirido durante el Bachillerato, y en particular, en el manejo de las técnicas que forman parte de dicho contenido, la segunda parte de este cuestionario pretende el análisis de las actividades que presenta el recurso para trabajar determinadas técnicas, o tareas.

4.4.1. Muestra

Desde la EINA nos han facilitado los recursos que están valorando para configurar el curso virtual. Por tanto, los cursos que presentamos a continuación constituyen la muestra de nuestro estudio.

Universidad	Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)
Facultad	Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y Facultad de Ciencias
Recurso	Curso Cero de Matemáticas
Url	http://ocw.innova.uned.es/matematicas-industriales/
Autor	José Ingacio Alonso Tosca, Roberto Canogar, Antonio F. Costa González, Miguel Delgado Pineda, Ana María Díaz Hernández (Coordinadora), Daniel Franco Leis, Esther Gil Cid, Elvira Hernández García, Mª Paz Peinados Cros.
Año	2008

Universidad	Universidad Politécnica de Madrid (UPM)
Facultad	Área de Matemáticas Generales
Recurso	Curso de preparación de los estudios de ingeniería y arquitectura (OCW)
Url	http://ocw.upm.es/apoyo-para-la-preparacion-de-los-estudios-de-ingenieria-y-arquitectura/matematicas-preparacion-para-la-universidad
Autor	Equipo de redacción coordinado por Ana Casaravilla
Año	2013

Universidad	Universidad de Murcia (UM)
Facultad	Facultad de Informática
Recurso	Matemáticas y sus aplicaciones. Curso 0. (OCW)
Url	http://ocw.um.es/ingenierias/curso-cero-matematicas-y-sus-aplicaciones
Autor	Juan de la Cruz González Férez
Año	2012

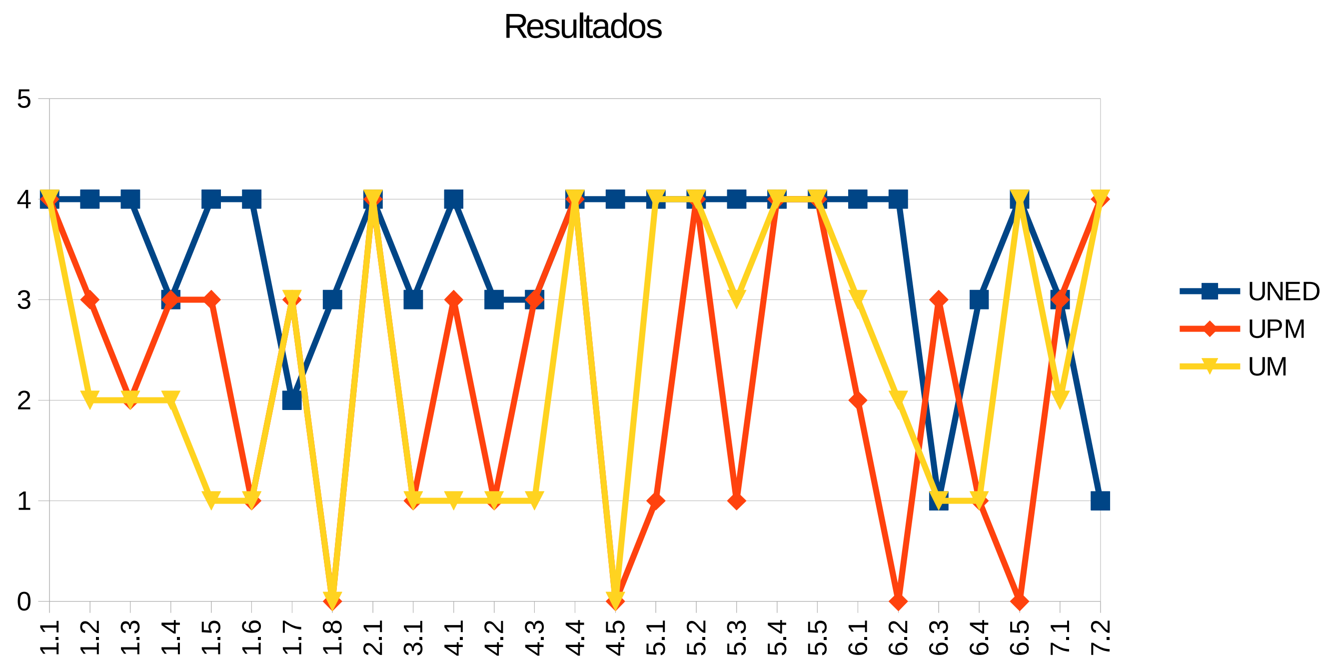
4.4.2. Resultados de la aplicación del cuestionario a la muestra seleccionada.

En primer lugar, comentar que las cuestiones, 1.1, 2.1, 4.4, 4.5, 5.2, 5.4 y 6.5, corresponden a preguntas cuyas respuestas tiene como opción: Sí o No. Por tanto, hemos asignado el valor 0 a la opción de respuesta negativa, y la máxima puntuación, es decir, 4 puntos si la respuesta es afirmativa.

A continuación presentamos un primer análisis individual de cada uno de los cursos que constituyen la muestra. Posteriormente, realizamos un estudio comparativo. El objetivo de estos dos análisis consiste en la selección de un material que favorezca el proceso de aprendizaje del alumno atendiendo a los aspectos generales que conforman el primer cuestionario.

Una vez que hemos seleccionado los cursos, nos centramos en el análisis del módulo o capítulos del curso que hacen referencia a contenidos de Álgebra Lineal.

La siguiente tabla muestra los resultados para cada uno de los recursos digitales.



4.4.2.1. Análisis individual de los recursos educativos electrónicos

a) Universidad Nacional de Educación a Distancia. Curso Cero de Matemáticas

1. Calidad del contenido

El curso 0 elaborado por la Universidad Nacional de Educación a Distancia ha alcanzado una valoración de 4 puntos en las cuestiones referentes a la adecuación de la secuenciación y de la presentación así como del nivel de profundidad. Además, el contenido del curso está equilibrado.

2. Feedback

El contenido presenta una prueba de diagnóstico al inicio del tema, constituida por cuestiones cortas de verdadero y falso. Cuando el estudiante selecciona una respuesta el propio archivo muestra un mensaje indicando la ficha que debería repasar. Posteriormente, al final del tema, aparece una prueba de autoevaluación con las mismas características que la prueba anterior.

3. Capacidad de generar aprendizaje

Esta cuestión alcanza un valor de 3 puntos que se corresponde con un nivel bastante alto, puesto que el material proporciona como actividades cuestiones teóricas que promueven la reflexión acerca de los contenidos que se han desarrollado en la ficha.

4. Adaptabilidad

Las cuestiones de este apartado alcanzan valores altos-muy altos, ya que el mínimo toma el valor de 3 puntos, y se alcanza en las preguntas 4.2 y 4.3. Luego, el contenido se ajusta a las necesidades del estudiante, así como se adapta a cada tipo de alumno o nivel de competencia. En línea con estas cuestiones el recurso considera las acciones previas del alumno mediante la prueba de diagnóstico de cada tema. Por otro lado, el material es interactivo favoreciendo al estudiante la gestión del curso.

La pregunta 4.1 ha alcanzado la puntuación máxima. Luego, el recurso se ajusta al conocimiento previo del estudiante, ya que se adapta a los contenidos que los alumnos han adquirido durante el Bachillerato.

5. Usabilidad

El material presenta un diseño muy homogéneo junto con enlaces que funcionan correctamente. Además, resulta fácil la navegación a través del mismo, el material está organizado por temas con contenidos de distintas áreas de las matemáticas, permitiendo al estudiante trabajar aquel bloque que considere.

6. Formato y diseño

Las cuestiones 6.1 y 6.2 han alcanzado el valor máximo de 4 puntos. Por tanto, el recurso presenta un diseño organizado, claro y conciso que ayuda a la comprensión y asimilación de los contenidos presentados. La pregunta 6.5 ha recibido una puntuación de 4 puntos, lo que se traduce en que la respuesta ha sido afirmativa. Es decir, la calidad del texto es excelente.

La cuestión 6.4 alcanza un valor de 3 puntos. Luego, el documento presenta una estética que favorece en buena medida al aprendizaje pero solamente promueve a través de las cuestiones teóricas la reflexión del mismo de una manera clara .

La cuestión 6.3 alcanza un valor de 1 punto. Luego, el recurso no incluye un formato multimodal, puesto que no incluye formatos como el vídeo o el audio.

7. Motivación

La cuestión 7.1 de este apartado ha recibido una valoración de 3 puntos. Por tanto, el recurso didáctico muestra los contenidos de forma atractiva e innovadora en un grado bastante alto. Aunque no incluye otro tipo de formatos más sofisticados, como vídeos o audios.

Por otro lado, la cuestión 7.2 ha alcanzado una puntuación más baja, de 1 punto. Por lo que el material no hace referencias a la utilidad en el mundo real, ya que la mayoría de las actividades que se presentan buscan la aplicación de una técnica determinada aislada de un contexto real.

b) Universidad Politécnica de Madrid. Curso de preparación de los estudios de ingeniería y arquitectura (OCW)

1. Calidad del contenido

En cuanto a la presentación del contenido, éste se presenta mediante un programa constituido. Las cuestiones 1.2, 1.4 , 1.5 y 1.7 reciben una valoración bastante alta (3 puntos). Por tanto, el contenido presenta una secuenciación adecuada, sin un gran contenido de errores, y es adecuado el nivel de profundidad presentado. Además, la última revisión del curso está fechada en el 2013, por lo que los contenidos están actualizados, o al menos son recientes.

Las cuestiones 1.6 y 1.7 han recibido puntuaciones bajas, 1 punto y 0 puntos respectivamente. Luego, el contenido es poco equilibrado, y la calidad de los recursos externos utilizados como contenido del propio curso no es muy buena.

2. FeedBack

El curso presenta ejercicios propuestos para cada bloque de contenidos junto con sus soluciones. Aunque, un aspecto desfavorable es la privatización de los cuestionarios autoevaluables.

3. Capacidad de generar aprendizaje

La cuestión 3.1 relacionada con este apartado toma un valor de 1 punto. Luego, los contenidos no permiten la consecución de las necesidades didácticas que desde la EINA hemos observado a través de los resultados del cuestionario, porque el número de recursos que configura cada bloque da lugar a un curso con una estructura muy extensa y compartimentada, y no permite al alumno una reflexión sobre el contenido presentado. No obstante el recurso fomenta la aplicación de conceptos y técnicas en la realización de las tareas propuestas.

4. Adaptabilidad

El contenido del curso es interactivo y permite al alumno su gestión. Luego, el alumno controla su propio aprendizaje.

Las cuestiones 4.1 y 4.3 alcanzan un valor de 3 puntos. Luego, los contenidos se ajustan bastante al conocimiento previo del alumno, puesto que los bloques de contenidos se corresponden con los contenidos que contempla el currículum para las materias de Matemáticas I y II. Además, el contenido se adapta al estudiante, por el hecho de que él gestiona su propio aprendizaje al poder seleccionar los contenidos.

Por otro lado, la cuestión 4.2 alcanza 1 punto. Luego, el curso no se ajusta a las necesidades del alumno, porque la cantidad del material que configura el curso es abrumadora. Además, este hecho se vuelve más significativo debido a la no presencia de una herramienta que considere las acciones previas y ayude al alumno en la elección de los contenidos.

5. Usabilidad

En primer lugar, los enlaces funcionan correctamente, y resulta sencillo navegar. Además, el material se presenta modularmente, mediante bloques de contenidos que a su vez se desdoblan en temas.

Por otro lado, las cuestiones 5.1 y 5.3 alcanzan un nivel muy bajo. Ya que el diseño no es homogéneo, precisamente porque los temas se enlazan a recursos de distintas fuentes, que presentan distinto formato. Y una de las fuentes que constituye el recurso presenta un diseño poco estético, con una interfaz poco intuitiva.

6. Formato y diseño

Las cuestiones de este apartado han recibido en promedio una puntuación baja de 1.5 puntos. El mínimo corresponde a la cuestión 6.2, con 0 puntos, por tanto, el contenido no favorece en absoluto la comprensión y asimilación de los contenidos. La máxima puntuación, 3 puntos, corresponde con la pregunta 6.3, ya que el recurso presenta enlaces cuyo contenido es interactivo permitiendo al alumno manipularlo. Además, la cuestión 6.1 es valorada con 2 puntos puesto que el diseño está organizado, en cuanto a la estructuración del curso, pero el contenido de la mayoría de los enlaces no es organizado, ni claro, y no es estéticamente adecuado para que tenga lugar el aprendizaje.

Finalmente, la negativa a la cuestión 6.5 corresponde a la mala calidad de determinados contenidos usados en el diseño del curso.

7. Motivación

Las cuestiones 7.1 y 7.2 presentan una valoración de 3 y 4 puntos, respectivamente. Por lo tanto, los contenidos o procedimientos didácticos se presentan de forma innovadora debido al formato multimodal de los contenidos. Además, todos los enunciados de las actividades propuestas hacen referencia a situaciones de la vida real.

c) Universidad de Murcia. Matemáticas y sus aplicaciones. Curso 0. (OCW)

1. Calidad del contenido

El contenido está presente mediante un programa. En este apartado, se alcanza un valor máximo de 3 puntos en la cuestión 1.7, porque los contenidos son relativamente actuales.

Sin embargo, el resto de cuestiones alcanzan valores de 1 punto o 2 puntos. Las preguntas peor evaluadas son la 1.5 y 1.6. Por lo que, el nivel de profundidad presentado así como el equilibrio de los contenidos no resulta satisfactorio. En primer lugar, el programa está constituido por contenidos asociados a un grado de Ingeniería en particular, y no aparece material de bloques correspondientes a la materia de Matemáticas II del Bachillerato. Con respecto a la cuestión 1.6, este curso lo protagoniza la falta de equilibrio de los contenidos, presentando temas constituidos por unas 300 diapositivas.

El mínimo se alcanza en la cuestión 1.8 con 0 puntos, puesto que el material no ofrece la posibilidad de recursos externos.

2. FeedBack

El contenido permite la autoevaluación de los temas que presenta. Sin embargo, las cuestiones hacen referencia a contenidos que se trabajan de manera exclusiva en el Grado de Ingeniería Informática, por lo que no resultan viables para el curso on-line que se quiere desarrollar en la EINA.

3. Capacidad de generar aprendizaje

Esta cuestión ha sido evaluada con un 1 punto, porque consideramos que el recurso no facilita la consecución de los objetivos didácticos, puesto que los temas que conforman el programa no contemplan todos los bloques de contenidos requeridos por los profesores universitarios. Los contenidos están destinados al Grado de Ingeniería Informática y eso conlleva que existan temas que únicamente sean necesarios en dichos estudios universitarios.

4. Adaptabilidad

El alumno tiene autonomía sobre el uso de los contenidos del curso. Sin embargo, este curso no tiene en cuenta las acciones previas del estudiante, por lo que éste es responsable sobre la elección de los bloques en función de sus necesidades e intereses.

Por un lado, las cuestiones 4.1, 4.2 y 4.3 alcanzan un valor de 1 punto. Esto significa que el contenido no se ajusta al conocimiento previo del alumno, puesto que la mayoría de los contenidos no quedan recogidos en el currículum del Bachillerato. Además, el contenido no se ajusta a las necesidades del alumno, o mejor dicho a las necesidades que los profesores de universidad requieren que presenten teniendo en cuenta el análisis anterior puesto que no está enfocado a trabajar temas transversales y tampoco tiene en cuenta las acciones previas del alumno. La especificidad del contenido es la causa por la que no estamos de acuerdo con el hecho de que el contenido se adapte a cada tipo de alumno.

5. Usabilidad

A diferencia del apartado anterior, este apartado recibe valoraciones mayores o iguales a 3 puntos. La cuestión 5.3 recibe un valor de 3 puntos. Luego, la forma de utilizar el contenido es intuitiva. En su lugar, las cuestiones 5.1 y 5.5 reciben la máxima puntuación, 4 puntos. Así el diseño del contenido es homogéneo, y se organiza en capítulos. Además, los enlaces funcionan correctamente.

6. Formato y diseño

El máximo se alcanza en la cuestión 6.1 con un valor de 3 puntos. Luego, el diseño es bastante organizado, claro, aunque no conciso por las razones explicadas en el primero de los apartados.

La cuestión 6.2 toma un valor de 2 puntos, luego no estamos de acuerdo con el hecho de que el diseño no favorece la comprensión y asimilación de los contenidos.

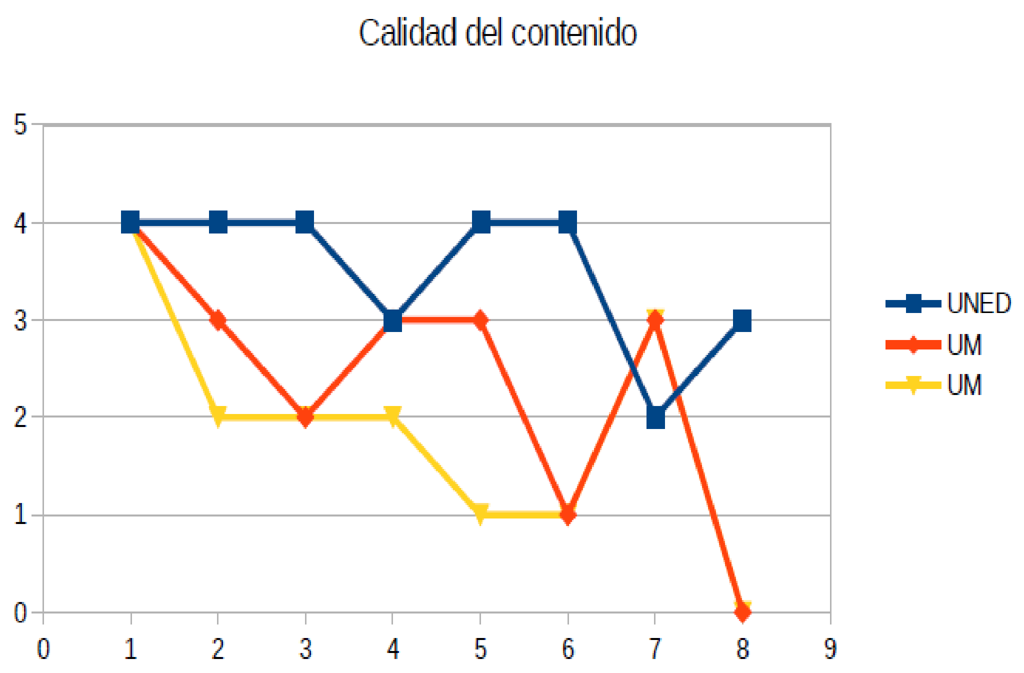
Por último, las cuestiones 6.3 y 6.4 alcanzan el mínimo en este apartado con un valor de 1 punto. Luego, el texto no incluye otro tipo de formatos, pero el texto sí que es de buena calidad. Y el formato no estéticamente adecuado para el aprendizaje y la reflexión, puesto que cada unidad está formada por diapositivas que repiten el contenido de la anterior añadiendo algo nuevo, lo que conlleva que el número de diapositivas por unidad o tema sea excesivo.

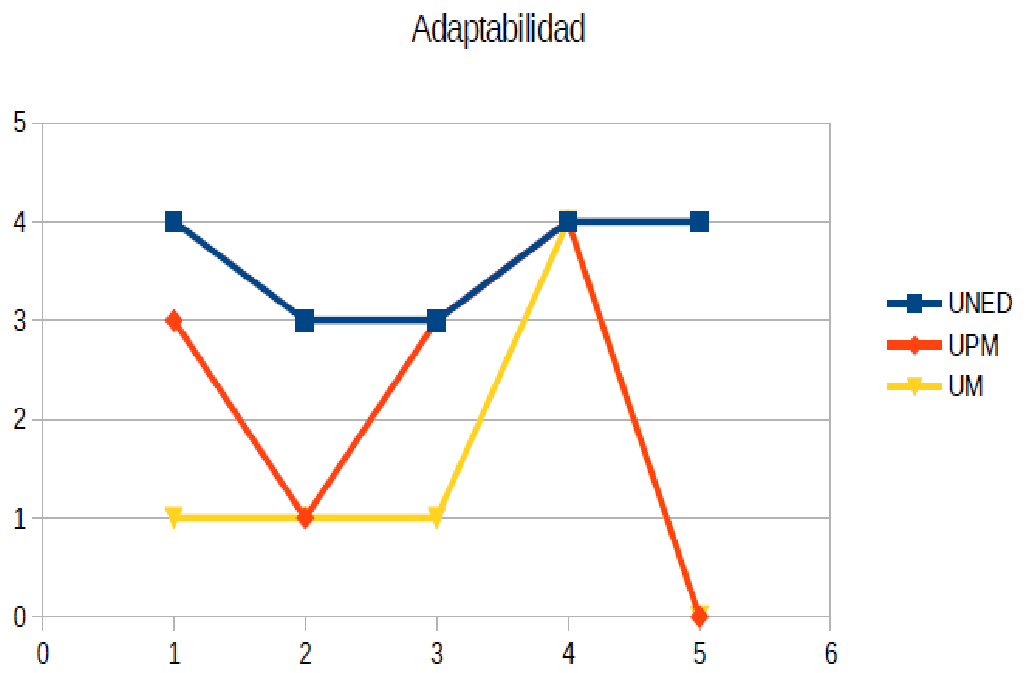
7. Motivación

La cuestión 7.1 toma un valor de 2 puntos, porque los contenidos o procedimientos didácticos no se presentan de forma innovadora o atractiva. No obstante, el material hace referencias directas a la utilidad en el mundo real, a través de los ejercicios propuestos.

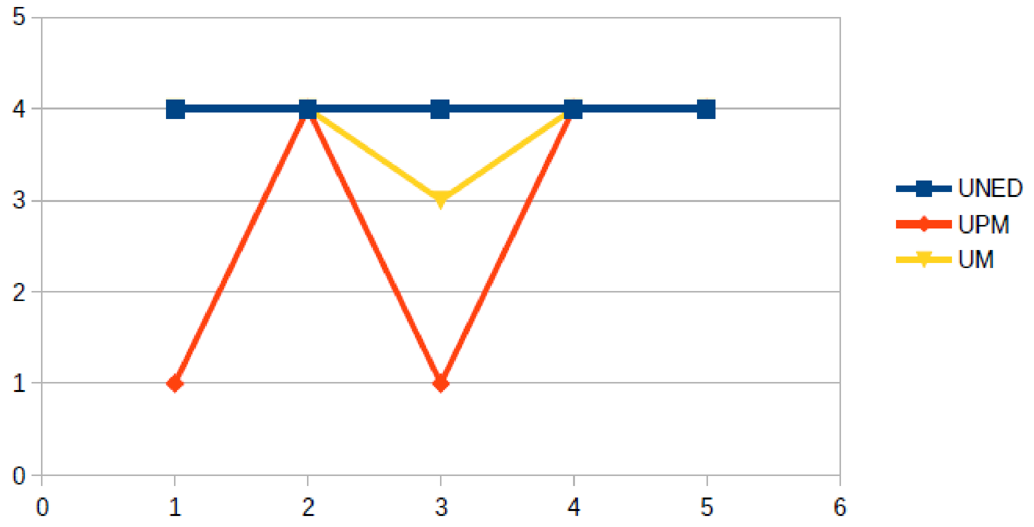
4.4.3. Comparación de los datos obtenidos

Las gráficas que se presentan a continuación comparan los valores obtenidos en cada uno de los aspectos generales para cada curso didáctico electrónico.

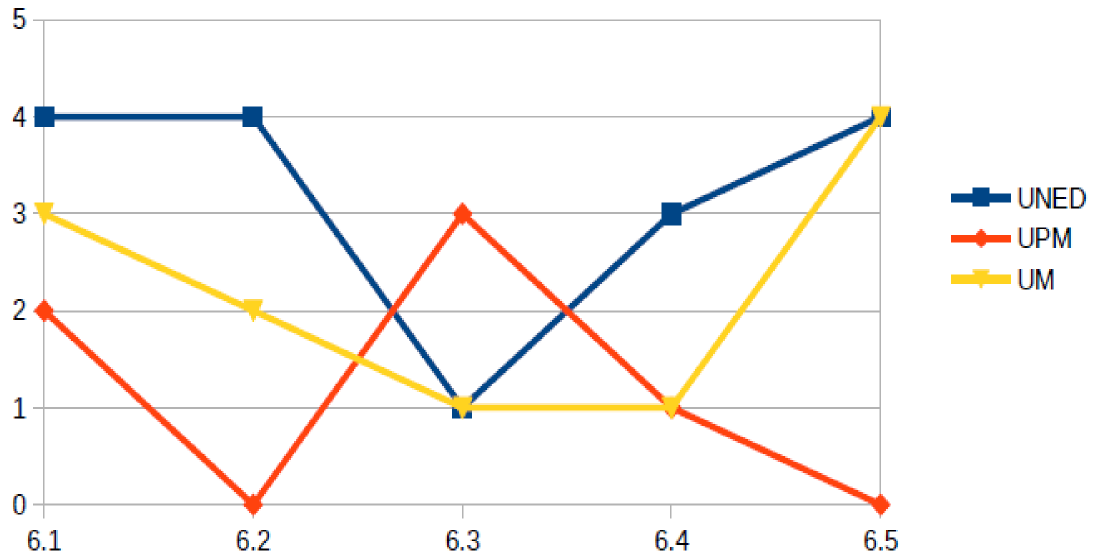

Calidad del contenido
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
UNED
UM
UM


Adaptabilidad
5
4
3
2
1
0
0 1 2 3 4 5 6
UNED
UPM
UM

Usabilidad



Formato y diseño



4.4.3.1. Análisis comparativo de los resultados obtenidos

1. Calidad del contenido

El recurso de la UNED recibe puntuaciones más elevadas que el resto, exceptuando la cuestión 1.7, referida a la actualización de los contenidos. Toma valores superiores en los apartados relacionados con la adecuación de la secuenciación y de la presentación, así como el equilibrio del contenido presentado.

2. Feedback

Los tres recursos alcanzan un nivel de 4 puntos en esta cuestión. Por tanto, todos los recursos permiten la autoevaluación.

3. Capacidad de generar aprendizajes

En este apartado, el recurso de la UNED alcanza el máximo con 3 puntos, mientras que el resto puntúan con 1. Entonces, el recurso de la UNED permite en cierta medida la consecución de los objetivos didácticos.

4. Adaptabilidad

En este apartado el recurso que ha recibido unas puntuaciones altas corresponde al proporcionado por la UNED. Domina en las cuestiones 4.1, 4.2, y 4.5, por lo que el material se ajusta tanto al conocimiento previo del alumno como a sus necesidades (aunque en menor nivel), y, además, está diseñado de manera que tenga en cuenta las acciones previas realizadas por el estudiante.

Los tres recursos puntúan igual con valores medios-altos en la cuestión 4.4, puesto que el curso otorga al estudiante la autonomía sobre el uso que realiza del mismo.

5. Usabilidad

El recurso ofrecido por la UNED recibe un valor de 4 puntos en las distintas cuestiones dominando al resto. Por lo que, podemos afirmar que el recurso presenta un diseño homogéneo y estructurado en temas, resulta fácil la navegación, y la interfaz es intuitiva.

Por otro lado, destaca que el recurso de la UPM recibe una puntuación baja de 1 punto en los aspectos relacionados con la homogeneidad del diseño, y el funcionamiento de los enlaces.

6. Formato y diseño

En este apartado el recurso de la UNED recibe una mejor valoración en las cuestiones 6.1, 6.2 y 6.4. Luego, el diseño es organizado, claro y conciso, favoreciendo la comprensión de los contenidos, y la estética favorece el aprendizaje, y la reflexión.

7. Motivación

En la cuestión 7.1 la nota máxima corresponde a 3 puntos. Los recursos que la alcanzan son los desarrollados por la UNED y la UPM. Sin embargo, no distan mucho de los 2 puntos que recibe el de la UM. Luego, los tres presentan los contenidos de forma innovadora o atractiva en cierta medida.

Con respecto a la cuestión 7.2, el recurso de la UNED alcanza la puntuación mínima, 1 punto. Mientras que el resto reciben un puntuación de 4 puntos. Luego, estos últimos se caracterizan por presentar un material didáctico que hace referencias con el mundo real.

4.4.4. Conclusiones generales del análisis de los aspectos generales de los recursos electrónicos didácticos

El análisis individual y comparativo de los recursos didácticos electrónicos nos permite afirmar que el material diseñado por la UNED ha obtenido unas puntuaciones más altas en la mayoría de los ítems que conforman el cuestionario. Entre los cuales destacamos la adaptación de los contenidos al nivel de los estudiantes de nuevo ingreso, siendo éstos similares a los que aparecen en los currículos oficiales de Matemáticas I, y II. Así como la consideración de las acciones del estudiante lo cual ayuda al alumno en la gestión del recurso. Finalmente, la homogeneidad del recurso favorece al alumno en la comprensión del mismo.

Por tanto, el recurso educativo electrónico desarrollado por la UNED es un material que presenta un alto potencial para ser utilizado en el curso on-line que quiere elaborar la EINA.

4.4.5. Análisis del Bloque de Álgebra Lineal presentado por la Universidad Nacional de Educación a Distancia

Este análisis versa sobre los contenidos desarrollados en el tema donde aparece el Álgebra Lineal. Como el objetivo es que los alumnos puedan repasar los contenidos que han debido ver durante la asignatura de Matemáticas II, vamos a analizar la presencia de dichos contenidos en el bloque de Álgebra Lineal de este recurso educativo electrónico. Para realizar dicho análisis vamos a considerar aquellas preguntas que han configurado el cuestionario dirigido a los profesores de la Universidad, porque se hayan en consonancia con lo recogido en los currículos oficiales de la dos leyes de educación contempladas en el Capítulo 2.

El bloque referente al Álgebra Lineal lo constituyen la Ficha 1: Matrices, Ficha 2: Determinantes, y la Ficha 4: Sistemas de ecuaciones lineales. El análisis de cada uno de los documentos anteriormente citados nos permite redactar las carencias más significativas que habría que tener en cuenta en el caso de escoger este material como recurso.

En primer lugar, destaca la no presencia de la eliminación gaussiana en la Ficha 1. Por tanto, no se explica la técnica y su aplicación para el cálculo del rango de una matriz, o para hallar la inversa de una matriz regular. Este hecho es significativo porque constituye uno de los puntos de mayor divergencia entre las dos instituciones convirtiéndose en un obstáculo tanto para estudiantes como profesores ya que los alumnos no han adquirido este conocimiento adecuadamente.

Por otro lado, la Ficha 2 contempla todos los contenidos redactados para el bloque de determinantes, el único aspecto a destacar es la no presencia de actividades en las que se calcule el determinante aplicando las propiedades elementales de los determinantes.

En el caso de la ficha relacionada con la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, los distintos métodos de resolución se redactan sin ejemplos asociados, y se incluyen no sólo la eliminación gaussiana o la regla de Cramer, si no también los métodos de igualación, reducción y sustitución.

Por otro lado, el curso pretende que el alumno pueda practicar las técnicas propias de este bloque de contenidos, por tanto hemos elaborado una tabla que muestre la viabilidad desde esta perspectiva.

Técnica		¿Está recogida en el material?	Descripción de la técnica	Número de actividades resueltas	Número de actividades propuestas	Soluciones a las actividades propuesta
Calcular el rango de una matriz	Método de Gaus	No	No	-	-	-
	Menores	Sí	Sí	1	2	Sí
Calcular la matriz inversa	Método de Gauss	No	No	-	-	-
	Expresión de la matriz inversa mediante adjuntos	Sí	Sí	1	1	Sí
	Resolución de un sistema de ecuaciones	Sí	Sí	1	1	Sí
Calcular el determinante de una matriz	Aplicando las propiedades de los determinantes	Sí	Sí	-	-	-
	Fórmula para el cálculo de una matriz de orden 2	Sí	Sí	1	1	Sí
	Regla de Sarrus	Sí	Sí	2	1	Sí
	Cálculo de determinantes de orden mayor por adjuntos.	Sí	Sí	1	2	Sí

Tareas	Indicación de técnica apropieda de la tarea	Tareas resueltas (Número, técnica o procedimiento aplicado)	Tarea propuestas (Número)
Discusión de sistema dependiente de un parámetro	**No**	1	0
Resolución de un sistema dependiente de un parámetro	**No**	-	-
Planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales	**No**	-	-
Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes numéricos	**No**	1 (Ejemplo mediante Regla de Cramer) 1(Ejemplo mediante Eliminación Gaussiana)	3

4.4.5.1. Conclusiones del resultado de los análisis del Bloque de Álgebra Lineal del recurso de la UNED

Este recurso didáctico electrónico tiene puntuaciones elevadas en los criterios o indicadores de las características generales. Los puntos fuertes del mismo son la presentación de los contenidos, siguiendo una secuencia adecuada. Además, el material presenta un diseño atractivo, y de calidad. Aunque no se recoge en la tabla, ya hemos comentado en el primer análisis que este material cuenta con cuestiones teóricas que invitan al alumno a reflexionar la teoría presentada.

En relación con el contenido referente al Bloque de Álgebra Lineal, la ficha de determinantes es muy completa, y podría ser utilizada como recurso, ya que contempla todos los puntos que foman parte del cuestionario destinado a los profesores universitarios. Sin embargo, existen apartados que requieren una revisión como la explicación de la eliminación gaussiana, la cual no es presentada hasta la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Por otro lado, la discusión de sistemas dependientes de parámetros es escasa. Las actividades que se presentan en número resultan insuficientes, pero constituyen ejemplos de las técnicas que se han presentado durante el discurso teórico.

Como hemos comprobado en el Capítulo 3 los alumnos presentan mayores dificultades en la aplicación de la eliminación gaussiana. Además, las conclusiones obtenidas a partir del análisis de los libros de texto llevaron a determinar que no se explica la técnica como los profesores de la universidad requieren. Por tanto, nuestra propuesta es que se elabore un material que permita al alumno conocer la técnica tal y como es demandada en la Universidad. Sería conveniente que el curso expusiese al estudiante explícitamente la necesidad de revisar dicho material ya que es un de los contenidos que suponen una ruptura importante entre las dos instituciones.

Capítulo 5. Conclusiones

Este trabajo tenía el objetivo de determinar las dificultades que presentan los estudiantes de nuevo ingreso en los Grados de Ingeniería en relación a los conocimientos de Álgebra Lineal adquiridos durante la etapa de Secundaria, y en particular durante el Bachillerato de la modalidad científico-tecnológica. Como comentamos en la introducción, no es un problema aislado de la Universidad de Zaragoza, sino que diferentes lecturas corroboran la presencia de dicha problemática en otras universidades del panorama nacional.

El primer capítulo hemos presentado una aproximación a la del tránsito entre el Bachillerato y la Universidad desde la investigación en Didáctica de las Matemáticas. El capítulo refleja que es un tema que ha sido trabajo desde múltiples enfoques o corrientes teóricas dentro de la disciplina. Hemos estudiado enfoques basados en la cognición de los estudiantes que analizan las diferencias entre el Pensamiento Matemático Avanzado y los tipos de razonamientos propios de la Secundaria, así como perspectivas que contemplan como variables las actitudes de los estudiantes. Otro de los marcos teóricos que hemos analizado recibe el nombre de Teoría Antropológica de lo Didáctico. Siguiendo esta perspectiva, hemos señalado la aportación de Bosch, Gascón y Fonseca (2004). Estos autores demuestran un conjunto de conjeturas relativas a la rigidez y automatización de la actividad matemática de la enseñanza Secundaria. Desde este enfoque, hemos traducido el problema en términos de una transposición didáctica. Luego, el análisis de los siguientes dos capítulos tiene el objetivo de detectar las transformaciones que sufre los contenidos de Álgebra Lineal pertenecientes al grupo de investigadores cuando se convierten en saber a enseñar.

Por un lado, el análisis de los libros de texto muestra que los objetos matemáticos son presentados con un lenguaje pseudo-formal, sin asociar una razón de ser que de sentido a su introducción. Además, al alumno le presentan un conjuntos de técnicas sin un discurso tecnológico asociado en la mayoría de los casos. Por otro lado, la estructura en distintas unidades didácticas que caracterizan a los libros de texto conduce a la presentación de distintas técnicas para la resolución de una misma tarea. Pero, no presentan situaciones que busquen la reflexión del alumno acerca de la eficacia de las mismas. En cuanto al tipo de tareas, la presencia de cuestiones teóricas es menor en comparación con los ejercicios destinados al trabajo de una técnica. Por otro lado, el análisis del ejercicios de Matemáticas II de la PAU, muestra que el objetivo es que el alumno demuestre que conoce una técnica. Por tanto, la actividad matemática que tiene lugar durante el Bachillerato se reduce a una actividad tecnicista, donde la introducción de situaciones abiertas a la modelización es ausente.

El análisis de los grados que se ofertan en la EINA muestra que la carga matemática está presente durante los primeros cursos de los estudios técnicos. En cuanto al tiempo destinado a la formación matemática, un informe realizado por los profesores del Departamento de Matemática Aplicada de la EINA muestra que los créditos destinados a la formación matemática para los estudios técnicos de la EINA es menor que en la mayoría de la universidades españolas.

El análisis de los resultados del cuestionario realizado por los profesores del Departamento de Matemática Aplicada han expuesto una diferencia entre el nivel de necesidad que requieren los profesores universitaros y el nivel adquirido por los alumnos en los distintos contenidos del bloque de Álgebra Lineal. Además, hemos detectado que los profesores muestran una preferencia por el método de Gauss, pero determinan que los estudiantes muestran una mayor destreza sobre el cálculo de determinantes. Este hecho muestra la discontinuidad existente en el paso de las dos enseñanzas, debida a que la mayoría de los ejercicios que aparecen en la PAU engloban la aplicación de la última técnica citada.

Por otro lado, el análisis refleja que los profesores universitarios necesitan que sus estudiantes razonen de manera crítica, reflexionen acerca de los procedimientos que aplican, y además sean capaces de interpretar los datos que obtienen. Hemos detectado que este tipo de habilidades forman parte del currículum de Bachillerato tanto de la LOE como de la LOMCE.

Por tanto, existe una distancia entre lo que la Universidad demanda y los saberes y conocimientos que los alumnos han adquirido al final del Bachillerato.

Para dar una primera respuesta al problema, la dirección de la EINA se propone el desarrollo de un curso virtual que facilite la transición y la adaptación del alumno en su entrada a la Universidad. No obstante, somos conscientes de la dificultad de diseñar un curso cuyo objetivo sea los aspectos del bloque de habilidades, capacidades y actitudes matemáticas del cuestionario realizado a los profesores de la EINA. Los cuales se trabajan en un curso cero presencial que lleva en marcha desde el año 2006.

Por tanto, hemos elaborado unos indicadores para evaluar los aspectos generales de los recursos didácticos que existen en Internet. Hemos considerado que aquellos recursos que no alcancen valores aceptables en este cuestionario no serán seleccionados, puesto que consideramos que no podemos utilizar un recurso cuya calidad no sea buena, o que su contenido sea excesivo, puesto que estos aspectos chocan contra la validez del curso. En el caso de la evaluación de los contenidos de Álgebra Lineal hemos considerado los resultados obtenidos en el cuestionario, así como la presencia de actividades para trabajar el contenido.

De la muestra analizada, hemos seleccionado solamente un recurso, y el análisis del bloque de Álgebra conduce a que la eliminación gaussiana no se explica de manera adecuada. Por tanto, nuestro consejo es la elaboración de un material que muestre al estudiante los contenidos adecuadamente, y que sea conocedor de la necesidad de que ese material sea considerado por él.

Finalmente, el trabajo pone de relieve la necesidad de que las dos instituciones trabajen de manera coordinada para minimizar las dificultades que los alumnos encuentran al iniciar los estudios técnicos.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2013). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer Science & Business Media.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education*. In Research in Collegiate mathematics education II.CBMS issues in mathematics education (Vol. 6, pp. 1–32). Providence, RI: American Mathematical Society.

Beltrán, J. A. (1998), Claves psicológicas para la motivación y el rendimiento académico. In *Creatividad, motivación y rendimiento académico* (pp. 39-54). Ediciones Aljibe.

Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques*, *24*(2-3), 205-250.

Bosch, M., & Gascón, J. (2007). 25 años de Transposición Didáctica. En Ruiz-Higueras, Estepa y García (edts.) *Sociedad, escuela y matemáticas: aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 385-406). Jaén: Servicio de Publicaciones. Universidad de Jaén.

Brousseau, G. (1986): Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathémaique*s, 7/2, pp. 33-115.

Chevallard, Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées para une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 12, núm. 1, pp. 77-111.

Chevallard, Y. (2002). La transposición didáctica. *Del saber sabio al saber enseñado*, *3*. ARGENTINA: AIQUE.

Coll, C., Mauri, T., & Onrubia, J. (2008). El análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje mediados por las TIC: una perspectiva constructivista. *E. Barberà, T. Mauri, & J. Onrubia (Coords.), Cómo valorar la calidad de la enseñanza basada en las TIC. Pautas e instrumentos de análisis*, 47-60.

Colomina, R., Onrubia, J., & Rochera, M. (2001). Interactividad, mecanismos de influencia educativa y construcción del conocimiento en el aula. *Desarrollo psicológico y educación*, *2*, 437-458.

De Guzmán, M., Hodgson, B. R., Robert, A., & Villani, V. (1998). Difficulties in the passage from secondary to tertiary education. In *Proceedings of the international Congress of Mathematicians* (Vol. 3, pp. 747-762).

Domínguez, E.; F-Pampillón; de Armas, I. (2013). Rúbrica para evaluar la calidad de los Materiales Educativos Digitales. Universidad Complutense de Madrid.
http://eprints.ucm.es/12533/2/R%C3%BAbrica_calidad_MED_2013_%282%29.pdf

Dorier, J. L. (2003). Teaching linear algebra at university. *arXiv preprint math/0305018*.

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). On a research programme concerning the teaching and learning of linear algebra in the first-year of a French science university. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(1), 27-35.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En. D. Tall, (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 95-123). Dordrecht: kluwer.

Dubinsky, E. (1997). Some Thoughts on a First Linear Algebra Course. En D.Carlson, C.R.

Duval, R. (1995), Semiosis et Pensée Humaine. Registres S´emiotiques et Apprentissages Intellectuels, Peter Lang, Bern.

Edwards, B. E., Dubinsky, E., & Mc Donald, M. A. (2005). *Advanced mathematical thinking. Mathematical Thinking and Learnin*g, 7(1), 15–25.

Fernández-Manjón, B., Sierra, J. L., Moreno-Ger, P., & Martínez-Ortiz, I. (2007). Uso de estándares aplicados a TIC en Educación. *Recuperado el*, *25*, 2012-2015. http://www.tecnoaccesible.net/content/uso-de-est%C3%A1ndares-aplicados-tic-en-educaci%C3%B3n

García-Quismondo, M. A. M., Prado, F. J. C., & Osti, M. V. (2008). Criterios para la evaluación de la usabilidad de los recursos educativos virtuales: un análisis desde la alfabetización en información. *Information Research*, *13*(4), 5.

Gascón, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (26), 11-22.

Gómez-Chacón, I. M. (2009). Actitudes matemáticas: propuestas para la transición del bachillerato a la universidad. *Educación matemática*, *21*(3), 05-32.

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational studies in mathematics*, *67*(3), 237-254.

Jiménez, M., Areizaga, A., & Guipuzcoa, R. (2001). Reflexiones acerca de los obstáculos que aparecen, en la enseñanza de las matemáticas, al pasar del bachillerato a la universidad. *IX Jornadas para de la Asociación Española de profesores universitarios de matemáticas para la economía y la empresa. Las Palmas de Gran Canaria. Recuperable en*.

Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter, A. Watkins, & W. Watkins (eds), *Resources For Teaching Linear Algebra*, (pp. 85-106), MAA Notes, 42.

Manchón, E. (2002). ¿Qué es la Interacción Persona-Ordenador (Human Computer-Interaction)?.

Mohammad Yusof, Y., & Tall, D. (1994). Changing attitudes to mathematics through problem solving. In *Proceedings of the 18th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 401-408).

Molina, M. P., & Salvador, D. S. (2009). El aprendizaje basado en recursos electrónicos: Alfintra.

net, un portal de contenido para la documentación aplicada a la traducción. In *Documentación aplicada y Espacio Europeo de Educación Superior* (pp. 41-62).

NCTM (1989), *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*, NCTM, 1989, publicado en castellano por la Sociedad Andaluza para la Educación Matemática, THALES.

Nokelainen, P. (2006). An empirical assessment of pedagogical usability criteria for digital learning material with elementary school students. *Educational Technology & Society*, *9*(2), 178-197.

Oktaç, A., & Trigueros, M. (2010). ¿ Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4-II), 373-385.

Pinto, M., & Gómez-Camarero, C. (2011). Propuesta de criterios e indicadores internacionales para la evaluación de los recursos educativos electrónicos. *Ibersid: revista de sistemas de información y documentación*, *5*, 81-87.http://www.evaluareed.edu.es/

Polya, G. (1945) How to solve it. Doubledoy. New York. Traducido al castellano: Cómo plantear y resolver problemas. Trillas: México, 1972.

Rehak, D., & Mason, R. (2003). Keeping the learning in learning objects. *Reusing online resources: A sustainable approach to e-learning*, 20-34.

Rojo, J. A. H., García, A. M., & Ortega, M. L. S. (2010). Del Bachillerato a la Universidad: las Matemáticas en las carreras de ciencias y tecnología. *Aula abierta*, *38*(1), 71-80.

Schoenfeld, A. H. (1983), Beyond the purely cognitive: Beliefs systems, socialcognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance, *Cognitive Science*, núm. 7, pp. 329-363.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking* (Vol. 11). Springer Science & Business Media.

UNESCO. (2002). *Forum on the impact of open courseware for higher education in developing countries: final repor*t. Paris: UNESCO.

Weller, K., Clark, J., Dubinsky, E., Loch, S., McDonald, M., & Merkovsky, R. (2003). *Students performance and attitudes in courses based on APOS theory and the ACE teaching cycle*. Research in Collegiate Mathematics Education V, 97–131.

Zaharias, P., & Poylymenakou, A. (2009). Developing a usability evaluation method for e-learning applications: Beyond functional usability. *Intl. Journal of Human–Computer Interaction*, *25*(1), 75-98.

Referencias Legislativas

ORDEN de 1 de julio de 2008, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. (BOA, núm. 105, 17 de julio de 2008).

ORDEN de 15 de mayo de 2015, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. (BOA núm.101, 29 de mayo de 2015).

Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. (BOE, núm. 266, 6 de noviembre de 2007).

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. (BOE, núm.3, 3 de enero de 2015).

Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales. (BOE, núm. 260, 30 de octubre de 2007).

Real Decreto 1982/2008, de 14 de noviembre, por el que se regulan las condiciones para el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado y los procedimientos de admisión a las universidades públicas españolas. (BOE, núm. 283, 24 de noviembre 2008).

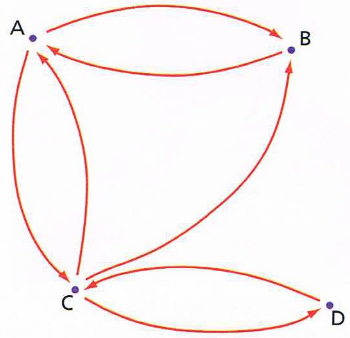
Referencias de los libros de texto

Colera, J. y Oliveira, M.J. (2008). GRUPO ANAYA, S.A. ISBN: 978-84-667-2161-5.

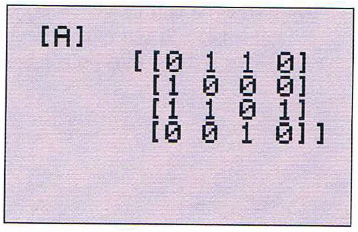
Anzola, M y Vizmanos, J.R.(2008). EDICIONES SM, Madrid. ISBN: 978-84-348-9369-6.

Anexo I. Matriz asociada a un grafo

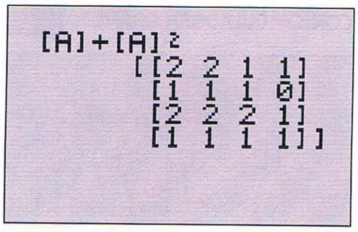
GRAFO DE UNA SITUACIÓN



CON CALCULADORA GRÁFICA



Editamos la matriz del grafo M como matriz A.



Calculamos la matriz $A + A^2$.

8. Matrices asociadas a un grafo

Los puntos A, B, C y D del gráfico del margen representan a cuatro equipos de rescate de una región de montaña. Las flechas indican las direcciones posibles de comunicación por radio. Por ejemplo, el equipo de rescate D puede comunicar directamente con C pero no con A. El equipo D puede comunicar con A pero a través de C.

Este es un ejemplo sencillo de **grafo**. La información dada por el grafo la podemos expresar en forma de matriz del siguiente modo:

expresamos con: $\begin{cases} 1 = \text{comunicar directamente} \\ 0 = \text{no comunicar directamente} \end{cases}$

$$\text{Del equipo} \begin{array}{c} \\ \left\{\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array}\right. \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array}}^{\text{al equipo}} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = M$$

M es la **matriz asociada al grafo** dado.

Si hallamos la matriz $M^2 = M \cdot M$, obtenemos:

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz M^2 expresa en qué forma se pueden establecer comunicaciones entre los equipos a través de otro.

Por ejemplo, vemos que:

$a_{11} = 2$ significa que A puede comunicarse con A de dos formas distintas a través de otro equipo: $A \to B \to A$ y $A \to C \to A$.

$a_{12} = 1$ significa que A puede comunicarse con B de una sola forma a través de otro equipo: $A \to C \to B$.

$a_{13} = 0$ significa que A no puede comunicarse con C a través de otro equipo.

Análogamente para los demás elementos de la matriz A.

La matriz

$$T = M + M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da las formas que tienen de comunicarse por radio los cuatro equipos, bien directamente, bien a través de otro equipo.

Por ejemplo, $t_{24} = 0$ significa que el equipo B no puede comunicarse con el equipo D ni directamente ni a través de un equipo.

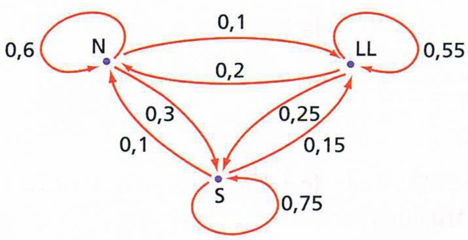
Anexo II. Cadenas de Markov

10. Cadenas de Markov

Consideremos el siguiente ejemplo:

En una determinada ciudad un día amanece nublado; la probabilidad de que al día siguiente esté también nublado es 0,6, la probabilidad de que esté lluvioso es 0,1 y la probabilidad de que esté soleado es 0,3. Si amanece lluvioso, la probabilidad de que al día siguiente también esté lluvioso es 0,55, de que esté nublado es 0,2 y de que esté soleado es 0,25. Y si amanece soleado, la probabilidad de que al día siguiente también esté soleado es 0,75, de que esté lluvioso es 0,15 y la probabilidad de que esté nublado es 0,10. ¿Cómo cambiarán estas probabilidades al cabo de 10 días? ¿Será posible que se estabilicen? ¿Cuántos días tendrán que transcurrir?

Podemos simplificar el enunciado formando el grafo siguiente y su matriz asociada:



$$\text{de}\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{N \quad LL \quad S}^{a} \\ N & 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ LL & 0{,}2 & 0{,}55 & 0{,}25 \\ S & 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}75 \end{array} = A$$

Conviene observar que los elementos de esta matriz son probabilidades y que la suma de los elementos de cada fila es igual a la unidad. Estas matrices se llaman **estocásticas**.

La matriz A^2 da las probabilidades para cada clase de tiempo dentro de 2 días:

$$\text{de}\begin{array}{c|ccc} & \overbrace{N \quad LL \quad S}^{a} \\ N & 0{,}41 & 0{,}16 & 0{,}43 \\ LL & 0{,}26 & 0{,}36 & 0{,}39 \\ S & 0{,}17 & 0{,}21 & 0{,}63 \end{array} = A^2$$

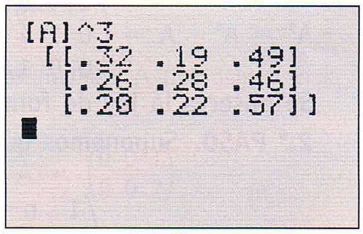
Esto quiere decir que si hoy está nublado la probabilidad de que pasado mañana esté también nublado es 0,41, la probabilidad de que pasado mañana esté lluvioso es 0,16, y así sucesivamente.

En el margen hemos calculado las potencias sucesivas de la matriz A, y observamos que a partir de la matriz A^9 las potencias sucesivas de la matriz A se estabilizan; por tanto, al cabo de 9 días las probabilidades de que amanezca nublado, lluvioso o soleado se estabilizan.

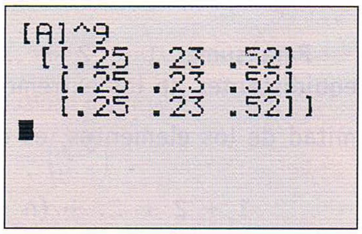
Este es un ejemplo de **cadena de Markov**. La matriz A también se llama *matriz de transición*. Si en esta matriz no hay ningún elemento nulo, las filas llegan a estabilizarse haciéndose iguales.

Andrei Andreievich Markov (1856-1922). Matemático ruso discípulo de ***Chebyshev****. En 1906 desarrolló las llamadas* cadenas de Markov, *para analizar procesos en física y en meteorología. Actualmente se aplican al análisis de los movimientos de precios de los artículos de consumo, el comportamiento de animales de laboratorio, la longitud de las filas en los aeropuertos y los supermercados, etc.*

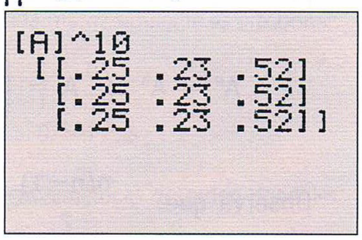
$A^3 =$



$A^9 =$



$A^{10} =$



27

Anexo III. Discusión de un sistema de ecuaciones lineales

Al finalizar el proceso, podemos llegar a uno de los siguientes casos:

I. $\left(\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & \square & \square & \square & \square \\ 0 & \blacksquare & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \blacksquare & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \square \end{array}\right)$

$\blacksquare$ un número distinto de cero

$\square$ un número cualquiera

Hay tantas ecuaciones válidas como incógnitas. Paso a paso, vamos obteniendo un valor numérico para cada incógnita.

Es, por tanto, un sistema **compatible determinado**.

II. $\left(\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & \square & \square & \square & \square \\ 0 & \blacksquare & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \blacksquare & \square & \square \end{array}\right)$

Hay menos ecuaciones válidas que incógnitas.

Las incógnitas que están de más se pasan al segundo miembro, con lo que el valor de las demás se dará en función de ellas.

El sistema es **compatible indeterminado**. Su solución general vendrá dada con tantos parámetros como incógnitas hayamos pasado al segundo miembro.

III. $\left(\begin{array}{ccccc|c} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \blacksquare \end{array}\right)$

La ecuación señalada no se puede cumplir nunca.

El sistema es **incompatible**.

Anexo IV. Demostración del cálculo de la matriz inversa por adjuntos

OBTENCIÓN TEÓRICA DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Aunque es fácil comprobar que A^{-1}, definida en la página anterior, es la inversa de A, nos cuestionamos cómo llegar a su expresión a partir de A. Veámoslo.

Buscamos una matriz $A^{-1} = (x_{ij})$ que cumpla la siguiente condición:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| \neq 0$$

Empecemos por los tres x_{ij} de la primera columna:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} = 0 \\ a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} = 0 \end{cases}$$

Puesto que $|A| \neq 0$, es un sistema de Cramer que sabemos resolver.

Su solución es: $x_{11} = \dfrac{|A_{x_{11}}|}{|A|}$, $x_{21} = \dfrac{|A_{x_{21}}|}{|A|}$, $x_{31} = \dfrac{|A_{x_{31}}|}{|A|}$

Veamos cómo son los $|A_{x_{i1}}|$: $A_{x_{11}} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$|A_{x_{11}}| = 1 \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{11}$ (adjunto de a_{11} de la matriz A).

Análogamente se comprueba que $|A_{x_{21}}| = A_{12}$ y $|A_{x_{31}}| = A_{13}$.

Por tanto, queda: $x_{11} = \dfrac{A_{11}}{|A|}$, $x_{21} = \dfrac{A_{12}}{|A|}$, $x_{31} = \dfrac{A_{13}}{|A|}$

Planteando un sistema para obtener las incógnitas de la segunda columna y otro para las de la tercera columna, obtendríamos que, en general: $x_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{|A|}$. Es lo que queríamos demostrar.

Anexo V. Preguntas del bloque 1: Habilidades, capacidades y actitudes matemáticas

Bloque 1: Habilidades, capacidades y actitudes matemáticas	
Modelización y resolución de problemas	1. Planificación del proceso de resolución de problemas. 2. Estrategias y procedimientos puestos en práctica: relación con otros problemas conocidos, modificación de variables, suponer el problema resuelto. 3. Soluciones y/o resultados obtenidos: coherencia de las soluciones con la situación, revisión sistemática del proceso, otras formas de resolución, problemas parecidos, generalizaciones y particularizaciones interesantes. 4. Realización de investigaciones matemáticas a partir de contextos de la realidad o contextos del mundo de las matemáticas. 5. Práctica de los procesos de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.
Comunicación	6. Elaboración y presentación oral y/o escrita de informes científicos sobre el proceso seguido en la resolución de un problema o en la demostración de un resultado matemático. 7. Elaboración y presentación de un informe científico sobre el proceso, resultados y conclusiones del proceso de investigación desarrollado.
Reflexión, razonamiento y argumentación	8. Iniciación a la demostración en matemáticas: métodos, razonamientos, lenguajes, etc. 9. Métodos de demostración: reducción al absurdo, método de inducción, contraejemplos, razonamientos encadenados, etc. 10. Razonamiento deductivo e inductivo. 11. Lenguaje gráfico, algebraico, otras formas de representación de argumentos.
Utilización de medios tecnológicos	12. Recogida ordenada y la organización de datos. 13. La elaboración y creación de representaciones gráficas de datos numéricos, funcionales o estadísticos. 14. Facilitar la comprensión de propiedades geométricas o funcionales y la realización de cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico. 15. El diseño de simulaciones y la elaboración de predicciones sobre situaciones matemáticas diversas. 16. La elaboración de informes y documentos sobre los procesos llevados a cabo y los resultados y conclusiones obtenidos. 17. Comunicar y compartir, en entornos apropiados, la información y las ideas matemáticas.
Actitudes	18. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.

Anexo VI. Preguntas del bloque 2: Álgebra Lineal

Bloque 2: Álgebra lineal
1. Matrices 2. Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos. 3. Clasificación de matrices. 4. Operaciones con matrices: transposición, suma, producto por escalares, producto. 5. Aplicación de las operaciones de matrices y de sus propiedades para manejar y operar con datos estructurados en tablas provenientes de problemas extraídos de contextos reales. 6. La matriz inversa: obtención por el método de Gauss. 7. Rango de una matriz: obtención por el método de Gauss. 8. Sistemas de ecuaciones lineales 9. Problemas de programación lineal con dos variables: planteamiento y resolución gráfica. 10. Definición de sistemas de ecuaciones lineales. 11. Solución de un sistema. 12. Sistemas equivalentes. 13. Representación matricial de un sistema. 14. Discusión y resolución de un sistema lineal por el método de Gauss. 15. Traducción al lenguaje algebraico de problemas reales que puedan resolverse con sistemas de ecuaciones lineales. 16. Sistemas homogéneos. 17. El teorema de Rouché-Frobenius. 18. Discusión y resolución de sistemas dependientes de un parámetro. 19. Determinantes 20. Definición inductiva de los determinantes. 21. La regla de Sarrus. 22. Propiedades elementales de los determinantes. 23. Aplicación de las propiedades al cálculo de determinantes. 24. Utilización de los determinantes para calcular el rango de una matriz. 25. Cálculo de la matriz inversa con determinantes. 26. Utilización de los determinantes en la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales: la regla de Cramer. 27. Aplicación a la resolución de problemas.

Anexo VII. Rúbrica de la Universidad Complutense de Madrid

	1	2	3	4	5
1. Objetivos y coherencia didáctica	No hay objetivos didácticos o son poco claros; contenidos difíciles de justificar	Hay objetivos didácticos, pero no son claros o no son coherentes con los contenidos	Objetivos didácticos claros, contenidos apropiados para los objetivos; pero faltan, no están claros o no hay coherencia entre objetivos, destrezas y destinatarios	Objetivos didácticos claros; coherencia entre objetivos, destrezas y destinatarios; contenidos apropiados para los objetivos, destrezas y destinatarios; pero no hay sugerencias o instrucciones de uso o son poco claras	Objetivos didácticos claros; coherencia entre objetivos, destrezas y destinatarios; contenidos apropiados para los objetivos, destrezas y destinatarios; sugerencias o instrucciones sobre su posible explotación didáctica para el profesor y/o para el estudiante
2. Calidad de los contenidos	El contenido no es equilibrado. La presentación y las instrucciones de las actividades no son suficientemente claras y el contenido no está suficientemente actualizado y/o no respeta los derechos de propiedad en todos los casos y/o presenta sesgo ideológico	El contenido es adecuado al nivel de conocimiento de los usuarios y coherente con los objetivos pero el número y distribución de los conceptos e ideas no es equilibrado. La presentación y las instrucciones de las actividades no son suficientemente claras y el contenido no está suficientemente actualizado y/o no respeta los derechos de propiedad en todos los casos y/o presenta sesgo ideológico	El contenido es adecuado al nivel de conocimiento de los usuarios y coherente con los objetivos pero el número y distribución de los conceptos e ideas no es equilibrado. El contenido objetivo, no presenta sesgo ideológico y respeta los derechos de propiedad intelectual, pero no está suficientemente actualizado. La presentación es clara pero no hay instrucciones en las actividades o son poco claras	El contenido es equilibrado: adecuado al nivel de conocimiento de los usuarios y coherente con los objetivos, destrezas y destinatarios; presenta un número y distribución equilibrado de conceptos e ideas. El contenido objetivo, no presenta sesgo ideológico y respeta los derechos de propiedad intelectual, pero no está suficientemente actualizado. La presentación es clara pero no hay instrucciones en las actividades o son poco claras	El contenido es equilibrado: adecuado al nivel de conocimiento de los usuarios y coherente con los objetivos, destrezas y destinatarios; presenta un número y distribución equilibrado de conceptos e ideas. El contenido está actualizado, es objetivo, no presenta sesgo ideológico y respeta los derechos de propiedad intelectual La presentación y las instrucciones de las actividades son claras
3. Capacidad de generar aprendizaje	Los contenidos claramente no permiten alcanzar los objetivos didácticos	El aprendizaje no es significativo porque no hay una relación clara de lo ya aprendido con los nuevos conocimientos. No se estimula la reflexión ni la capacidad crítica y la creación de nuevas ideas y/o procedimientos/métodos/técnicas para resolver problemas y tareas	Los contenidos permiten alcanzar los objetivos porque la relación de lo ya aprendido con los nuevos conocimientos es clara aunque no se estimula la reflexión ni la capacidad crítica y la creación de nuevas ideas y/o procedimientos/métodos/técnicas para resolver problemas y tareas	Los contenidos permiten alcanzar los objetivos didácticos porque la relación de lo ya aprendido con los nuevos conocimientos es clara y se estimula la reflexión aunque no la capacidad crítica y la creación de nuevas ideas y/o procedimientos/métodos/técnicas para resolver problemas y tareas	Los contenidos permiten alcanzar los objetivos didácticos porque es clara la relación de lo ya aprendido con los nuevos conocimientos; estimula la reflexión, la capacidad crítica y la creación de nuevas ideas y/o procedimientos/métodos/técnicas para resolver problemas y tareas
4. Adaptabilidad e Interactividad	El contenido no se ajusta ni al conocimiento previo del alumno ni a sus necesidades. No se proponen diferentes contenidos/actividades para cada tipo de alumno o nivel de competencia y éstos no pueden usarse independientemente de métodos de enseñanza o aprendizaje y no se facilita que el alumno controle y maneje su aprendizaje pudiendo elegir el contenido o actividad siguiente en función de su capacidad de respuesta y/o la presentación del contenido considera las acciones previas del alumno	El contenido se ajusta al conocimiento previo del alumno pero no a sus necesidades. No se proponen diferentes contenidos/actividades para cada tipo de alumno o nivel de competencia y éstos no pueden usarse independientemente de métodos de enseñanza o aprendizaje. No es interactivo porque no se facilita que el alumno controle y maneje su aprendizaje pudiendo elegir el contenido o actividad siguiente en función de su capacidad de respuesta y/o la presentación del contenido considera las acciones previas del alumno	El contenido se ajusta al conocimiento previo del alumno pero no a sus necesidades. Se proponen diferentes contenidos/actividades para cada tipo de alumno o nivel de competencia y éstos pueden usarse independientemente de métodos de enseñanza o aprendizaje. No es interactivo porque no se facilita que el alumno controle y maneje su aprendizaje pudiendo elegir el contenido o actividad siguiente en función de su capacidad de respuesta y/o la presentación del contenido considera las acciones previas del alumno	El contenido se ajusta al conocimiento previo del alumno y a sus necesidades. Se proponen diferentes contenidos/actividades para cada tipo de alumno o nivel de competencia y éstos pueden usarse independientemente de métodos de enseñanza o aprendizaje. No obstante, no es interactivo porque no se facilita que el alumno controle y maneje su aprendizaje pudiendo elegir el contenido o actividad siguiente en función de su capacidad de respuesta y/o la presentación del contenido considera las acciones previas del alumno	El contenido es adaptable: se ajusta al conocimiento previo de los alumnos y a sus necesidades, se adapta a cada tipo de alumno o nivel de competencia y puede usarse independientemente del método de enseñanza/aprendizaje. Además, es interactivo: se facilita que el alumno controle y maneje su aprendizaje pudiendo elegir el contenido o actividad siguiente en función de su capacidad de respuesta y/o la presentación del contenido considera las acciones previas del alumno
5. Motivación	No se hacen referencias directas a la utilidad del material didáctico en el mundo real y el usuario no percibe que lo que aprende es relevante en su entorno profesional y/o social. Los contenidos o los procedimientos didácticos no se presentan de forma innovadora o atractiva. Se ha puntuado con una media por debajo de 3 los criterios de calidad del contenido (criterio 2), generación de aprendizaje (criterio 3) y adaptabilidad e interactividad (criterio 4)	Se hacen referencias directas a la utilidad del material didáctico en el mundo real pero el usuario no percibe que lo que aprende es relevante en su entorno profesional y/o social. Los contenidos o los procedimientos didácticos no se presentan de forma innovadora o atractiva. Se ha puntuado con una media por debajo de 3 los criterios de calidad del contenido (criterio 2), generación de aprendizaje (criterio 3) y adaptabilidad e interactividad (criterio 4)	Se hacen referencias directas a la utilidad del material didáctico en el mundo real pero el usuario no percibe que lo que aprende es relevante en su entorno profesional y/o social. Los contenidos o los procedimientos didácticos no se presentan de forma innovadora o atractiva. Se ha puntuado con una media mínima de 3 la calidad del contenido (criterio 2), la generación de aprendizaje (criterio 3) y la adaptabilidad e interactividad (criterio 4)	Se hacen referencias directas a la utilidad del material didáctico en el mundo real. El usuario percibe que lo que aprende es relevante en su entorno profesional y/o social. Pero los contenidos o los procedimientos didácticos no se presentan de forma innovadora o atractiva. Se ha puntuado con un mínimo de 3 la calidad del contenido (criterio 2), la generación de aprendizaje (criterio 3) y la adaptabilidad e interactividad (criterio 4)	Se hacen referencias directas a la utilidad del material didáctico en el mundo real. El usuario percibe que lo que aprende es relevante en su entorno profesional y/o social. Los contenidos o los procedimientos didácticos se presentan de forma innovadora o atractiva. Se ha puntuado con un mínimo de 4 la calidad del contenido (criterio 2), la generación de aprendizaje (criterio 3) y la adaptabilidad e interactividad (criterio 4)
6. Formato y Diseño	El diseño no es suficientemente organizado, claro y conciso, y no favorece la comprensión y asimilación de los contenidos. No es posible acceder a los contenidos por la mala calidad de los textos, imágenes y/o audio	La organización del diseño no es clara y concisa, y no siempre ayuda a la comprensión y asimilación de los contenidos. También es posible que los textos, las imágenes y los audios no son siempre son de suficiente calidad como para poder acceder a los contenidos	El diseño es organizado, claro y conciso, y favorece la comprensión y asimilación de los contenidos pero no incluye formato multimodal y no es estéticamente adecuado para el aprendizaje y la reflexión. Los textos, las imágenes y los audios no siempre son de buena calidad pero permiten la asimilación de los contenidos	El diseño es organizado, claro y conciso, y favorece la comprensión y asimilación de los contenidos. Incluye formato multimodal: texto, imagen, audio y/o vídeo pero no es estéticamente adecuado para el aprendizaje y la reflexión (con exceso de colores o audios molestos). Los textos, las imágenes y los audios son de buena calidad	El diseño es organizado, claro y conciso, y favorece la comprensión y asimilación de los contenidos. Incluye formato multimodal: texto, imagen, audio y/o vídeo y es estéticamente adecuado para el aprendizaje y la reflexión (no tiene exceso de colores o audios molestos, etc.). Los textos, las imágenes y los audios son de buena calidad
7. Usabilidad	No es posible acceder a todos los contenidos porque es difícil utilizar el contenido (interfaz) y no existen instrucciones de uso claras. Algún enlace no funciona correctamente haciendo imposible el acceso al contenido relevante	Es difícil encontrar los contenidos buscados porque la forma de utilizar el contenido (interfaz) no es intuitiva y no existen instrucciones de uso claras que son no obstante necesarias. Algún enlace no funciona correctamente dificultando el acceso al contenido relevante	Se puede navegar y encontrar los contenidos buscados pero la forma de utilizar el contenido (interfaz) no siempre es intuitiva y son necesarias las instrucciones de uso. Algún enlace no funciona correctamente pero esto no afecta al acceso del contenido relevante.	Es fácil navegar y se encuentran rápidamente los contenidos buscados. La forma de utilizar el contenido (interfaz) no es siempre intuitiva pero existen instrucciones de uso claras. Todos los enlaces funcionan correctamente.	Es fácil navegar y se encuentran rápidamente los contenidos buscados. La forma de utilizar el contenido (interfaz) es intuitiva. Todos los enlaces funcionan correctamente.
8. Accesibilidad	El material no está adaptado a personas con alguna discapacidad de tipo visual, auditiva o motora y no se informa de ello	El material no está adaptado a personas con alguna discapacidad de tipo visual, auditiva o motora pero se informa claramente de que el material no está adaptado	El material no está totalmente adaptado a personas con alguna discapacidad pero cumple con los puntos 1 a 12 de la tabla de accesibilidad (al reverso de esta rúbrica). En todo caso, se informa claramente de los puntos en los que no se puede asegurar la accesibilidad	El material está adaptado a personas con alguna discapacidad de tipo visual, auditiva o motora. Cumple los criterios de accesibilidad web y los criterios de accesibilidad de contenidos multimedia y si no es accesible o no se puede asegurar la accesibilidad en algún punto, se informa de ello al usuario	El material está adaptado a personas con alguna discapacidad de tipo visual, auditiva o motora. Cumple los criterios de accesibilidad web y los criterios de accesibilidad de contenidos multimedia (ver tabla de verificación en este documento)
9. Reusabilidad	El material no se organiza modularmente	El material se organiza modularmente pero sus partes no pueden utilizarse para construir otros materiales facilitando la actualización o creación de los contenidos. Además, sus módulos no pueden utilizarse en más de una disciplina o grupo de alumnos ni en diversos entornos de aprendizaje: presencial, virtual o mixto	El material se organiza modularmente pero sus módulos: : todas o alguna de sus partes puede volver a utilizarse para construir otros materiales facilitando la actualización o creación de los contenidos. No pueden utilizarse en más de una disciplina o grupo de alumnos ni en diversos entornos de aprendizaje: presencial, virtual o mixto.	El material se organiza modularmente: todas o alguna de sus partes puede volver a utilizarse para construir otros materiales facilitando la actualización o creación de los contenidos. El material o alguno de sus módulos puede utilizarse en diversos entornos de aprendizaje: presencial, virtual o mixto, pero es difícil su uso en más de una disciplina	El material se organiza modularmente: todas o alguna de sus partes pueden volver a utilizarse para construir otros materiales facilitando la actualización o creación de los contenidos. El material o alguno de sus módulos puede utilizarse en más de una disciplina o grupo de alumnos así como en diversos entornos de aprendizaje: presencial, virtual o mixto
10. Interoperabilidad	El contenido del material sólo puede utilizarse en un número limitado de entornos web o máquinas y no se describen claramente los requisitos informáticos necesarios para su uso	El contenido, o parte del contenido, del material no se ha creado en formatos de uso general o estándar de facto y no puede utilizarse total o parcialmente en la mayoría de los entornos web o máquinas, aunque se describen/avisa de los requisitos informáticos necesarios para su uso. No se facilita el software necesario para su uso	El contenido del material se ha creado en formatos de uso mayoritario pero no general o estándar; puede utilizarse en los entornos web, informáticos y máquinas de uso más extendido, pero no en todos. Además, no se describen los requisitos informáticos necesarios ni se facilita el software necesario para su uso. La ficha de metadatos incluye los campos del criterio 1 (objetivos didácticos, destinatarios, destrezas e instrucciones de uso), pero no incluye información sobre la accesibilidad y no está creada conforme a estándares internacionales	El contenido del material se ha creado en formatos de uso general o estándar de facto (texto (txt),word, pdf, wav, mp3, mp4, flash, jpeg, gif, etc); puede utilizarse en cualquier entorno web e informático y en cualquier máquina pero, si no es así, se describen claramente los requisitos informáticos para su uso, preferiblemente en la ficha de metadatos asociada, aunque no es fácil de obtener el software necesarios para su uso. La ficha de metadatos está creada conforme a estándares internacionales e incluye, además de los requisitos para su uso, los campos del criterio 1 (objetivos didácticos, destinatarios, destrezas e instrucciones de uso) e información sobre la accesibilidad del contenido	El contenido del material se ha creado en formatos de uso general o estándar de facto (texto (txt),word, pdf, wav, mp3, mp4, flash, jpeg, gif, etc); puede utilizarse en cualquier entorno web e informático y en cualquier máquina y, si no es así, se describen los requisitos informáticos para su uso, preferiblemente en la ficha de metadatos asociada y se facilita el software necesario para su uso. La ficha de metadatos está creada conforme a estándares internacionales e incluye, además de los requisitos para su uso, los campos del criterio 1 (objetivos didácticos, destinatarios, destrezas e instrucciones de uso) así como la información sobre la accesibilidad. El contenido está disponible en un único archivo estándar (paquete de contenidos) para poder trasladarse (exportarse e importarse) y utilizarse en cualquier entorno web, herramienta o máquina.

Anexo VIII. Herramienta de evaluación de los aspectos generales de los recursos didácticos electrónicos

Evaluación del Recurso Didáctico Electrónico

Universidad

Facultad

Recurso

Url

Autor

Año

Continuar »

Con la tecnología de Google Forms

Google no creó ni aprobó este contenido.

Denunciar abuso - Condiciones del servicio - Condiciones adicionales

Evaluación del Recurso Didáctico Electrónico

1. Calidad del contenido

1.1 ¿El contenido está presente mediante un programa o guía didáctica?

○ Sí
○ No

1.2 ¿Es adecuada la secuenciación del contenido?

0	1	2	3	4
○	○	○	○	○

1.3 ¿Es adecuada la presentación del contenido?

0	1	2	3	4
○	○	○	○	○

1.4 ¿Está el contenido sin errores?

0	1	2	3	4
○	○	○	○	○

1.5 ¿Es adecuado el nivel de profundidad presentado?

0	1	2	3	4
○	○	○	○	○

1.6 ¿ El contenido es equilibrado?

0	1	2	3	4
○	○	○	○	○

1.7 ¿Están actualizados los contenidos?

0	1	2	3	4
○	○	○	○	○

1.8 ¿Proporcionan recursos externos de calidad para completar la formación (webs, artículos,...)?

0	1	2	3	4
○	○	○	○	○

« Atrás   Continuar »

Evaluación del Recurso Didáctico Electrónico

2. Feedback

2.1 ¿Permite la autoevaluación?

- ◯ Sí
- ◯ No

3. Capacidad de generar aprendizaje

3.1 ¿Los contenidos permiten la consecución de los objetivos didácticos?

Existe una relación clara de lo ya aprendido con los nuevos conocimientos. Estimula la reflexión y la capacidad crítica y la creación de nuevas ideas y/o técnicas para resolver tareas y problemas.

0	1	2	3	4
◯	◯	◯	◯	◯

4. Adaptabilidad

4.1 ¿El contenido se ajusta al conocimiento previo del alumno?

0	1	2	3	4
◯	◯	◯	◯	◯

4.2 ¿El contenido se ajusta a la necesidades del alumno?

0	1	2	3	4
◯	◯	◯	◯	◯

43 ¿El contenido se adapta a cada tipo de alumno o nivel de competencia?

0	1	2	3	4
○	○	○	○	○

44 ¿El contenido es interactivo, permitiendo que el alumno maneje y controle su aprendizaje pudiendo elegir el contenido o actividad siguiente?

○ Sí

○ No

45 ¿El material está configurado de manera que considera las acciones previas del alumno?

○ Sí

○ No

« Atrás   Continuar »

Evaluación del Recurso Didáctico Electrónico

5. Usabilidad

5.1 ¿Hay homogeneidad en el diseño?

0	1	2	3	4
○	○	○	○	○

5.2 ¿Es fácil navegar y se encuentran rápidamente los contenidos buscados?

○ Sí
○ No

5.3 ¿La forma de utilizar el contenido (interfaz) es intuitiva?

0	1	2	3	4
○	○	○	○	○

5.4 ¿Todos los enlaces funcionan correctamente?

○ Sí
○ No

5.5 ¿El material se organiza modularmente: todas o algunas de sus partes pueden volver a utilizarse para construir otros materiales facilitando la actualización o creación de los contenidos?

0	1	2	3	4
○	○	○	○	○

« Atrás　　Continuar »

Evaluación del Recurso Didáctico Electrónico

6. Formato y diseño

6.1 ¿El diseño es: organizado, claro y conciso?

0	1	2	3	4
○	○	○	○	○

6.2 ¿El diseño favorece la comprensión y asimilación de los contenidos?

0	1	2	3	4
○	○	○	○	○

6.3 ¿Incluye formato multimodal: texto, imagen, audio y/o video?

0	1	2	3	4
○	○	○	○	○

6.4 ¿Es estéticamente adecuado para el aprendizaje y la reflexión?

0	1	2	3	4
○	○	○	○	○

6.5 ¿Los textos, imágenes y los audios son de buena calidad?

- ○ Sí
- ○ No

7. Motivación

7.1 ¿Los contenidos o procedimientos didácticos se presentan de forma innovadora o atractiva?

0	1	2	3	4
○	○	○	○	○

7.2 ¿El material hace referencias directas a la utilidad del material didáctico en el mundo real?

0	1	2	3	4
○	○	○	○	○

« Atrás   Continuar »