

Formalismo geométrico de la Mecánica Cuántica y sus aplicaciones

Dinámica de tensores en sistemas abiertos markovianos

Trabajo de Fin de Grado realizado por

Adrián Franco Rubio

bajo la dirección de

Dr. Jesús Jerónimo Clemente Gallardo

Junio 2015



Agradecimientos

Sirvan estas líneas para expresar mi gratitud a todos aquellos que me han ayudado durante la realización de este Trabajo de Fin de Grado, especialmente al director del mismo, el Dr. Jesús Clemente, y al Dr. José Cariñena, por todo lo que he aprendido de ellos, y por estar siempre dispuestos a ofrecer su apoyo y su consejo; así como a Jorge Jover, por su ayuda tanto con los conceptos más abstractos como con los aspectos más técnicos de *Mathematica*, y a mi compañero Pablo Sala, por las interesantes discusiones que hemos mantenido sobre formalismo geométrico de la Mecánica Cuántica a lo largo de este curso.

Índice general

Introducción	3
1. Sistemas abiertos	4
1.1. Evolución temporal en sistemas cuánticos	4
1.2. Aplicaciones dinámicas universales	6
1.2.1. Aplicaciones completamente positivas	7
1.3. Markovianidad y semigrupos	8
1.3.1. Evolución markoviana	8
1.3.2. Forma general del generador de un semigrupo dinámico completamente positivo	10
2. Formalismo geométrico	11
2.1. Estructura matemática de Herm \mathcal{H}	11
2.2. Geometría sobre $(iu)^*$	14
2.3. Evolución sobre el espacio de tensores	16
3. Ejemplos	19
3.1. Decoherencia en tres niveles	19
3.2. Caso general de operadores de Kraus diagonales reales	21
Conclusiones	24

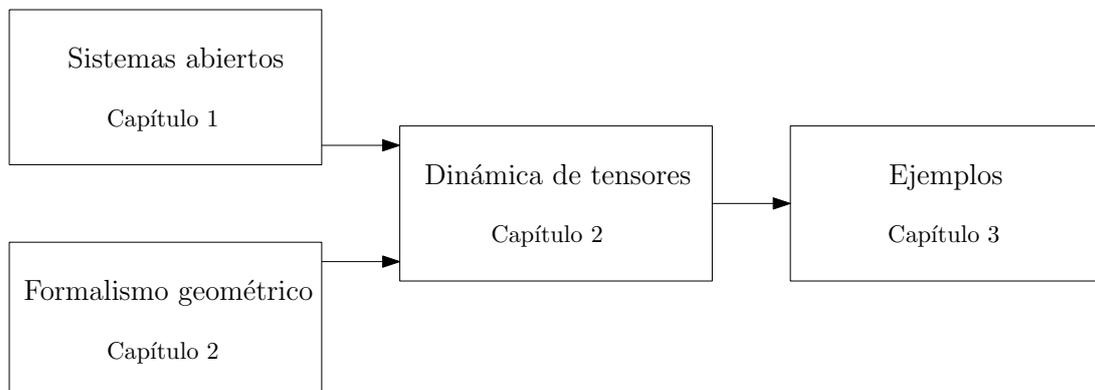
Introducción

El objetivo principal de este trabajo es la aplicación del formalismo geométrico de la Mecánica Cuántica al estudio de la dinámica de un tipo particular de sistemas, que reciben el nombre de sistemas abiertos. A la exposición de las características fundamentales de los mismos dedicamos el primer capítulo de esta memoria. El estudio de este tipo de sistemas está a la orden del día debido a que es en este marco donde podemos entender procesos como la decoherencia, cuya comprensión es necesaria para avanzar en ámbitos como la información o la computación cuánticas.

Para llevar a cabo esta labor, proponemos un acercamiento distinto al habitualmente empleado, por medio de un formalismo matemático alternativo basado en la geometría diferencial. En el capítulo segundo se expone el proceso de cambio de formalismo, y se muestra la aplicación directa al problema de los sistemas abiertos, llevando la evolución dinámica del espacio de matrices densidad al espacio de tensores. Estos tensores codifican estructuras como el conmutador de matrices, lo que nos permite observar la transición de cuántico a clásico de un sistema sometido a decoherencia al perderse la no conmutatividad de algunos de sus observables.

El tercer capítulo está dedicado a la presentación de algunos ejemplos de aplicación del nuevo método propuesto, y a la obtención de un resultado que establece el ámbito de aplicación del mismo para un sistema y una dinámica particulares.

En esta memoria se han incluido dos apéndices. El primero de ellos presenta, por completitud, el formalismo geométrico de la Mecánica Cuántica en la imagen de Schrödinger, y cómo se integra con el que hemos presentado en la memoria. Ninguno de los contenidos del mismo es necesario para la comprensión del presente trabajo. El segundo apéndice pretende ser una ayuda sobre alguno de los conceptos matemáticos que empleamos en la memoria para el lector poco familiarizado con ellos, a quien animamos a referirse al mismo en caso de necesidad durante su lectura.



Capítulo 1

Sistemas abiertos

En este capítulo explicamos los conceptos básicos de los sistemas abiertos en Mecánica Cuántica tal y como se conocen hoy en día. Nuestro objetivo es llegar a la forma general de la dinámica en un sistema abierto bajo la hipótesis simplificadora de que es markoviano, con el fin de aplicar dicho resultado en la parte central de este trabajo.

1.1. Evolución temporal en sistemas cuánticos

Consideremos un sistema cuántico formado por dos subsistemas S y R , con espacios de estados asociados \mathcal{H}_S y \mathcal{H}_R . El espacio de estados del sistema global viene dado por el producto tensorial de los espacios de los subsistemas:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$$

En lo que sigue asumiremos que $\dim \mathcal{H} < \infty$. Supongamos que dicho sistema está cerrado, es decir, no intercambia información con ningún otro sistema. En este caso, los postulados de la Mecánica Cuántica nos dicen que la evolución de un estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ viene dada por la ecuación de Schrödinger (tomando $\hbar = 1$)

$$\frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = -iH(t)|\psi(t)\rangle$$

donde $H(t)$ es el operador hamiltoniano. Gracias a la linealidad de esta ecuación, podemos definir un **operador evolución temporal** $U(t, t_0)$ que aplicado al estado inicial $|\psi(t_0)\rangle$ dé como resultado el estado a tiempo t , $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$. De la ecuación de Schrödinger se sigue además que $U(t, t_0)$ es un operador unitario. En el caso en que H sea independiente del tiempo¹, podemos dar la siguiente expresión del operador evolución temporal:

$$U(t - t_0) \equiv U(t, t_0) = e^{-i(t-t_0)H}$$

En muchas ocasiones nos interesa trabajar con estados mezcla, codificados por una **matriz densidad** ρ , que cumple las siguientes tres condiciones:

¹Si por el contrario H dependiera de t , la expresión se vuelve un poco más complicada puesto que hay que introducir la exponencial ordenada temporalmente:

$$U(t, t_0) = \mathcal{T} e^{-i \int_{t_0}^t ds H(s)}$$

- Es hermítica: $\rho^\dagger = \rho$
- Es definida positiva: $\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0 \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}$
- Su traza es igual a la unidad: $\text{tr } \rho = 1$.

Denotamos por $D(\mathcal{H})$ el espacio de matrices densidad sobre \mathcal{H} . Por ejemplo, en un sistema de dos niveles (qubit), toda matriz densidad es de la forma $\rho = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} + \sum_{i=1}^3 x_i \sigma_i \right)$ con $\{\sigma_i\}_{i=1}^3$ las matrices de Pauli y $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$, pues la pureza del estado $P = \text{tr}(\rho^2) = \frac{1}{2}(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ ha de cumplir $P \leq 1$. $D(\mathcal{H})$ se puede representar por tanto como una esfera de radio unidad en \mathbb{R}^3 llamada *esfera de Bloch*, dada por la inecuación $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$. Para $P = 1$ obtenemos los estados puros (ρ de rango 1, superficie de la esfera), y para $P < 1$ los estados mezcla (ρ de rango mayor que 1, interior de la esfera), hasta el estado máximamente mezclado $P = \frac{1}{2}$ ($\rho = \frac{1}{2}\mathbb{1}$, centro de la esfera).

Se puede comprobar que el valor esperado de un observable sobre un estado representado por la matriz densidad ρ viene dado por

$$\langle A \rangle = \text{tr}(\rho A)$$

Dada una base ortonormal $\{|\psi_k\rangle\}$ de \mathcal{H} , toda matriz densidad asume la forma:

$$\rho = \sum_k w_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k|$$

con $w_k \geq 0$, $\sum_k w_k = 1$. A partir de esta expresión se prueba fácilmente que la evolución temporal de ρ viene dada por la ecuación de von Neumann:

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = -i[H(t), \rho(t)] \implies \rho(t) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0) \quad (1.1)$$

Éste es el marco habitual en el que se formula la Mecánica Cuántica de los sistemas cerrados o aislados. No obstante, en muchas ocasiones nos interesa centrarnos en la dinámica de uno sólo de los subsistemas S, R . Podemos encontrarnos con que la dinámica del sistema global sea excesivamente complicada, como ocurre si tomamos S como un sistema físico que interactúa con un entorno R muy complejo o con muchos grados de libertad. En este tipo de situaciones podemos considerar la matriz densidad reducida $\rho_S \in D(\mathcal{H}_S)$ inducida por un estado global $\rho \in D(\mathcal{H})$, y que viene dada por la operación de traza parcial:

$$\rho_S = \text{tr}_R \rho = \sum_k \langle \psi_k^R | \rho | \psi_k^R \rangle$$

con $\{\psi_k^R\}$ una base de Hilbert del espacio \mathcal{H}_R . De esta manera, somos capaces de realizar medidas, y en general de trabajar sobre S directamente, sin considerar el estado global del sistema. Por ejemplo, si A es un observable de \mathcal{H}_S , su valor esperado en el estado ρ será

$$\langle A \rangle = \text{tr}(A \rho_S) = \text{tr}\{(A \otimes I) \rho\}$$

La dinámica de este ρ_S tomará ahora el aspecto

$$\rho_S(t) = \text{tr}_R \{U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0)\} \quad (1.2)$$

y si los subsistemas S y R están en interacción, en general no podremos obtener de (1.2) una evolución unitaria² como (1.1) para ρ_S . Nos enfrentamos pues a la evolución temporal de un **sistema abierto**, que no obedece las reglas habituales, y permite, por ejemplo que el rango de la matriz densidad aumente y en general la pureza P de nuestro sistema disminuya con el tiempo (decoherencia), cuando ambos eran invariantes bajo una dinámica unitaria.

1.2. Aplicaciones dinámicas universales

La ecuación (1.2) nos da la evolución temporal de la matriz densidad reducida. Nos gustaría por tanto escribirla como una aplicación dinámica que nos permita hacer evolucionar un cierto estado $\rho \in D(\mathcal{H}_S)$ de un tiempo t_0 a un tiempo t , de la siguiente manera:

$$\mathcal{E}_{(t,t_0)}(\rho(t_0)) = \rho(t)$$

Por supuesto, no todas las posibles aplicaciones dinámicas \mathcal{E} son admisibles como verdaderas evoluciones físicas. Las que lo son reciben el nombre de **aplicaciones dinámicas universales**³, o UDM por sus siglas en inglés [20]. El calificativo *universal* hace referencia a que estas aplicaciones se pueden definir con independencia de la matriz densidad a la que se apliquen, algo muy deseable si han de representar una evolución física. En lo que sigue veremos qué tipo de aplicaciones son las UDM.

Una primera caracterización que podemos dar de una UDM es la siguiente: fijemos un estado $\rho_R \in D(\mathcal{H}_R)$. Éste puede ser un estado de referencia del sistema, por ejemplo un estado de equilibrio térmico. Una vez escogido ρ_R , construimos el estado separable⁴ $\rho_S(t_0) \otimes \rho_R$ para cualquier matriz densidad inicial $\rho_S(t_0)$ y definimos

$$\mathcal{E}_{(t,t_0)}[\rho_S(t_0)] = \text{tr}_R \{U(t, t_0)[\rho_S(t_0) \otimes \rho_R]U^\dagger(t, t_0)\} \quad (1.3)$$

Una evolución de este tipo puede escribirse únicamente en términos de operadores que actúan sobre matrices densidad de $D(\mathcal{H}_S)$ [2]. Basta emplear la descomposición espectral de nuestro estado de referencia:

$$\rho_R = \sum_n \lambda_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| \quad (1.4)$$

y combinando (1.3) y (1.4) obtenemos:

$$\mathcal{E}_{(t,t_0)}[\rho_S(t_0)] = \sum_{nm} K_{nm}(t, t_0) \rho_S(t_0) K_{nm}(t, t_0)^\dagger \quad (1.5)$$

donde

$$K_{nm}(t, t_0) = \sqrt{\lambda_m} \text{tr}_R \{|\phi_m\rangle\langle\phi_n|U(t, t_0)\}$$

Aunando los dos índices en uno solo, $n, m \rightarrow \alpha$, (nótese que a lo sumo dicho índice habrá de tomar N^2 valores, donde N es la dimensión del espacio R) concluimos que toda UDM se puede

²Esto sí sería posible si el operador de evolución factorizase como $U(t, t_0) = U_S(t, t_0) \otimes U_R(t, t_0)$, pero en general no será el caso.

³Según la referencia consultada, el lector puede encontrar otras nomenclaturas como *aplicación dinámica cuántica* u *operación cuántica*, esto último sobre todo en el ámbito de la computación.

⁴Es razonable asumir que, cuando el sistema ha sido preparado, éste comienza su evolución en un estado separable.

escribir de la siguiente forma general, más cómoda en términos operativos (**representación de Kraus**):

$$\rho_S(t) = \sum_{\alpha} K_{\alpha}(t, t_0) \rho_S(t_0) K_{\alpha}(t, t_0)^{\dagger} \quad \text{con} \quad \sum_{\alpha} K_{\alpha}^{\dagger}(t, t_0) K_{\alpha}(t, t_0) = \mathbb{1} \quad (1.6)$$

Podemos comprobar sobre esta forma general que en efecto el resultado de hacer evolucionar una matriz densidad mediante una UDM es asimismo una matriz densidad, requisito indispensable si queremos que todo tenga un sentido físico. Efectivamente tenemos:

- $\rho(t)$ es hermítica:

$$\rho(t)^{\dagger} = \sum_{\alpha} (K_{\alpha}(t, t_0) \rho(t_0) K_{\alpha}(t, t_0)^{\dagger})^{\dagger} = \sum_{\alpha} K_{\alpha}(t, t_0) \rho(t_0) K_{\alpha}(t, t_0)^{\dagger} = \rho(t)$$

- $\rho(t)$ es definida positiva pues lo es cada uno de los sumandos $K_{\alpha}(t, t_0) \rho(t_0) K_{\alpha}(t, t_0)^{\dagger}$

$$\langle \psi | K_{\alpha}(t, t_0) \rho(t_0) K_{\alpha}(t, t_0)^{\dagger} | \psi \rangle = (K_{\alpha}(t, t_0)^{\dagger} | \psi \rangle)^{\dagger} \rho(t_0) (K_{\alpha}(t, t_0)^{\dagger} | \psi \rangle) \geq 0 \quad \forall | \psi \rangle \in \mathcal{H}$$

- Y su traza es igual a la unidad gracias a la condición sobre los operadores $K_{\alpha}(t, t_0)$:

$$\begin{aligned} \text{tr } \rho(t) &= \text{tr} \left(\sum_{\alpha} K_{\alpha}(t, t_0) \rho(t_0) K_{\alpha}(t, t_0)^{\dagger} \right) = \sum_{\alpha} \text{tr} (K_{\alpha}(t, t_0) \rho(t_0) K_{\alpha}(t, t_0)^{\dagger}) = \\ &= \text{tr} \left\{ \left(\sum_{\alpha} K_{\alpha}(t, t_0)^{\dagger} K_{\alpha}(t, t_0) \right) \rho(t_0) \right\} = \text{tr } \rho(t_0) = 1 \end{aligned}$$

1.2.1. Aplicaciones completamente positivas

Definición 1.1. Una aplicación lineal $F : V \mapsto V$ es **completamente positiva** si

$$F \otimes \mathbb{1} : V \otimes W \mapsto V \otimes W$$

es positiva independientemente del espacio W , y en particular de su dimensión⁵.

Una caracterización de gran relevancia de las UDM es la siguiente [20]:

Una UDM es una aplicación lineal completamente positiva que preserva la traza.

Veamos qué significa la propiedad de ser *completamente positiva* y por qué es importante (de hecho imprescindible) desde un punto de vista físico. Supongamos que contamos en nuestro sistema con un tercer subsistema W , además de los dos con los que venimos tratando. Asumamos también que dicho subsistema no interactúa con ninguno de los otros dos, de modo que sigue su evolución unitaria $U_W(t, t_0)$ de forma totalmente independiente de los otros subsistemas. Nos centramos en el subsistema SW , que suponemos parte de un estado inicial $\rho_{SW}(t_0)$. Su dinámica vendrá dada, por ser S y W independientes, por el producto tensorial de las dinámicas de los dos subsistemas: la evolución unitaria de W , $\mathcal{U}_{(t, t_0)}^W$ y la más general UDM de S :

$$\rho_{SW}(t) = \mathcal{E}_{(t, t_0)} \otimes \mathcal{U}_{(t, t_0)}^W [\rho_{SW}(t_0)]$$

⁵Precisando la dimensión de W se define el concepto de n -positividad: F será n -positiva cuando $F \otimes \mathbb{1}_n$ sea positiva. En dimensión finita F es completamente positiva si es n -positiva para todo n .

Como al fin y al cabo lo que acabamos de dar no es sino la dinámica reducida de un subsistema SW que interactúa con otra parte del sistema global R , aunque sólo sea a través de S , la evolución ha de venir dada forzosamente por una UDM, con lo que concluimos

$$\mathcal{E}_{(t,t_0)} \text{ es una UDM} \implies \mathcal{E}_{(t,t_0)} \otimes \mathcal{U}_{(t,t_0)}^W \text{ es una UDM}$$

donde $\mathcal{U}_{(t,t_0)}^W$ es una dinámica unitaria. En particular, pues, $\mathcal{E}_{(t,t_0)} \otimes \mathcal{U}_{(t,t_0)}^W$ habrá de preservar la positividad de las matrices densidad. Puesto que podemos factorizar

$$\mathcal{E}_{(t,t_0)} \otimes \mathcal{U}_{(t,t_0)}^W = (\mathcal{E}_{(t,t_0)} \otimes \mathbb{1})(\mathbb{1} \otimes \mathcal{U}_{(t,t_0)}^W)$$

y el factor $(\mathbb{1} \otimes \mathcal{U}_{(t,t_0)}^W)$ es unitario (y por lo tanto positivo), la exigencia recae sobre el otro factor, y nos queda que $\mathcal{E}_{(t,t_0)}$ es completamente positiva. Se puede demostrar que la condición de ser completamente positiva es más fuerte que la de ser únicamente positiva, es decir, no toda aplicación lineal positiva es completamente positiva⁶. El teorema de representación de aplicaciones completamente positivas, que conecta esta caracterización con la que hemos dado previamente fue demostrado por Karl Kraus [15].

1.3. Markovianidad y semigrupos

La dinámica de los sistemas abiertos no resultaría tan interesante de no poseer ciertas características que la diferencian drásticamente de la evolución en sistemas cerrados. De ellas una de las más relevantes es que, en general, una UDM no será reversible. Recordemos que en un sistema cerrado, la familia de operadores de evolución adquiere estructura de grupo, donde todos los elementos son invertibles. En el caso más sencillo, en el que H no depende del tiempo, $U(t) = e^{-iHt}$ tiene por inversa $U(-t) = e^{iHt}$. La situación, sin embargo, es bien distinta para sistemas abiertos. Dada una UDM $\mathcal{E}_{(t_0,t)}$, cabría preguntarse si existe otra UDM que actúe de inversa de la primera, como acabamos de ver que ocurre para la evolución unitaria:

$$\mathcal{E}_{(t_0,t)} = \mathcal{E}_{(t,t_0)}^{-1}$$

La respuesta a esta pregunta es en general negativa y la da el siguiente teorema cuya demostración podemos ver en [20]:

Teorema. *Una UDM posee una UDM inversa si y sólo si se trata de una UDM unitaria.*

Así pues, los sistemas abiertos pierden la propiedad de reversibilidad temporal en tanto en cuanto su evolución deja de ser unitaria. Esto implica que la familia de operadores $\mathcal{E}_{(t,s)}$ ya no podrá dar lugar a un grupo, sino como mucho a un semigrupo o familia de evolución, como veremos enseguida.

1.3.1. Evolución markoviana

En términos poco técnicos se suele describir una evolución markoviana como aquella que “carece de memoria”, es decir, aquella que sólo se ve afectada por el estado actual del sistema, y no por

⁶El lector curioso puede encontrar un ejemplo (trasposición de un qubit) en [19].

toda la historia de evolución del mismo. En el caso de una UDM, diremos que ésta es markoviana si admite la ley de composición

$$\mathcal{E}_{(t,t_0)} = \mathcal{E}_{(t,t_1)}\mathcal{E}_{(t_1,t_0)} \quad (1.7)$$

para todo tiempo t_1 intermedio. La falta de memoria se traduce una ecuación diferencial de primer orden para la matriz densidad:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(t+h) - \rho(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{E}_{(t+h,t)} - I)\rho(t)}{h} = L(t)\rho(t) \quad (1.8)$$

donde hemos empleado la ley de composición (1.7). $L(t)$ es el generador de la evolución, también llamado *superoperador de Lindblad*. Esto es, por supuesto, una aproximación. En general, las UDM no tienen por qué cumplir (1.7), porque $\mathcal{E}_{(t,t_1)}$ podría no ser una UDM. Podríamos pensar, por ejemplo, en definirlo como $\mathcal{E}_{(t,t_1)} = \mathcal{E}_{(t,t_0)}\mathcal{E}_{(t_1,t_0)}^{-1}$ pero ya hemos visto que en general, aunque una UDM sea biyectiva y por ende tenga inversa, ésta no tiene por qué ser una UDM, de modo que no podemos seguir por ese camino. La suposición de markovianidad es así una hipótesis simplificadora, puesto que está condicionada a que el tiempo de decaimiento de las correlaciones con el entorno sea mucho más pequeño que el tiempo de relajación típico del sistema, para poder despreciar los efectos de memoria.

De ahora en adelante asumiremos que la evolución de nuestro sistema es markoviana. Los operadores de evolución forman entonces una **familia de evolución**, caracterizada por

$$\mathcal{E}_{(s,s)} = \mathbb{1} \quad \mathcal{E}_{(t,s)} = \mathcal{E}_{(t,r)}\mathcal{E}_{(r,s)} \quad \text{si } t \geq r \geq s$$

O en el caso de que $\mathcal{E}_{(t,s)} \equiv \mathcal{E}_{t-s}$ un **semigrupo dinámico**⁷:

$$\mathcal{E}_0 = \mathbb{1} \quad \mathcal{E}_t\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_{t+s} \quad t, s \geq 0$$

Este tipo de estructuras presentan algunas propiedades interesantes. Comencemos por los semigrupos. Ya que siempre supondremos que la evolución de nuestro sistema es lo suficientemente suave, merece la pena que nos restrinjamos a los semigrupos uniformemente continuos, es decir, aquellos que cumplen⁸

$$\|\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_s\| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow s$$

La ventaja de estos semigrupos es que automáticamente se da que la aplicación $t \rightarrow \mathcal{E}_t$ es diferenciable y podemos caracterizar el semigrupo por un **generador** L , que cumple

$$\frac{d\mathcal{E}_t}{dt} = L\mathcal{E}_t$$

L es un operador lineal sobre el espacio donde se encuentran los operadores de evolución. Este generador es el mismo L que vimos en (1.8), en el caso particular en que no depende del tiempo. Si el semigrupo es **contractivo**, es decir, se cumple

$$\|\mathcal{E}_t\| \leq 1 \quad \forall t \geq 0$$

⁷Un semigrupo, al contrario que un grupo, no exige la existencia de elementos inversos.

⁸La norma que aparece en esta ecuación es la norma inducida sobre el espacio de operadores lineales sobre un espacio de Banach por la norma de dicho espacio de Banach, $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

la exponencial del operador L genera efectivamente todo el semigrupo:

$$\mathcal{E}_t = e^{tL} \mathcal{E}_0 = e^{tL} \mathbb{1}$$

Todos los semigrupos con los que trabajemos habrán de ser contractivos además para que la imagen de una matriz densidad sea una matriz densidad. Esto se debe a la siguiente propiedad, cuya demostración se encuentra en [20]:

Una aplicación lineal \mathcal{E} sobre el conjunto de operadores de clase traza sobre un espacio de Hilbert deja invariante el conjunto de matrices densidad si y sólo si preserva la traza y es contractiva.

El requerimiento de que un semigrupo sea contractivo se puede traducir en una serie de condiciones sobre su generador (teoremas de Hille-Yosida y Lumer-Phillips). Omitimos la discusión de estas condiciones puesto que más adelante presentaremos exigencias más fuertes para L .

Las familias de evolución presentan un desarrollo paralelo aunque más complicado que los semigrupos. En caso de que sean diferenciables poseen también un generador $L(t)$, dependiente esta vez del parámetro, pues en caso contrario se reduce la familia a un semigrupo como los anteriores. De ahora en adelante nos ocuparemos del caso en el que la evolución está dada por un semigrupo, y nos preocuparemos por el generador L que caracteriza al mismo.

1.3.2. Forma general del generador de un semigrupo dinámico completamente positivo

Culminamos este primer capítulo en el que hemos hecho una introducción a las peculiaridades de la evolución temporal en sistemas abiertos con un resultado importante: la caracterización del generador de un semigrupo dinámico completamente positivo. Por todo lo que hemos expuesto anteriormente, serán este tipo de semigrupos los que nos proporcionarán la evolución de sistemas cuánticos abiertos en la aproximación markoviana. En 1976, Lindblad publica cuál es la forma general del generador de un semigrupo dinámico completamente positivo [16] basándose en trabajos previos de Kossakowski [14]. Poco después Gorini, Kossakowski y Sudarshan [10], trabajando de manera independiente a Lindblad, muestran que en el caso particular de sistemas con un número finito N de niveles, la forma más general del generador de un semigrupo dinámico completamente positivo es

$$L\rho = -i[H, \rho] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N^2-1} c_{ij} ([F_i, \rho F_j^\dagger] + [F_i \rho, F_j^\dagger]) \quad (1.9)$$

donde H es un operador hermítico, $\{F_i\}$ es un conjunto de $N^2 - 1$ operadores tales que junto con la identidad forma una base del espacio de matrices complejas $N \times N$ ortogonal respecto del producto escalar $(F_i, F_j) = \text{tr}(F_i^* F_j)$, y (c_{ij}) es una matriz compleja definida positiva. El primer sumando se conoce como la parte *hamiltoniana*, mientras que el resto recibe el nombre de parte *disipativa*. Podemos escoger H de traza nula, entonces es único para L fijo, al igual que los coeficientes c_{ij} una vez fijamos los F_i de la base. Ha de tenerse la precaución de observar que, en general, H no será igual al hamiltoniano del sistema considerado como sistema cerrado.

Capítulo 2

Formalismo geométrico

En este capítulo describimos un formalismo matemático distinto al habitualmente empleado para tratar con sistemas cuánticos, y que vamos a aplicar al problema de estudiar la dinámica en sistemas abiertos. Comenzaremos caracterizando las estructuras algebraicas existentes sobre el conjunto de operadores hermíticos definidos sobre \mathcal{H} para después convertirlas en estructuras geométricas sobre su dual. Finalmente mostraremos cómo podemos interpretar la dinámica como una evolución sobre dichas estructuras.

2.1. Estructura matemática de Herm \mathcal{H}

Partimos del espacio de Hilbert, \mathcal{H} que alberga los posibles estados de nuestro sistema, y asumimos $\dim \mathcal{H} = N < \infty$. El conjunto de operadores lineales que actúan sobre \mathcal{H} consta de una estructura especial:

Definición 2.1. Una **C*-álgebra** $(\mathcal{A}, \cdot, \|\cdot\|, *)$ es un espacio vectorial complejo que consta de

- un **producto interno** \cdot , que le da estructura de álgebra lineal asociativa
- una **norma** $\|\cdot\|$, que le da estructura de espacio de Banach (espacio normado completo) y tal que el producto es continuo (i.e. se da la propiedad submultiplicativa $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$)
- una **involución**, es decir, una aplicación $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que

$$(A + \lambda B)^* = A^* + \bar{\lambda}B^* \quad (AB)^* = B^*A^* \quad (A^*)^* = A$$

y se cumple la llamada identidad C* : $\|AA^*\| = \|A\|^2$

En efecto, para un número finito N de niveles, $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^N$ y el conjunto de operadores lineales que actúa sobre él es $M(N)$ (matrices $N \times N$ con entradas complejas). Se puede ver que con el producto interno habitual entre matrices (dado por la composición de aplicaciones lineales), la norma

$$\|A\| = \sup_{0 \neq x \in \mathcal{H}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

y la involución dada por la conjugación hermítica $A^* = A^\dagger$, $M(N, \mathbb{C})$ adquiere una estructura de C*-álgebra. En su formulación más general, un sistema cuántico viene descrito por su C*-álgebra de operadores. El teorema GNS (Gelfand-Naimark-Segal) permite obtener de ésta los estados como funcionales lineales positivos y normalizados sobre los elementos de la C*-álgebra

y demuestra que dichos estados conforman, precisamente, un espacio de Hilbert [21][22][23].

Los operadores hermíticos sobre \mathcal{H} , que representan los observables del sistema, juegan un papel destacado dentro de la C^* -álgebra pues componen su *parte real*, es decir, el conjunto de operadores que no varían bajo la involución, $\text{Herm } \mathcal{H} = \{A \in M(N, \mathbb{C}) | A^\dagger = A\}$. En general la parte real de una C^* -álgebra posee una estructura conocida como álgebra de Lie-Jordan-Banach, o álgebra LJB. Mostrar de forma explícita cómo es esa estructura es el objetivo de esta sección. Para ello vamos a ir por partes, de modo que rogamos paciencia al lector.

Dentro de nuestra C^* -álgebra $M(N)$ podemos definir, a partir del producto habitual de matrices¹ una nueva operación \circ que se conoce como producto de Jordan, o más comúnmente, anticonmutador, que no es sino la parte simétrica del producto asociativo, $A \circ B := \frac{1}{2}(AB + BA)$. Con esta operación $M(N)$ se convierte en un álgebra de Jordan:

Definición 2.2. *Un álgebra de Jordan (\mathcal{A}, \circ) es un espacio vectorial \mathcal{A} dotado de un producto bilineal conmutativo $\circ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que*

$$(a^2 \circ b) \circ a = a^2 \circ (b \circ a) \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$$

Asimismo, podemos definir otra operación nueva a partir de la parte antisimétrica del producto asociativo, que es la que se conoce como paréntesis de Lie, o más comúnmente, conmutador, $[A, B] := AB - BA$. Con esta nueva operación, $M(N)$ adquiere una estructura de álgebra de Lie:

Definición 2.3. *Un álgebra de Lie $(\mathcal{A}, [,])$ es un espacio vectorial \mathcal{A} dotado de un producto bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ que:*

- *Es antisimétrico:* $[a, b] + [b, a] = 0 \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$
- *Cumple la identidad de Jacobi* $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \quad \forall a, b, c \in \mathcal{A}$

Detengámonos por un momento en las álgebras de Lie. Este tipo de estructuras juegan un papel muy importante en las Matemáticas y sobre todo en la Física, debido a que siempre existe una de ellas asociada a cada grupo de Lie:

Definición 2.4. *Un grupo de Lie es un grupo dotado de una estructura de variedad diferenciable de tal forma que el producto y la toma de inverso en el grupo sean aplicaciones diferenciables.*

La Física está plagada de grupos de Lie que albergan las simetrías de un sistema, como el grupo de las traslaciones espaciotemporales, o el grupo de las rotaciones.

$M(N, \mathbb{C})$ es una variedad diferenciable real de dimensión $2N^2$, que alberga una subvariedad abierta de gran importancia, el grupo general lineal $GL(N, \mathbb{C})$, o grupo de las matrices invertibles. El grupo general lineal es por tanto un grupo de Lie. Su álgebra de Lie asociada se denota $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ y resulta ser isomorfa a $M(N, \mathbb{C})$. Además, el paréntesis de Lie correspondiente es precisamente el conmutador de matrices, de modo que recuperamos lo que ya sabíamos: $M(N, \mathbb{C})$ es un álgebra de Lie.

¹De ahora en adelante nos referiremos a este producto como *producto asociativo*, pues vamos a definir nuevas operaciones que no cumplirán la propiedad de asociatividad.

Los elementos de un álgebra de Lie de dimensión finita \mathfrak{g} son los generadores del grupo de Lie G asociado a través de la **aplicación exponencial** $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ algo de lo que haremos uso más adelante².

Visto esto, ya estamos en condiciones de definir lo que es un álgebra de Lie-Jordan-Banach:

Definición 2.5. *Un álgebra de Lie-Jordan-Banach $(\mathcal{A}, \circ, [,], \|\cdot\|)$ es un álgebra dotada de un producto de Jordan \circ y un paréntesis de Lie $[,]$ que cumplen las siguientes condiciones de compatibilidad:*

- *El paréntesis de Lie define una derivación del producto de Jordan, es decir, se cumple la regla de Leibniz:*

$$[a, b \circ c] = [a, b] \circ c + b \circ [a, c] \quad \forall a, b, c \in \mathcal{A}$$

- *Los asociadores de ambos productos son proporcionales, es decir, para algún $\hbar \in \mathbb{R}$:*

$$(a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c) = \hbar^2 [[a, b], c] - [a, [b, c]] \quad \forall a, b, c \in \mathcal{A}$$

y de una norma $\|\cdot\|$ que le da estructura de espacio de Banach y que cumple:

$$\|a \circ b\| \leq \|a\| \|b\| \quad \|[a, b]\| \leq \frac{1}{|\hbar|} \|a\| \|b\| \quad \|a^2\| = \|a\|^2 \quad \|a^2\| \leq \|a^2 + b^2\|$$

para todo $a, b \in \mathcal{A}$.

Así pues, para dotar a $\text{Herm } \mathcal{H}$ de estructura LJB hemos de comenzar viendo que es un álgebra de Lie y un álgebra de Jordan. Pero esto último es muy fácil, pues podemos restringir el producto de Jordan de $M(N, \mathbb{C})$ a $\text{Herm } \mathcal{H}$ y nos damos cuenta de que la operación es cerrada en dicho conjunto:

$$A, B \in \text{Herm } \mathcal{H} \implies \frac{1}{2}(AB + BA) \in \text{Herm } \mathcal{H}$$

Sin embargo, el paréntesis de Lie de que disponemos en $M(N, \mathbb{C})$ no nos sirve como paréntesis de Lie para los hermíticos, pues restringido a este conjunto nos encontramos con que no es una operación cerrada:

$$A, B \in \text{Herm } \mathcal{H} \not\Rightarrow (AB - BA) \in \text{Herm } \mathcal{H}$$

De modo que tenemos que hallar un nuevo paréntesis de Lie $[,]_-$ cerrado en los operadores hermíticos. No es difícil encontrar uno *ad hoc* que cumpla esta propiedad, pero vamos a obtenerlo de una manera más razonada que nos provea además de nueva información sobre los conjuntos tratados.

Dentro de $GL(N, \mathbb{C})$ encontramos el **grupo unitario** $\mathcal{U}(N)$, que es el conjunto de operadores U que preservan la estructura hermítica del espacio de Hilbert, $\langle U\psi | U\chi \rangle = \langle \psi | \chi \rangle$ y es un subgrupo de Lie de $GL(N, \mathbb{C})$. El álgebra de Lie asociada al grupo unitario $\mathcal{U}(N)$ será pues una subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ que denotamos $\mathfrak{u}(N)$ o \mathfrak{u} para abreviar. Empleando la aplicación exponencial podemos

²La aplicación exponencial existe siempre entre cualquier álgebra de Lie y su grupo de Lie asociado. En el caso particular de $GL(n, \mathbb{C})$, la aplicación exponencial coincide con la exponencial de matrices habitual, definida por la serie convergente

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

por el teorema de Riesz los dos espacios están identificados por un isomorfismo dado por el producto escalar, $\varphi : i\mathfrak{u} \mapsto (i\mathfrak{u})^*$, $A \mapsto (A, \cdot)$. Esta identificación nos permite trasladar todas las estructuras que sean necesarias entre ambos espacios³, igual que sucedía con $i\mathfrak{u}$ y \mathfrak{u} . Por ser $i\mathfrak{u}$ álgebra de Lie, su dual consta de lo que se conoce como una estructura canónica de Poisson. Veamos cómo es ésta.

En primer lugar, $(i\mathfrak{u})^*$ es un espacio vectorial real, de modo que fijando una base $\{e_i\}$ podemos dotarlo de una estructura de variedad diferenciable con una carta global única. Sobre esta variedad disponemos del conjunto de las funciones reales infinitamente diferenciables $C^\infty(i\mathfrak{u}^*)$, a las cuales pertenecen, entre otros, los elementos del bidual $i\mathfrak{u}^{**}$, es decir, las funciones lineales sobre $(i\mathfrak{u})^*$. Por encontrarnos en dimensión finita, podemos identificar el bidual con el espacio original, $A \in i\mathfrak{u} \longleftrightarrow \hat{A} \in (i\mathfrak{u})^{**}$ de manera que⁴ $\hat{A}(\xi) = (\xi, A) \quad \forall \xi \in (i\mathfrak{u})^*$. Tiene entonces perfecto sentido definir los siguientes tensores (bivectores) sobre $(i\mathfrak{u})^*$:

$$\Lambda_\xi(d\hat{A}, d\hat{B}) = (\xi, [A, B]_-) \quad R_\xi(d\hat{A}, d\hat{B}) = (\xi, A \circ B)$$

Podemos escribir estos tensores en términos de la base de bivectores $\frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_j}$ asociada a la base $\{e_i\}$ si definimos previamente las constantes de estructura

$$[e_i, e_j]_- = \sum_k c_{ij}^k e_k \quad e_i \circ e_j = \sum_k d_{ij}^k e_k$$

La componente del tensor Λ en $\frac{\partial}{\partial x_i} \otimes \frac{\partial}{\partial x_j}$ vendrá entonces dada por

$$\Lambda_\xi(d\hat{e}_i, d\hat{e}_j) = (\xi, [e_i, e_j]_-) = (\xi, \sum_k c_{ij}^k e_k) = \sum_k c_{ij}^k x_k(\xi)$$

donde denotamos por x_k es la función coordenada $(\cdot, e_k) = \hat{e}_k$. Del mismo modo actuamos con el tensor R , de modo que ambos quedan expresados como

$$\Lambda = \sum c_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \quad R = \sum d_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes_S \frac{\partial}{\partial x_j}$$

donde \wedge y \otimes_S denotan los productos tensoriales antisimetrizado y simetrizado respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial x} \otimes_S \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial x}$$

El tensor Λ es antisimétrico, se obtiene de forma canónica a partir de la estructura de Lie en $i\mathfrak{u}$ y recibe el nombre de tensor de Poisson. Matemáticamente, los tensores de Poisson son un caso particular de bivectores antisimétricos caracterizados por $[\Lambda, \Lambda]_S = 0$ donde $[\cdot, \cdot]_S$ denota el paréntesis de Schouten, una generalización del conmutador de campos vectoriales para multivectores de grado arbitrario. En Física son importantes puesto que inducen, en el espacio de funciones C^∞ sobre la variedad en la que están definidos, una operación bilineal conocida como paréntesis de Poisson, $\{f, g\} = \Lambda(df, dg)$ que se emplea en Mecánica Clásica para definir la dinámica. Por su parte, el tensor R es un tensor simétrico inducido por la estructura de álgebra

³Hemos de advertir que esto ha dado lugar al empleo de formalismos como el que vamos a describir en varios espacios distintos, todos ellos isomorfos y por tanto equivalentes, de ahí que en las referencias se puedan encontrar estas mismas construcciones realizadas, por ejemplo, sobre \mathfrak{u}^* , el dual de \mathfrak{u} .

⁴No se pierda el lector con la notación: es habitual denotar de manera similar el producto escalar de dos matrices A, B de $i\mathfrak{u}$, (A, B) , y el resultado de aplicar la forma lineal $\xi \in (i\mathfrak{u})^*$ sobre $A \in i\mathfrak{u}$, (ξ, A) .

de Jordan de $i\mathfrak{u}$.

Veamos qué papel juegan estos tensores en la dinámica. Si disponemos de una evolución dada por una ecuación diferencial lineal de primer orden, podemos traducirla en términos geométricos como se ve a continuación. Supongamos que tenemos la ecuación diferencial para una curva en $(i\mathfrak{u})^*$, $\dot{\gamma}(t) = K\gamma(t)$ con K un cierto operador lineal sobre $(i\mathfrak{u})^*$, esto es, $K \in \mathfrak{gl}((i\mathfrak{u})^*)$. Queremos reescribirla como

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}^K$$

con $X^K \in \mathfrak{X}((i\mathfrak{u})^*)$ un campo vectorial sobre $(i\mathfrak{u})^*$. Si descomponemos ambas ecuaciones en componentes respecto a una base de $(i\mathfrak{u})^*$, que puede ser la base dual de la que tenemos en $i\mathfrak{u}$, $\tilde{e}_i = \varphi(e_i)$, tenemos $\gamma(t) = \sum \gamma_j(t)\tilde{e}_j$ y

$$\dot{\gamma}_j = (K\gamma(t), e_j) = (\gamma(t), K^\dagger e_j) \quad \dot{\gamma}_j = X_{\gamma(t)}^K(d\tilde{e}_j)$$

donde K^\dagger es el operador adjunto de K . Por comparación podemos deducir cómo actúa el campo buscado sobre una función \hat{A} :

$$X_\xi^K(\hat{A}) = (K\xi, A) = (\xi, K^\dagger A)$$

El tensor de Poisson nos permite definir una dinámica hamiltoniana en $(i\mathfrak{u})^*$. Supongamos por ejemplo que a nosotros nos interesa traducir a este formalismo la ecuación que rige la evolución temporal de las matrices densidad, que es la ecuación de von Neumann $\dot{\rho} = \text{ad}_H(\rho)$ con $\text{ad}_H = [H, \cdot]_-$ en el papel del operador genérico⁵ K . Así, calculamos pues el operador ad_H^\dagger :

$$\begin{aligned} (\text{ad}_H(A), B) &= \text{tr} \left((-i(HA - AH))^\dagger B \right) = i(\text{tr}(AHB) - \text{tr}(HAB)) = i(\text{tr}(AHB) - \text{tr}(ABH)) = \\ &= \text{tr}(Ai(HB - BH)) = (A, -\text{ad}_H(B)) \implies \text{ad}_H^\dagger = -\text{ad}_H \end{aligned}$$

y concluimos que el campo que nos da la dinámica hamiltoniana para las matrices densidad es:

$$X_\xi^H(\hat{B}) = (\xi, -\text{ad}_H(B)) = -\Lambda_\xi(d\hat{H}, d\hat{B}) \implies X^H = -\Lambda(d\hat{H}, \cdot)$$

2.3. Evolución sobre el espacio de tensores

Hemos visto en el capítulo 1 que en general, en sistemas abiertos la evolución de la matriz densidad del sistema no tiene por qué venir dada por la ecuación de von Neumann sino que obedece a un esquema más general dado por el operador de Lindblad (1.9). Este campo tiene una interpretación un poco más completa en términos geométricos. Para verlo, procedamos a diagonalizar la matriz c_{ij} haciendo un cambio de base en los F_i . Como es definida positiva los

⁵Nótese que por no sobrecargar la notación estamos haciendo uso de manera implícita del isomorfismo φ entre $i\mathfrak{u}$ y $(i\mathfrak{u})^*$, de modo que identificamos la matriz densidad con su elemento correspondiente de $\rho \in (i\mathfrak{u})^*$. Siendo explícitos tendríamos entonces $K = \phi \circ \text{ad}_H \circ \phi^{-1}$.

autovalores de la matriz son positivos, y una pequeña cuenta nos lleva a expresar (1.9) como

$$\begin{aligned} L\rho &= -i[H, \rho] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N^2-1} ([K_i, \rho K_i^\dagger] + [K_i \rho, K_i^\dagger]) = -i[H, \rho] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N^2-1} (2K_i \rho K_i^\dagger - K_i^\dagger K_i \rho - \rho K_i^\dagger K_i) = \\ &= -i[H, \rho] + J \circ \rho + \sum_{i=1}^{N^2-1} K_i \rho K_i^\dagger \end{aligned}$$

donde $J = \sum_i K_i^\dagger K_i$. Los operadores K_i reciben el nombre de **operadores de Kraus**. Así pues, el campo queda en la forma:

$$\frac{d\rho}{dt} = L\rho = [H, \rho]_- + J \circ \rho + \sum_{\alpha} K_i \rho K_i^\dagger \quad (2.1)$$

o expresándolo en forma de campo vectorial, como hemos visto en el apartado anterior:

$$\frac{d\rho}{dt} = X^L = -\Lambda(d\hat{H}, \cdot) + R(d\hat{J}, \cdot) + X_K$$

Así pues, el campo cuyas curvas integrales dan la evolución de la matriz densidad se compone de un campo hamiltoniano $X_H = -\Lambda(d\hat{H}, \cdot)$, un campo gradiente $X_J = R(d\hat{J}, \cdot)$ y un campo X_K asociado a los operadores de Kraus, que en general no se puede escribir en términos de los dos bivectores Λ, R . Sujeta a esta evolución, la matriz densidad describirá una curva $\rho(t)$ en la variedad $D(\mathcal{H})$ de matrices densidad. Ésta es un ejemplo de variedad *estratificada*: se puede dividir en estratos según el rango de las matrices densidad, desde las de rango 1 (estados puros $|\psi\rangle\langle\psi|$) hasta las de rango N (recordemos el ejemplo de la esfera de Bloch en el capítulo 1). Las características de la evolución asociada a cada campo son distintas:

- Un campo hamiltoniano preserva tanto la traza de la matriz densidad como la pureza de la misma (que en la esfera de Bloch hemos visto que se corresponde con el radio), de modo que dicho campo lleva dirección tangencial a las superficies de radio constante.
- Un campo gradiente no preserva la traza de la matriz, aunque sí el rango (es tangente a los estratos). No podemos representarlo en la esfera de Bloch, pues al no conservar la traza nos salimos fuera del hiperplano tridimensional donde ésta yace.
- El campo asociado a los operadores de Kraus no preserva el rango ni la traza de la matriz.
- El campo total (suma de los tres) sí conserva la traza, pues los efectos del campo gradiente y el de Kraus se compensan (nótese que J depende de K_i de la manera justa para que se dé esta propiedad). Sin embargo, por la presencia del campo de Kraus en general no se conserva el rango de la matriz y los estados pierden pureza (decoherencia): el campo apunta ahora hacia el interior de la esfera de Bloch.

Visto esto, lo siguiente que hacemos es preguntarnos: ¿podemos transportar la evolución temporal que afecta a las matrices densidad al espacio de tensores? Nuestra idea es ahora dejar la matriz densidad fija, y construir una familia de tensores $\{\Lambda^{(t)}\}_{t \geq 0}, \{R^{(t)}\}_{t \geq 0}$ que represente la evolución temporal del sistema. Recordemos que los tensores codifican la información de la estructura del álgebra LJB. Nuestra idea es pues dejar que sea dicha estructura la que evolucione:

$$[\cdot, \cdot] \rightarrow [\cdot, \cdot]_t \text{ tal que } [A(t), B(t)] = [A(0), B(0)]_t$$

Chruściński et al. aplican estas ideas al producto asociativo en [6]. Esto permite estudiar en otros términos, por ejemplo, la evolución de la pureza de un estado como $\text{tr } \rho^2(t) = \text{tr}(\rho(t) \cdot \rho(t)) = \text{tr}(\rho(0) \cdot_t \rho(0))$ con \cdot_t un producto asociativo dependiente del tiempo.

Esta evolución de estructuras tiene una interpretación muy natural en términos geométricos. Consideremos una curva $\rho(t)$ en $(i\mathfrak{u})^*$. Si esta curva corresponde a la dinámica regida por un campo X^L , esto es lo mismo que decir que $\rho(t)$ es curva integral de dicho campo:

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = X_{\rho(t)}^L$$

y que si ϕ_t es el flujo asociado al mismo ($\rho(t) = \phi_t(\rho_0)$), podemos emplearlo para transportar el tensor a lo largo de las curvas integrales del campo X^L , y obtener así una evolución temporal:

$$\Lambda_p^{(t)}(\alpha, \beta) = \Lambda_{\phi_t^{-1}(p)}^{(0)}(\phi_t^*(\alpha), \phi_t^*(\beta)) \quad (2.2)$$

para α, β dos formas arbitrarias y p un punto cualquiera de la variedad. Otra manera de ver cómo se relacionan la evolución temporal de estructuras y tensores es:

$$\Lambda_{\rho(t)}^{(0)}(d\hat{A}, d\hat{B}) = (\rho(t), [A, B]) = (\rho(0), [A, B]_t) = \Lambda_{\rho(0)}^{(t)}(d\hat{A}, d\hat{B})$$

De (2.2) se sigue la ecuación diferencial que gobierna la evolución de los tensores:

$$\frac{d}{dt} \Lambda^{(t)} = -\mathcal{L}_{X^L} \Lambda^{(t)} \quad \frac{d}{dt} R^{(t)} = -\mathcal{L}_{X^L} R^{(t)}$$

donde \mathcal{L}_{X^L} es el operador derivada de Lie con respecto al campo X^L . La solución será

$$\Lambda^{(t)} = e^{-t\mathcal{L}_{X^L}} \Lambda^{(0)} \quad R^{(t)} = e^{-t\mathcal{L}_{X^L}} R^{(0)}$$

Puesto que el flujo ϕ_t es un difeomorfismo para todo tiempo t finito, el resultado de la evolución parece no ser demasiado interesante: los tensores de las familias $\Lambda^{(t)}$ y $R^{(t)}$ son todos difeomorfos y las álgebras asociadas a cada uno de ellos son también isomorfas entre sí. Por eso nos va a interesar mucho más el comportamiento a tiempos muy largos que traducimos de manera efectiva como el límite $t \rightarrow \infty$. Si éste existe, podremos definir unas estructuras límite:

$$\Lambda^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda^{(t)} \quad R^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} R^{(t)}$$

que nos informan sobre el sistema a tiempos largos. En particular, si el tensor antisimétrico pierde componentes, el álgebra de Lie asociada es más abeliana, hay más operadores que conmutan, y se atenúa el carácter cuántico, emergiendo un comportamiento más clásico.

Merece la pena destacar lo que ocurre en $i\mathfrak{u}$ cuando hacemos evolucionar los tensores en $(i\mathfrak{u})^*$. Esto es equivalente a disponer de unas estructuras algebraicas dependientes de t . Cuando tomamos el límite $t \rightarrow \infty$, en algunos casos el álgebra resultante (asociada a Λ^∞, R^∞) es distinta de la de partida. Esto se conoce como *contracción de álgebras*. En 1953 İnönü y Wigner se valieron de una tal contracción para obtener el álgebra del grupo de transformaciones de Galileo a partir de la del grupo de Poincaré tomando el límite de velocidad de la luz c infinita, $c \rightarrow \infty$ [12].

Para la discusión de algunos ejemplos de lo expuesto hasta ahora emplazamos al lector al siguiente capítulo.

Capítulo 3

Ejemplos

En este capítulo pondremos en práctica lo que hemos visto en los dos anteriores, y trataremos de averiguar cuándo verdaderamente funciona la construcción propuesta en el límite $t \rightarrow \infty$.

3.1. Decoherencia en tres niveles

Elegimos para trabajar un sistema de 3 niveles $\mathcal{H} = \text{span}\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$. El espacio de operadores hermíticos tiene entonces dimensión 9. Para trabajar en él utilizaremos la base de las matrices de Gell-Mann:

$$\{\lambda_i\} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{array} \right), \sqrt{\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right), \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

Mediante esta elección conseguimos que la preservación de la traza de $\rho = \sum x_i \lambda_i$ se reduzca a la conservación de su componente x_9 , pues todas las matrices de la base tienen traza nula salvo λ_9 , que es proporcional a la identidad. Esto, veremos más adelante, reducirá un poco la complejidad del problema a tratar.

Centrémonos primero en el tensor antisimétrico. Recordemos que Λ tiene la forma:

$$\Lambda = \sum c_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

donde c_{ij}^k son las constantes de estructura que definen el álgebra de Lie, y a su vez son las coordenadas de Λ en la base de bivectores lineales antisimétricos $\{x_k \partial_i \wedge \partial_j\}$ (donde utilizamos $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ para abreviar). La evolución de Λ tendrá lugar en este espacio lineal, de modo que conviene preguntarnos cuál es su dimensión. La respuesta es un número nada despreciable: puesto que podemos asumir $i < j$ ($\partial_i \wedge \partial_j = -\partial_j \wedge \partial_i$), tenemos $\frac{9(9-1)}{2} = 36$ valores para el par (i, j) y 9 valores para k : el espacio de bivectores lineales antisimétricos sobre $(i\mathbf{u})^*$ tiene dimensión $36 \cdot 9 = 324$. Esto nos fuerza a recurrir a un motor de cálculo simbólico para estudiar

el sistema. Empleamos *Mathematica 9* para realizar los cálculos en lo que sigue. Pese a ello, toda simplificación del problema es bienvenida, de modo que notamos que siempre se habrá de dar $c_{i9}^k = 0$ pues en nuestro caso λ_9 es (casi) la identidad, una matriz que conmuta con todas las demás. Al no considerar los correspondientes elementos de la base, quedamos restringidos a un subespacio $\mathcal{S} = \text{span}\{x^k \partial_i \wedge \partial_j\}_{1 \leq i < j \leq 8, 1 \leq k \leq 9}$ de dimensión “tan sólo” 252.

Por medio del software de cálculo simbólico podemos hallar la matriz del operador \mathcal{L}_{X^L} actuando sobre este subespacio. Recordemos que la información física de nuestro sistema va en X^L , el campo de Lindblad, que es lineal y que al darle la forma adecuada (vista en el apartado 2.3, a partir de los resultados de Gorini, Kossakowski y Sudarshan) conseguimos que el operador se pueda restringir al espacio en el estamos trabajando

$$\mathcal{L}_{X^L} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$$

El límite Λ_∞ de la evolución del tensor existirá si existe $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t\mathcal{L}_{X^L}}$, para lo que es condición suficiente que los autovalores de la matriz que representa a \mathcal{L}_{X^L} en \mathcal{S} tengan todos parte real positiva. Para una matriz de dimensión 252 esto parece mucho pedir, y en efecto, comprobamos que para muchos campos X^L sencillos el operador \mathcal{L}_{X^L} tiene autovalores con parte real tanto positiva como negativa.

La solución a este problema viene de repetir la estrategia anterior: hemos de reducir la dimensión del espacio sobre el que actúa el operador lineal. Así la condición necesaria y suficiente para que exista el límite en cuestión es que exista un subespacio $\mathcal{S}_+ \subset \mathcal{S}$ tal que contenga la condición inicial de nuestra dinámica ($\Lambda \in \mathcal{S}_+$), sea invariante por el operador \mathcal{L}_{X^L} ($\mathcal{L}_{X^L}(\mathcal{S}_+) \subset \mathcal{S}_+$) y tal que los autovalores de la restricción de \mathcal{L}_{X^L} a \mathcal{S}_+ tengan parte real positiva.

Comenzamos pues con un ejemplo tomado de [6], en el que una partícula con un espectro discreto y finito de niveles sufre decoherencia. Tomamos:

$$L\rho = -\gamma[X, [X, \rho]] \quad \text{con } \gamma > 0, \quad X = \sum_{m=1}^3 m|m\rangle\langle m|$$

El lector puede comprobar que este campo es efectivamente de la forma (2.1) con un único operador de Kraus $K = \sqrt{2\gamma}X$. Si lo hacemos actuar sobre $|m\rangle\langle n|$ tenemos

$$L|m\rangle\langle n| = -\gamma(m-n)^2|m\rangle\langle n|$$

con lo que queda claro que la partícula se ve sometida a decoherencia pues todos los términos fuera de la diagonal de la matriz densidad tenderán a cero exponencialmente. Igualmente patente queda si tomamos el campo X^L correspondiente, que se escribe:

$$X^L = -\gamma\partial_1 - \gamma\partial_2 - 4\gamma\partial_4 - 4\gamma\partial_5 - \gamma\partial_6 - \gamma\partial_7$$

En efecto, las componentes en las matrices no diagonales de la base (todas menos λ_3, λ_8 y λ_9) se van a cero, y ρ queda asintóticamente diagonal. Entendida la dinámica de ρ , veamos si podemos pasarla a los tensores. Si calculamos las constantes de estructura dependientes del tiempo $c_{ij}^k(t)$ con este ejemplo, nos encontramos con un problema. Mejor dicho, con cuatro problemas:

$$c_{1,6}^5(t) \rightarrow \infty \quad c_{1,7}^4(t) \rightarrow -\infty \quad c_{2,6}^4(t) \rightarrow -\infty \quad c_{2,7}^5(t) \rightarrow -\infty$$

Diagonalizando la matriz del operador encontramos el motivo. En \mathcal{S} existe un subespacio invariante \mathcal{S}_- de dimensión 34 asociado a los autovalores con parte real negativa. El tensor inicial Λ resulta tener proyección no nula en dicho subespacio igual a

$$\frac{x_5}{2} \partial_1 \wedge \partial_6 - \frac{x_4}{2} \partial_1 \wedge \partial_7 - \frac{x_4}{2} \partial_2 \wedge \partial_6 - \frac{x_5}{2} \partial_2 \wedge \partial_7$$

En consecuencia no existe ningún subespacio invariante \mathcal{S}_+ con autovalores con parte real positiva que contenga a Λ . Nótese que esto no quiere decir que la evolución por este campo de la matriz densidad no converja, sólo que si optamos por pasar la dinámica a los tensores, el límite de los mismos, por lo menos del antisimétrico, no está definido.

El tratamiento de este ejemplo que se hace en [4] es algo distinto, pues el operador que se toma es:

$$L|m\rangle\langle n| = -4\gamma \sin^2\left(\frac{(m-n)\pi}{3}\right) |m\rangle\langle n|$$

(El cambio radica en pasar de considerar nuestra base $\{|m\rangle\}$ como los estados discretizados de posición de una partícula en una línea a los de una partícula en un círculo, lo que introduce una simetría extra en el sistema). De esta forma, el campo es

$$X^L = -3\gamma\partial_1 - 3\gamma\partial_2 - 3\gamma\partial_4 - 3\gamma\partial_5 - 3\gamma\partial_6 - 3\gamma\partial_7$$

y ahora sí, Λ converge. Con un tratamiento análogo se puede ver que R también converge. Además, el álgebra de Lie asociada a Λ^∞ y el álgebra de Jordan asociada a R^∞ son compatibles de manera que definen un álgebra LJB en la variedad límite.

3.2. Caso general de operadores de Kraus diagonales reales

Motivados por los ejemplos anteriores, y siendo que es un caso sencillo dentro de la vasta cantidad de dinámicas susceptibles de corresponder a un sistema físico, vamos a tratar de entender en su totalidad la convergencia de los tensores bajo un campo dado por un número arbitrario de operadores de Kraus diagonales reales en tres dimensiones. Sean pues

$$K_i = \sqrt{2} \begin{pmatrix} a_i & 0 & 0 \\ 0 & b_i & 0 \\ 0 & 0 & c_i \end{pmatrix} \quad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$$

donde hemos incluido el factor $\sqrt{2}$ por conveniencia para las cuentas que siguen y consideremos el operador de Lindblad:

$$L\rho = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger + J \circ \rho$$

con $J = \sum_i K_i^\dagger K_i$ el correspondiente a los operadores de Kraus. Comenzamos por el caso más sencillo: $n = 1$. El campo en este caso es

$$X^L = -\gamma_a \partial_1 - \gamma_a \partial_2 - \gamma_b \partial_4 - \gamma_b \partial_5 - \gamma_c \partial_6 - \gamma_c \partial_7 \quad (3.1)$$

donde

$$\gamma_a = (b_1 - a_1)^2 \quad \gamma_b = (a_1 - c_1)^2 \quad \gamma_c = (c_1 - b_1)^2$$

A partir de aquí podemos deducir la forma del campo de Lindblad para cualquier n . En efecto, si $L = \sum_i L_i$ con $L_i \rho = K_i \rho K_i^\dagger + (K_i^\dagger K_i) \circ \rho$, no es difícil comprobar las siguientes dos propiedades de aditividad:

$$X^L = \sum_i X^{L_i} \quad \mathcal{L}_{X^L} = \sum_i \mathcal{L}_{X^{L_i}}$$

Así pues en general el campo tendrá la forma de (3.1) con

$$\gamma_a = \sum_i (b_i - a_i)^2 \quad \gamma_b = \sum_i (a_i - c_i)^2 \quad \gamma_c = \sum_i (c_i - b_i)^2 \quad (3.2)$$

Consideremos el caso del tensor antisimétrico. Con este campo resulta que los autovectores de \mathcal{L}_{X^L} son precisamente los bivectores de nuestra base, con lo que contamos con la gran ventaja de que la matriz del operador es diagonal. En efecto, esto se cumple para cualquier campo de la forma

$$X = - \sum_l \gamma_l x_l \partial_l$$

Podemos demostrarlo a la vez que calculamos el autovalor asociado:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(x_k \partial_i \wedge \partial_j) &= \sum_l \mathcal{L}_{-\gamma_l x_l \partial_l}(x_k \partial_i \wedge \partial_j) = \sum_l -\gamma_l ([x_l \partial_l, x_k \partial_i] \wedge \partial_j + x_i \partial_i \wedge [x_l \partial_l, \partial_j]) = \\ &= (-\gamma_k + \gamma_i + \gamma_j) x_k \partial_i \wedge \partial_j \end{aligned}$$

La siguiente tabla muestra todas los elementos de la base sobre los que Λ tiene proyección no nula, y el autovalor asociado, asumiendo ya $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_a, \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_b$ y $\gamma_6 = \gamma_7 = \gamma_c$:

i, j, k	Autovalor	i, j, k	Autovalor	i, j, k	Autovalor
1,2,3	$2\gamma_a$	2,6,4	$\gamma_a + \gamma_b - \gamma_c$	4,7,1	$-\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c$
1,3,2	0	2,7,5	$\gamma_a - \gamma_b + \gamma_c$	4,8,5	0
1,4,7	$\gamma_a + \gamma_b - \gamma_c$	3,4,5	0	5,6,1	$-\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c$
1,5,6	$\gamma_a + \gamma_b - \gamma_c$	3,5,4	0	5,7,2	$-\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c$
1,6,5	$\gamma_a - \gamma_b + \gamma_c$	3,6,7	0	5,8,4	0
1,7,4	$\gamma_a - \gamma_b + \gamma_c$	3,7,6	0	6,7,3	$2\gamma_c$
2,3,1	0	4,5,3	$2\gamma_b$	6,7,8	$2\gamma_c$
2,4,6	$\gamma_a + \gamma_b - \gamma_c$	4,5,8	$2\gamma_b$	6,8,7	0
2,5,7	$\gamma_a + \gamma_b - \gamma_c$	4,6,2	$-\gamma_a + \gamma_b + \gamma_c$	7,8,6	0

Si queremos que el tensor antisimétrico converja, todos los autovalores listados habrán de ser mayores o iguales que cero. Se ha de exigir pues el siguiente conjunto de desigualdades:

$$0 \leq \gamma_a \leq \gamma_b + \gamma_c \quad 0 \leq \gamma_b \leq \gamma_c + \gamma_a \quad 0 \leq \gamma_c \leq \gamma_a + \gamma_b \quad (3.3)$$

Equivalentemente $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$ han de poder ser los lados de un triángulo. Para ver en qué se traduce esta condición en términos de los operadores de Kraus, consideremos los puntos $A \equiv \vec{a} = (a_1, \dots, a_n), B \equiv \vec{b} = (b_1, \dots, b_n), C \equiv \vec{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Los lados del triángulo que forman son, por (3.2):

$$\|\vec{b} - \vec{a}\| = \sqrt{\gamma_a} \quad \|\vec{a} - \vec{c}\| = \sqrt{\gamma_b} \quad \|\vec{c} - \vec{b}\| = \sqrt{\gamma_c}$$

De modo que las condiciones (3.3) se transforman en

$$\|\vec{b}-\vec{a}\|^2 \leq \|\vec{a}-\vec{c}\|^2 + \|\vec{c}-\vec{b}\|^2 \quad \|\vec{a}-\vec{c}\|^2 \leq \|\vec{c}-\vec{b}\|^2 + \|\vec{b}-\vec{a}\|^2 \quad \|\vec{c}-\vec{b}\|^2 \leq \|\vec{b}-\vec{a}\|^2 + \|\vec{a}-\vec{c}\|^2$$

Pero por el teorema del coseno, esto significa

$$\cos \widehat{ACB} \geq 0 \quad \cos \widehat{CBA} \geq 0 \quad \cos \widehat{BAC} \geq 0$$

De modo que extraemos la siguiente conclusión, más sintética que intuitiva:

El tensor antisimétrico converge para la evolución dada por los operadores de Kraus K_i si y sólo si los puntos A, B, C forman un triángulo acutángulo.

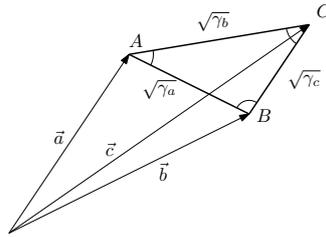


Figura 3.1: Representación gráfica empleada para enunciar las condiciones de convergencia.

Por un procedimiento similar comprobamos que la condición de convergencia es la misma para el tensor simétrico R asociado a la estructura de Jordan.

Hay un par de consecuencias que podemos obtener de este resultado. La primera corresponde al caso $n = 1$, un solo operador de Kraus. El citado triángulo está entonces forzosamente degenerado, pues se encuentra en \mathbb{R} , y la condición de convergencia se reduce a que al menos dos de los puntos A, B, C coincidan, es decir, al menos un γ es 0 (si los tres puntos coinciden el operador de Kraus es múltiplo de la identidad, y el operador L es nulo). Por otra parte, la condición de convergencia y las características de la misma (dependientes únicamente de $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$) son invariantes por rotación y traslación del triángulo, de modo que siempre podemos considerar que éste tiene un vértice en el origen, otro sobre el eje x , y el tercero en el plano xy , de manera que únicamente un máximo de dos operadores de Kraus son necesarios para conseguir un campo dado (siempre que sea de la forma (3.1) y $\sqrt{\gamma_a}, \sqrt{\gamma_b}, \sqrt{\gamma_c}$ puedan ser los lados de un triángulo):

$$K_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_2 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{\gamma_c + \gamma_b - \gamma_a}{2\sqrt{\gamma_c}} \\ a_2 &= \sqrt{\gamma_b - a_1^2} \\ b_2 &= \sqrt{\gamma_c} \end{aligned}$$

Así para el ejemplo extraído de [4] valen:

$$K_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_2 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{\gamma}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y hay convergencia por ser el triángulo equilátero.

Conclusiones

¿Qué hemos hecho?

En este trabajo hemos presentado una técnica de estudio de la evolución temporal en sistemas abiertos consistente en trasladar la dinámica de unos objetos matemáticos (las matrices densidad) a otros (las estructuras definidas sobre ellas). Nos hemos preocupado especialmente por la existencia del límite a tiempos largos de dichas dinámicas, con vistas a extraer conclusiones en los casos en los que dicho límite sea no trivial. A este respecto hemos comprobado que la convergencia de los tensores no está garantizada pese a que la evolución en el espacio de matrices densidad esté perfectamente definida y sea convergente. Hemos visto también que existen casos particulares en los que podemos dar una caracterización de los sistemas con tensores convergentes.

¿Qué queda por hacer?

El estudio de la dinámica de tensores promete ser extenso y ofrecer casuísticas muy diversas con alto grado de interés. El último resultado de convergencia presentado en el capítulo 3 es susceptible de generalización tanto en el número de niveles del sistema como en el tipo de operadores de Kraus empleado. Por ejemplo, si admitimos operadores complejos, el campo deja de ser tan sencillo y la base de bivectores empleada ya no coincide con la de autovectores, salvo en casos muy particulares. Sería también muy interesante intentar comprender qué significa desde el punto de vista físico la condición necesaria y suficiente que hemos hallado para la convergencia, y que básicamente parece querer decir que no puede haber un ritmo de decaimiento que sea mucho más rápido que los otros; así como la repercusión que tiene en el comportamiento del sistema la existencia o no del límite. Más en general, ha de profundizarse en el análisis de las estructuras límite Λ^∞ , R^∞ , y de la información que se puede extraer de ellas. Una posible línea de investigación al respecto implica estudiar si, al disponer del álgebra de Lie límite, podemos obtener, a partir de sus operadores de Casimir (aquellos que conmutan con todos los elementos del álgebra), magnitudes conservadas de la dinámica sobre la subvariedad límite.

Bibliografía

- [1] Abhay Ashtekar and Troy A Schilling. Geometrical formulation of quantum mechanics. In *On Einstein's Path*, pages 23–65. Springer, 1999.
- [2] Heinz-Peter Breuer and Francesco Petruccione. *The theory of open quantum systems*. Oxford university press, 2002.
- [3] Dorje C Brody and Lane P Hughston. Geometric quantum mechanics. *Journal of geometry and physics*, 38(1):19–53, 2001.
- [4] José Fernando Cariñena, Jesús Clemente Gallardo, Jorge Alberto Jover Galtier, and Giuseppe Marmo. Open systems and geometric quantum mechanics: Examples. in preparation.
- [5] José Fernando Cariñena, Jesús Clemente-Gallardo, and Giuseppe Marmo. Geometrization of quantum mechanics. *Theoretical and Mathematical Physics*, 152(1):894 – 903, 2007.
- [6] Dariusz Chruściński, Paolo Facchi, Giuseppe Marmo, and Saverio Pascazio. The observables of a dissipative quantum system. *Open Systems & Information Dynamics*, 19(01):1250002, 2012.
- [7] Dariusz Chruscinski and Andrzej Jamiolkowski. *Geometric phases in classical and quantum mechanics*, volume 36. Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] Jesús Clemente Gallardo. The geometrical formulation of quantum mechanics. *Rev. Real Academia de Ciencias. Zaragoza.*, 67:51–103, 2012.
- [9] Fernando Falceto, Leonardo Ferro, Alberto Ibort, and Giuseppe Marmo. Reduction of lie-jordan banach algebras and quantum states. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 46(1):015201, 2013.
- [10] Vittorio Gorini, Andrzej Kossakowski, and Ennackal Chandy George Sudarshan. Completely positive dynamical semigroups of n-level systems. *Journal of Mathematical Physics*, 17(5):821–825, 1976.
- [11] André Heslot. Quantum mechanics as a classical theory. *Physical Review D*, 31(6):1341, 1985.
- [12] Erdal İnönü and Eugene P Wigner. On the contraction of groups and their representations. In Arthur S. Wightman, editor, *The Collected Works of Eugene Paul Wigner*, volume A / 1 of *The Collected Works of Eugene Paul Wigner*, pages 488–502. Springer Berlin Heidelberg, 1993.

- [13] Thomas W B Kibble. Geometrization of quantum mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 65(2):189–201, 1979.
- [14] Andrzej Kossakowski. On quantum statistical mechanics of non-hamiltonian systems. *Reports on Mathematical Physics*, 3(4):247 – 274, 1972.
- [15] Karl Kraus, Arno Böhm, John D Dollard, and WH Wootters. States, effects, and operations fundamental notions of quantum theory. In *States, Effects, and Operations Fundamental Notions of Quantum Theory*, volume 190, 1983.
- [16] Goran Lindblad. On the generators of quantum dynamical semigroups. *Communications in Mathematical Physics*, 48(2):119–130, 1976.
- [17] Jerrold E Marsden and Tudor Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems*, volume 17. Springer Science & Business Media, 2013.
- [18] John Von Neumann. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. Number 2. Princeton university press, 1955.
- [19] Michael A Nielsen and Isaac L Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010.
- [20] Ángel Rivas and Susana F Huelga. *Open Quantum Systems*. Springer, 2012.
- [21] Irving E Segal. Irreducible representations of operator algebras. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 53(2):73–88, 1947.
- [22] Irving E Segal. Postulates for general quantum mechanics. *Annals of Mathematics*, pages 930–948, 1947.
- [23] Franco Strocchi. *An introduction to the mathematical structure of quantum mechanics: a short course for mathematicians*, volume 28. World Scientific, 2008.