



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

Desarrollo de una herramienta de
simulación de flujo granular

Autor

Daniel Galindo Usón

Director

Javier Murillo Castarlenas

Escuela de Ingeniería y Arquitectura
2015

RESUMEN

En este Trabajo Final de Grado se ha desarrollado una herramienta de simulación de flujos granulares, que permite predecir su comportamiento, ante diferentes situaciones. Un flujo granular está formado por un gran conjunto de partículas sólidas macroscópicas, entre las cuales existe un fluido intersticial como puede ser aire o agua.

Ejemplos de flujos granulares pueden ser avalanchas de nieve, o deslizamientos de tierra, los cuales están presentes en la naturaleza, siendo los causantes de pérdidas materiales, e incluso humanas. De esto hecho surge el interés en desarrollar una herramienta de simulación que pueda predecir el comportamiento de este tipo de flujos, con el objetivo de intentar reducir los daños ocasionados, o evitarlos por completo si es posible.

Los flujos granulares pueden modelarse mediante el sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas, por lo tanto la herramienta de simulación será capaz de resolver estas ecuaciones mediante el método de los volúmenes finitos.

Antes de comenzar a estudiar estas ecuaciones, se realizó un estudio de otras ecuaciones, que fueron la base para llegar a la herramienta de simulación final. Para comenzar, se estudió la ecuación escalar sin término fuente la cual permite modelar la variación en el tiempo y en el espacio, de una variable escalar, u . El estudio de esta ecuación permitió familiarizarse con el método de los volúmenes finitos, y con la solución de los problemas de Riemann.

Seguidamente, el estudio de la ecuación escalar con término fuente permitió observar los efectos producidos por la incorporación de un término fuente al problema, el cual modela la presión ejercida sobre el fondo. Estos efectos incluyen la aparición de estados intermedios en la solución.

Este estudio realizado sobre la ecuación escalar con término fuente, permitió abordar otro estudio nuevo, la ecuación de Burgers, la cual es un caso particular de la ecuación escalar con término fuente. De este estudio se derivaron unos hechos muy importantes, la necesidad de implementar a la herramienta de simulación una serie de controles, que permitan asegurar la estabilidad en las soluciones numéricas.

Finalmente, se pasó a estudiar el sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas, que son las ecuaciones que han modelado la herramienta de simulación. Para que las soluciones numéricas sean estables, y no aparezcan valores de calado negativos, o cambios de signo en el caudal en las paredes de una misma celda, o evitar que el paso de tiempo sea o excesivamente grande, o pequeño, se han implementado diferentes controles que lo eviten.

Índice

1	Introducción.....	1
1.1	Antecedentes del proyecto.....	1
1.2	Objetivo del proyecto.....	1
2	Modelo.....	2
2.1	Descripción del problema.....	2
2.2	Ecuaciones de las aguas poco profundas.....	2
2.3	Método de los volúmenes finitos.....	4
2.3.1	Formulación del esquema numérico.....	4
2.3.2	Problema de Riemann.....	5
2.4	Formulación de los términos fuente para el sistema de ecuaciones de aguas poco profundas.....	6
2.4.1	Término fuente debido a la presión ejercida sobre el fondo.....	6
2.4.2	Término fuente debido a fricción sobre el fondo.....	7
2.4.3	Corrección del término fuente debido a la fricción.....	8
2.5	Estabilidad: control del paso de tiempo.....	8
2.5.1	Reconstrucción de los coeficientes β	9
2.6	Paso de una celda de mojada a seca.....	9
3	Resultados.....	11
3.1	Casos numéricos con fondo plano y superficie libre variable con fricción de Coulomb.....	11
3.2	Casos numéricos con fondo plano y superficie libre variable con un valor de fricción fija.....	14
3.3	Caso numérico con fondo variable y superficie libre constante con fricción de Coulomb.....	16
3.4	Casos numéricos con fondo variable y superficie libre variable con fricción de Coulomb.....	16
3.5	Casos numéricos de rotura de presa con fondo plano y fricción de Coulomb.....	19
3.6	Caso de laboratorio: Experimento de Dressler.....	20
4	Mejoras realizadas y futuras.....	22
4.1	Flujo transcrito.....	22
4.2	Tratamiento de las fuerzas gravitacionales.....	23
4.2.1	Caso de laboratorio.....	23
4.3	Mejoras futuras.....	24
4.3.1	Otros tipos de fricción.....	25
4.3.2	Combinaciones de diferentes tipos de fricción.....	25
5	Conclusiones.....	26
Anexo I.	Resultados del estudio de la ecuación escalar y la ecuación de Burgers.....	27
AI.1	Ecuación escalar sin término fuente.....	27

AI.1.1	Solución aproximada al problema de Riemann para $\lambda i + 1/2 > 0$	28
AI.1.2	Solución aproximada al problema de Riemann para $\lambda i + 1/2 < 0$	29
AI.1.3	Casos numéricos de ecuación escalar sin término fuente	29
AI.2	Ecuación escalar con término fuente	31
AI.2.1	Solución aproximada al problema de Riemann para $\lambda i + 1/2 > 0$	31
AI.2.2	Solución aproximada al problema de Riemann para $\lambda i + 1/2 < 0$	32
AI.2.3	Control del paso del tiempo	33
AI.2.4	Esquema numérico ecuación escalar con término fuente.....	33
AI.2.5	Algoritmo aplicado para evitar valores negativos en la solución.....	34
AI.3	Ecuación de Burgers con término fuente.....	35
AI.3.1	Ondas de choque	36
AI.3.2	Rarefacciones.....	36
AI.3.3	Término fuente debido a la presión ejercida sobre el fondo del dominio.....	37
AI.3.1	Casos numéricos ecuación de Burgers con término fuente.....	37
Anexo II.	Sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas.....	41
All.1	Resultados del sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas con término fuente debido a la presión ejercida sobre el fondo.....	41
All.2	Solución aproximada al problema de Riemann para el sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas	51
All.2.1	Solución aproximada al problema de Riemann para flujo subcrítico	51
All.2.2	Solución aproximada al problema de Riemann para flujo supercrítico	52
Bibliografía.....		55

Índice de figuras

FIGURA 1.	Distribución de presiones y perfil de velocidades.....	2
FIGURA 2.	División del dominio en celdas.	4
FIGURA 3.	Problema de Riemann para una celda genérica.	6
FIGURA 4.	Paso de una celda de mojada a seca.....	7
FIGURA 5.	Control del paso de tiempo en la solución de las ecuaciones de las aguas poco profundas.....	8
FIGURA 6.	Superficie libre variable. Solución numérica del calado (izquierda) y caudal (derecha) para $\theta b=10^\circ$, CFL=0.5 Y $t = 10$ s. Nivel superficial inicial (izquierda) y caudal inicial (derecha) (—), soluciones numéricas sin corregir el término fuente debido a la fricción (—○—), y corrigiéndolo (—●—).	12
FIGURA 7.	Superficie libre variable. solución numérica del calado (izquierda) y caudal (derecha) para $\theta b=45^\circ$, cfl=0.5 y $t = 10$ s. Nivel superficial inicial (izquierda) y caudal inicial (derecha) (—), soluciones numéricas sin corregir el término fuente debido a la fricción (—○—), y corrigiéndolo (—●—).	12

FIGURA 8. Superficie libre variable. solución numérica del calado (izquierda) y caudal (derecha) para $\theta b=5^\circ$, CFL=0.1 y para t =2 s (arriba), t=5s (central), t=10s (abajo). Nivel superficial inicial (izquierda) y caudal inicial (derecha) (—), soluciones numéricas sin corregir el término fuente debido a la fricción (—○—), y corrigiéndolo (—●—).	13
FIGURA 9. Superficie libre variable solución numérica del calado (izquierda) y caudal (derecha) para $(\tau_b/\rho)= -10\text{m}^2\text{s}^{-2}$, CFL=0.5 y t = 10 s. Nivel superficial inicial (izquierda) y caudal inicial (derecha) (—), soluciones numéricas sin corregir el término fuente debido a la fricción (—○—), y corrigiéndolo (—●—).	14
FIGURA 10. Superficie libre variable. solución numérica del calado (izquierda) y caudal (derecha) para $(\tau_b/\rho)= -0.1\text{m}^2\text{s}^{-2}$, CFL=0.1 y t =2 s (arriba), t=5s (central), t=10s (abajo). Nivel superficial inicial (izquierda) y caudal inicial (derecha) (—), soluciones numéricas sin corregir el término fuente debido a la fricción (—○—), y corrigiéndolo (—●—).	15
FIGURA 11. Fondo variable. solución numérica del nivel superficial (izquierda) y caudal (derecha) para $\theta b=10^\circ$, CFL=0.5 Y t = 10 s. Fondo variable (izquierda) y caudal inicial (derecha) (—), soluciones numéricas sin corregir el término fuente debido a la fricción (—●—), y corrigiéndolo (—●—).	16
FIGURA 12. Fondo y superficie libre variables. solución numérica del nivel superficial (izquierda) y caudal (derecha) para $\theta b=10^\circ$, CFL=0.5 Y t = 10 s. Fondo variable (izquierda) y caudal inicial (derecha) (—), soluciones numéricas sin corregir el término fuente debido a la fricción (—), y corrigiéndolo (—).	17
FIGURA 13. Fondo y superficie libre variables. solución numérica del nivel superficial (izquierda) y caudal (derecha) para $\theta b=45^\circ$, CFL=0.5 Y t = 10 s. Fondo variable (izquierda) y caudal inicial (derecha) (—), soluciones numéricas sin corregir el término fuente debido a la fricción (—), y corrigiéndolo (—).	17
FIGURA 14. Fondo y superficie libre variables. solución numérica del nivel superficial (izquierda) y caudal (derecha) para $\theta b=5^\circ$, CFL=0.1 y para t =2 s (arriba), t=5s (central), t=10s (abajo). Fondo variable (izquierda) y caudal inicial (derecha) (—), nivel superficial inicial (—), soluciones numéricas sin corregir el término fuente debido a la fricción (—), y corrigiéndolo (—●—).	18
FIGURA 15. Rotura de presa con fondo plano y fricción de Coulomb. Caso 1: Fondo plano, sin fricción, t=3s. Solución exacta (—), solución numérica (—).	19
FIGURA 16. Rotura de presa con fondo plano y fricción de Coulomb. Caso 2: Fondo pendiente constante de 10° , sin fricción, t=3s. Solución exacta (—), solución numérica (—), fondo (—).	19
FIGURA 17. Rotura de presa con fondo plano y fricción de Coulomb. Caso 3: Fondo pendiente constante de 10° , con fricción de coulomb ($\theta b=8^\circ$), t=3s. Solución exacta (—), solución numérica (—), fondo (—).	20
FIGURA 18. Caso de laboratorio: experimento de Dressler. solución exacta problema de rotura de presa sin fricción (— —), datos experimentales (—■—) y solución numérica (—□—) para t=46s, datos experimentales (—●—) y solución numérica (—○—) para t=140s, datos experimentales (—▲—) y solución numérica (—△—) para t=218s,	21
FIGURA 19. Rarefacción producida por flujo transcrito.	22
FIGURA 20. Comparación entre coordenadas locales y globales.	23
FIGURA 21 Caso de laboratorio. Calado (izquierda), altura total (derecha). solución numérica (—●—), datos experimentales (—○—). para t =0.32 s (arriba), t=0.8 s (central), t=2.3 s (abajo).	24

FIGURA AI.1. Ecuación escalar sin término fuente. Volumen de control sobre una celda genérica.	28
FIGURA AI.2. Ecuación escalar sin término fuente. Solución problema de Riemann para $\lambda i + 1/2 > 0$	28
FIGURA AI.3. Ecuación escalar sin término fuente. Solución problema de Riemann para $\lambda i + 1/2 < 0$	29
FIGURA AI.4. Ecuación escalar . Solución numérica y exacta de los casos 1 y 2 para $t=10s$... 29	
FIGURA AI.5. Ecuación escalar . Solución numérica y exacta de los casos 3 y 4 para $t=10s$... 30	
FIGURA AI.6. Ecuación escalar . Solución numérica y exacta de los casos 5 y 6 para $t=10s$ 30	
FIGURA AI.7. Ecuación escalar Con término fuente. Volumen de control sobre una celda genérica.	31
FIGURA AI.8. Ecuación escalar con término fuente. Solución problema de Riemann para $\lambda i + 1/2 > 0$	32
FIGURA AI.9. Ecuación escalar con término fuente. Solución problema de Riemann para $\lambda i + 1/2 > 0$	32
FIGURA AI.10. Control del paso de tiempo. Definición de $\Delta t * y \Delta t **$	33
FIGURA AI.11. Variación del flujo dentro de una celda del dominio.....	33
FIGURA AI.12. Ecuación de Burgers con término fuente. Solución para $u_l > u_r$	36
FIGURA AI.13. Ecuación de Burgers con término fuente. Solución para $u_R > u_L$	36
FIGURA AI.14. Ecuación de Burgers con término fuente . Solución numérica del caso 1(izquierda) y caso 2(derecha) de la tabla AI.2 para $t = 15 s$. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (—●—), s^b (—○—) y s^c (—Δ—), y fondo del dominio z (—).....	38
FIGURA AI.15. Ecuación de Burgers con término fuente . Solución numérica del caso 3(izquierda) y caso 4(derecha) de la tabla AI.2 para $t = 15s$. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (—●—), s^b (—○—) y s^c (—Δ—), y fondo del dominio z (—).....	38
FIGURA AI.16. Ecuación de Burgers con término fuente . Solución numérica del caso 5(izquierda) y caso 6(derecha) de la tabla AI.2 para $t = 15s$. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (—●—), s^b (—○—) y s^c (—Δ—), y fondo del dominio z (—).....	39
FIGURA AI.17. Ecuación de Burgers con término fuente . Solución numérica del caso 7(izquierda) y caso 8(derecha) de la tabla AI.2 para $t = 15s$. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (—●—), s^b (—○—) y s^c (—Δ—), y fondo del dominio z (—).....	40
FIGURA AII.1. Rotura de presa . Resultados del caso 1 de la tabla AII.1 para $t = 5s$. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (—●—), s^b (—○—) y s^c (—▲—), y fondo del dominio z (—).	42
FIGURA AII.2. Rotura de presa . Resultados del caso 2 de la tabla AII.1 para $t = 5s$. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (—●—), s^b (—○—) y s^c (—▲—), y fondo del dominio z (—).	43
FIGURA AII.3. Rotura de presa . Resultados del caso 3 de la tabla AII.1 para $t = 5s$. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (—●—), s^b (—○—) y s^c (—▲—), y fondo del dominio z (—).	44

FIGURA AII.4. Rotura de presa. Resultados del caso 4 de la tabla AII.1 para $t = 5s$. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (-●-), s^b (-○-) y s^c (-▲-), y fondo del dominio z (—).....	45
FIGURA AII.5. Rotura de presa. Resultados del caso 5 de la tabla AII.1 para $t = 5s$. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (-●-), s^b (-○-) y s^c (-▲-), y fondo del dominio z (—).....	46
FIGURA AII.6. Rotura de presa. Resultados del caso 6 de la tabla AII.1 para $t = 5s$. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (-●-), s^b (-○-) y s^c (-▲-), y fondo del dominio z (—).....	47
FIGURA AII.7. Rotura de presa. Resultados del caso 7 de la tabla AII.1 para $t = 5s$. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (-●-), s^b (-○-) y s^c (-▲-), y fondo del dominio z (—).....	48
FIGURA AII.8. Rotura de presa. Resultados del caso 8 de la tabla AII.1 para $t = 5s$. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (-●-), s^b (-○-), s^c (-▲-) y s^{cw} (-Δ-), y fondo del dominio z (—).	48
FIGURA AII.9. Rotura de presa. Resultados del caso 9 de la tabla AII.1 para $t = 5s$. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (-●-), s^b (-○-), s^c (-▲-) y s^{cw} (-Δ-), y fondo del dominio z (—).	49
FIGURA AII.10. Rotura de presa. Resultados del caso 10 de la tabla AII.1 para $t = 5s$. Solución exacta (—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (-●-), s^b (-○-), s^c (-▲-) y s^{cw} (-Δ-), y fondo del dominio z (—).	50
FIGURA AII.11. Rotura de presa. Resultados del caso 11 de la tabla AII.1 para $t = 5s$. Solución exacta.....	50
(—), soluciones numéricas utilizando los enfoques s^a (-●-), s^b (-○-), s^c (-▲-) y s^{cw} (-Δ-), y fondo del dominio z (—).....	50
FIGURA AII.12. Solución problema de Riemann para flujo subcrítico $\lambda_1 \lambda_2 < 0$	52
FIGURA AII.13. Solución problema de Riemann para flujo supercrítico $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ y $u > 0$.52	
FIGURA AII.14. Solución problema de Riemann para flujo supercrítico $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ y $u < 0$.53	

Índice de tablas

TABLA 1. Combinaciones posibles de diferentes tipos de fricción.....	25
TABLA A1.1. Parámetros de entrada para los casos numéricos de la ecuación escalar	29
TABLA AI.2. Parámetros de entrada para los casos numéricos de la ecuación de Burgers con término fuente	37
TABLA AII.1. Parámetros de entrada para los casos numéricos del sistema de ecuaciones de aguas poco profundas con término fuente debido únicamente a la presión ejercida sobre el fondo.....	41

1 Introducción

La predicción numérica de flujos granulares no había sido estudiada hasta hace relativamente poco tiempo. Dado que este tipo de flujos presentes en la naturaleza pueden causar pérdidas, tanto materiales como humanas, una investigación exhaustiva que permita obtener una herramienta de simulación que sea capaz de caracterizar y predecir el comportamiento de este tipo de flujos particulares es de gran interés e importancia.

El conocimiento del comportamiento de este tipo de flujos ante diferentes condiciones, puede ayudar a disminuir o en algunos casos evitar los daños cuando se dan en la naturaleza. En el campo de las actividades industriales puede ayudar a minimizar o aprovechar la energía consumida en el movimiento y transporte de materias primas o productos que tengan la fenomenología de un flujo granular.

1.1 Antecedentes del proyecto

Los flujos granulares son flujos que pueden modelarse mediante la mecánica de fluidos. Están formados por un número muy elevado de partículas sólidas macroscópicas en movimiento, que además tienen movimiento relativo entre ellas, y entre las cuales hay un fluido intersticial como agua o aire. Este tipo de flujos puede caracterizarse por el comportamiento global del conjunto de partículas en movimiento.

Las ecuaciones de las aguas poco profundas (shallow water equations) permiten modelar una gran variedad de flujos, incluido el granular. A través de ellas y junto con la incorporación de un término fuente debido a la variación del fondo, y otro debido a la fricción se establecerá un modelo matemático.

Dicho modelo matemático constituirá un sistema de ecuaciones hiperbólicas en derivadas parciales que deberá resolverse mediante un método numérico, el cual se implementará en el lenguaje de programación fortran.

Para verificar el correcto funcionamiento de la herramienta de simulación se realizarán una amplia variedad de casos, en los cuales se han comprado las soluciones numéricas con las exactas. Además se simularán experimentos de laboratorio y se analizarán las soluciones numéricas frente a los resultados de dichos experimentos de laboratorio. Finalmente, se realizarán algunas mejoras y se propondrán otras que podrían incorporarse a la herramienta de simulación en un futuro.

1.2 Objetivo del proyecto

El objetivo de este proyecto es la realización de un modelo computacional que permita realizar la simulación del comportamiento de flujos granulares ante diferentes condiciones, definiendo para ello adecuadamente diferentes parámetros reológicos.

Además, esta herramienta de simulación permitirá reproducir ensayos de laboratorio realizados anteriormente, de forma que será posible realizar una comparación entre los resultados de ensayos de laboratorio reales y los resultados numéricos proporcionados por la herramienta de simulación.

2 Modelo

2.1 Descripción del problema

Un flujo granular es un flujo de superficie libre, es decir, fluyen por acción de la gravedad y su superficie está en contacto directo con la atmósfera (sobre la superficie solo actúa la presión atmosférica). Por lo tanto, su comportamiento se puede modelar mediante las ecuaciones de las aguas poco profundas (shallow water equations), las cuales se obtienen a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes. Estas ecuaciones no tienen solución exacta, por lo que es necesario recurrir a métodos numéricos que permiten obtener soluciones aproximadas que pueden presentar discontinuidades.

2.2 Ecuaciones de las aguas poco profundas

Estas ecuaciones se obtienen integrando las ecuaciones de Navier-Stokes [15] en la dimensión que representa la profundidad del dominio por donde discurre el flujo. Son aplicables cuando se dan las siguientes condiciones:

- Longitud de la escala horizontal del problema es mucho más grande que la escala vertical.
- La única fuerza que actúa sobre la superficie libre del fluido es la presión atmosférica.

Bajo estas condiciones se derivan los siguientes hechos:

- La velocidad vertical del fluido es despreciable.
- El gradiente de presión vertical se puede considerar hidrostático.
- El gradiente de presión horizontal es debido al desplazamiento de la superficie de la lámina libre del fluido, lo cual implica que el campo de velocidades en la dirección del eje z , sea constante, tal y como muestra la figura 1.

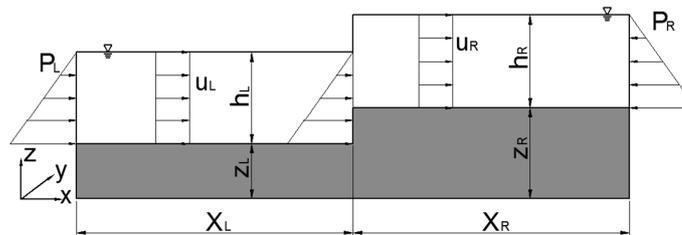


FIGURA 1. DISTRIBUCIÓN DE PRESIONES Y PERFIL DE VELOCIDADES.

Aplicando estas hipótesis, las ecuaciones de las aguas poco profundas para un flujo unidimensional, quedan de la siguiente forma; donde, h , es el calado y, u , la velocidad longitudinal promediada en z .

Conservación de masa:
$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Momento en dirección x :
$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \right) = \frac{p_b}{\rho} - \frac{\tau_b}{\rho} \quad (2)$$

Estas ecuaciones son de tipo hiperbólico y se pueden reagrupar en un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de la siguiente forma.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S(U, x) \quad (3)$$

Este sistema contiene diferentes términos. El primero de ellos, es la derivada local del vector U y representa la variación de las variables recogidas por dicho vector respecto al tiempo. Estas variables son el calado y el caudal en la dirección longitudinal del problema, q_x . Dicho caudal es igual al producto del calado por la velocidad longitudinal promediada en z .

$$U = \begin{pmatrix} h \\ q_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix} \quad (4)$$

El segundo término es la derivada convectiva del flujo en la dirección x , y representa la variación del flujo a lo largo de la dirección x .

$$F(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

El tercer y último término, $S(U,x)$, recoge los términos fuente. El primero de ellos, S_b , es debido a la presión, p_b , a lo largo de todo el fondo en la dirección x , la cual es de tipo hidrostático. Dicho término fuente depende de la distancia a la superficie libre del flujo, y de la variación del fondo en forma de pendiente. El segundo, S_f , término modela la fricción, T_b , del fluido con el fondo. Más adelante se expondrán diferentes formas de evaluar ambos términos.

$$S(U,x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p_b}{\rho} + \frac{\tau_b}{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_b + S_f \end{pmatrix} \quad (6)$$

El sistema de ecuaciones que se desea resolver es no lineal de primer orden y dependiente del tiempo, por lo tanto no tiene una solución exacta. Por ello, mediante una linealización de tipo Roe [13] se transforma a un sistema lineal de primer orden de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Esto se consigue definiendo una matriz jacobiana aproximada, \tilde{J} , del flujo F .

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} = S, \quad \text{con} \quad \frac{\partial F}{\partial U} = \tilde{J} \quad (7)$$

Finalmente, el sistema de ecuaciones linealizado, queda como se muestra en la siguiente expresión.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{J} \frac{\partial U}{\partial x} = S \quad (8)$$

Asumiendo que la parte convectiva de (5) es estrictamente hiperbólica la matriz jacobiana aproximada tiene asociados dos vectores propios \tilde{e}^1 , \tilde{e}^2 ; y dos valores propios $\tilde{\lambda}^1$, $\tilde{\lambda}^2$ [12]. Físicamente, los valores propios pueden interpretarse como velocidades de propagación de las ondas que se forman por la acción de un flujo en movimiento, las cuales pueden ser positivas o negativas. Dichos valores propios se construyen con los valores promedio de las variables del problema $(\tilde{u}, \tilde{c}, \tilde{h})$. Los subíndices, i e $i+1$, que aparecen en el cálculo de las variables promedio acompañando a la velocidad, u , y el calado, h , hacen referencia a los valores de u y h para dos celdas consecutivas, i e $i+1$.

$$\tilde{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\lambda}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c} \end{pmatrix} \quad \tilde{e}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\lambda}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\tilde{u} = \frac{u_i \sqrt{h_i} + u_{i+1} \sqrt{h_{i+1}}}{\sqrt{h_i} + \sqrt{h_{i+1}}} \quad \tilde{c} = \sqrt{g\tilde{h}} \quad \tilde{h} = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}) \quad (10)$$

2.3 Método de los volúmenes finitos

2.3.1 Formulación del esquema numérico

Para resolver el sistema de ecuaciones que modela el problema se recurre al método de los volúmenes finitos [12]. Para introducir un esquema de volúmenes finitos, el dominio del problema se divide en celdas computacionales, Ω_i , y se integra el sistema de ecuaciones recogido en (5).

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega} S d\Omega \quad (11)$$

Como se muestra en la figura 2, dichas celdas tienen una longitud constante, Δx , definidas por el intervalo $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$. El centro de la celda, x_i , se define como $x_i = (i - 1/2)\Delta x$, y el lado de cada celda, $x_{i+1/2}$, como $x_{i+1/2} = i \Delta x$.

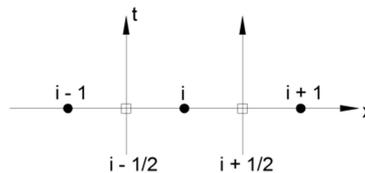


FIGURA 2. DIVISIÓN DEL DOMINIO EN CELDAS.

El primer término del esquema recoge las variables a resolver (u, h) en el vector, U . Para obtener el valor promedio de las mismas para cada celda se aplica el teorema de Godunov [8]. Este teorema, para cada instante de tiempo, t^n , que es un número de veces, n , el paso de tiempo, Δt , actualiza el valor promedio de las variables para cada celda.

$$U_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{\Omega_i} U(x, t^n) dx \quad (12)$$

Suponiendo una representación de las variables del problema definidas a intervalos en el plano x-t, la expresión (11) se puede reescribir de la siguiente forma.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \int_{\partial\Omega} F dl = \int_{\Omega} S d\Omega \quad (13)$$

Además, suponiendo que el flujo E es uniforme en cada celda y que la malla es fija en el tiempo, se llega a la siguiente expresión.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + \delta F = \int_{\Omega} S d\Omega \quad (14)$$

Respecto al último término de (11), puede expresarse a través de una matriz, T , la cual reúne el término fuente de presión a lo largo del fondo, y el debido a la fricción.

$$\int_{\Omega} S d\Omega = T \quad (15)$$

Definida esta última matriz, es posible reagrupar la expresión (14), como se expresa a continuación.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} U d\Omega + (\delta F - T) = 0 \quad (16)$$

Centrando la atención en la diferencia del flujo entre dos celdas consecutivas, δF , que aparece en el segundo término de (16), existen dos matrices, \tilde{P} y \tilde{P}^{-1} , que diagonalizan la matriz jacobiana aproximada. La matriz, $\tilde{\Lambda}$, es la matriz diagonal que contiene los valores propios, y la matriz, θ , es la matriz diagonal que reúne los coeficientes tita.

$$\delta F = \tilde{J} \delta U \quad (17)$$

$$\tilde{J} = \tilde{P} \Lambda^* \tilde{P}^{-1} \quad \tilde{P} = (\tilde{e}^1, \tilde{e}^2) \quad (18)$$

$$\tilde{\Lambda}^* = \tilde{\Lambda} \theta \quad \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}^1 & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda}^2 \end{pmatrix} \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta^1 & 0 \\ 0 & \theta^2 \end{pmatrix} \quad \theta^m = \left(1 - \frac{\beta}{\tilde{\lambda}\alpha}\right)^m \quad (19)$$

La diferencia del vector U de una celda a otra consecutiva, δU , se proyecta sobre la base formada por los vectores propios a través de la matriz de coeficientes A [12].

$$\delta U = \tilde{P} A \quad A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta h}{2} + \frac{1}{2\tilde{c}}(\delta h\tilde{u} - \delta hu) \\ \frac{\delta h}{2} - \frac{1}{2\tilde{c}}(\delta h\tilde{u} - \delta hu) \end{pmatrix} \quad (20)$$

Para calcular la matriz, T , se define la matriz, B , que contiene los coeficientes, β [12]. Estos coeficientes lineales, β , se componen a su vez de un coeficiente que depende del término fuente debido a la presión sobre el fondo (S_b), β_H , y otro que depende del término fuente debido a la fricción sobre el fondo (S_f), β_S .

$$T = \tilde{P} B \quad (21)$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_H^1 + \beta_S^1 \\ -\beta^1 \end{pmatrix} \quad \beta_H^1 = \left(\frac{-S_b}{2\tilde{c}}\right) \quad \beta_S^1 = \left(\frac{-S_f}{2\tilde{c}}\right) \quad (22)$$

Definido el cálculo de la diferencia del flujo entre dos celdas consecutivas, δF , y la matriz T , el segundo término de (16) puede reescribirse quedando formulado el esquema numérico final.

$$(\delta E - T) n_x = \delta M^\pm = \sum_{m=1}^{N_\lambda} (\tilde{\lambda}^\pm \theta \alpha \tilde{e})^m \quad \tilde{\lambda}^+ = \frac{1}{2}(\tilde{\lambda} + |\tilde{\lambda}|) \quad \tilde{\lambda}^- = \frac{1}{2}(\tilde{\lambda} - |\tilde{\lambda}|) \quad (23)$$

$$\delta M^+ = \sum_{m=1}^{N_\lambda} (\tilde{\lambda}^+ \theta \alpha \tilde{e})^m \quad \delta M^- = \sum_{m=1}^{N_\lambda} (\tilde{\lambda}^- \theta \alpha \tilde{e})^m \quad (24)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\delta M^- - \delta M^+) \quad (25)$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{m=1}^{N_\lambda} (\tilde{\lambda}^\pm \theta \alpha \tilde{e})^m \quad (26)$$

2.3.2 Problema de Riemann

Cada celda a resolver en la que ha sido dividido el dominio constituye un problema de Riemann [3], el cual puede resolverse con el esquema numérico (26), que proporciona el valor promedio actualizado de cada celda, U_i^{n+1} , como un promedio de las contribuciones de las variaciones del flujo, δM^\pm , aportadas por los problemas de Riemann de las celdas adyacentes a ella.

La solución de cada problema de Riemann consiste en dos ondas, las cuales pueden ser de choque o de rarefacción, y una onda extra estacionaria en $x=0$, la cual es generada por los términos fuente. Esta solución consiste en una función definida a intervalos en el plano $x-t$ que presenta discontinuidades que generan estados intermedios, U^* y U^{**} , de las variables almacenadas en el vector, U , como se muestra en la figura 3. En el Anexo II, se encuentra la solución aproximada del problema de Riemann, $\hat{U}(x, t)$; así como se calculan los estados intermedios, U^* y U^{**} , para el sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas, en función de si el flujo es subcrítico o supercrítico.

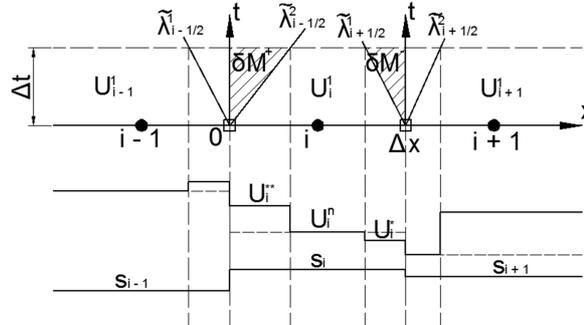


FIGURA 3. PROBLEMA DE RIEMANN PARA UNA CELDA GENÉRICA.

Para evitar que aparezcan en las soluciones valores de calado negativos, o valores de velocidad incorrectos es necesario controlar que el paso de tiempo no sea demasiado grande, para que no haya interacción entre las ondas de problemas de Riemann vecinos. Dicho paso de tiempo se define a continuación.

$$\Delta t \tilde{\lambda} = CFL \frac{\Delta x}{\max|\lambda^m|} \quad (27)$$

El CFL (Criterio de Courant-Friedrich-Levy) es un criterio de estabilidad utilizado en la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Cuando son lineales, al CFL se le asigna un valor de 1, mientras que para casos en los que se incorporen parámetros reológicos, aunque la solución aproximada es lineal; el sistema no lo es, por lo que $CFL \leq 1/2$.

2.4 Formulación de los términos fuente para el sistema de ecuaciones de aguas poco profundas

En este apartado se van a presentar las diferentes formulaciones empleadas para el término fuente debido a la presión y la fricción ejercidas sobre el fondo.

2.4.1 Término fuente debido a la presión ejercida sobre el fondo

Dependiendo de las hipótesis de partida se obtienen diferentes formulaciones [12]. Bajo la hipótesis de pequeñas variaciones de las variables se puede evaluar con la siguiente expresión.

$$S_b^a = \left(\frac{p_b}{\rho}\right)_{i+1/2}^a = \int \left(-g \tilde{h} \frac{\partial z}{\partial x}\right) dx = -g(\tilde{h} \delta z)_{i+1/2} \quad (28)$$

Otra opción es usar la definición de presión hidrostática, de forma que la fuerza ejercida sobre el fondo (el cual se define según una función definida a intervalos) depende únicamente de la distancia a la superficie libre.

$$S_b^b = \left(\frac{p_b}{\rho}\right)_{i+1/2}^b = -g \left(h_j - \frac{|\delta z'|}{2} \right) \delta z' \quad (29)$$

$$h_j = \begin{cases} h_i & \delta z \geq 0 \\ h_{i+1} & \delta z < 0 \end{cases} \quad \delta z' = \begin{cases} h_i & \delta z \geq 0, d_i < z_{i+1} \\ -h_{i+1} & \delta z < 0, d_{i+1} < z_i \\ \delta z & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad d_i = h_i + z_i \quad (30)$$

Una tercera opción es combinar los enfoques (29) y (30).

$$S_b^c = \left(\frac{p_b}{\rho}\right)_{i+1/2}^c = \begin{cases} \max\left(\left(\frac{p_b}{\rho}\right)_{i+1/2}^a, \left(\frac{p_b}{\rho}\right)_{i+1/2}^b\right) & \delta d \delta z \geq 0, \tilde{u} \delta z > 0 \\ \left(\frac{p_b}{\rho}\right)_{i+1/2}^b & \text{cualquier otro caso} \end{cases} \quad (31)$$

Cuando el calado de una celda es distinto de cero, y la celda siguiente a ella su calado es cero, o viceversa, tal y como se muestra en la figura 4, y como se recoge en la siguiente expresión, en la solución pueden aparecer valores negativos.

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i + z_i < z_{i+1}, \quad h_{i+1} = 0 \\ h_{i+1} + z_{i+1} < z_i, \quad h_i = 0 \end{array} \right\} \quad u_i^{n+1} = u_i^n = 0 \quad (32)$$



FIGURA 4. PASO DE UNA CELDA DE MOJADA A SECA.

Este hecho se da bajo una de las dos circunstancias de (32), y para solucionarlo se impone la condición de que la velocidad en esas dos celdas contiguas sea nula, para que la celda seca se comporte como lo haría una pared sólida real. Este hecho, se combina con S_b^c , dando lugar al enfoque S_b^{cw} .

2.4.2 Término fuente debido a fricción sobre el fondo

Se han implementado diferentes tipos de fricción. Uno de ellos es la fricción turbulenta [9,11], S_{tur} , que es función del coeficiente de Manning.

$$S_{tur} = \left(\frac{\tau_b}{\rho}\right)_{i+1/2} \Delta x = -g(\tilde{h} S_f)_{i+1/2} \Delta x \quad S_f = \left(\frac{n^2 \tilde{u} |\tilde{u}|}{\max(h_i, h_{i+1})^{4/3}}\right)_{i+1/2} \quad (33)$$

Otro tipo de fricción implementada ha sido la de Coulomb, S_{cou} , la cual depende del ángulo de fricción interno, θ_b , y del ángulo que forma la superficie libre con el fondo, $\theta_{i+1/2}$.

$$S_{cou} = \left(\frac{\tau_b}{\rho}\right)_{i+1/2} = -g \tilde{h} |\cos \theta_{i+1/2}| \tan \theta_b \quad (34)$$

En el caso de que $|\tilde{u}| > 0$, se define contraria a la dirección que lleva el flujo, y se calcula mediante la siguiente expresión.

$$S_{cou} = \left(\frac{\tau_b}{\rho}\right)_{i+1/2} = \frac{\tilde{u}}{|\tilde{u}|} (-g \tilde{h} |\cos \theta_{i+1/2}| \tan \theta_b) \quad (35)$$

En cualquier otro caso se define según la siguiente expresión, opuesta al movimiento producido por la variación del nivel superficial, δd .

$$S_{cou} = \left(\frac{\tau_b}{\rho}\right)_{i+1/2} = \begin{cases} -g\tilde{h}|\cos\theta_{i+1/2}|\tan\theta_b & \delta d_{i+1/2} \leq 0 \\ g\tilde{h}|\cos\theta_{i+1/2}|\tan\theta_b & \delta d_{i+1/2} > 0 \end{cases} \quad (36)$$

2.4.3 Corrección del término fuente debido a la fricción

En algunos casos sino se controla el término fuente debido a la fricción puede suceder que el caudal que entra por la pared de una celda cambie de signo cuando sale por la otra pared de esa misma celda, o incluso que se alcancen valores negativos. Esto puede suceder si el término de fricción en una determinada celda alcanza un valor excesivo.

Como el sentido del caudal que entra por la pared de una celda tiene que ser igual que el del caudal que sale por la otra pared de esa celda, se calcula el caudal para la pared de cada celda incluyendo el coeficiente beta de cada término fuente, $(hu)_i^*$; y el caudal incluyendo solo el coeficiente beta del termino fuente debido a la presión sobre el fondo, $(hu)_i^{**}$ [11].

$$(hu)_i^* = (hu)_i^n + (\alpha^1 e_{12}^1) - \beta^1 \quad (hu)_i^{**} = (hu)_i^n + (\alpha^1 e_{12}^1) - \beta_H^1 \quad (37)$$

Si el producto de ambos caudales es menor o igual a cero significará que el caudal ha cambiado de sentido en esa celda por un valor excesivo de fricción, y para solucionarlo, se corrigen los coeficientes, β_s , como se expresa a continuación.

$$\beta_s^1 = \begin{cases} (hu)_i^{**} & (hu)_i^* (hu)_i^{**} \leq 0 \\ \beta_s^1 & \text{Cualquier otro caso} \end{cases} \quad \beta_s^2 = -\beta_s^1 \quad (38)$$

2.5 Estabilidad: control del paso de tiempo

Para evitar que aparezcan valores de calado negativos en la solución es necesario controlar el paso de tiempo en cada problema de Riemann para que no interfiera con otros problemas de Riemann contiguos a él. En dicha solución aparecen estados intermedios del calado, h_i^* y h_{i+1}^{**} , que se definen a continuación.

$$h_i^* = h_i^n + \alpha_{i+1/2}^1 - \left(\frac{\beta}{\tilde{\lambda}}\right)_{i+1/2}^1 \geq 0 \quad h_{i+1}^{**} = h_{i+1}^n - \alpha_{i+1/2}^2 + \left(\frac{\beta}{\tilde{\lambda}}\right)_{i+1/2}^2 \geq 0 \quad (39)$$

En el caso de que el flujo sea supercrítico no hay riesgo de que el término fuente influya en la actualización del valor de calado promedio de cada celda. Sin embargo, si el flujo es subcrítico el término fuente puede afectar en la actualización del valor promedio del calado para cada celda, pudiendo aparecer calados negativos, tal y como se muestra en la figura 5.

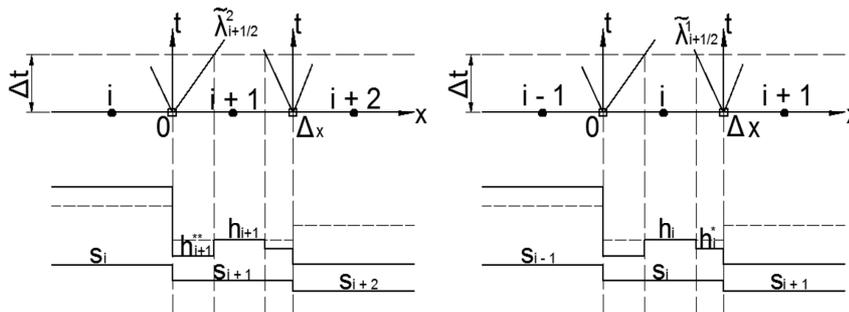


FIGURA 5. CONTROL DEL PASO DE TIEMPO EN LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE LAS AGUAS POCO PROFUNDAS.

Cuando estos valores de calado intermedio son negativos, se define el paso de tiempo [12] asegurando que el valor promedio del calado sea positivo para un volumen de control $[0, \Delta x/2]$ sobre la celda del problema de Riemann a resolver, llegando a las siguientes expresiones.

$$h_i^{**} \left(\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^2 + \frac{1}{2} \Delta t^{**} \right) + h_{i+1}^n \left(\frac{1}{2} \Delta x - \tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^2 + \frac{1}{2} \Delta t^{**} \right) \geq 0 \Rightarrow \Delta t^{**} = \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^2} \frac{h_{i+1}^n}{h_{i+1}^n - |h_{i+1}^{**}|}, \text{ con } h_{i+1}^{**} < 0 \text{ y } h_{i+1}^n \neq 0 \quad (40)$$

$$h_i^* \left(\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{2} \Delta t^* \right) + h_i^n \left(\frac{1}{2} \Delta x - \tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^1 + \frac{1}{2} \Delta t^* \right) \geq 0 \Rightarrow \Delta t^* = \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^1} \frac{h_i^n}{h_i^n - |h_i^*|}, \text{ con } h_i^* < 0 \text{ y } h_i^n \neq 0 \quad (41)$$

Por todas estas razones, el paso de tiempo se elige dependiendo de si el flujo es o no subcrítico, según la siguiente expresión. El flujo será subcrítico cuando un valor propio sea positivo y otro negativo; y supercrítico cuando los dos valores propios sean positivos o negativos.

$$\Delta t \leq \begin{cases} \min(\Delta t^*, \Delta t^{**}, \Delta t^{\tilde{\lambda}}) & (\tilde{\lambda}^1 \tilde{\lambda}^2)_{i+\frac{1}{2}} < 0 \\ \Delta t^{\tilde{\lambda}} & \text{Cualquier otro caso} \end{cases} \quad (42)$$

2.5.1 Reconstrucción de los coeficientes β

La linealización realizada sobre el sistema de ecuaciones, ha linealizado también el término fuente, lo cual puede provocar que los pasos de tiempo, Δt^* y Δt^{**} , definidos para asegurar valores de calado siempre positivos cuando el flujo es subcrítico, sean varios órdenes de magnitud menor al paso $\Delta t^{\tilde{\lambda}}$.

Para evitar esto, dado que los pasos de tiempo, Δt^* y Δt^{**} , dependen de h_i^* y h_{i+1}^{**} , respectivamente, pueden reconstruirse los coeficientes, β^1 y β^2 . Esta técnica [10] permite asegurar que los estados intermedios del calado nunca sean negativos para una celda, debiéndose cumplir para ello que dichos coeficientes, β^1 y β^2 , tomen un valor mínimo, β_{min}^1 y β_{min}^2 . Pueden darse dos situaciones como se presenta a continuación.

$$\beta^1 \geq \beta_{min}^1 = - \left(h_i^n + \alpha_{i+\frac{1}{2}}^1 \right) \left| \tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^1 \right| \quad \beta^2 \geq \beta_{min}^2 = - \left(h_{i+1}^n - \alpha_{i+\frac{1}{2}}^2 \right) \tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^2 \quad (43)$$

- $h_i^* < 0, h_{i+1}^{**} > 0, \Delta t^* < \Delta t^{\tilde{\lambda}}$

$$\beta^1 = \begin{cases} \beta_{min}^1 & -\beta_{min}^1 \geq \beta_{min}^2 \\ \beta^1 & \text{Cualquier otro caso} \end{cases} \quad \beta^2 = -\beta^1 \quad (44)$$

- $h_i^* > 0, h_{i+1}^{**} < 0, \Delta t^{**} < \Delta t^{\tilde{\lambda}}$

$$\beta^2 = \begin{cases} \beta_{min}^2 & -\beta_{min}^2 \geq \beta_{min}^1 \\ \beta^2 & \text{Cualquier otro caso} \end{cases} \quad \beta^1 = -\beta^2 \quad (45)$$

2.6 Paso de una celda de mojada a seca

Como ya se ha comentado, para los casos en los que una celda tiene un calado no nulo y el de la celda siguiente es nulo, o viceversa, es necesario asegurar que el calado como mucho sea nulo, pero nunca sea negativo. Para ello se utiliza un algoritmo [12] el cual dependiendo del valor del calado y los estados intermedios h_i^* y h_{i+1}^{**} ; se ponen a cero o no, las contribuciones del flujo del esquema (26), como se recoge a continuación.

- $h_{i+1}^n = 0, h_{i+1}^{**} < 0 \Rightarrow \delta M_{i+1/2}^- = \delta M_{i+1/2} \quad \delta M_{i+1/2}^+ = 0$ (46)

- $h_i^n = 0, h_i^* < 0 \Rightarrow \delta M_{i+1/2}^- = 0 \quad \delta M_{i+1/2}^+ = \delta M_{i+1/2}$ (47)

- *Cualquier otro caso* $\Rightarrow \delta M_{i+1/2}^- = \sum_{m=1}^{N_\lambda} (\tilde{\lambda}^- \theta \alpha \tilde{e})^m \quad \delta M^+ = \sum_{m=1}^{N_\lambda} (\tilde{\lambda}^+ \theta \alpha \tilde{e})^m$ (48)

3 Resultados

En esta sección se van a presentar los resultados de mayor relevancia de los diferentes casos que se han realizado con la herramienta de simulación a lo largo de este Trabajo Final de Grado. Para cada caso se ha comparado la solución exacta con la proporcionada por la herramienta de simulación.

Los resultados restantes obtenidos en este proyecto se encuentran en el Anexo I, y en el Anexo II. En el Anexo I se encuentran los resultados de los casos numéricos realizados sobre la ecuación escalar sin término fuente, y la ecuación de Burgers con término fuente debido a la presión ejercida sobre el fondo. En el Anexo II se recogen los resultados de los casos numéricos realizados sobre el sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas, con término fuente debido únicamente a la presión ejercida sobre el fondo.

Dichos resultados de mayor importancia que se presentan en la memoria, son los casos numéricos realizados sobre el sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas, con término fuente debido a la presión y fricción ejercida sobre el fondo. Los casos numéricos abarcan una amplia cantidad de situaciones diferentes, desde un fondo plano, hasta un fondo y una superficie libre variables.

3.1 Casos numéricos con fondo plano y superficie libre variable con fricción de Coulomb

En los siguientes casos numéricos, se parte de una montaña de arena, la cual se supone en equilibrio. Mediante este caso se quiere comprobar que la herramienta de simulación mantiene el equilibrio de dicha montaña debido a la incorporación de la fricción de tipo Coulomb al problema.

El estudio comienza para un instante de tiempo de $t = 0s$. Superado este instante de tiempo, sin la presencia de la fricción, la arena se desmorona completamente. Sin embargo, con la presencia de la misma, dependiendo del ángulo de fricción interno y del ángulo formado por el nivel de la superficie libre lateral y el fondo, la arena se comportará de una forma diferente, mucho más real (pudiendo de esta manera desprenderse o no). Dado que el fondo del dominio es plano, en este caso el término fuente debido a la presión ejercida sobre el fondo será nulo. La montaña de arena que se va a emplear en estos casos es la definida por la siguiente ecuación.

$$h(x, t = 0) = \begin{cases} 0.8 & f(x) \geq 0.8 \\ f(x) & 0.1 \leq f(x) \leq 0.8, \text{ con } f(x) = 1 - |x - 50|\tan(10^\circ) \\ 0.1 & f(x) \leq 0.1 \end{cases} \quad (49)$$

Estas simulaciones se han realizado sobre un dominio de 100 m, dividido en 1000 celdas de longitud, $\Delta x = 0.1m$, para diferentes ángulos de fricción interna, lo cual implica diferentes materiales. A continuación, se incluyen varios casos con sus respectivas soluciones. El CFL utilizado cambia dependiendo del caso, según el ángulo de fricción interno, ya que si este ángulo es superado la superficie libre dejará de estar en equilibrio, e interesa captar la evolución en el tiempo que sigue la misma con precisión.

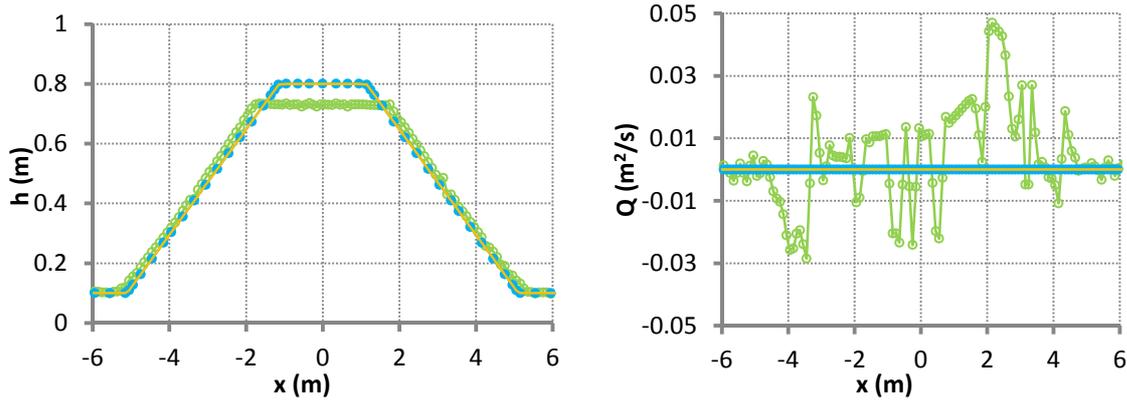


FIGURA 6. **SUPERFICIE LIBRE VARIABLE.** SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL CALADO (IZQUIERDA) Y CAUDAL (DERECHA) PARA $\theta_b=10^\circ$, CFL=0.5 Y T = 10 S. NIVEL SUPERFICIAL INICIAL (IZQUIERDA) Y CAUDAL INICIAL (DERECHA) (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS SIN CORREGIR EL TÉRMINO FUENTE DEBIDO A LA FRICCIÓN (—○—), Y CORRIGIÉNDOLO (—●—).

A la vista de los resultados obtenidos en la figura anterior, si se realiza corrección sobre el término fuente debido a la fricción (para que dicho término fuente no sea excesivo), se conserva el nivel superficial inicial. En caso contrario, el nivel superficial no se conserva y las partículas que conforman el fluido granular se desprenden, lo cual se plasma en las oscilaciones del valor de caudal a lo largo del dominio. Dichas oscilaciones producidas en el caudal cuando no se aplica corrección dan aviso de que el caudal para una misma celda no se ha conservado su signo, lo cual no es correcto.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para un ángulo de fricción interna de 45° .

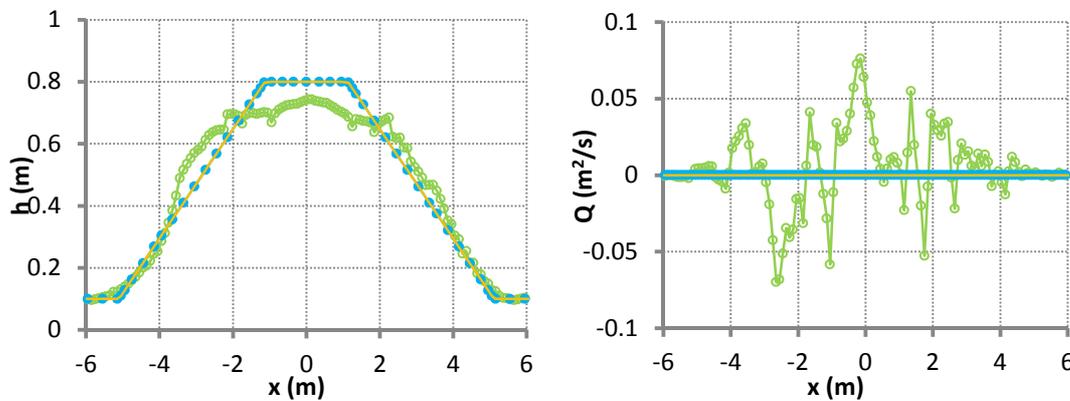


FIGURA 7. **SUPERFICIE LIBRE VARIABLE.** SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL CALADO (IZQUIERDA) Y CAUDAL (DERECHA) PARA $\theta_b=45^\circ$, CFL=0.5 Y T = 10 S. NIVEL SUPERFICIAL INICIAL (IZQUIERDA) Y CAUDAL INICIAL (DERECHA) (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS SIN CORREGIR EL TÉRMINO FUENTE DEBIDO A LA FRICCIÓN (—○—), Y CORRIGIÉNDOLO (—●—).

Como se puede observar en la figura 7, en el caso en el que no se corrige el término fuente debido a la fricción, se produce un desprendimiento de la arena de la parte superior de la montaña nuevamente. Sin embargo, como en este caso el ángulo de fricción interna es mayor que en el caso anterior, parte de dicha arena queda adherida a las paredes de la montaña.

Nuevamente se puede observar como en el caso del término fuente corregido la arena no se desprende, por lo que el caudal en este caso es nulo, mientras que en el caso del término fuente corregido el caudal es distinto de cero por el desprendimiento que se produce.

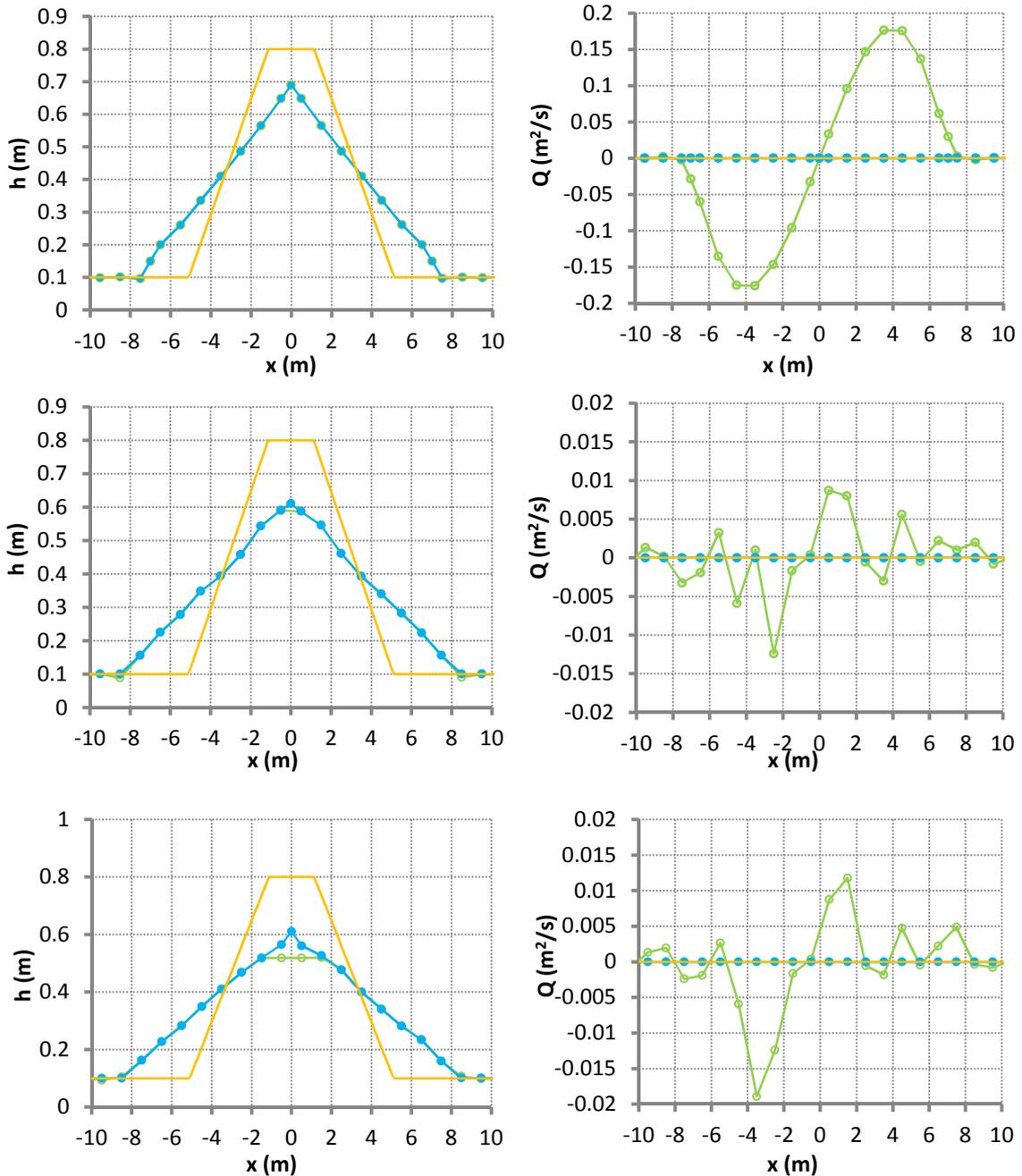


FIGURA 8. **SUPERFICIE LIBRE VARIABLE.** SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL CALADO (IZQUIERDA) Y CAUDAL (DERECHA) PARA $\theta_b=5^\circ$, CFL=0.1 Y PARA $T =2$ S (ARRIBA), $T=5$ S (CENTRAL), $T=10$ S (ABAJO). NIVEL SUPERFICIAL INICIAL (IZQUIERDA) Y CAUDAL INICIAL (DERECHA) (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS SIN CORREGIR EL TÉRMINO FUENTE DEBIDO A LA FRICCIÓN (-o-), Y CORREGIÉNDOLO (-●-).

En la figura anterior se compara lo que ocurre con un ángulo de fricción interno de 5° en distintos intervalos de tiempo. Para este caso se ha utilizado un CFL menor que en los anteriores debido a que el ángulo de fricción interno es pequeño y se espera que se vea superado y la superficie libre no se encuentre en equilibrio. En primer lugar, para un tiempo de 2s, los esfuerzos de fricción no pueden soportar la columna de arena, ya que se ha superado el ángulo de fricción interno, por lo que ésta comienza a desprenderse, saliendo por tanto de la situación de equilibrio inicial.

Por otra parte, la variación que experimenta el caudal es simétrica y su signo depende del lado de la montaña en el que se encuentre. En este caso, la solución obtenida para el calado es la misma se corrija el término fuente o no.

Para un instante de tiempo de $t = 5s$, si se aplica la corrección se alcanza un estado de equilibrio, en el que se forma un nuevo ángulo de reposo, mientras que si esta no se aplica la montaña de arena sigue en desequilibrio, lo cual se plasma en la gráfica donde se representa el caudal sin corrección. El caudal con la corrección aplicada es nulo ya que como se ha comentado se ha alcanzado un estado de equilibrio.

Finalmente, para un tiempo de $t = 10s$, si se aplica la corrección, sigue preservándose el estado de equilibrio que se había alcanzado para el tiempo de $t = 5s$. Por otra parte, si no se aplica dicha corrección, la montaña sigue en desequilibrio.

3.2 Casos numéricos con fondo plano y superficie libre variable con un valor de fricción fija

Para comprobar que independientemente del tipo de fricción que se implemente, la técnica usada para limitar el valor del término de fricción funciona correctamente, se han realizado dos casos en los que la fricción tiene un valor fijo, y el nivel superficial inicial es igual al de los casos anteriores. En el primer caso de estudio el valor de la fricción es de $-10 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$. El dominio también abarca una extensión de 100m , y está dividido en 1000 celdas con un $\Delta x=0.1\text{m}$.

El CFL utilizado en la simulación depende del valor de la fricción, en el primer caso la fricción tiene un valor elevado, por lo que se espera que la superficie se mantenga en equilibrio. En el segundo caso, el valor de la fricción tiene un valor pequeño, por lo que se espera que el esfuerzo de fricción no pueda mantener el estado de equilibrio inicial, y la superficie libre evolucione. Es por esto por lo que en el segundo caso se disminuye el CFL a un valor de 0.1 .

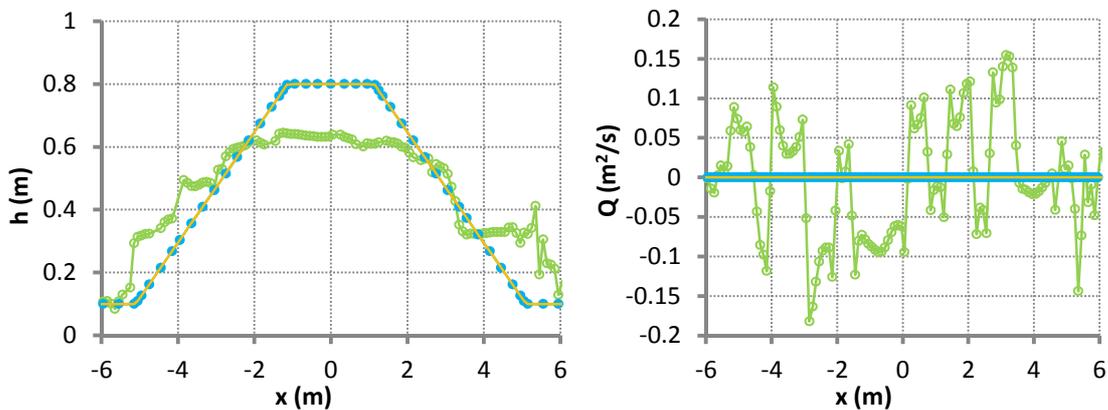


FIGURA 9. SUPERFICIE LIBRE VARIABLE SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL CALADO (IZQUIERDA) Y CAUDAL (DERECHA) PARA $(\tau_b/P) = -10\text{M}^2\text{s}^{-2}$, CFL=0.5 Y T = 10 S. NIVEL SUPERFICIAL INICIAL (IZQUIERDA) Y CAUDAL INICIAL (DERECHA) (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS SIN CORREGIR EL TÉRMINO FUENTE DEBIDO A LA FRICCIÓN (---○---), Y CORRIENDOLO (---●---).

Como se puede observar en la figura 9, nuevamente, si no se aplica corrección al término fuente de fricción, la superficie libre no mantiene la forma que tenía inicialmente, y aparecen cambios en la superficie libre que no son posibles, llevando a una solución errónea. Del mismo modo que anteriormente, se aprecian oscilaciones en los valores del caudal si no se aplica corrección, ya que no se mantiene el estado de equilibrio que poseía la superficie libre gracias a la incorporación de la fricción al problema.

En el segundo caso la fricción toma un valor de $-0.1 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$, un valor menor al anterior. La simulación se ha realizado para tres tiempos diferentes, para observar la evolución que tiene la superficie libre.

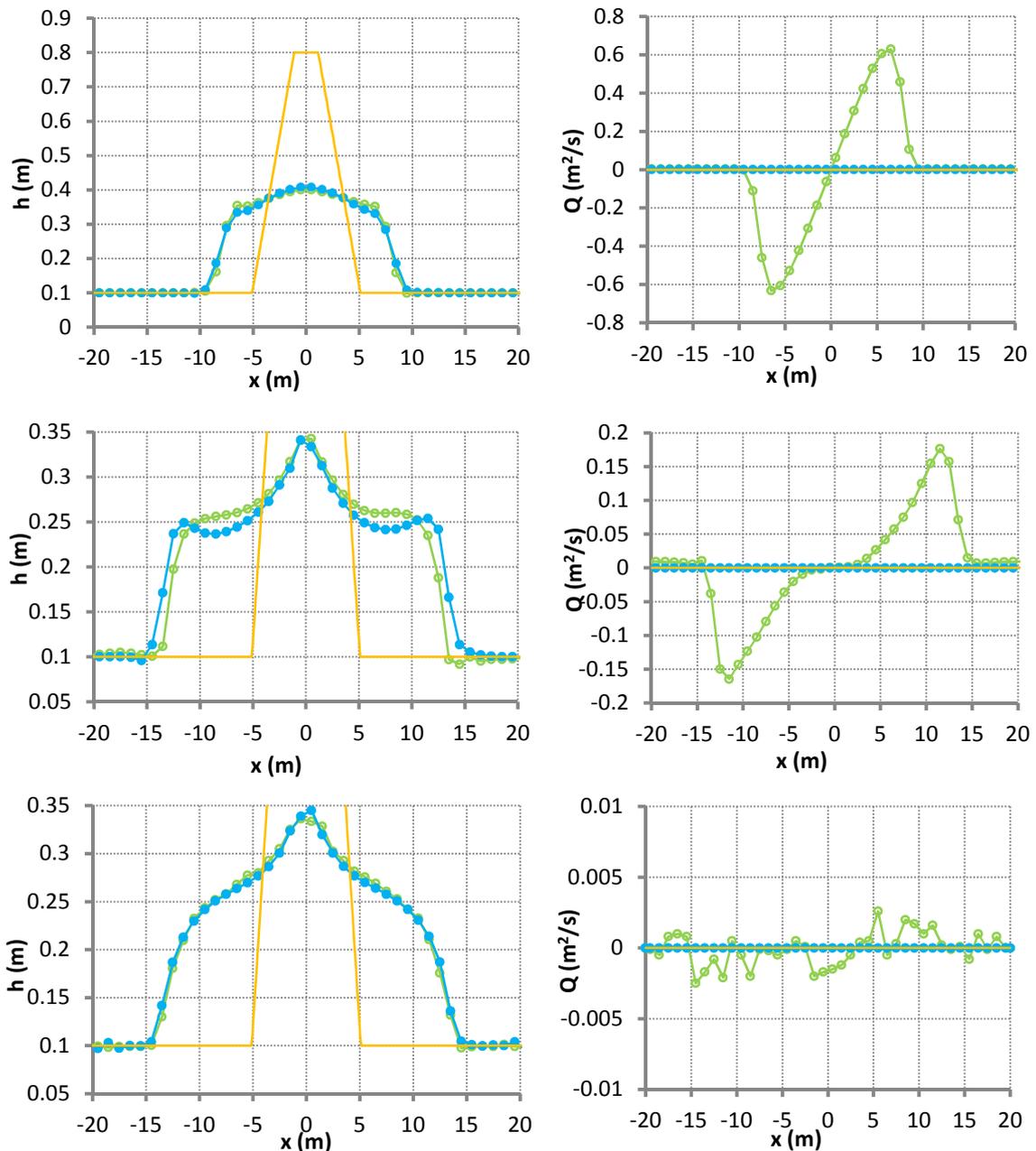


FIGURA 10. **SUPERFICIE LIBRE VARIABLE.** SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL CALADO (IZQUIERDA) Y CAUDAL (DERECHA) PARA $(\tau_b/P) = -0.1 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$, $\text{CFL}=0.1$ Y $T=2$ S (ARRIBA), $T=5$ S (CENTRAL), $T=10$ S (ABAJO). NIVEL SUPERFICIAL INICIAL (IZQUIERDA) Y CAUDAL INICIAL (DERECHA) (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS SIN CORREGIR EL TÉRMINO FUENTE DEBIDO A LA FRICCIÓN (—○—), Y CORREGIÉNDOLO (—●—).

Para un tiempo de 2 segundos (figura 10) puede observarse que el esfuerzo de fricción no puede soportar la columna de arena, ya que dicho esfuerzo tiene un valor pequeño ($0.1 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$). La variación de caudal cuando no se aplica corrección es simétrica y su signo depende del signo de las nuevas pendientes que se han formado en la superficie libre.

Cuando el tiempo de simulación es de 5 segundos, se comprueba que la superficie libre sigue sin estar en equilibrio. Nuevamente, cuando no se aplica corrección la variación del caudal es simétrica y depende del signo de las nuevas pendientes formadas en la superficie libre.

Finalmente, para un tiempo de 10 segundos, las columnas que se habían formado en los laterales de la superficie libre no pueden ser soportadas por el esfuerzo de la fricción y deslizan en busca de un estado de equilibrio. Para este tiempo sino se aplica corrección, el caudal oscila, indicando por tanto que no se ha conservado el signo, para una misma celda.

3.3 Caso numérico con fondo variable y superficie libre constante con fricción de Coulomb

En el caso realizado se ha introducido un fondo variable, $z(x)$, con un nivel superficial constante, $h+z=0.9$ m, para comprobar que dado que no actúa ninguna fuerza exterior sobre la superficie libre (sobre la superficie libre solo actúa la presión atmosférica), y la superficie libre está en reposo (su velocidad es cero), debe continuar en reposo.

$$z(x) = 0.0001x^2 + \cos\left(\frac{2\pi x}{50}\right) \quad (50)$$

Para ello se tiene un dominio de 100 m dividido en 1000 celdas con un, $\Delta x=0.1$ m. El tiempo de simulación ha sido de 10 segundos y el CFL utilizado ha sido de 0.5. La fricción que se ha incluido es de Coulomb, siendo el ángulo de fricción interno, $\theta_b=10^\circ$. Los resultados obtenidos se exponen en la siguiente figura.

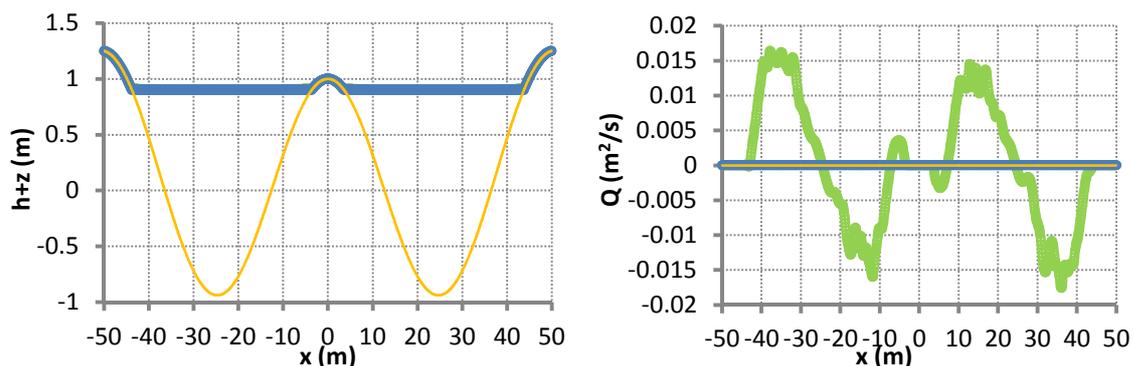


FIGURA 11. FONDO VARIABLE. SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL NIVEL SUPERFICIAL (IZQUIERDA) Y CAUDAL (DERECHA) PARA $\theta_b=10^\circ$, CFL=0.5 Y T = 10 S. FONDO VARIABLE (IZQUIERDA) Y CAUDAL INICIAL (DERECHA) (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS SIN CORREGIR EL TÉRMINO FUENTE DEBIDO A LA FRICCIÓN (—●—), Y CORREGIÉNDOLO (—●—).

A la vista de los resultados (figura 11) se demuestra que si se aplica corrección al término fuente debido a la fricción el estado de equilibrio que tenía inicialmente la superficie libre se conserva en el tiempo para todo el dominio. Sin embargo, como era de esperar, si no se aplica corrección la superficie no se encuentra en un estado de equilibrio, como se puede apreciar en la gráfica donde se representa el caudal. Sin corrección, el caudal varía según el signo de la pendiente del fondo.

3.4 Casos numéricos con fondo variable y superficie libre variable con fricción de Coulomb

En los casos numéricos realizados anteriormente, o bien el fondo, o bien el nivel superficial era constante a lo largo de todo el dominio. Para ver qué sucede cuando tanto como el fondo, como el nivel superficial son variables, se han realizado una serie de casos, con una fricción de tipo Coulomb, en los que se ha variado el ángulo de fricción interno, θ_b . El fondo variable se

modela de nuevo mediante la expresión (50). El dominio abarca una extensión de 100 m y se ha dividido en 1000 celdas de una longitud, $\Delta x=0.1m$. A continuación, se presentan los resultados de este estudio.

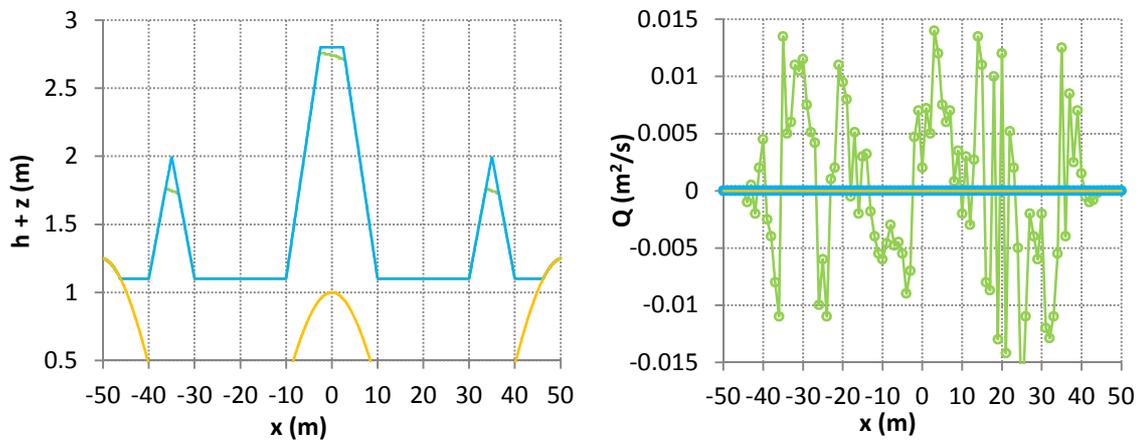


FIGURA 12. FONDO Y SUPERFICIE LIBRE VARIABLES. SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL NIVEL SUPERFICIAL (IZQUIERDA) Y CAUDAL (DERECHA) PARA $\theta_b=10^\circ$, CFL=0.5 Y T = 10 S. FONDO VARIABLE (IZQUIERDA) Y CAUDAL INICIAL (DERECHA) (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS SIN CORREGIR EL TÉRMINO FUENTE DEBIDO A LA FRICCIÓN (—), Y CORRIGIÉNDOLO (—).

Como se muestra en la figura 12, cuando el ángulo de fricción interno es de 10° ($\theta_b=10^\circ$), y se aplica corrección sobre la fricción, el esfuerzo realizado por la fricción es capaz de mantener la superficie libre en equilibrio, tal y como se encontraba en el instante inicial. Cuando no se aplica corrección, la parte superior de las tres columnas no puede soportarse y cambia respecto a la que había inicialmente, lo cual se manifiesta en las oscilaciones que sufre el caudal. Seguidamente, se presentan los resultados para un ángulo $\theta_b=45^\circ$.

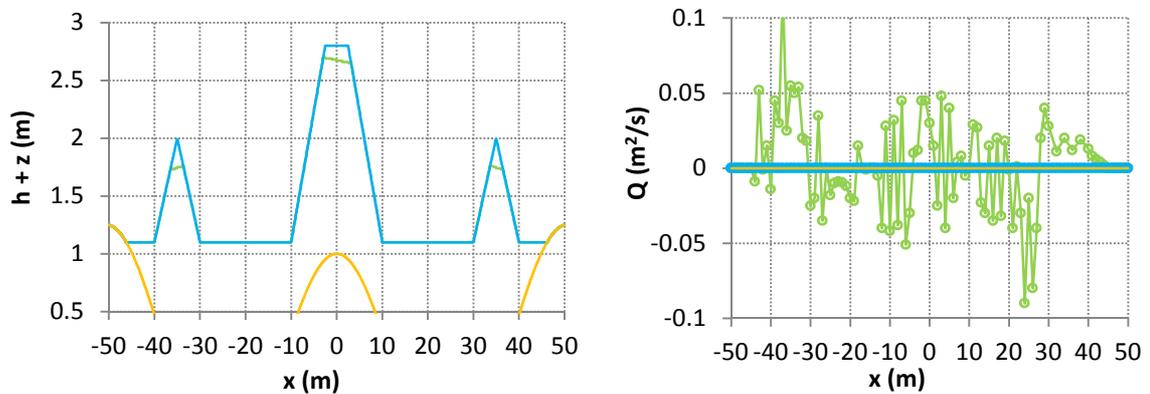


FIGURA 13. FONDO Y SUPERFICIE LIBRE VARIABLES. SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL NIVEL SUPERFICIAL (IZQUIERDA) Y CAUDAL (DERECHA) PARA $\theta_b=45^\circ$, CFL=0.5 Y T = 10 S. FONDO VARIABLE (IZQUIERDA) Y CAUDAL INICIAL (DERECHA) (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS SIN CORREGIR EL TÉRMINO FUENTE DEBIDO A LA FRICCIÓN (—), Y CORRIGIÉNDOLO (—).

En el caso de que el ángulo de fricción interno sea $\theta_b=45^\circ$, la solución obtenida (figura 13) sigue la misma tendencia que en el caso anterior, si no se aplica corrección la superficie libre que había inicialmente no conserva su equilibrio.

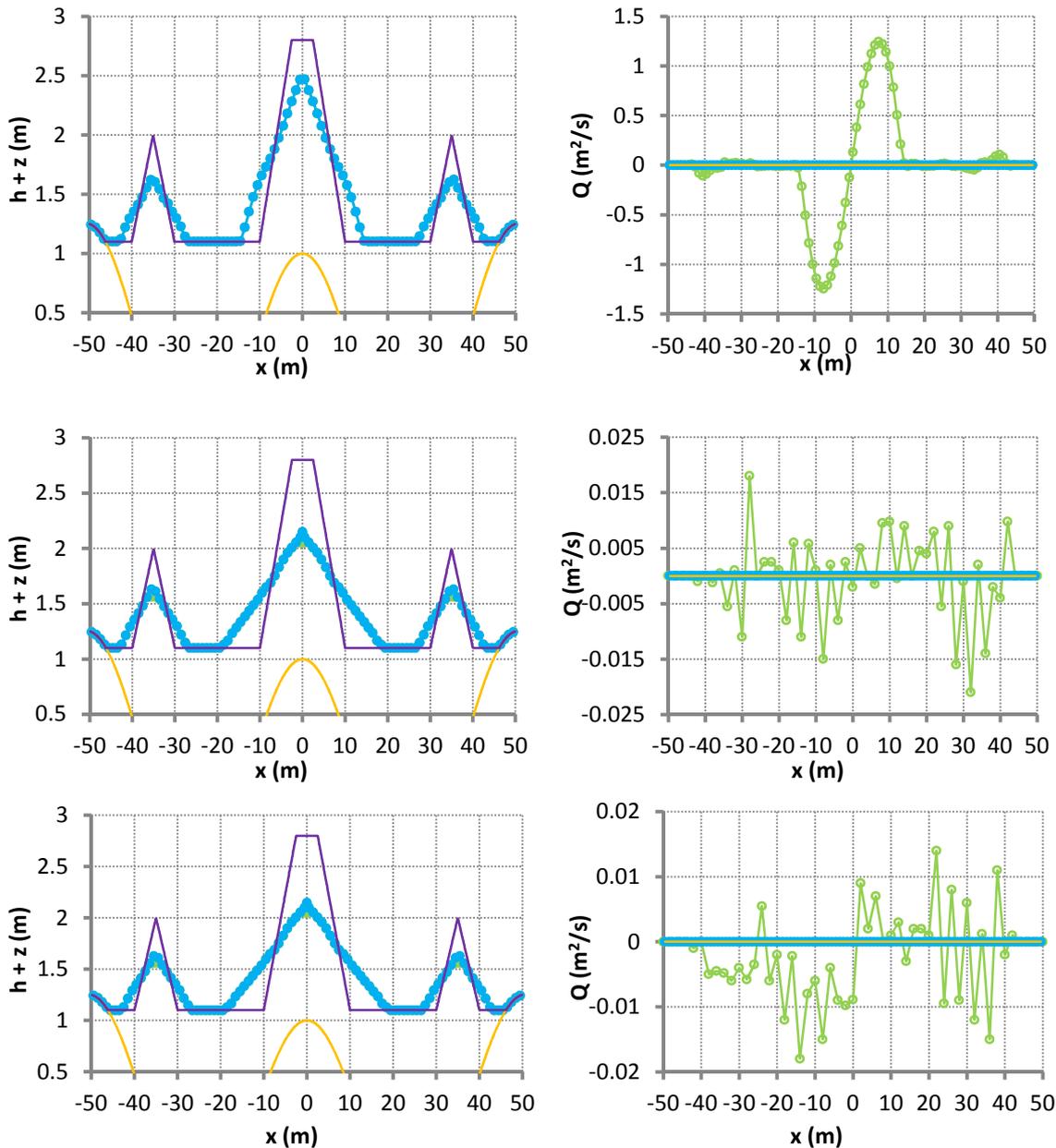


FIGURA 14. FONDO Y SUPERFICIE LIBRE VARIABLES. SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL NIVEL SUPERFICIAL (IZQUIERDA) Y CAUDAL (DERECHA) PARA $\theta_b=5^\circ$, CFL=0.1 Y PARA T=2 S (ARRIBA), T=5S (CENTRAL), T=10S (ABAJO). FONDO VARIABLE (IZQUIERDA) Y CAUDAL INICIAL (DERECHA) (—), NIVEL SUPERFICIAL INICIAL (—), SOLUCIONES NUMÉRICAS SIN CORREGIR EL TÉRMINO FUENTE DEBIDO A LA FRICCIÓN (—), Y CORREGIÉNDOLO (—•—).

En este caso numérico (figura 14) se reduce el ángulo de fricción interno hasta un valor, $\theta_b=5^\circ$. Para un tiempo de simulación de 2 segundos, se observa como los esfuerzos realizados por la fricción no son capaces de soportar el equilibrio en la superficie libre, ya que el ángulo que forma la superficie libre respecto al eje x , es mayor a θ_b . Para este tiempo, el caudal es simétrico y su signo depende de las nuevas pendientes que se han formado en las columnas de la superficie libre.

Para un tiempo de simulación de 5 segundos la superficie libre ha evolucionado hasta un estado de equilibrio, si se utiliza corrección, no sucediendo lo mismo sino se utiliza corrección, como se puede apreciar en la figura 14, donde se representa el caudal. Finalmente, para un tiempo de simulación de 10 segundos y utilizando corrección, se conserva el estado de equilibrio que se había alcanzado para el tiempo de simulación anterior.

3.5 Casos numéricos de rotura de presa con fondo plano y fricción de Coulomb

En esta sección se van a realizar tres casos diferentes que simulan la rotura de una presa. El dominio abarca una extensión de 100 m, que se ha dividido en 1000 celdas de $\Delta x=0.1\text{m}$, de forma que la compuerta está situada en la posición $x = 0 \text{ m}$. El tiempo de simulación será de 3 segundos, y en todos los casos en la parte izquierda del dominio se tiene un calado, $h_0=10\text{m}$, para $t=0\text{s}$.

La diferencia entre los tres casos, es que en el primero de ellos, el fondo es plano y no se incorpora fricción; en el segundo, el fondo es una pendiente constante de 10° y no se incorpora fricción; y en el tercero, el fondo nuevamente es una pendiente constante de 10° , pero se incorpora fricción de tipo Coulomb. Las soluciones numéricas se compararán con las soluciones exactas que se obtienen de la expresión que se presentan a continuación [2], la cual permite obtener la solución exacta a un problema de rotura de presa.

$$H(X, t) = \frac{h_0}{9} \left(2 - \frac{X}{t\sqrt{gh_0}} \right)^2, \quad \text{con } X = x - g \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dx} + \cos \theta \tan \theta_b \right) t^2 \quad (51)$$

A continuación se presentan los resultados de dichos casos, junto con su solución exacta representada, obtenida según (51).

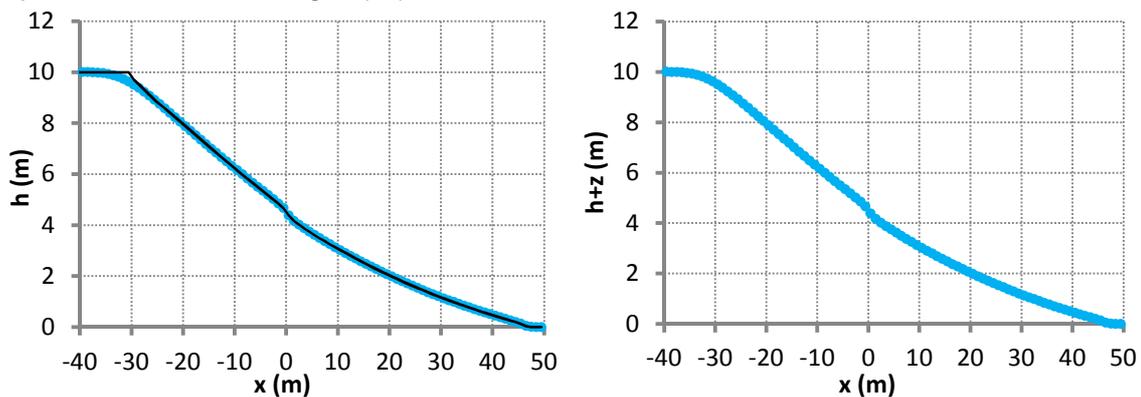


FIGURA 15. ROTURA DE PRESA CON FONDO PLANO Y FRICCIÓN DE COULOMB. CASO 1: FONDO PLANO, SIN FRICCIÓN, $T=3\text{s}$. SOLUCIÓN EXACTA (---), SOLUCION NUMÉRICA (—).

En la figura 15, se observa como se observa en la solución tras la rotura de la compuerta de la presa para un instante de tiempo posterior a $t=0\text{s}$ se produce un desbordamiento en la posición $x = -30\text{m}$. Como en este caso el fondo es plano, la gráfica donde se representa el calado coincide con la gráfica donde se representa el calado más la altura del fondo.

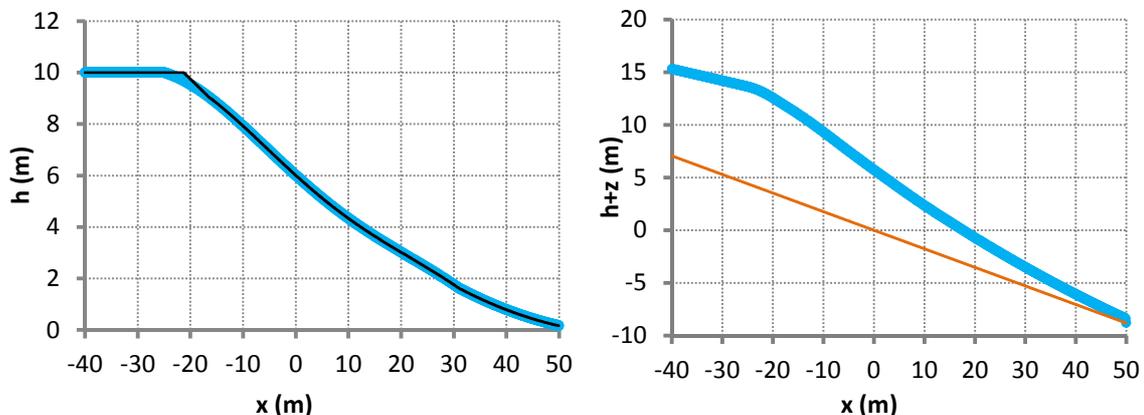


FIGURA 16. ROTURA DE PRESA CON FONDO PLANO Y FRICCIÓN DE COULOMB. CASO 2: FONDO PENDIENTE CONSTANTE DE 10° , SIN FRICCIÓN, $T=3\text{s}$. SOLUCIÓN EXACTA (---), SOLUCION NUMÉRICA (—), FONDO (—).

En el segundo caso (figura 16), la presencia de un fondo de pendiente constante, causa que el desbordamiento se produzca en la posición $x = -20\text{m}$, respecto a la posición $x=-30\text{m}$ para el que se desbordaba en el caso 1. Esto es debido a que en este caso el fondo no es plano, por lo que el nivel superficial aumenta, como se puede apreciar en la gráfica de la derecha.

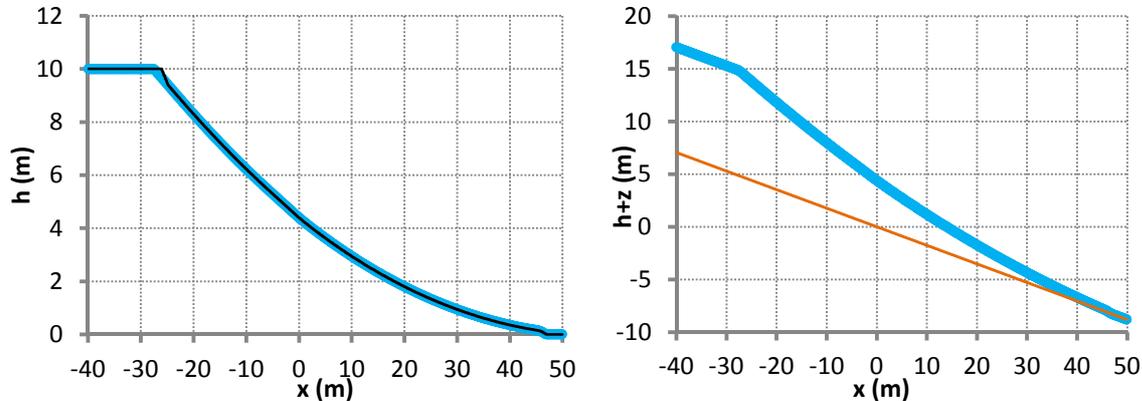


FIGURA 17. ROTURA DE PRESA CON FONDO PLANO Y FRICCIÓN DE COULOMB. CASO 3: FONDO PENDIENTE CONSTANTE DE 10° , CON FRICCIÓN DE COULOMB ($\theta_b=8^\circ$), $T=3\text{S}$. SOLUCIÓN EXACTA (—), SOLUCION NUMÉRICA (---), FONDO (—).

En el tercer y último caso (figura 17), en la gráfica donde se representa el calado más la altura del fondo, se puede observar en la posición $x = -25\text{m}$ una elevación en la superficie libre respecto al caso 2, la cual es debida a la incorporación de la fricción.

3.6 Caso de laboratorio: Experimento de Dressler

En los casos numéricos realizados hasta el momento, la fricción que se había modelado era de tipo Coulomb. Para observar cómo se comporta el esquema numérico ante otros tipos de fricción se va a realizar un caso numérico, basado en el experimento de Dressler [14], en el que se incorporará fricción turbulenta (33).

El experimento de Dressler consistió en simular en un laboratorio la rotura de una presa sobre un fondo plano y rugoso, el cual construyó con papel de lija. La altura de la superficie libre de la columna de agua en la parte izquierda del dominio, aguas abajo de la compuerta, era de $h_0=0.11\text{m}$, y la rugosidad del suelo se modeló con un coeficiente de Manning, $n=0.0058 \text{ s}^2\text{m}^{-2/3}$. Para obtener la solución numérica se ha dividido el dominio en 1000 celdas de longitud $\Delta x=0.1\text{m}$, y $\text{CFL}=1$.

A continuación, se presentan los resultados de las soluciones numéricas proporcionadas con la herramienta de simulación, junto con las que obtuvo Dressler en el experimento, así como la solución exacta del problema de rotura de presa sin fricción obtenida mediante (51). Para observar mejor el efecto que provoca la rugosidad, los resultados se representan con el ratio h/h_0 , frente al ratio x/t (velocidad).

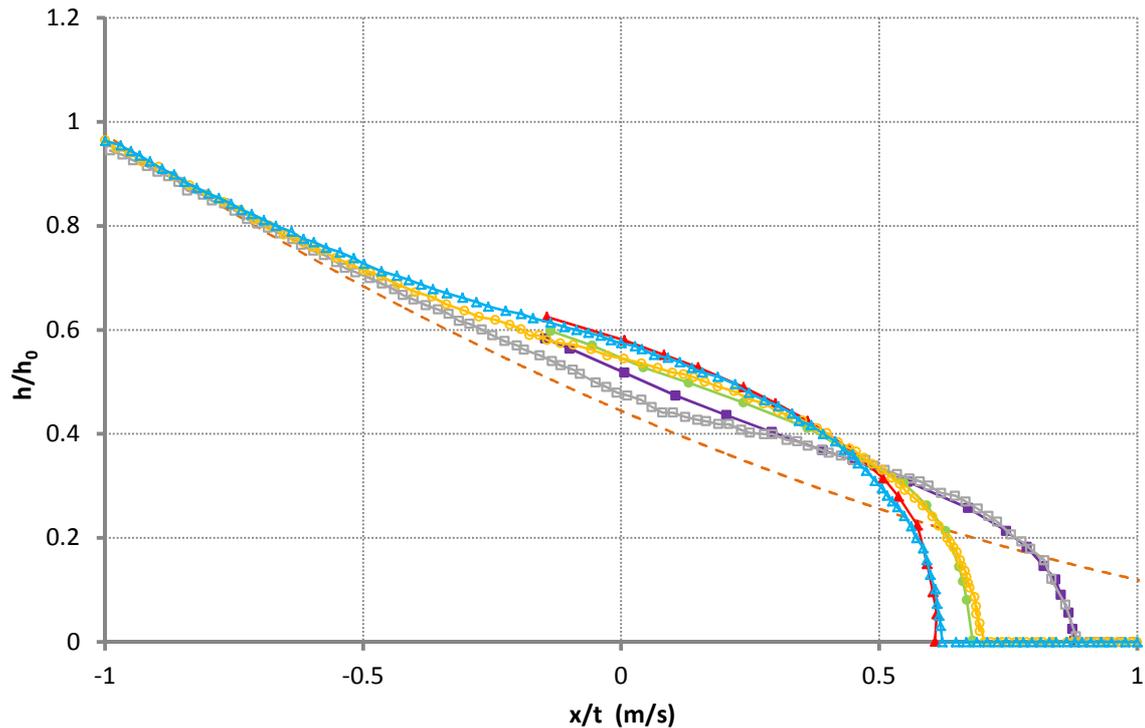


FIGURA 18. **CASO DE LABORATORIO: EXPERIMENTO DE DRESSLER.** SOLUCIÓN EXACTA PROBLEMA DE ROTURA DE PRESA SIN FRICCIÓN (---), DATOS EXPERIMENTALES (—■—) Y SOLUCIÓN NUMÉRICA (—□—) PARA T=46S, DATOS EXPERIMENTALES (—●—) Y SOLUCIÓN NUMÉRICA (—○—) PARA T=140S, DATOS EXPERIMENTALES (—▲—) Y SOLUCIÓN NUMÉRICA (—△—) PARA T=218S,

A la vista de los resultados (figura 18), se puede observar como con la solución exacta que no incorpora fricción se alcanza una velocidad mayor, mientras que tanto los resultados experimentales, como las soluciones numéricas, presentan una velocidad menor. Esto es debido a que la rugosidad del fondo, frena el frente del flujo disminuyendo su velocidad, y causando una elevación característica en la superficie libre que refleja lo que sucede en la realidad. Cuanto mayor es el tiempo de simulación, menor es la velocidad del frente del flujo.

Por otro lado, cabe destacar que las tres simulaciones numéricas son muy parecidas a sus respectivos resultados experimentales obtenidos por Dressler, de forma que la concordancia entre solución numérica y datos experimentales es mayor, cuanto mayor es el tiempo de simulación.

4 Mejoras realizadas y futuras

En esta sección se van a exponer algunas mejoras que se han aplicado a la herramienta de simulación de flujos granulares, y otras que podrían implementarse en un futuro. Entre las mejoras realizadas, se encuentra la adición de una onda adicional que permita captar la onda de rarefacción formada cuando el flujo es transcrito; o un tratamiento de gravedad más cuidado.

4.1 Flujo transcrito

Cuando el flujo es transcrito se produce una rarefacción, que para poder captarla en la solución es necesario aplicar el principio de Harten-Hyman [4,9]. Este procedimiento consiste en descomponer el valor propio, $\tilde{\lambda}^1$ ó $\tilde{\lambda}^2$, en dos nuevos valores propios, $\tilde{\lambda}_{1L}$ y $\tilde{\lambda}_{1R}$, dependiendo de si la rarefacción se produce en el lado izquierdo o derecho de la celda. Para una rarefacción producida en el lado izquierdo, como se muestra en la figura 19, se aplican las expresiones expuestas a continuación.

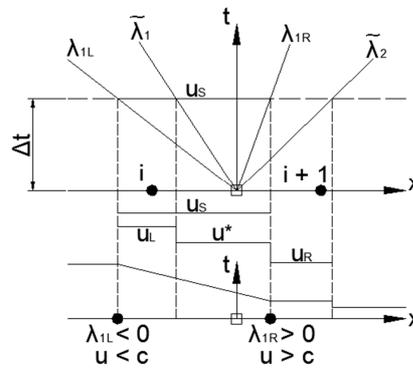


FIGURA 19. RAREFACCIÓN PRODUCIDA POR FLUJO TRANSCRITO.

La descomposición del valor propio se realiza siguiendo el procedimiento recogido en las siguientes expresiones.

$$\tilde{\lambda}^1 = \tilde{\lambda}^1 + \hat{\lambda}^1, \quad \text{con } \tilde{\lambda}^1 < 0 \text{ y } \hat{\lambda}^1 > 0 \quad (52)$$

$$\tilde{\lambda}^1 = \lambda_{1L} C1 = \lambda_{1L} \frac{(\lambda_{1R} - \tilde{\lambda}^1)}{(\lambda_{1R} - \lambda_{1L})} \quad \hat{\lambda}^1 = \lambda_{1R} C2 = \lambda_{1R} \frac{(\tilde{\lambda}^1 - \tilde{\lambda}_{1L})}{(\lambda_{1R} - \lambda_{1L})} \quad (53)$$

$$\lambda_{1L} = u_i - c_i < 0 \quad \lambda_{1R} = u_{i+1} - c_{i+1} > 0 \quad (54)$$

Seguidamente, el coeficiente, β^1 , se descompone en dos nuevos coeficientes según la siguiente expresión, pero eso puede hacer que los nuevos coeficientes sean mucho mayores a, β^1 , llevando a resultados erróneos.

$$\tilde{\beta}^1 = \bar{\beta}^1 + \hat{\beta}^1, \quad \text{con } \bar{\beta}^1 = \beta^1 \frac{\tilde{\lambda}^1}{\tilde{\lambda}^1} \text{ y } \hat{\beta}^1 = \beta^1 \frac{\hat{\lambda}^1}{\tilde{\lambda}^1} \quad (55)$$

Como bajo estas condiciones la velocidad de propagación, $\tilde{\lambda}^1$, es casi nula se puede aplicar la siguiente expresión.

$$\bar{\beta}^1 = \beta^1 \quad \hat{\beta}^1 = 0 \quad (56)$$

4.2 Tratamiento de las fuerzas gravitacionales

Hasta ahora la gravedad se ha tratado de forma que independientemente de la geometría del fondo actuaba en la dirección z. Cuando el fondo sea plano, aunque tenga diferentes niveles, esto es correcto; sin embargo ante un fondo variable con una o diferentes pendientes no es correcto realizar ese tratamiento de la gravedad, es necesario descomponerla en los ejes x y z. Esto abre la posibilidad de trabajar con un sistema de coordenadas en ejes locales o globales (figura 20).

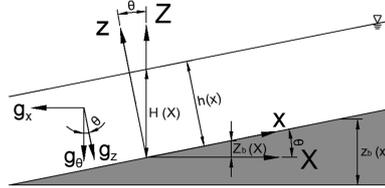


FIGURA 20. COMPARACIÓN ENTRE COORDENADAS LOCALES Y GLOBALES.

Si se trabaja con un sistema de coordenadas globales aparecería un nuevo término fuente. Como los casos que se han calculado con la herramienta de simulación en fondo es una pendiente constante es más sencillo trabajar con un sistema de coordenadas locales. Para un sistema de coordenadas locales la ecuación del momento en x se modifica, y la gravedad se descompone en la contribución correspondiente a los ejes x y z, [5,7].

$$\text{Momento en dirección } x: \quad \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{1}{2} g_{\theta} h^2 \right) = \frac{p_b}{\rho} - \frac{\tau_b}{\rho} \quad (57)$$

$$g_{\theta} = \begin{pmatrix} g_x \\ g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \sin \theta \\ g \cos \theta \end{pmatrix} \quad (58)$$

Dado que en los términos fuente aparecía la gravedad es necesario aplicar la componente adecuada a cada término. Al término fuente debido a la presión ejercida sobre el fondo se le aplica la componente z de la gravedad, y al término debido a la fricción sobre el fondo la componente x.

$$S_b^a = \left(\frac{p_b}{\rho} \right)_{i+1/2}^a = -g_z \tilde{h} \frac{\partial z}{\partial x} = -g_z (\tilde{h} \delta z)_{i+1/2} \quad (59)$$

$$S_{tur} = \left(\frac{\tau_b}{\rho} \right)_{i+1/2} = -g_x (\tilde{h} S_f)_{i+1/2} \Delta x \quad S_{cou} = \left(\frac{\tau_b}{\rho} \right)_{i+1/2} = -g_x \tilde{h} |\cos \theta_{i+1/2}| \tan \theta_b \quad (60)$$

4.2.1 Caso de laboratorio

En esta sección se va a simular un caso de laboratorio [1], para comparar la solución numérica proporcionada por la herramienta programada, con los resultados experimentales. El experimento de laboratorio consistía en hacer deslizar por una rampa, de una inclinación de 30° ($\theta=30^\circ$), una gran cantidad de esferas de vidrio de pequeño diámetro.

Estas esferas de vidrio estaban contenidas en la parte superior de la rampa, y tras accionar una trampilla salían súbitamente rodando. Las pequeñas esferas de cristal que simulan un medio granular, cuyo fluido intersticial es el aire, tenían un diámetro entre 600µm y 800 µm, y su ángulo de rozamiento interno era, $\theta_b=32^\circ$. A continuación, se presentan los resultados obtenidos en la figura 21.

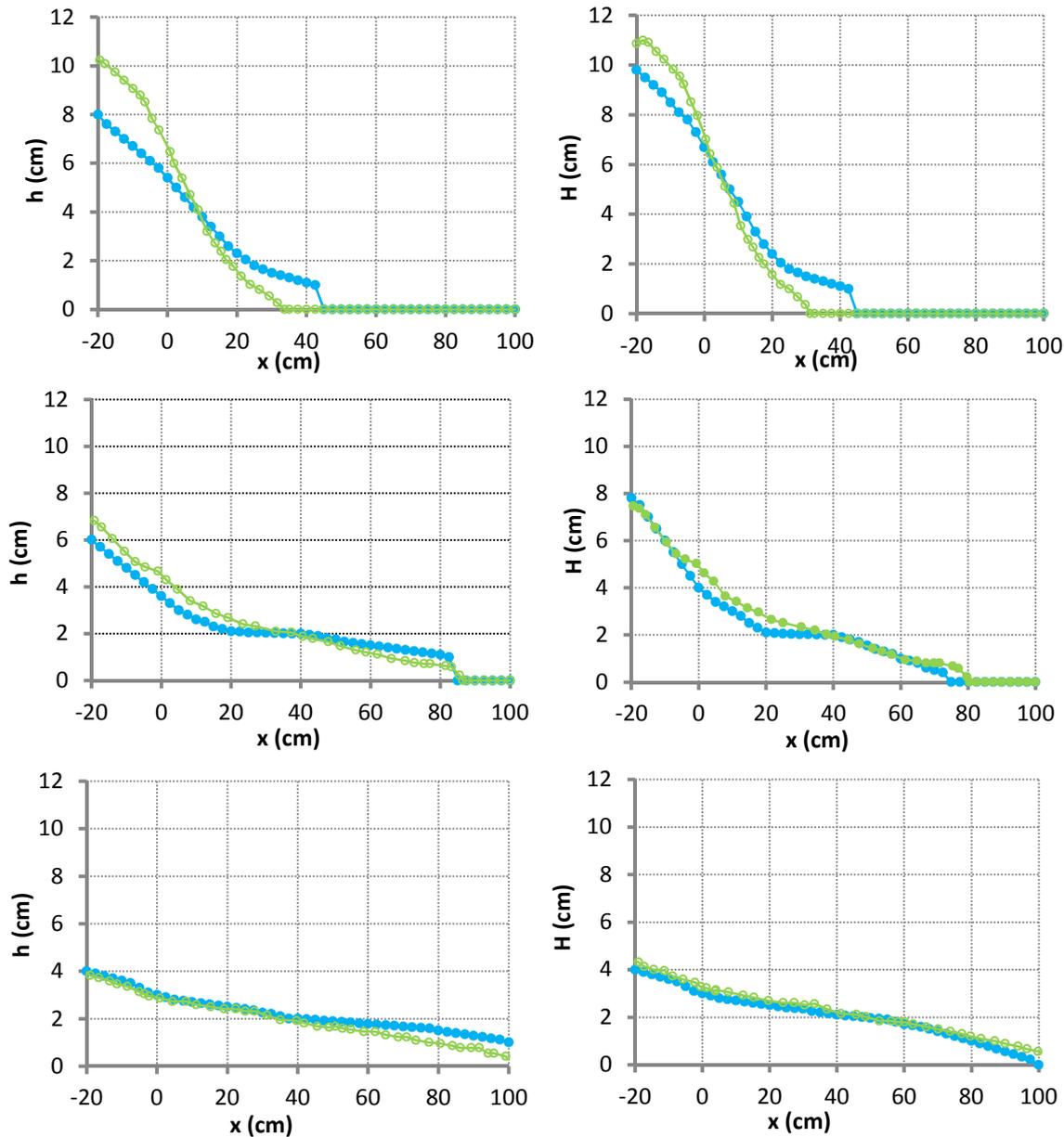


FIGURA 21 CASO DE LABORATORIO. CALADO (IZQUIERDA), ALTURA TOTAL (DERECHA). SOLUCION NUMÉRICA (—●—), DATOS EXPERIMENTALES (—○—). PARA $T = 0.32$ S (ARRIBA), $T = 0.8$ S (CENTRAL), $T = 2.3$ S (ABAJO).

Para un tiempo de 0.32 segundos la solución numérica difiere ligeramente de los resultados experimentales, sin embargo, para un tiempo de 0.8 segundos y 2.3 segundos la solución numérica proporciona unos resultados excelentes. La solución numérica se parece más a los datos experimentales cuanto mayor es el tiempo de simulación.

4.3 Mejoras futuras

En el Trabajo Final de Grado se han incluido la fricción de tipo Coulomb, y la fricción turbulenta; sin embargo existen diferentes tipos de fricción que modelan la resistencia de un flujo sobre el fondo. Dado que un flujo granular reúne partículas sólidas con un fluido intersticial, la resistencia que presentan a fluir las partículas y el fluido intersticial, no puede ser del mismo tipo. Es por esto, por lo que una posible mejora futura que podría aplicarse a la herramienta de simulación sería introducir diferentes tipos de fricción, e incluso combinaciones de ellas.

4.3.1 Otros tipos de fricción

A continuación, se van a presentar diferentes tipos de fricción que sería posible incorporar, como son la fricción viscosa, o la fricción cortante.

- **Fricción viscosa (τ_μ)**

Como se puede observar en la siguiente expresión, la fricción viscosa característica de un fluido newtoniano, depende de la viscosidad dinámica del fluido, de la velocidad longitudinal promedio, y del calado.

$$\tau_\mu = \mu \left(\frac{\tilde{u}}{h_{max}} \right), \quad \text{con } h_{max} = \max(h_i, h_{i+1}) \quad (61)$$

- **Fricción cortante (τ_y)**

Este tipo de fricción asume que hasta que no se supera un cierto nivel umbral de tensión cortante sobre la superficie libre del fluido, éste no empieza a deformarse, y por tanto, hasta entonces no comienza a fluir.

4.3.2 Combinaciones de diferentes tipos de fricción

En la siguiente tabla se recogen diferentes posibilidades de combinar diferentes tipos de fricción [12], de forma que en la primera columna se presenta cada combinación, y en la segunda columna se presenta la formulación de cada combinación.

Combinación	Formulación
Bingham simplificado	$\tau_b = 1.5\tau_y + 3\tau_\mu$
Turbulenta y Coulomb	$\tau_b = \tau_{tur} + \tau_{Cou}$
Turbulenta y umbral	$\tau_b = \tau_{tur} + \tau_y$
Turbulenta, Coulomb y umbral	$\tau_b = \tau_{tur} + \min(\tau_{Cou}, \tau_y)$
Cuadrática	$\tau_b = \tau_{tur} + \tau_y + \frac{\kappa}{8}\tau_\mu, \text{ con } \kappa = 24$

TABLA 1. COMBINACIONES POSIBLES DE DIFERENTES TIPOS DE FRICCIÓN.

5 Conclusiones

Se han cumplido los objetivos de este proyecto, obteniéndose finalmente una herramienta de simulación de flujos granulares, que permite caracterizar dichos flujos ante diferentes situaciones. Para comenzar, el estudio de la ecuación escalar sin término fuente, y su implementación en un código, permitió resolver casos muy sencillos, consiguiendo familiarizarse con un esquema numérico sencillo, y con el método de los volúmenes finitos.

Seguidamente, se implementó un código, que permitió estudiar y trabajar con la ecuación de Burgers con término fuente debido a la presión ejercida sobre el fondo. Con este código se realizaron casos numéricos del problema de una rotura de presa, lo cuales sirvieron para ver que es necesario generar una serie de controles en el código implementado, para evitar la aparición de valores negativos de la variable escalar, u ; y un control del paso de tiempo, que evite que sea demasiado grande, para que los problemas de Riemann de celdas consecutivas no interaccionen entre sí. Por otro lado, quedó clara la importancia del enfoque utilizado en la implementación del término fuente en los resultados, de forma que el que proporcionaba unos resultados más cercanos a la solución exacta fue el enfoque, que se obtenía asegurando el equilibrio de la fuerza generada por la presión hidrostática sobre el fondo (S^a).

Como se ha comentado, el estudio de la ecuación de Burgers permitió observar la importancia de realizar controles sobre la herramienta de simulación final para predecir el comportamiento de flujos granulares, lo cuales pueden describirse mediante el sistema de ecuaciones de las aguas poco profundas.

Para evitar una fricción excesiva, que cambie el signo del caudal que entra por la pared de una celda y sale por la otra pared de la misma celda, ha sido necesario controlar el término fuente debido a la presión ejercida sobre el fondo, S_f ; controlando para ello el valor del coeficiente, β_s .

Por otro lado, se ha visto la importancia de controlar el paso de tiempo, cuando el flujo es subcrítico ($\tilde{\lambda}^1 \tilde{\lambda}^2 < 0$), ya que el término fuente puede afectar en la actualización del valor promedio de cada celda, apareciendo en la solución valores de calado negativos. Para solucionar este hecho, se han definido los pasos de tiempo, Δt^* y Δt^{**} , que aseguren que los valores de calado intermedio, h^* y h^{**} , de la solución sean siempre positivos. Los pasos de tiempo, Δt^* y Δt^{**} , pueden volverse excesivamente pequeños, lo cual puede generar inestabilidades. Para solucionar este hecho, ha sido necesario controlar el valor de los coeficientes, β^1 y β^2 , en función del signo de los estados intermedios, h^* y h^{**} , y del paso de tiempo.

Además, se ha visto de nuevo, la influencia que tiene el enfoque tomado del término fuente en los resultados finales. El enfoque del término fuente debido a la presión ejercida sobre el fondo que ha proporcionado unas soluciones numéricas más cercanas a las exactas, ha sido el enfoque, S^c , el cual era una combinación de los dos primeros enfoques estudiados (S^a y S^b). Sin embargo cuando se pasa de una celda mojada a otra seca, el mejor enfoque es el, S^{cw} , el cual es el enfoque, S^c , dotando a la celda seca del comportamiento de una pared sólida real.

Finalmente, la incorporación del término fuente debido a la fricción ejercida sobre el fondo, ha permitido simular numéricamente casos de laboratorio, en los que los resultados numéricos obtenidos han sido muy parecidos a los experimentales, quedando demostrado que la herramienta de simulación proporciona una predicción numérica realista antes diferentes situaciones.

Bibliografía

- [1] A. Mangeney, O. Roche, O. Hungr, N. Mangold, 795 G. Faccanoni, A. Lucas, J. of Geophysical research 115 (2010).
- [2] A. Ritter, Die Fortpflanzung der Wasserwelle, Vereine Deutscher Ingenieure Zeitschrift 36 (1892) 947–954.
- [3] E.F. Toro. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. Springer, Berlin (1997).
- [4] E.F. Toro. Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows. Wiley, New York, (2001).
- [5] C.Juez, J.Murillo, P.García-Navarro. 2D simulation of granular flow over irregular steep slopes using global and local coordinates. Journal of computational physics 255 (2013) 166–204.
- [6] G. Watson, D.H. Peregrine, E.F. Toro, Numerical solution of the shallow water equations on a beach using the weighted average flux method (1992).
- [7] M.E. Vázquez-Cendón. Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry. Journal of Computational Physics 148, 497–498, 1999.
- [8] M.L. Muñoz, C.Parés. Sobre el método de Godunov para sistemas hiperbólicos no conservativos. XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones. Sevilla, 24-28 septiembre 2007. Método de Godunov
- [9] J. Burguete, J. Murillo, P. García-Navarro. Time Step Restrictions For Well Balanced Shallow Water Solutions In Non-Zero Velocity Steady States. International Journal of Numerical Methods in Fluids 56, 661–686, 2008. Harte-Hyman entropy
- [10] J.Murillo, P.García-Navarro. Finite volumes for the simulation of unsteady shallow water flows. XVIII International conference of water resources (2010).
- [11] J.Murillo, P.García-Navarro. Wave Riemann description of friction terms in unsteady shallow flows: Application to water and mud/debris floods. Journal of computational physics 231 (2012) 1963-2001.
- [12] J.Murillo, P.García-Navarro. Weak solutions for partial differential equations with source terms: application to the shallow water equations (2009).
- [13] P.L. Roe. A basis for Upwind Differencing of the Two-Dimensional Unsteady Euler Equations. Numerical Methods in Fluid Dynamics, Vol II. Oxford University Press, Oxford, 1986.
- [14] R.F. Dressler, Comparison of theories and experiments for the hydraulic dam-break wave, Int. Assoc. Sci. Hydrol. 3 (1954) 319–328.
- [15] White F.M (2008) Mecánica de fluidos. McGraw-Hill.

